

Capítulo 3

Campo de tensiones

La distribución de tensiones en la superficie de contacto y sus alrededores es uno de los factores más influyente en la predicción de vida, ya que los métodos de predicción tienen como punto de partida el conocimiento de esta distribución.

Las tensiones generadas en un contacto esférico como el propuesto en este trabajo se toman de los resultados de Hamilton en [4]. En dicho artículo se encuentra la distribución de tensiones debidas a una carga normal P y a una carga tangencial Q como las indicadas en el Capítulo 2. Sin embargo el resultado de este artículo no puede utilizarse directamente puesto que debe someterse a algunas modificaciones. En realidad, más que modificaciones, haremos uso del resultado de Hamilton mediante una combinación de las distribuciones mencionadas.

Para terminar de plantear las expresiones que rigen la distribución de tensiones, debemos mencionar un último asunto que está relacionado con el valor de la carga transversal. En el artículo de Hamilton, la carga transversal toma un valor fijo que viene dado por el deslizamiento total de la zona de contacto; sin embargo, en este trabajo se plantearán situaciones en la que no se alcance tal extremo y el valor de la carga sea menor al que provoca dicho deslizamiento total, hablaremos en esta situación de deslizamiento parcial en la zona de contacto.

3.1 Zona de contacto

La zona de contacto ya fue definida por Hertz a finales del siglo XIX en lo que se vino a llamar la Teoría de Hertz. No obstante, conviene revisar las condiciones generales de validez de dicha teoría.

Estudiamos el fenómeno que ocurre al entrar en contacto dos cuerpos elásticos bajo la acción adicional de fuerzas variables. Unido a ello aparece otro fenómeno de deslizamiento que conlleva la disipación de energía junto a la variación de fuerzas y

desplazamientos (dependiendo no sólo del estado inicial de las cargas, sino de su historial acumulado en la zona de la unión)¹⁴.

El estudio matemático de los efectos del contacto en el que actúan fuerzas normales a la superficie común fue llevado a cabo por Hertz, como se ha mencionado. Sin embargo, estudios posteriores revelaron la importancia del deslizamiento en el problema: con él se introducen no-linealidades como consecuencia de la disipación energética entre otros factores, además de modificar los estados de carga y desplazamientos iniciales.

Se define y admite como válido el radio de la zona de contacto propuesto por Hertz, definido como (3.1).

$$a_c = \left(\frac{3\pi}{4} \cdot P \cdot R \cdot \left(2 \cdot \frac{1-\nu^2}{\pi \cdot E} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.1)$$

Donde aparecen los términos definidos al inicio de este trabajo.

En la situación de un contacto esférico sometido a fuerzas normales constantes y tangenciales variables, es de aplicación el resultado de los estudios de Cattaneo (1938) y Mindlin (1949) cuyas conclusiones pueden encontrarse en [5]. Con ello puede comprobarse que partiendo de una hipótesis de la no existencia de deslizamiento se llega a una conclusión no admisible y por lo tanto el deslizamiento tiene lugar¹⁵ aunque no en toda la zona de contacto, sino en una porción de la misma que viene definida por un radio c que se expresa por (3.2).

$$\frac{c}{a_c} = \left(1 - \frac{T}{\mu \cdot N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.2)$$

Donde T y N son la carga tangencial y normal respectivamente, y μ es el coeficiente de fricción que aparece en el Anexo I.

Finalmente, de los resultados de Cattaneo–Mindlin se obtienen una serie de reglas para tener definido el problema:

- Regla 1: el radio de la zona de contacto y la tensión normal están definidas por las expresiones de Hertz;
- Regla 2: con cada aplicación o cambio de la fuerza tangencial, el deslizamiento se inicia donde corresponda (según el desarrollo del Anexo

¹⁴ Situación que se reconoce como “condiciones de fretting”.

¹⁵ Puede consultarse tal comprobación en el Anexo I de la presente Memoria.

I); y en ausencia de deslizamiento se aplica la Teoría de la Elasticidad con tensión tangencial igual al límite elástico del material.

