

## ANEXOS

# ANEXO I

## Comprobación de deslizamiento en la superficie de contacto

Se parte de una situación en la que la fuerza normal a la superficie de contacto permanece constante, y la transversal es variable y sigue una evolución como la marcada en la figura 1.1 (Capítulo 1).

En esta situación se parte de la premisa de que no existe deslizamiento. Como consecuencia de ello, el desplazamiento tangencial presenta el comportamiento de sólido rígido, y por tanto el problema queda reducido al estudio de unas cuantas situaciones:

- En la superficie de contacto:
  - Tensiones normales (en dirección  $x$  e  $y$ ) nulas;
  - Tensión tangencial constante;
- En el resto de la superficie del cuerpo plano:
  - Tensiones normales (en toda dirección) nulas;

Consecuentemente, la solución en términos de tensión tangencial presenta dos características diferenciales:

- axisimetría ;
- crecimiento desmedido conforme nos acercamos al borde de la zona de contacto.

Debido a esta última, el deslizamiento vendría acompañado de fuerzas tangenciales y en ausencia de deslizamiento (premisa de partida), serían necesarias fuerzas de tracción infinitas.

Por otro lado, suponiendo la existencia de deslizamiento y al mismo tiempo suponiendo que éste se inicie en el borde de la zona de contacto (en vista del resultado anterior –sin deslizamiento– de tracción tangencial infinita) y que continúe progresivamente hacia su interior, podemos obtener algunas conclusiones adicionales.

- En vista de la simetría radial de la tensión tangencial obtenida en el desarrollo anterior (sin deslizamiento), cabe esperar que el deslizamiento ocurra en un anillo: el anillo de deslizamiento.
- Se asume que las tracciones tangenciales de dicho anillo está orientadas según la fuerza tangencial  $T$ , con valor:  $\tau = \mu \cdot \sigma$ , donde  $\mu$  es el una constante de fricción.

- Como consecuencia de la simetría, se tiene un desplazamiento tangencial constante en la zona de contacto sin deslizamiento (interior del anillo), con lo que se modifican las condiciones de contorno del problema:
  - En la zona de adherencia:
    - Desplazamiento tangencial;
    - Tensión normal.
  - En la zona (anillo) de deslizamiento:
    - Tensión tangencial:  $\tau = \mu \cdot \sigma$
    - Tensiones normales nulas (fuera del contacto)
    - Tensión normal (en dirección  $z$ ) nula.

## Anexo II

### Implementación de los criterios de iniciación

En este anexo se pretende describir la forma en que se aplican los criterios de iniciación expuestos en el Capítulo 4. Sin hacer referencia a términos informáticos, pero con vistas a la implementación en un algoritmo repetitivo, los criterios deben adaptarse para favorecer dicha implementación. Esta adaptación se realiza sobre el método de cálculo y no sobre el concepto del criterio.

#### Criterio de McDiarmid

En la búsqueda del máximo de la tensión equivalente de McDiarmid se procede en el orden siguiente:

- Búsqueda del plano de máximo rango de variación de la tensión tangencial.
- Una vez encontrado, se calcula la tensión normal máxima asociada a dicho plano.
- Se aplica el criterio siguiendo la expresión (4.3)

Hasta ahora no parece identificable la diferencia entre el método propuesto en el Capítulo 4 y el presente, pero se ruega al lector que no pierda el afán por continuar para encontrarla.

Paso 1: Búsqueda del plano de máximo rango de variación de la tensión tangencial.

Se plantea la siguiente situación: supóngase que se desea aplicar el criterio de McDiarmid sobre una línea en lugar de sobre un único punto (la línea se puede considerar una sucesión de puntos, con lo que el procedimiento no varía en tal caso). En cada punto de la línea está definido el tensor de tensiones en una orientación determinada según las expresiones del Capítulo 3; sea dicha orientación asignada al valor de referencia a partir del cual se medirá un ángulo  $\alpha$ .

