

## CAPÍTULO 2: HERRAMIENTA DE ANÁLISIS: ELEMENTOS FINITOS (EF)

### 2.1.- INTRODUCCIÓN.

Un modelo trata de representar una realidad, no es la realidad en sí misma. Por ello, en un modelo suelen realizarse simplificaciones o asunciones que se creen aceptables en función de la naturaleza del problema a resolver. Como consecuencia de esta aseveración, existen modelos mucho más finos que otros para la resolución de un mismo problema, estando asociada esta mayor fidelidad del modelo no sólo a aspectos relacionados con la geometría sino a otros factores tales como el tipo de elemento, el tamaño del mismo, el tipo de condiciones de contorno (CC) a aplicar y la naturaleza y cuantía de la carga aplicada.

Todos estos factores condicionan el grado de bondad de un modelo, dicho de otro modo, en función del problema que queramos resolver, así será elaborado el modelo.

Evidentemente, un problema tan fácil de modelar que el modelo corresponda efectivamente a la realidad (tanto en la geometría como en las cargas y condiciones de contorno) sólo podría presentar problemas relativos al tipo y tamaño de los elementos utilizados (problemas de tipo numérico).

Sin embargo, si el problema real es complicado y lo que queremos es realizar simplificaciones, es necesario saber aquello que se puede despreciar y lo que es de vital importancia para ese problema concreto. Por ejemplo, si se estuviera creando un modelo para analizar el contacto entre la cabeza del tornillo y una pieza en la que se encaja el tornillo, sería posible olvidar la pieza completamente y realizar un modelo de la zona de influencia (si bien las condiciones de contorno y cargas aplicadas se encargarán de recoger el efecto del resto de la pieza sobre esa zona) y el tamaño de elementos interesará que sea menor en la zona de incidencia. En definitiva, *cada modelo de elementos finitos tiene sus particularidades en función del objetivo que se persigue.*

## 2.2.- SOFTWARE UTILIZADO.

La herramienta de análisis numérico utilizada en este proyecto ha sido el programa NASTRAN – PATRAN, desarrollado por MSC. Software, que implementa el *Método de los Elementos Finitos* (EF en adelante). La razón por la cual se utilizó esta aplicación estriba en que es el código de EF cuyos resultados son admitidos en la industria aeronáutica, sector al que pertenece la empresa que encarga los ensayos.

El programa está constituido por 2 aplicaciones esenciales (si bien después existen módulos asociados a varios tipos de problemas específicos):

- 1) **MSC.PATRAN**, que tiene funciones de *preprocesador* y *posprocesador*. Como *preprocesador* se encarga de disponer el entorno gráfico, en el que tanto la elaboración de la geometría como el mallado y la aplicación de propiedades y condiciones de contorno (CC en adelante) del problema se van añadiendo al modelo de forma más fácil e intuitiva, y además prepara un archivo de entrada a *MSC.Nastran* en el que se recoge toda la información necesaria para la elaboración del modelo. Las funciones de *posprocesado* están basadas en la interpretación del fichero de resultados que devuelve *MSC.Nastran*, de forma que los datos numéricos resultantes del análisis se trasladan al entorno gráfico. Esto permite realizar mapas tensionales, representaciones gráficas de deformadas y representaciones 2D de una variable frente a otra, entre otras posibilidades relacionadas con la visualización de los resultados que puedan resultar de utilidad para la/s persona/s encargada/s del estudio de los mismos.

- 2) **MSC.NASTRAN**, que, a partir de este archivo de entrada, se encarga de realizar el tipo de análisis escogido y devolver un fichero de resultados. Este fichero será interpretado por PATRAN que traslada los datos numéricos resultantes del análisis de NASTRAN al entorno gráfico. El resto del capítulo introduce con algo más de detalle el entorno de trabajo de MSC.Patran y la forma de trabajar en la realización de los modelos que posteriormente se analizarán (capítulos 3 y 4 y anexo).

## 2.3.- ELABORACIÓN DE UN MODELO DE EF UTILIZANDO MSC.PATRAN.

Desde la primera vez que se inicia la aplicación *MSC.Patran* se observa un sistema de barras de herramientas y pestañas que refleja perfectamente el orden y método que caracteriza la utilización del programa. La **Fig. 2.3.1** muestra el entorno de trabajo de *MSC.Patran*.

En ese entorno de trabajo pueden distinguirse varios elementos:

- ✓ **Botones de aplicación.** Cada uno de estos botones está asociado a la introducción de datos de diferente naturaleza dentro del proceso de elaboración del modelo, su análisis y obtención de resultados, razón por la cual no es posible tener activo más de uno de ellos simultáneamente. Los botones se presentan según el orden lógico a seguir en la elaboración del modelo. Esto es, primero es necesario crear la *geometría*, después *mallarla*, a continuación definir *las condiciones de contorno*, seguidamente los *materiales* presentes en el modelo, las *propiedades* y los *casos de carga* así sucesivamente hasta que se llega al botón de *análisis*. Así pues, la disposición de los botones de aplicación nos guía en el proceso de elaboración del modelo. Una vez conformado el modelo se procederá al análisis y al finalizar éste a procesar los resultados.
  
- ✓ **Barra de Herramientas.** En ella se encuentran ubicados comandos relacionados, principalmente, con (de izquierda a derecha) *la gestión del archivo* (copiar, pegar, deshacer...), la utilización del *ratón para girar o trasladar* los elementos en pantalla, los distintos tipos de *zoom* y las *distintas vistas en las que puede mostrarse el modelo*. (ver **Fig. 2.3.2**)
  
- ✓ **Línea de comandos.** A través de la cual introducir comandos por teclado para realizar alguna acción.