- Regla 3: el deslizamiento (dirigido según la fuerza que lo provoque) progresa de forma concéntrica y radial hacia el centro desde el borde de la zona de contacto formando “anillos de deslizamiento”.
- Regla 4: en cualquier punto de la zona de contacto se tiene una tensión tangencial menor o igual al producto del factor de fricción y la tensión normal, $\tau \leq \mu \cdot \sigma$:
 - Sin deslizamiento: $\tau < \mu \cdot \sigma$
 - Con deslizamiento: $\tau = \mu \cdot \sigma$
- Regla 5: Se define una zona de adherencia como aquella porción de la zona de contacto en la que no tiene lugar el deslizamiento y por tanto constituye la zona de sin deslizamiento. Dicha zona de adhesión está sujeta a variaciones de la tensión tangencial y del desplazamiento como sólido rígido; los resultados de Cattaneo–Mindlin definen sobre ellas:
 - El radio de la zona de adhesión;
 - La distribución de tensiones tangenciales;
 - La magnitud del desplazamiento (como sólido rígido).
- Regla 6: Cualquier perturbación del equilibrio se resuelve con las anteriores reglas y con la ecuación de equilibrio (3.3)

$$T = \int_0^{2\pi a_c} \int_0^r \tau \cdot r dr d\theta \quad (3.3)$$

Como consecuencia de estas reglas, se muestra en la figura 3.1 un esquema de la zona de contacto, identificando cada una de las partes que la componen: zona de deslizamiento y zona de adherencia¹⁶.

¹⁶ Observe el lector que según los valores característicos de las variables del problema, definidos en el Capítulo 2, siempre existirá una zona de contacto donde podremos encontrar zona de deslizamiento y de adhesión.

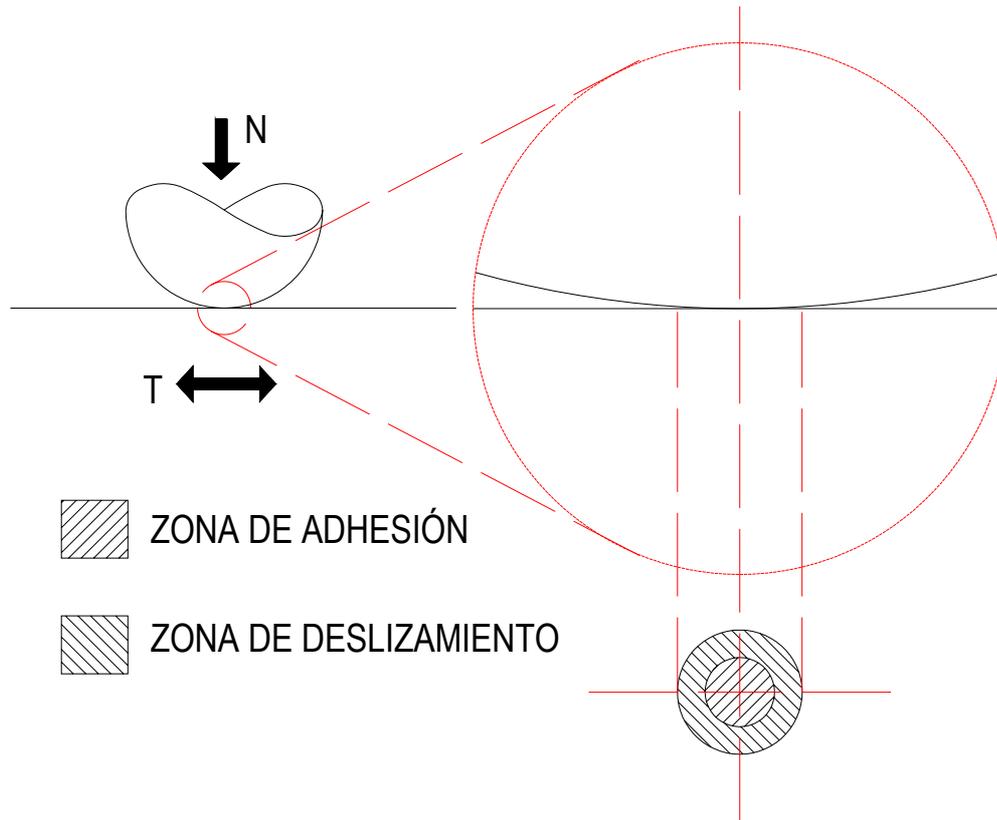


Figura 3.1: Zona de contacto, deslizamiento y adhesión.