Según el procedimiento descrito en el Capítulo 3 deberíamos calcular las tensiones principales en cada punto para poder obtener las máximas tensiones tangenciales o el rango en el que varían; ello conlleva la resolución de un problema de autovalores y autovectores que, de todos es sabido, entraña bastante complejidad por la multitud de situaciones que deben resolverse de forma independiente, y eso para cada uno de los puntos a lo largo de la

línea. La implementación de un algoritmo que efectúe este cálculo resulta bastante tedioso por la cantidad de consideraciones que deben realizarse. Sin embargo, si modificamos nuestra forma de proceder, el coste de implementación se ve afectado de forma muy favorable. Si en lugar de obtener autovalores y autovectores (tensiones y direcciones principales –al fin y al cabo–), se toma en cada punto y se obtiene el rango de variación de la tensión tangencial para un conjunto de valores del ángulo  $\alpha$  (que mide la orientación del tensor de tensiones a partir de la dirección de partida), y se calcula el máximo, se está obteniendo el mismo resultado que con el procedimiento anterior, o al menos un valor bastante cercano<sup>33</sup>.

El conjunto de valores del ángulo barrido no debe ser completo, ya que si se aplica, el lector comprenderá que las tensiones tangenciales son iguales dos a dos y a  $90^\circ$ , luego ya es suficiente con estudiar los ángulos entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . En la figura II.1 se muestra un dibujo clásico de la Teoría de la Elasticidad; se trata de los planos en los que actúan las máximas tensiones tangenciales, puede comprobarse que actúan a  $45^\circ$  medidos a partir de las direcciones principales. Con esta figura se pretende ilustrar al lector acerca de la afirmación realizada.

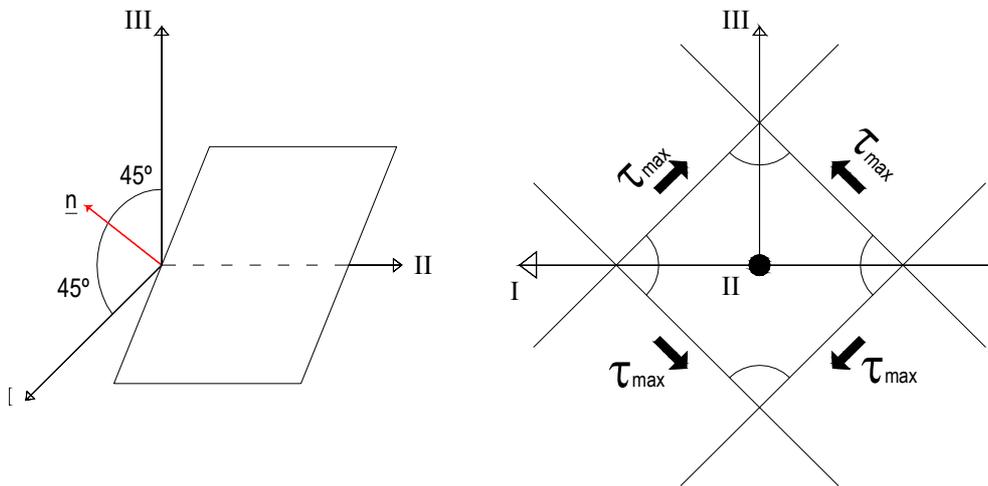


Figura II.1: Planos de máxima tensión tangencial.

Paso 2: Cálculo de la tensión normal máxima.

---

<sup>33</sup> Errores debidos en primer lugar a que no se calculan todas las posibles orientaciones que puede tomar el tensor de tensiones (de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  de forma continua); y en segundo lugar, pueden cometerse errores numéricos en la implementación del algoritmo.

A tenor del paso anterior, se tiene un cierto ángulo  $\alpha_{\max}$  para el que el rango de variación de tensiones tangenciales es máximo ( $\Delta\tau_{MAX}$ ). A partir de este dato, el cálculo de la máxima tensión normal es bastante sencillo.

Para cada uno de los estados extremos del ciclo de carga (por ejemplo, estados A y B) se calculan las tensiones normales asociadas a los planos dados por los ángulos  $\alpha_{\max}$  y  $(\alpha_{\max} + 90)$ , de manera que se puedan comparar entre sí todas las posibles combinaciones que aparecen en figura II.1. La tensión máxima será el máximo de entre los cuatro casos analizados.

### Paso 3: Aplicación del criterio

Se aplica la expresión dada por [4.3] con los resultados de los pasos anteriores. El resultado es directamente la tensión equivalente de McDiarmid.

### Criterio Smith-Watson-Topper

Del mismo modo que con el criterio de McDiarmid, para calcular las deformaciones principales (o el rango de variación de las mismas) debe resolverse un problema de autovalores y autovectores, con los inconvenientes que ya se han comentado.