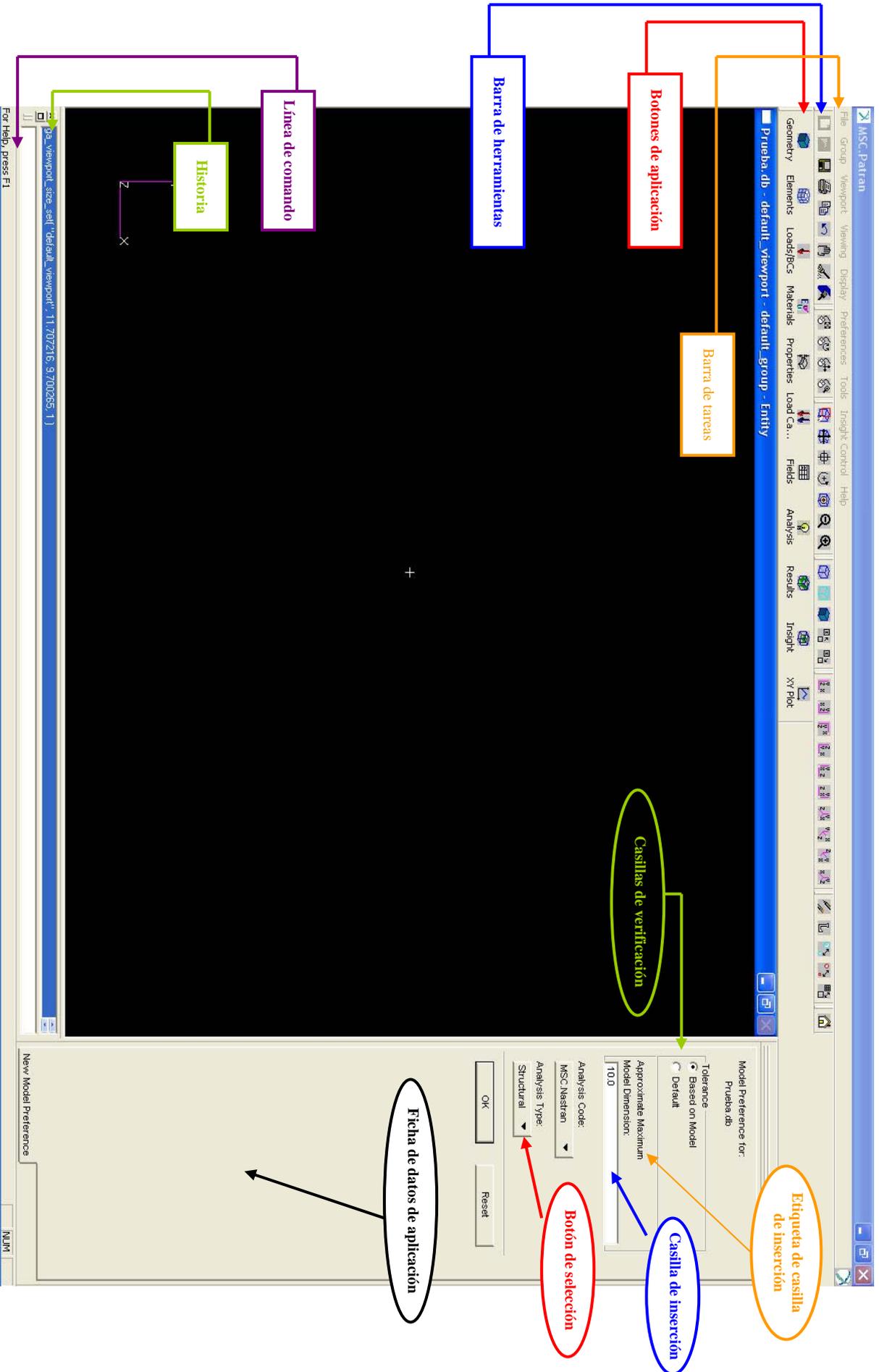
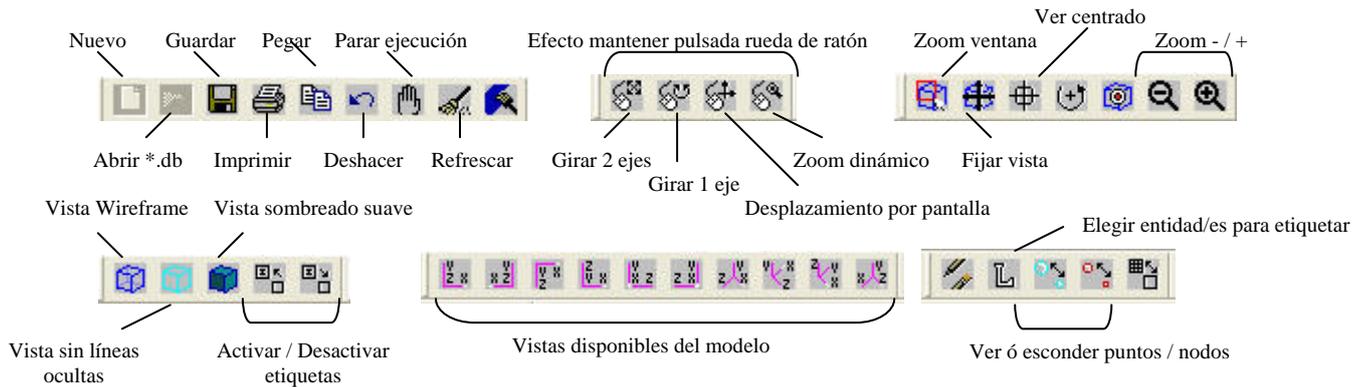


Fig. 2.3.1.- Entorno de trabajo de PATRAN.



**Fig. 2.3.2.- Descripción botones principales de la barra de herramientas.**

- ✓ **Historia.** Muestra la reacción y respuesta del programa ante los comandos introducidos (ya sea mediante botones o a través de la línea de comandos).

Así, la interacción con el programa se realizará a base de elegir diferentes aplicaciones (ya sea mediante los botones de aplicación o utilizando la las órdenes dispuestas en la barra de tareas) para posteriormente elegir entre las opciones disponibles (*botones de selección* o *casillas de verificación*) e introducir los datos requeridos por el programa en la correspondiente *casilla de inserción* de la *ficha de datos de la aplicación*. La naturaleza de los datos a introducir se especifica en la *etiqueta* asociada a la *casilla de inserción*.

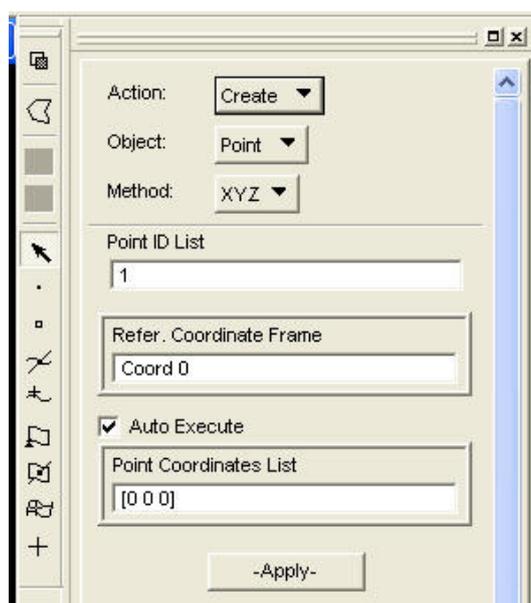
A continuación se analizan brevemente los distintos botones de aplicación que sirven de guía en la elaboración del modelo.



**2.3.1.- Geometry.**

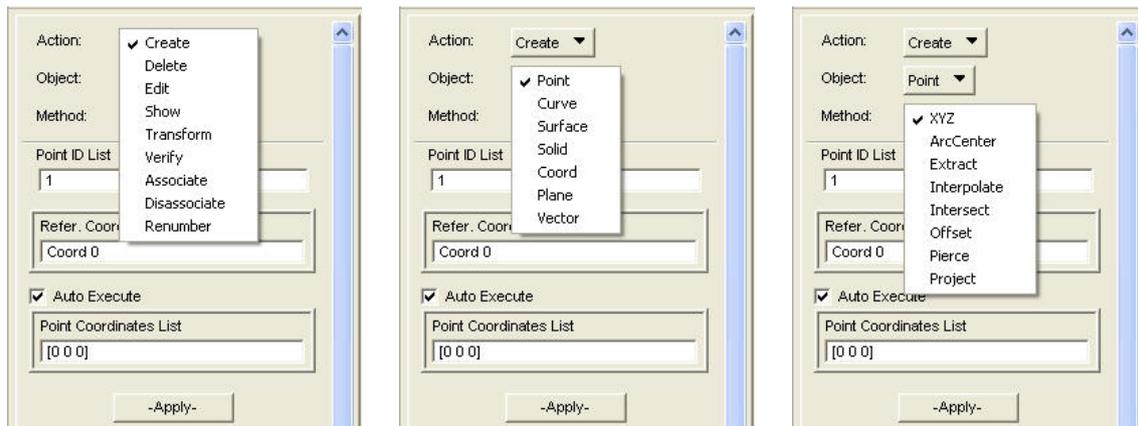
Cuando se activa el botón de la aplicación *Geometry* aparece a la derecha la ficha asociada a la aplicación, que se muestra en la **Fig. 2.3.1.1.**

La columna de botones que aparece a la derecha de la ficha de aplicación se denomina *Filtro de Selección* y permite escoger el tipo de elemento a seleccionar. Las posibilidades del filtro dependerán del botón de aplicación que se tenga activado, pero resulta tremendamente útil cuando se muestran en pantalla una gran cantidad de elementos de naturaleza muy distinta.