3.2 Influencia de la tensión axial

En el apartado anterior hemos considerado que las únicas cargas que afectaban al contacto eran las debidas a la fuerza normal y la tangencial, sin embargo, es bastante frecuente que se den situaciones de fatiga por fretting en las que además influyan cargas de volumen sobre uno u otro cuerpo. En el caso del ensayo propuesto en este Proyecto, existe una tensión (definida como “tensión axial” en el Capítulo 2) que se aplica en una zona alejada del contacto pero únicamente sobre el cuerpo plano. El efecto de esta tensión aparece mediante el incremento de las tensiones en la zona de la unión, además de ocasionar una excentricidad entre las zonas de adhesión y deslizamiento.

En la figura 3.2 puede comprobarse tal afirmación. En (a) tenemos el contacto sin la tensión axial (como el que aparece en la figura 3.1 del apartado anterior) y en (b) aparece dicha tensión. Puede comprobarse que el incremento de tensión debida al término “ σ_a ” implica un desplazamiento del máximo de las tensiones, y por tanto el gradiente de tensiones que se origina en los límites de la zona de adhesión no puede ser soportado por la unión, con lo que tiene lugar el deslizamiento. En la figura 3.3 se describe con más detalle el incremento de las tensiones a causa de la tensión axial.

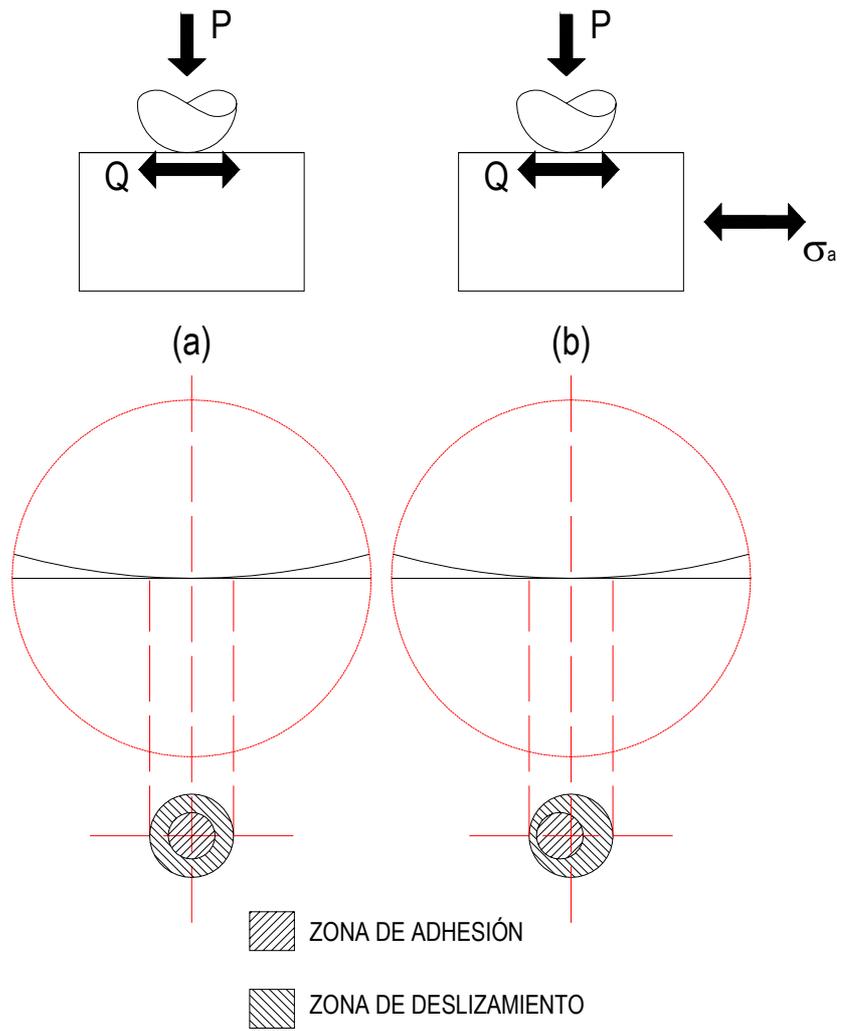


Figura 3.2: Contacto esférico y tensión axial.