En lugar de eso, se calcula el máximo del producto en cada punto en que se esté interesado (por ejemplo, a lo largo de una línea como en el caso del criterio anterior) en un conjunto de ángulos. En esta ocasión este conjunto está formado por ángulos entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , que abarcan las posibles combinaciones de tensión y rango de deformaciones. De igual forma, la precisión del cálculo depende, en parte, de la división de dicho conjunto en “saltos” más pequeños.

Tras obtenerle máximo del producto, se aplica el criterio definido a través de la expresión (4.9).

### Criterio de Crossland

Sobre este criterio no hay nada más que explicar que lo expuesto en el Capítulo 4. Téngase en cuenta que se obtiene de la aplicación directa de las tensiones en cada punto de cálculo, y que por tanto no requiere de cálculos previos.

## Anexo III

### Ideas fundamentales de la Mecánica de la Fractura

#### Elástica Lineal (LEFM)

En este anexo se definen algunas de las principales ideas para el desarrollo del modelo propuesto, basado en la LEFM.

Si el nivel de tensiones máximo en el borde de grieta es menor que el que provoca un crecimiento de grieta inestable, la LEFM puede aplicarse. En estas condiciones, el concepto de velocidad de crecimiento de grieta y el comportamiento a fractura del material quedan completamente determinados a partir de FIT. Este factor es función de la tensión elástica en el borde de grieta, y para problemas complejos puede determinarse a través del principio de superposición de problemas más simples.

La LEFM permite estudiar el crecimiento de macrogrietas; éstas se diferencian de las microgrietas en que las primeras tienen dimensión suficiente para crecer por condiciones bruscas y locales.

La fase de iniciación que constituye la forma inicial de crecimiento de la grieta, no puede estudiarse bajo las consideraciones de la LEFM. Esta disciplina de la MF se encarga de problemas en la que den las siguientes condiciones:

- tensiones aplicadas lejos de la zona de estudio;
- se aplica la Teoría de la Elasticidad sobre cuerpos con grietas y defectos, asumiendo, entre otros, la nomenclatura, la hipótesis de pequeños desplazamientos, la linealidad entre tensión y deformación, etc...
- junto a lo anterior, se asumen algunas ecuaciones generales:
  - Tensiones alrededor del borde de grieta (cerca de la singularidad) según la forma general: forma de Irwin mostrada en (1.1).
  - Existencia de una zona plástica alrededor del borde de grieta en materiales con capacidad para deformarse plásticamente (cuando la tensión en el borde de grieta tiende a infinito conforme se acerca al borde) cuyo tamaño depende de las condiciones de tensiones del cuerpo.
  - En cualquier caso, el tamaño de zona plástica es mucho menor que el tamaño de la grieta o del cuerpo que la presenta.

Otros factores importantes de la LEFM –además del campo de tensiones, la geometría y los anteriores factores– son: el tamaño y la forma de la misma, y las propiedades mecánicas del material.

Si se tuviese que destacar una de entre todas las características aquí descritas referentes a la LEFM, sería que la propagación puede determinarse exclusivamente con las condiciones del borde de grieta.

## Anexo IV

### Forma de la grieta. Grietas elípticas.

En este anexo se desarrollan brevemente los conceptos de forma de grieta, si el lector está interesado en este asunto y decide profundizar, se le remite a [1] donde podrá encontrar más información.

En la LEFM es usual asumir que el inicio de grietas se produzca en las discontinuidades y esquinas del material; en las probetas de ensayo de pequeño espesor, la forma de media o un cuarto de elipse es bastante común, ya que el crecimiento se suele producir en la dirección del espesor. En estas circunstancias, el cálculo del FIT ( $K$ ) o del rango del FIT ( $\Delta K$ ) debe modificarse en vistas a que la grieta no tiene la forma que se supuso para el cálculo de dicho factor. En la figura IV.1 puede observarse las situaciones descritas de media y un cuarto de elipse.