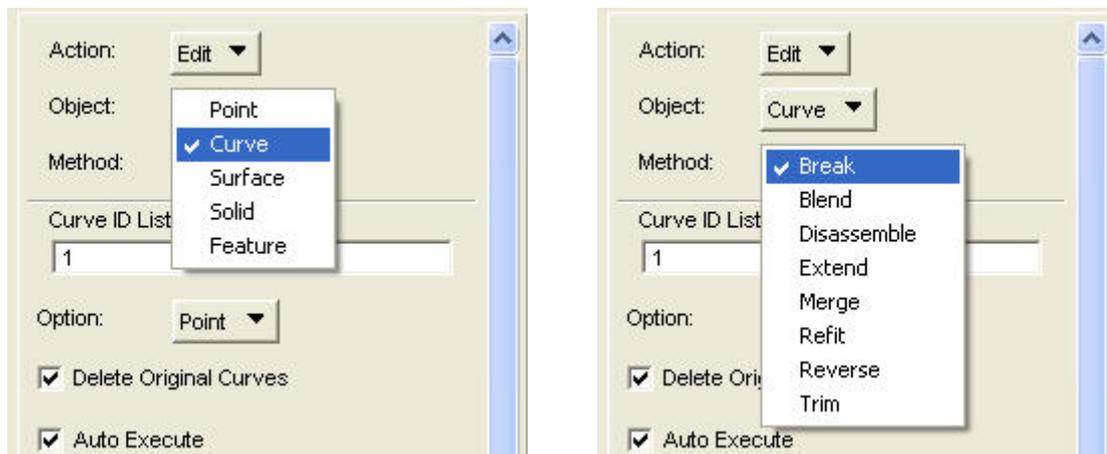


**Fig. 2.3.1.1.- Ficha de la aplicación Geometry.**

Ya dentro de la Ficha de aplicación *Geometry* nos encontramos con 3 *botones de selección* que nos permiten seleccionar la **Acción (Action)** a realizar, el **Objeto (Object)** al que se aplica la **Acción** y el **Método (Method)** utilizado para llevar a cabo la acción previamente elegida. La ficha se completa con *casillas de inserción* en las que se solicitan los datos necesarios para llevar a cabo la Acción elegida. En función de la acción seleccionada, se ven modificadas las opciones seleccionables en el resto de los botones, esto es, para cada posible acción existen distintos objetos a los que es aplicable y métodos diferentes para llevarla a cabo. La **Fig. 2.3.1.2** muestra, de izquierda a derecha, las distintas posibilidades de la orden *Action*, así como las opciones seleccionables en los botones de *Object* y *Method* cuando la acción seleccionada corresponde a **Create**. En la **Fig. 2.3.1.3** se muestran las opciones asociadas a *Object* y *Method* cuando en primer lugar se ha seleccionado **Edit**.

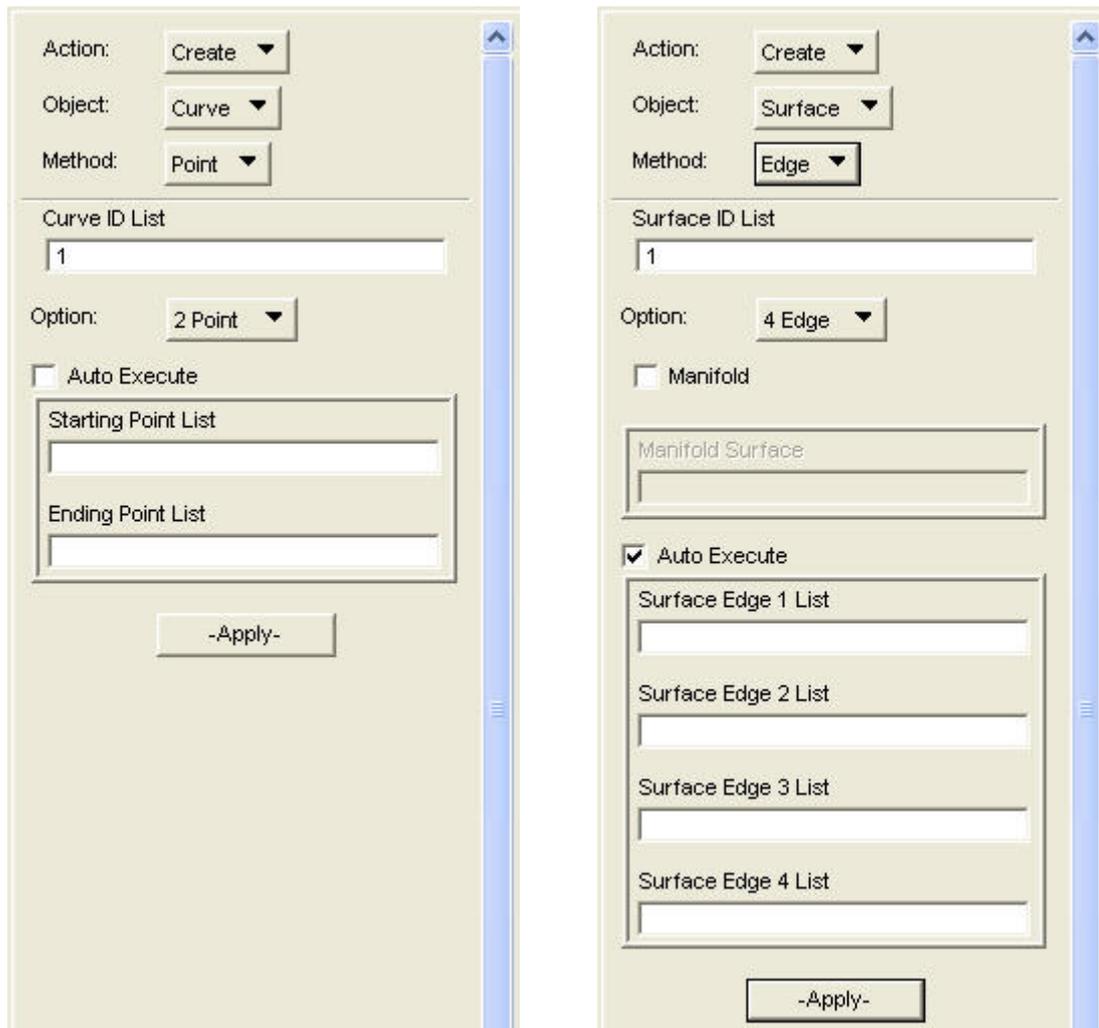


**Fig. 2.31.2.- Opciones seleccionables en Object y Method para la acción Create.**



**Fig. 2.31.3.- Opciones seleccionables en Object y Method para la acción Edit.**

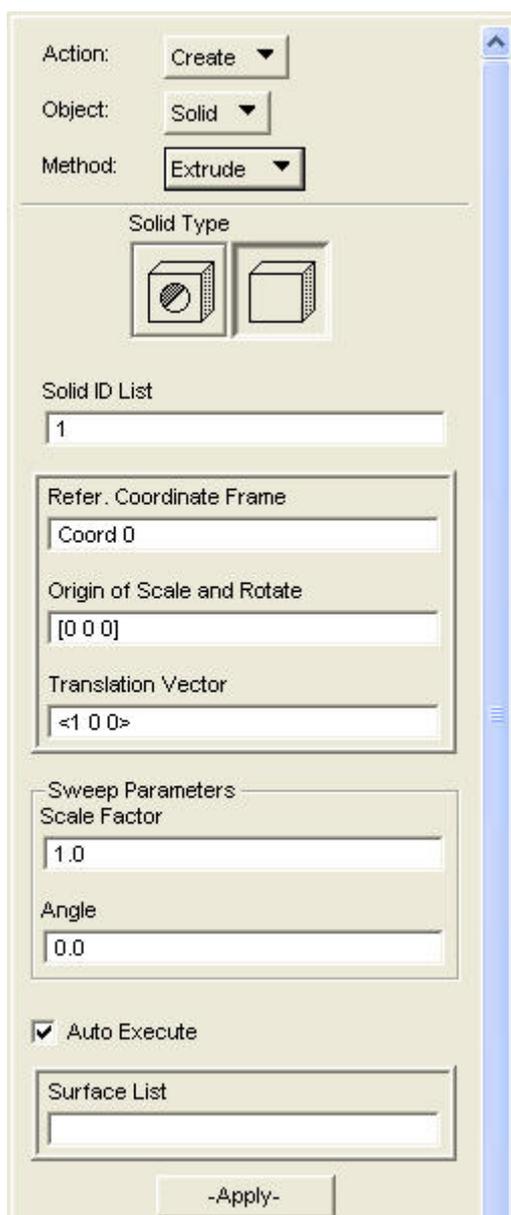
Para crear la geometría del útil (en los capítulos 3 y 4 se desarrolla el proceso de creación), se crearon primero las superficies biparamétricas asociadas a su sección (*Create* → *Surface* → *Edge Surface*) a partir de sus bordes (*Create* → *Curve* → *2Points* = *Línea*). En la **Fig. 2.3.1.4** se muestran las opciones a seleccionar así como las casillas de inserción que es necesario rellenar.