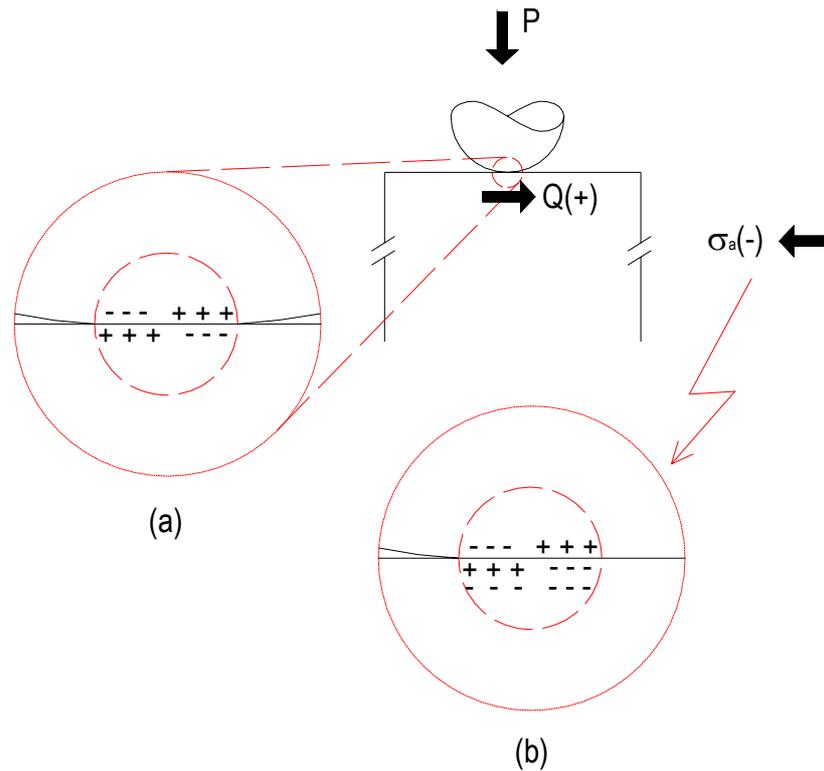


Figura 3.3: Efecto de la tensión axial. Estado 1.

En la figura 3.3 se muestra la distribución de tensiones provocada por la carga tangencial “Q” de forma cualitativa. Observe el lector que dicha carga tiene un sentido particular para esta explicación y no se muestra como en anteriores ocasiones. Por otro lado, la tensión tangencial “ σ_a ” aparece igualmente con una orientación determinada. Junto a cada una de estas cargas aparece, encerrado entre paréntesis, el signo de la misma respecto al sistema de ejes coordenados definidos en el Capítulo 2.

En la parte (a) se observa la distribución que provoca la carga tangencial en la zona de contacto¹⁷:

- sobre el cuerpo plano:

¹⁷ Es importante que el lector entienda que los signos + ó - no tienen nada que ver con el valor de las tensiones, sino que se trata de una forma de explicar el que las tensiones en una zona aumenten (+) o disminuyan (-) pero siempre teniendo en cuenta las características de dicha tensión; por ejemplo, si la tensión es de compresión –por tanto con signo negativo– y aparece el signo “+” en la zona quiere decir que las tensiones disminuyen (puesto que se hacen “más positivas”), en cambio, si aparece el signo “-” querría decir que las tensiones se vuelven “más negativas” y por tanto que aumenta la compresión. El mismo criterio se aplica en el caso de tensiones de tracción.

- incremento de la compresión (-)
 - decremento de la compresión (+)
- sobre el cuerpo esférico (mismo criterio): se equilibran con las anteriores.

En este caso, la distribución de tensiones provoca una zona de contacto como la que aparecía en la figura 3.2(a), en la que las zonas de adherencia y deslizamiento están centradas. Cuando se incluye la tensión axial –que en la figura presenta signo negativo– se incrementa la tensión en la zona de contacto con el mismo signo que tenga dicha tensión, y por tanto la diferencia entre las tensiones en un cuerpo y otro se hacen mayores en unas zonas que en otras, en ellas la unión no puede permanecer en equilibrio salvo hasta cierto nivel y sobrepasado éste, ocurre el deslizamiento para equilibrar dicha diferencia. En la parte (b) se observa tal hecho. Si se divide la zona de contacto por el eje y , se tiene que para la zona con x positiva la tensión de compresión aumenta, y para el caso $x < 0$ ocurre lo contrario, disminuye la compresión. El resultado es que entre ambas zonas se da un gradiente de tensión que no puede ser soportado por la unión sin deslizamiento, luego éste tiene lugar y la zona de adhesión se desplaza hacia las regiones con menor diferencias de tensiones, la de las $x < 0$.