Irwin obtuvo una expresión para el FIT según el Modo I a través del uso de un parámetro como el definido en (IV.1). Según su estudio, la grieta podía representarse como se hace en la figura IV.2.

$$\phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - \text{Sen}^2 \alpha \cdot \text{Sen}^2 \varphi)} d\varphi \quad (\text{IV.1})$$

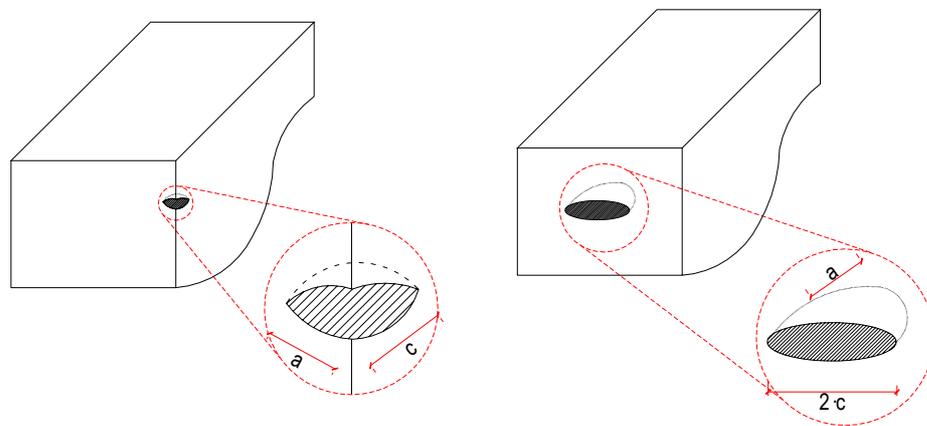


Figura IV.1: Iniciación de grietas elípticas.

$$\text{Sen} \alpha = 1 - \left( \frac{a}{c} \right)^2 \quad (\text{IV.2})$$

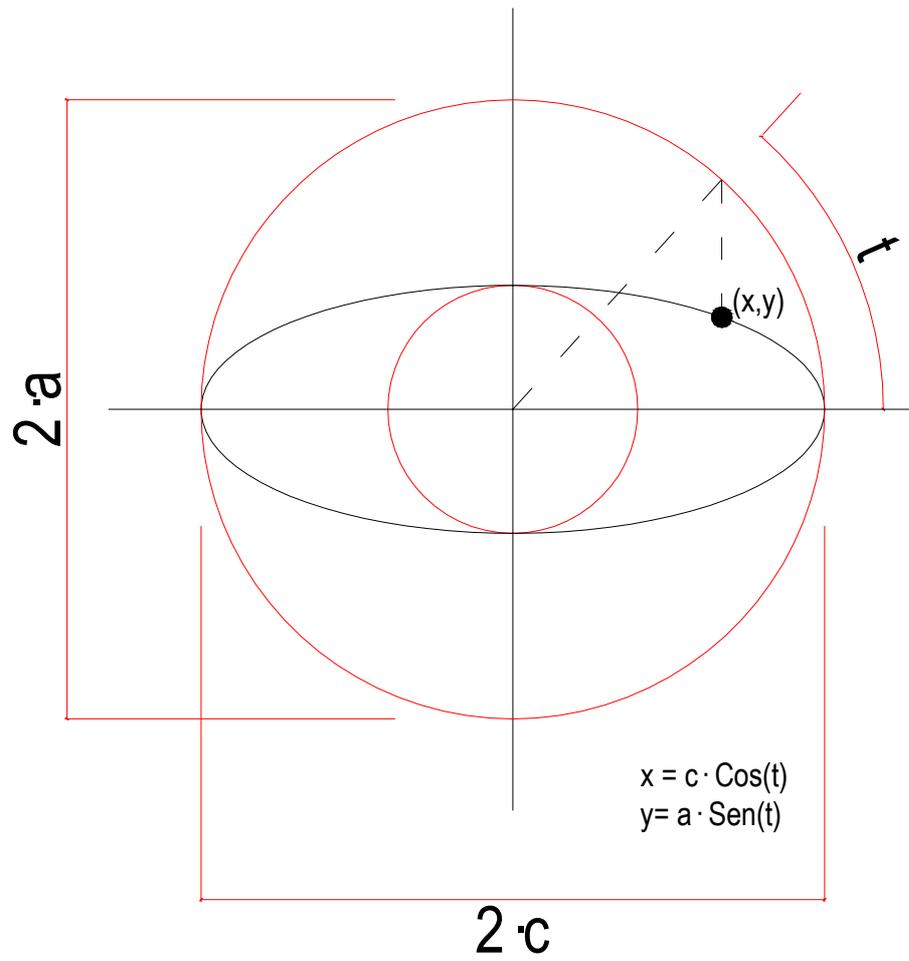


Figura IV.2: Método de Irwin para grietas elípticas.