**Fig. 2.3.1.4.- Opciones utilizadas para la creación de los bordes (izda.) y las superficies biparamétricas de las secciones (dcha.).**

Estas superficies biparamétricas se representan en el programa con bordes de color verde (ver capítulos 3 y 4 secciones 3.2.1 y 4.3.1).

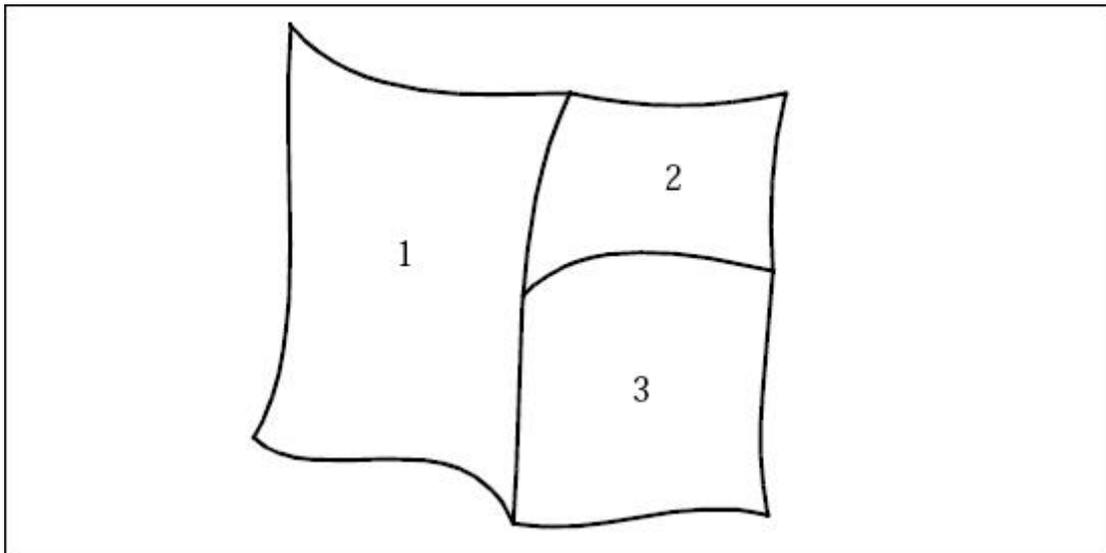
Una vez se habían creado las secciones, se procedía a la creación de los sólidos mediante el método *Extrude* que traslada la/s superficie/s de referencia una distancia especificada en línea recta.



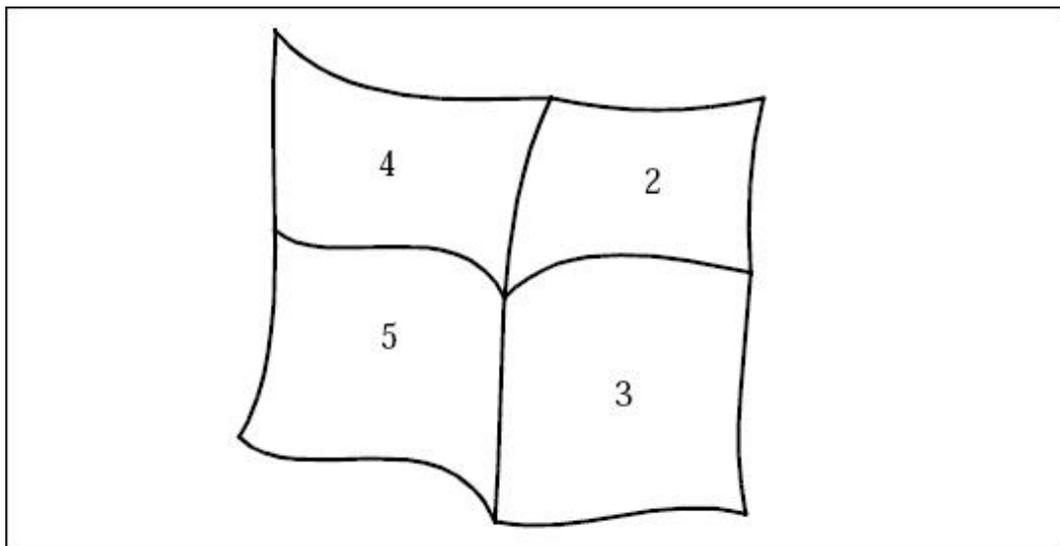
**Fig. 2.3.1.5.- Ficha de aplicación para la creación de un sólido mediante Extrude.**

De esta forma se obtenían sólidos triparamétricos, caracterizados por tener 6 caras, que podían ser planas (útil rigidizador) o curvas (algunos sólidos de la cama), que se representan en el programa en color azul.

MSC.Patran requiere que tanto las superficies como los sólidos adyacentes sean topológicamente congruentes (ver **Fig. 2.3.1.6.b**), de forma que al mallar, los nodos sean coincidentes en bordes comunes.