Como consecuencia de este desarrollo, se observa que la zona de contacto presenta una situación como la mostrada en la figura 3.2(b). Puede comprobarse que para el caso en que la carga tangencial y la tensión axial cambien su orientación¹⁸, se siguen produciendo las diferencias de tensiones entre las mismas zonas, y por lo tanto el deslizamiento tiene lugar de igual forma. Véase la figura 3.4 para ello.

Del mismo modo que se define el radio de la zona de adhesión mediante la expresión (3.2), puede definirse la excentricidad de la zona de adhesión mediante la expresión (3.4) que será válida para estudios en Tensión Plana¹⁹:

$$e = \frac{1}{(1+\nu)(4-3\nu)} \cdot \frac{4 \cdot a_c \cdot |\sigma_a|}{\pi \cdot \mu \cdot p_0} \quad (3.4)$$

Obsérvese que la tensión axial σ_a aparece en valor absoluto y de esta forma la excentricidad no cambia de signo, como se definió anteriormente. También aparece en la expresión un coeficiente no mencionado hasta ahora: p_0 . Se trata del coeficiente con el que se adimensionalizan las tensiones y viene definido igualmente en [4] de la forma mostrada en (3.5).

¹⁸ Téngase en cuenta que por definición la orientación de la carga tangencial Q y la tensión axial siempre será contraria, véase apartado 2.2.

¹⁹ Si el lector está interesado puede acudir a la referencia [7] donde podrá encontrar la expresión para el caso de Deformación Plana.

$$p_0 = \frac{3 \cdot P}{2 \cdot \pi \cdot a_c^2} \quad (3.5)$$

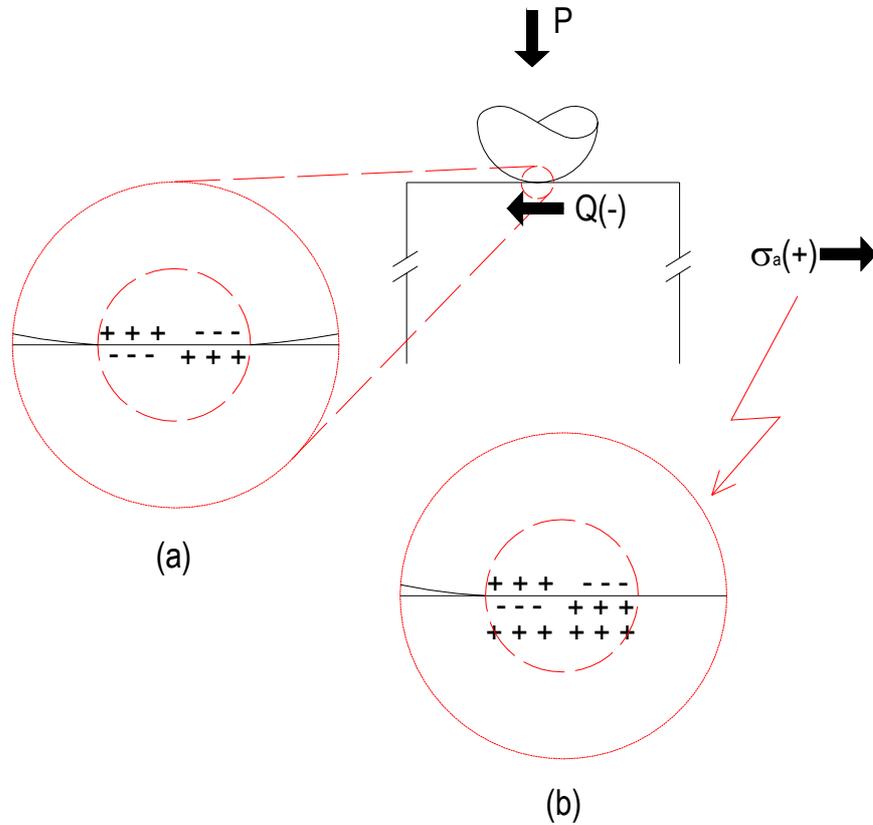


Figura 3.4: Efecto de la tensión axial. Estado 2.

3.3 Combinación de tensiones

En la introducción a este capítulo se ha utilizado el término “combinación de tensiones” para referirse a la aplicación de los resultados de Hamilton de [4]. En este apartado se describirá con más detalles tal combinación de tensiones.