En la figura IV.2, el FIT máximo ( $K_{\text{max}}$ ) se produce en “a” y el mínimo en “c”.

## Anexo V

### Curva de crecimiento

En este anexo se pretende describir brevemente cada una de las partes en que puede dividirse una curva de crecimiento genérica como la mostrada en la figura V.1. Se recuerda al lector un aspecto comentado en el Capítulo 1 acerca del crecimiento de grietas: cuando el valor del FIT es inferior al valor crítico, el crecimiento de grietas que tiene lugar se considera subcrítico, y está gobernado por las leyes de la LEFM. Se describe a continuación una situación bajo estas condiciones.

La deformación en el borde de grieta está marcada por el FIT, y engloba una zona en régimen plástico (la zona plástica<sup>34</sup>). Sin embargo, si el tamaño de la citada zona plástica es mucho menor que el tamaño de grieta, pueden aplicarse las siguientes consideraciones.

La curva de la figura V.1 representa una curva de crecimiento por fatiga genérico. Pueden observarse tres zonas en las que el comportamiento es bastantes diferente.

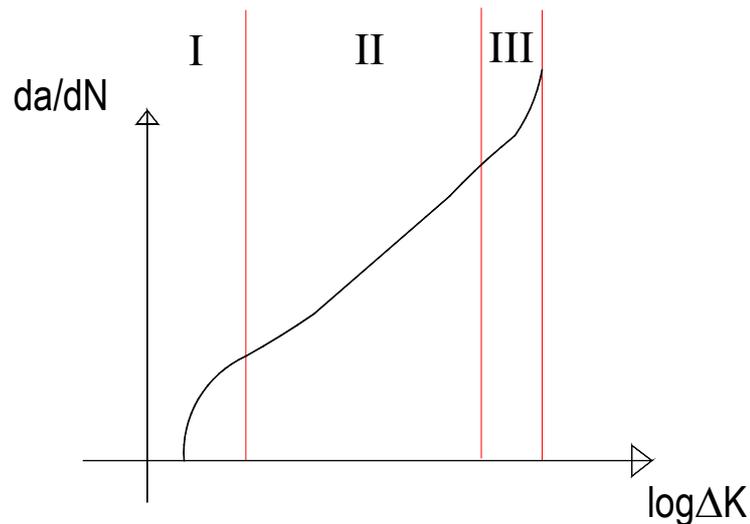


Figura V.1: Curva de crecimiento de grietas en fatiga.

En la zona I, el nivel del FIT es bastante bajo y en el crecimiento, si aparece, es bastante lento. Existe un umbral a partir del cuál éste tiene lugar y antes de él no es así. El

---

<sup>34</sup> Para obtener información acerca de los tamaños de la zona plástica se remite al lector a las obras [1] y [2] entre otras.

comportamiento de la grieta en esta zona está asociado al efecto del umbral. Los factores más influyentes en esta zona son la frecuencia de la carga y las condiciones del entorno. Otros factores como el comportamiento del material, la microestructura y la tensión media del ciclo de carga, también influyen de forma importante.

La zona II es la zona lineal, es la zona más usual de cálculo en una gran cantidad de trabajos; el comportamiento puede definirse a partir de la Ley de Paris. Obsérvese que en la figura V.1 esta zona ocupa la mayor parte del gráfico (frente a las otras dos). Por tanto, la velocidad de crecimiento en esta zona sólo depende del FIT. Los factores que más afectan en esta zona son las condiciones del entorno, la tensión media del ciclo de carga y la frecuencia de la misma; y menos, las condiciones del entorno.

La velocidad de crecimiento se incrementa rápidamente para pequeños incrementos del FIT en la transición entre zona I y II, debido a la gran pendiente de la curva.

Por último, la zona III que se caracteriza por una alta intensidad de las tensiones; puede observarse un crecimiento asintótico. Esta zona no suele tenerse en cuenta a menudo por su poca importancia sobre la vida total. Los factores más influyentes son los mismos que en la zona anterior, añadiendo en este caso el efecto del espesor del componente.