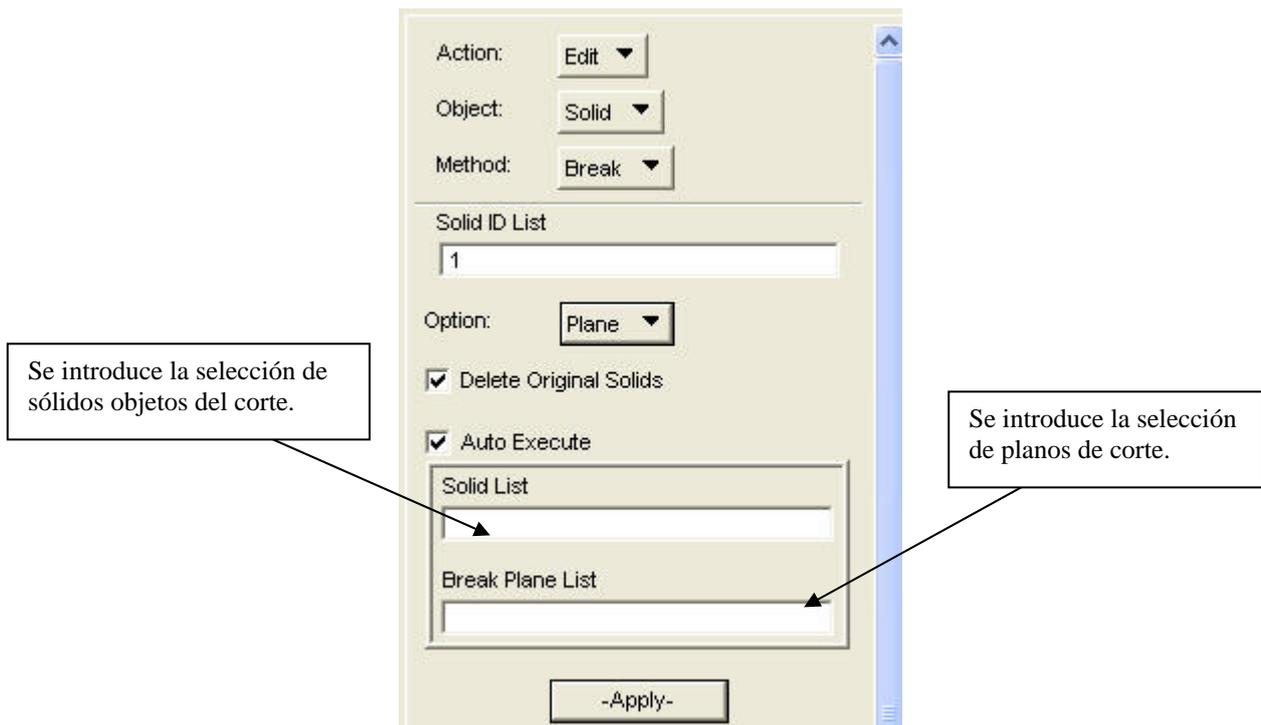


**Fig. 2.3.1.6.a.- Conjunto de superficies topológicamente incongruentes.**



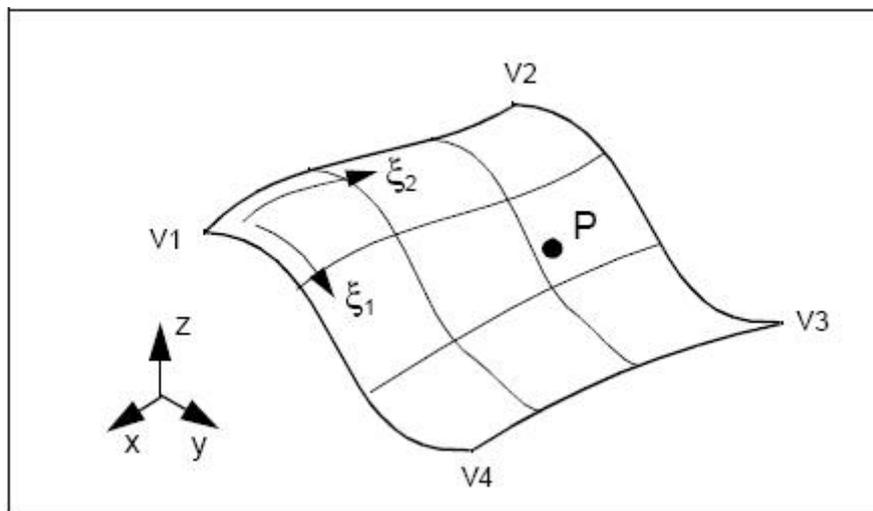
**Fig. 2.3.1.6.b.- Conjunto de superficies topológicamente congruentes.**

Para conseguir que todos los sólidos obtenidos fueran congruentes fue necesario cortar algunos de los sólidos inicialmente creados por planos en las zonas donde se producían intersecciones entre sólidos. La **Fig. 2.3.1.7** muestra las opciones seleccionadas para llevar a cabo esta última acción referida.

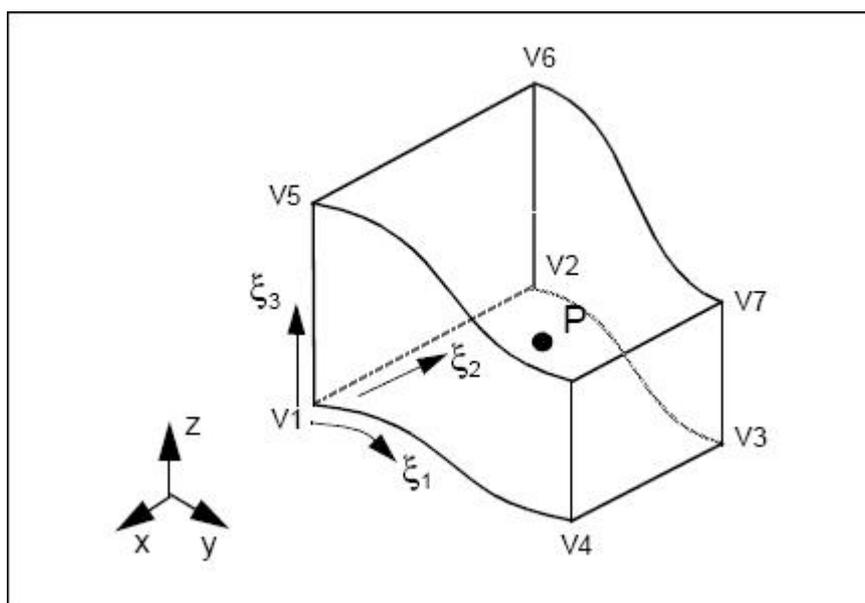


**Fig. 2.3.1.7.- Ficha de la aplicación “cortar sólido por plano”**

El que las entidades geométricas elaboradas mediante PATRAN estén parametrizadas significa que las coordenadas X, Y, Z asociadas a cada entidad son funciones de una serie de variables o parámetros, de forma que para cada valor de esos parámetros se obtiene un punto en la curva, superficie o sólido. Las **Fig. 2.3.1.8** y **2.3.1.9** muestran la parametrización que hace PATRAN en superficies y sólidos respectivamente.



**Fig. 2.3.1.8.- Parametrización de las superficies en PATRAN  $(\xi_1, \xi_2)$ .**



**Fig. 2.3.1.9.- Parametrización de los sólidos en PATRAN ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ).**

Cualquier punto P de la superficie o del sólido puede ubicarse si se conocen los parámetros necesarios, puesto que:

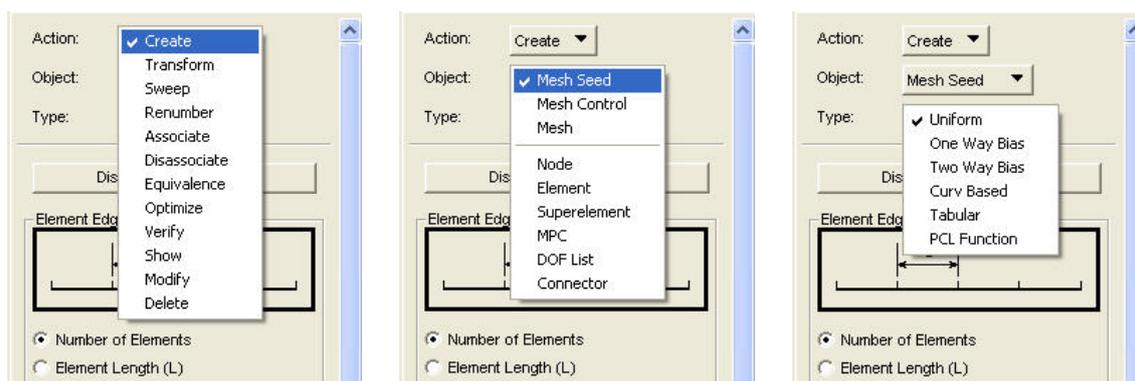
$$X = X(\xi_1, \xi_2, (\xi_3)), Y = Y(\xi_1, \xi_2, (\xi_3)), Z = Z(\xi_1, \xi_2, (\xi_3))$$



### 2.3.2.- Elements.

Este segundo botón de aplicación está asociado a todo lo relacionado con el mallado de la geometría: elección de tipo y tamaño de elementos, semillas de mallado, etc. La mecánica de actuación es totalmente análoga a la descrita en el apartado anterior. Al activarse el botón, aparece a la derecha la ficha asociada a la aplicación en la que se especifica las características de la acción a realizar.

La **Fig. 2.3.2.1** muestra las diferentes opciones posibles para cada uno de los botones de selección de la aplicación *Elements*.