De [4] se obtienen las distribuciones originadas por una carga normal “P” como la aquí mostrada y por una carga tangencial “Q” que toma un valor: $Q = \mu \cdot P$, valor en el estado de deslizamiento. En este trabajo, la carga Q no toma valores tan altos y por tanto no ocurre el deslizamiento total, sino en una porción de la zona de contacto como se estudió en el apartado anterior 3.1. Llamemos a cada una de las distribuciones mencionadas de la siguiente forma:

- distribución debida a la carga normal P: $\sigma^n(x,y,z)$
- distribución debida a la carga tangencial, Q: $\sigma^t(x,y,z)$

De los resultados del apartado 3.1 y 3.2, podemos extraer que no es suficiente con estas dos distribuciones para modelar completamente el problema. Es necesario incluir los efectos de la adhesión y del desplazamiento de la misma a causa de la tensión axial. Con

este propósito, Mindlin²⁰ estudió el comportamiento de las tensiones a lo largo de un ciclo de carga. Se concluye que las tensiones debidas a un contacto esférico como el que se ha presentado en este trabajo pueden modelarse a través de una superposición de tensiones a partir de las distribuciones simples de una carga normal y otra tangencial, de la forma:

$$\sigma = \sigma^n(x,y,z) + \sigma^t(x,y,z) - \left(\frac{c}{a_c} \right) \sigma^{t^2}(x,y,z) \quad (3.6)$$

Donde se representan las distribuciones simples de carga normal (σ^n) y tangencial (σ^t), junto con una nueva distribución (σ^{t^2}) multiplicada por un factor que fue definido en el apartado 3.2 como el radio de la zona de adhesión “c” adimensionalizado con el radio de contacto “ a_c ”. Se llama la atención del lector sobre el signo de esta distribución, contrario a las otras dos, se resta de ellas; a continuación se explica el porqué.

Del estudio del ciclo de carga llevado a cabo por Mindlin, se obtiene que la distribución de tensiones que mejor modela el contacto está formada por una distribución debida a la carga normal P junto a una distribución debida a la carga tangencial Q a la que se le resta una parte. Dicha parte constituye una distribución de tensiones debida a la carga tangencial, pero desplazada (la excentricidad de la zona de adhesión) y disminuida una cantidad (“ c/a_c ”); luego la distribución σ^{t^2} puede describirse (para la línea $y=0$) como:

$$\sigma^{t^2}(x,y,z) = \sigma^t(x+e,y,z) \quad (3.7)$$

Luego la nueva distribución $\sigma^{t^2}(x,y,z)$ es una distribución como la debida a una carga tangencial simple (σ^t) definida en [4] pero modificando las coordenadas a las que hace referencia. Esta descripción que parece a todas luces demasiado matemática, debe aplicarse sobre el sentido físico descrito en el apartado 3.2 acerca de la zona de adhesión y deslizamiento, de tal forma que el efecto de la tensión axial (el desplazamiento de la zona de adhesión) queda modelado a través de la distribución de tensiones σ de (3.6).

Así pues, definida la distribución de tensiones que tiene lugar en el contacto, pueden calcularse las tensiones en las zonas de la unión a través de las expresiones definidas en [4]. En cualquier caso, se muestran a continuación una serie de ejemplos, y se remite al lector al Capítulo 5 donde encontrará algunos resultados de la evolución de las tensiones a lo largo de la unión.

Se presenta seguidamente una tabla con algunos ejemplos de la distribución mostrada en (3.6) para que el lector se familiarice con ella. Debe tenerse en cuenta que las coordenadas de uso del problema se adimensionalizan con el radio de la zona de contacto (a_c) para que contengan mayor información en el contacto.

²⁰ Véase referencia [5].

$\frac{x}{a_c}$	$\frac{y}{a_c}$	$\frac{z}{a_c}$	σ^n	σ^t	σ^{t^2}
0	0	0	(0,0,0)	(0,0,0)	(e,0,0)
0.5	0	0	(0.5,0,0)	(0.5,0,0)	(0.5+e,0,0)
0.7	0.7	0	(0.7,0.7,0)	(0.7,0.7,0)	(0.7+e,0.7,0)
1.5	0	0.5	(1.5,0,0.5)	(1.5,0,0.5)	(1.5+e,0,0.5)

Tabla 3.1: Ejemplos de la aplicación de la distribución de tensiones en el contacto.

La tabla 3.1 muestra, en sus tres últimas columnas las coordenadas de cálculo de cada una de las componentes de tensión que entran en juego en la expresión (3.6). En el caso de componente σ^{t^2} , aparece la excentricidad de la zona de adhesión “e” definida en la expresión (3.4) como un parámetro general.