## Anexo VI

# Hipótesis sobre la iniciación y el crecimiento de grietas por fatiga en este Proyecto

En este anexo a la Memoria se describen las hipótesis asumidas para el presente Proyecto. Se trata de simplificar el problema para facilitar su estudio, pero de forma que los resultados obtenidos no se vean muy afectados por ello. No se tratan las hipótesis de los criterios de iniciación, de la LEFM ni las del cálculo de los parámetros del problema como el FIT; éstas se asumen directamente y forman parte del modelo propuesto.

A pesar de las hipótesis asumidas por provenir de los métodos utilizados, deben definirse una serie de factores que son específicos para este tipo de trabajos. En realidad no son específicos ni siquiera de este Proyecto, sino que provienen de trabajos anteriores muy relacionados (véase [6]).

El máximo de las tensiones define presumiblemente el punto de iniciación de grietas por constituir la zona donde se acumula más daño durante el ciclo de carga. Los criterios de iniciación determinan un parámetro que mide las condiciones de daño para obtener un punto con las características anteriores. Si se analizan exclusivamente los puntos de la superficie, el máximo se encuentra en el límite de la zona de contacto; sin embargo, si se calculan a una cierta profundidad, el máximo se desplaza hacia el interior de dicha zona.

En lo referente al camino que sigue la grieta, puede comprobarse que inicialmente tiene cierta inclinación, pero que a partir de una profundidad cercana a las 20  $\mu\text{m}$ , la grieta se coloca prácticamente perpendicular a la superficie.

Con estas consideraciones puede definirse las siguientes hipótesis:

- Hipótesis 1: la iniciación de grietas tiene lugar en el límite de la zona de contacto.
- Hipótesis 2: el crecimiento de grietas tiene lugar de forma que ésta es perpendicular a la superficie.

La LEFM propone un método de estudio del crecimiento de grietas a través del FIT. Éste, a su vez, se calcula por diversos procedimientos. En particular, en este Proyecto se calcula de forma analítica a través de una función de peso; sin embargo, a la hora de utilizar el rango de variación de dicha factor en los métodos de la LEFM, debemos tener presente algunos aspectos. Las leyes de crecimiento empleadas proponen modificaciones sobre el FIT, pero debe tenerse presente que el término que representa el FIT en la ley de Paris (de la que surgen las restantes) debe ser siempre positivo, o nulo en su caso límite; puesto que si fuera negativo, indicaría que la grieta se “cierra” y eso no se corrobora experimentalmente.

El fenómeno de cierre de grieta se encuentra bastante bien desarrollado en [1], y permite obtener una serie de conclusiones a tener en cuenta. Durante el ciclo de carga, en

una zona cercana al borde de grieta se genera lo que se suele llamar “la zona plástica”; sobre todo en crecimiento de grietas por fatiga. Si bien esta zona aumenta su valor durante la parte del ciclo que aumenta la tensión, lo disminuye en la parte correspondiente del ciclo, pero nunca desaparece del todo. Puede comprobarse que el radio de dicha zona durante el incremento de las tensiones del ciclo es unas cuatro veces mayor que en la situación de decremento de tensiones del ciclo. El comportamiento de la grieta a lo largo del ciclo es variable: si se parte de una situación neutra del ciclo de carga simétrico y comienza a aumentar la tensión, la grieta es como si tuviera que vencer una cierta “inercia” provocada por la deformación del ciclo anterior. Este fenómeno se denomina “cierre de grieta”, y se hace presente cuando el crecimiento de la grieta es menor del esperado.

Puede modelarse en el rango de variación del FIT tomando como valor mínimo el que corresponde al instante en que la grieta ha vencido dicha “inercia” y continua su crecimiento (todo ello dentro de un mismo ciclo de carga). Esto mismo fue ideado por Elber, que tomaba un valor mínimo del FIT como un valor “efectivo” sobre el crecimiento de grietas. Este valor efectivo es mayor que el valor mínimo.

En este Proyecto tomaremos para el crecimiento el valor máximo del FIT, como si el valor mínimo fuera nulo. Por tanto, la expresión (VI.1) es equivalente a la (VI.2).

$$\Delta K = K_{MAX} - K_{MIN} \quad (VI.1)$$

$$\Delta K = K_{MAX} \quad (VI.2)$$

El fenómeno de “cierre de grieta” es utilizado por muchos autores para explicar la influencia del coeficiente de asimetría del ciclo de carga ( $R$ ) en el crecimiento de grietas.