**Fig. 2.3.2.1.- Diferentes opciones posibles en los botones de selección Action, Object y Type de la aplicación Elements.**

Al igual que antes las opciones seleccionables en cada botón dependen de la elección realizada en el botón anterior, por lo que si en lugar de la acción *Create* se hubiera escogido *Transform* por poner el caso, cambiarían las opciones seleccionables en los botones *Object* y *Type*.

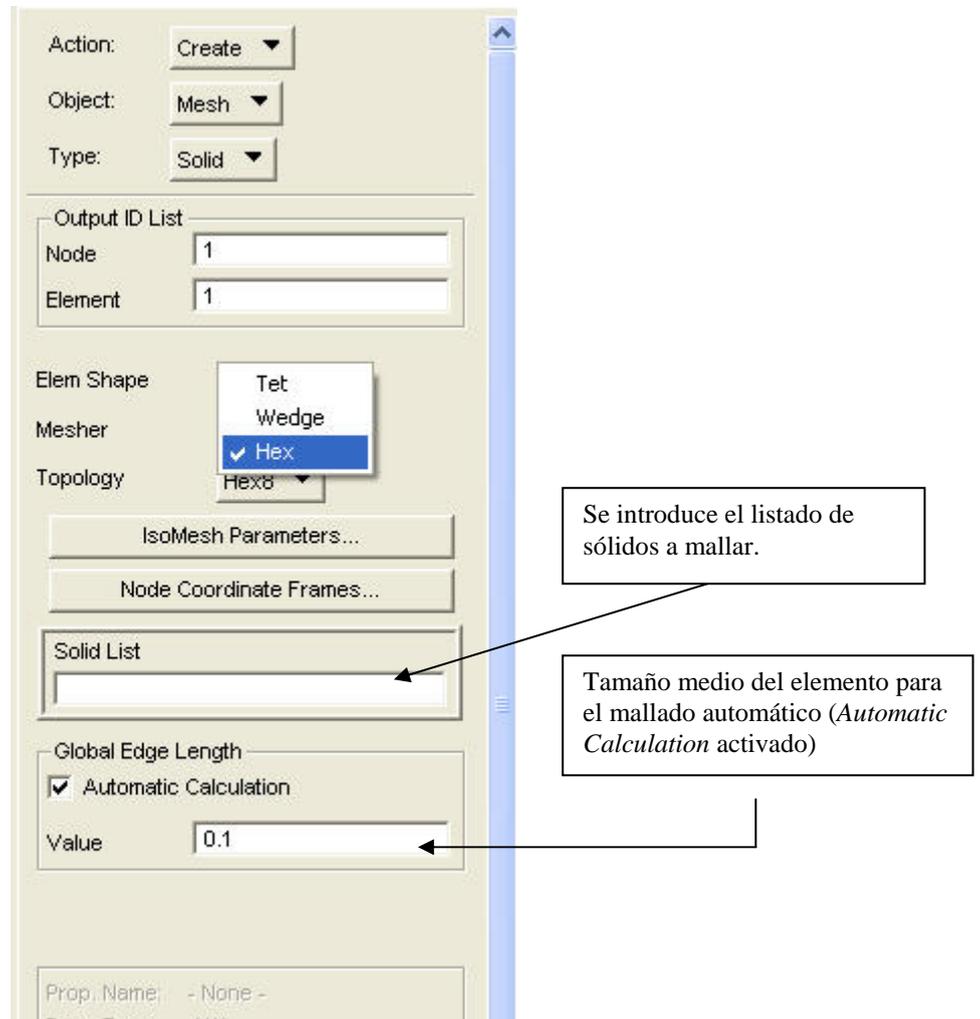
En el caso particular del proyecto llevado a cabo, han sido realizados diversos mallados:

#### **a) Modelo Útil - Mesa.**

Puesto que la geometría que se pretendía mallar era 3D había que recurrir a elementos tridimensionales. Teniendo en cuenta que para la realización de análisis en frecuencia, el tipo y tamaño de los elementos de la malla tienen una influencia pequeña en los resultados obtenidos, la intención era utilizar los elementos más sencillos que permitieran una buena adaptación de la malla a la misma además de conseguir una malla lo más homogénea posible. Llegados a este punto había 3 posibilidades: mallar con **Tetraedros** (Tet), con **prismas triangulares** (Wedge) o **Hexaedros** (Hex) (ver **Fig. 2.3.2.2**).

De entre ellos se optó por utilizar **elementos Hexaédricos** por ser los que más fácilmente podían adaptarse a geometrías formadas por sólidos de caras ortogonales. Dentro de los hexaédricos se escogió el de **8 nodos** (el más simple con nodos únicamente en los vértices) y un **mallado homogéneo** (*Isomesh*). En cuanto al tamaño de elemento se estimó en **30 mm.**, toda vez

que los 70 mm. que sugería el mallado automático se mostraba excesivamente grande al realizar representaciones gráficas de la deformada del modelo.



**Fig. 2.3.2.2.-Ficha de aplicación asociada al mallado 3D en la que se muestran los tipos de elementos disponibles en PATRAN.**

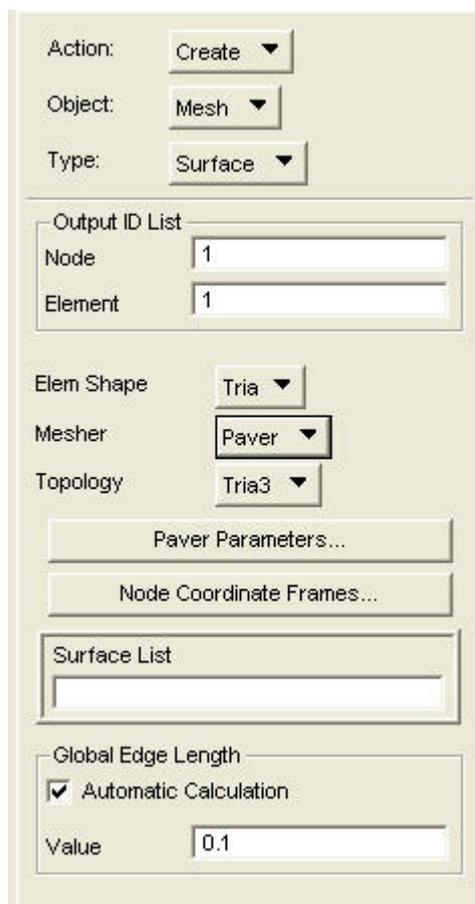
Además, también fueron creados elementos puntuales (*Create* → *Elements* → *Edit* → *Point*) en los nodos de la superficie inferior de la mesa, a los que más adelante se aplicará la propiedad de masa tal y como especifica el *Método de las grandes masas puntuales* (ver apartado 2.4).

**b) Modelo del conjunto completo.**

En el caso del conjunto completo, éste estaba compuesto por varias piezas de geometrías muy diferentes. Así, el mallado de este modelo incluye 2 dificultades importantes:

- 1) Mallado de los sólidos de caras curvas pertenecientes a la geometría de la cama.
- 2) Mallado congruente de la superficie de contacto entre el útil y la cama.

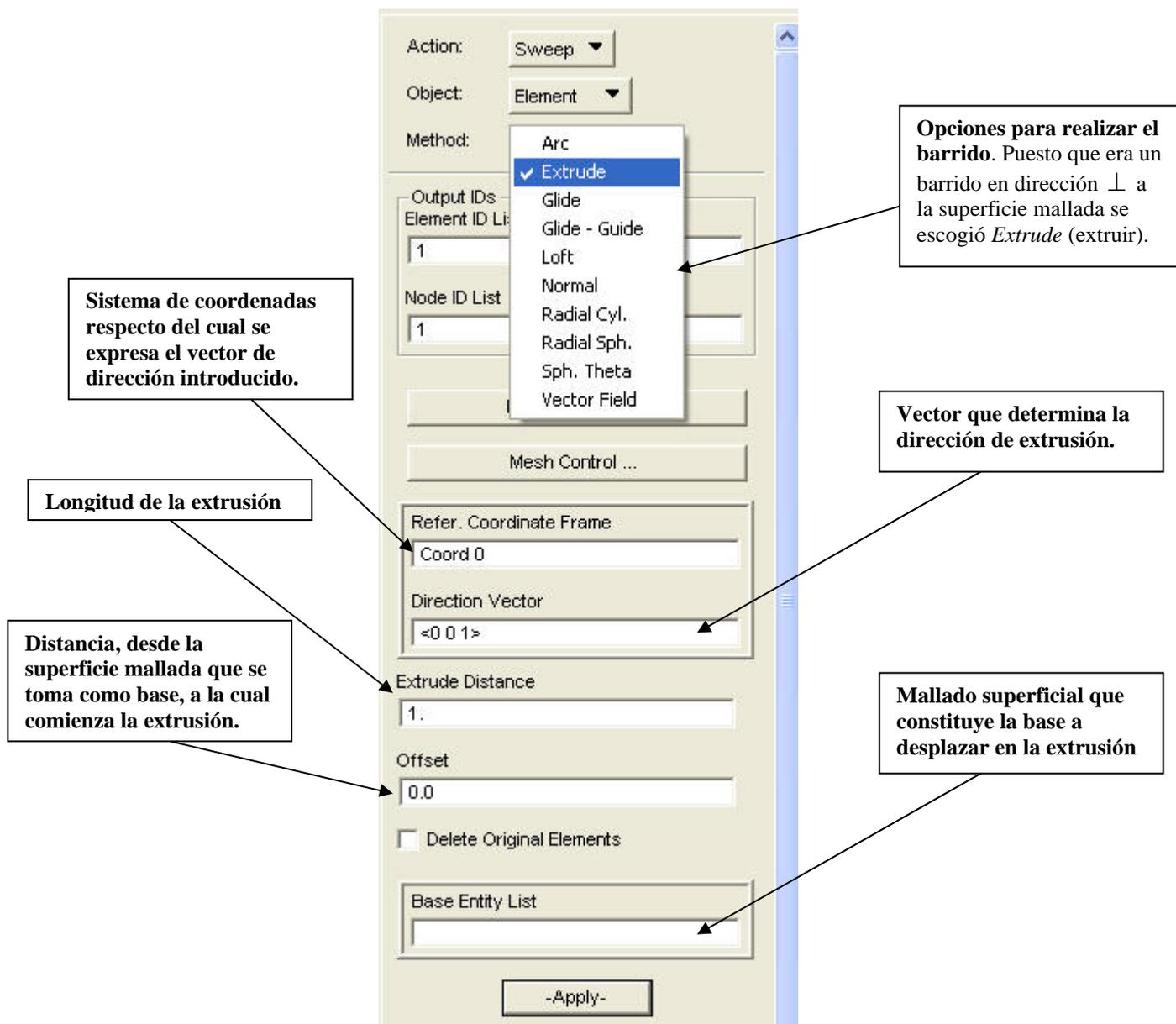
Tomando en consideración esta última dificultad es necesario la realización de un mallado no homogéneo (se utilizó el mallador *Paver*) de la superficie de contacto con **elementos triangulares** (son los únicos elementos 2D que pueden recoger las intersecciones entre las aristas de los sólidos en contacto). Entre los distintos elementos triangulares los de **3 nodos** (uno por vértice) son los más simples.



**Fig. 2.3.2.3.- Ficha de aplicación asociada al mallado 2D en la que se muestra las opciones seleccionadas para el mallado de la superficie de contacto útil – cama.**

Una vez mallada la superficie de contacto es necesario proceder al mallado de los sólidos que quedan por debajo de la misma, pertenecientes al

útil y a la mesa de vibración. Puesto que las caras superiores de los elementos considerados en este mallado posterior han de coincidir con los elementos triangulares utilizados en la superficie de contacto, para este fin se puede utilizar el “mallado por barrido” (*Sweep*). La ficha de aplicación asociada a este comando se muestra en la **Fig. 2.3.2.4**.

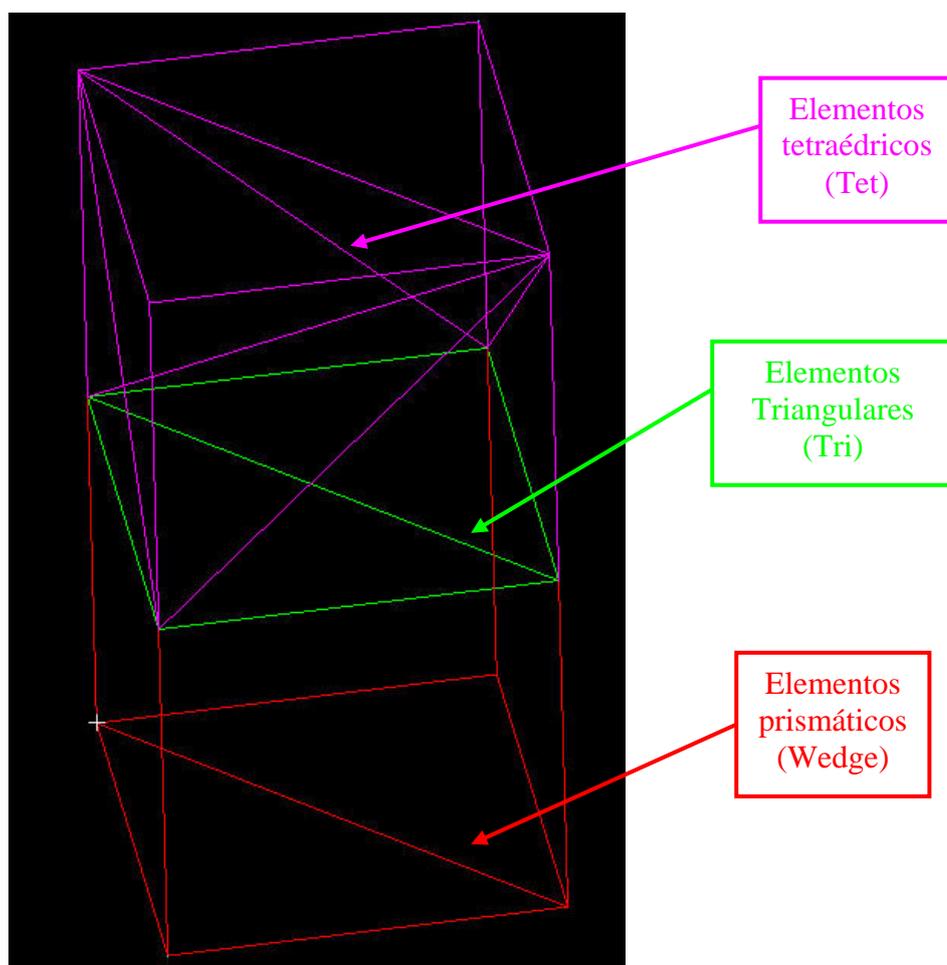


**Fig. 2.3.2.4.- Ficha de aplicación asociada a la creación del “mallado por barrido”.**

De esta forma, para el mallado del útil y la mesa de vibración, se pueden obtener **elementos prismáticos de base triangular (Wedge)** de 6 nodos (uno

en cada vértice), puesto que este mallado tridimensional proviene del mallado 2D con elementos triangulares de 3 nodos.

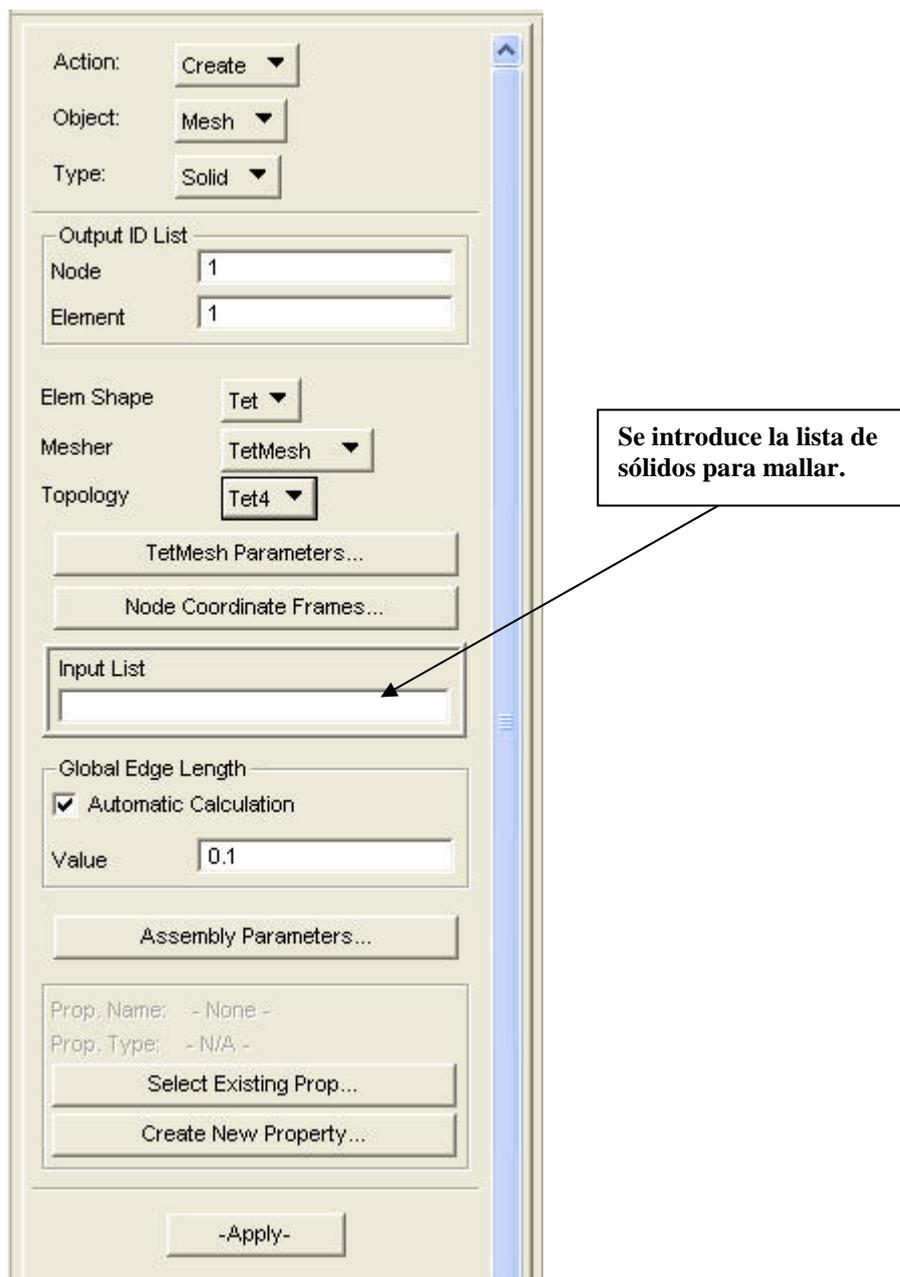
Este mismo procedimiento puede extenderse al reborde de la cama, cuyos sólidos también poseen caras ortogonales. Sin embargo los sólidos superiores, que tienen caras curvas, no pueden ser mallados utilizando este procedimiento puesto que todos los métodos disponibles para realizar el mallado por barrido (*Sweep*) precisan de una distancia de barrido constante, de forma que no permite que la altura del sólido varíe como ocurre con los sólidos antes mencionados. Así, la única opción viable para mallar estos sólidos es utilizar tetraedros, empleando un mallador no homogéneo (*Tetmesh*) que permite crear los tetraedros de forma que una de sus caras coincide con el triángulo asociado al mallado de la superficie superior del sólido inferior (ver **Fig. 2.3.2.5**).



**Fig. 2.3.2.5.- Coincidencia de la cara inferior de un elemento tetraédrico con un elemento triangular asociado a la superficie del sólido inferior.**

Por supuesto los tetraedros utilizados en este caso serían los de **4 nodos** (1 por vértice) puesto que la cara coincidente con el triángulo tendría 3 nodos. El uso de semillas de mallado en estos sólidos superiores de la cama resulta conveniente para generar una malla de cierta regularidad (ver ANEXO apartado A.).

En la **Fig. 2.3.2.6** se muestra la ficha de aplicación del mallado por tetraedros.

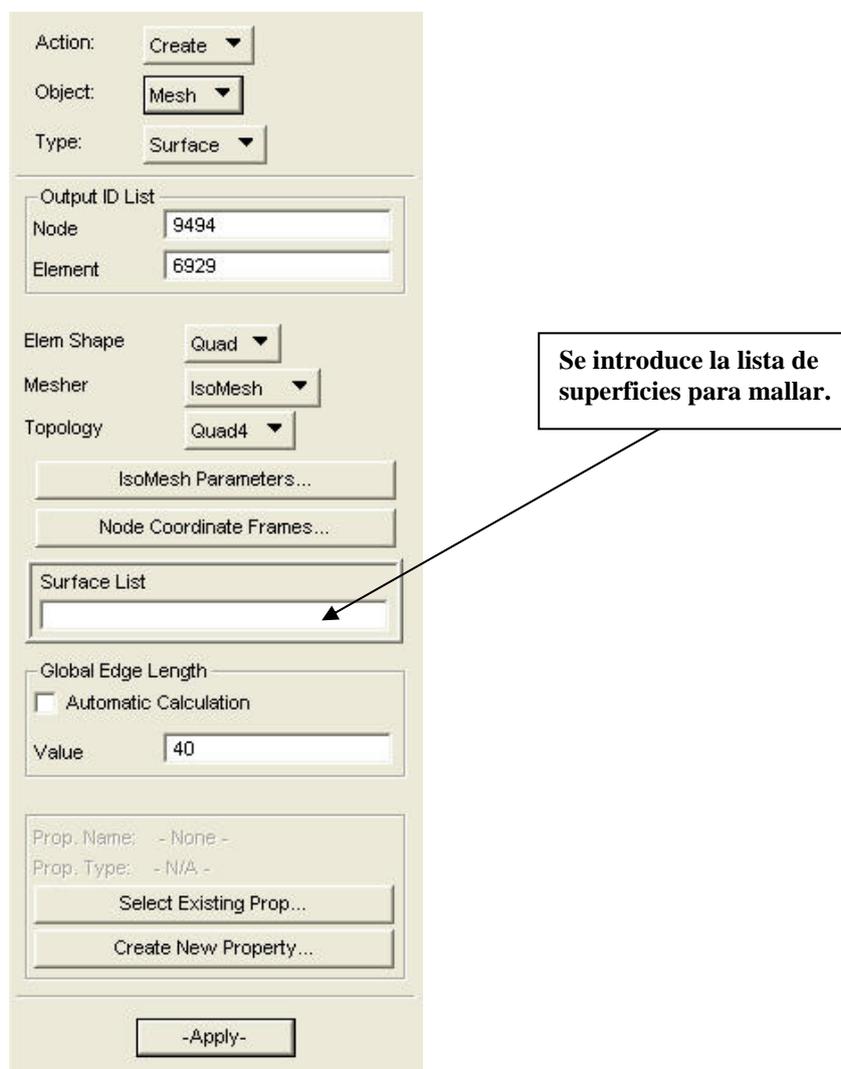


**Fig. 2.3.2.6.- Ficha de aplicación asociada al mallado por tetraedros utilizado para los sólidos superiores de la cama.**

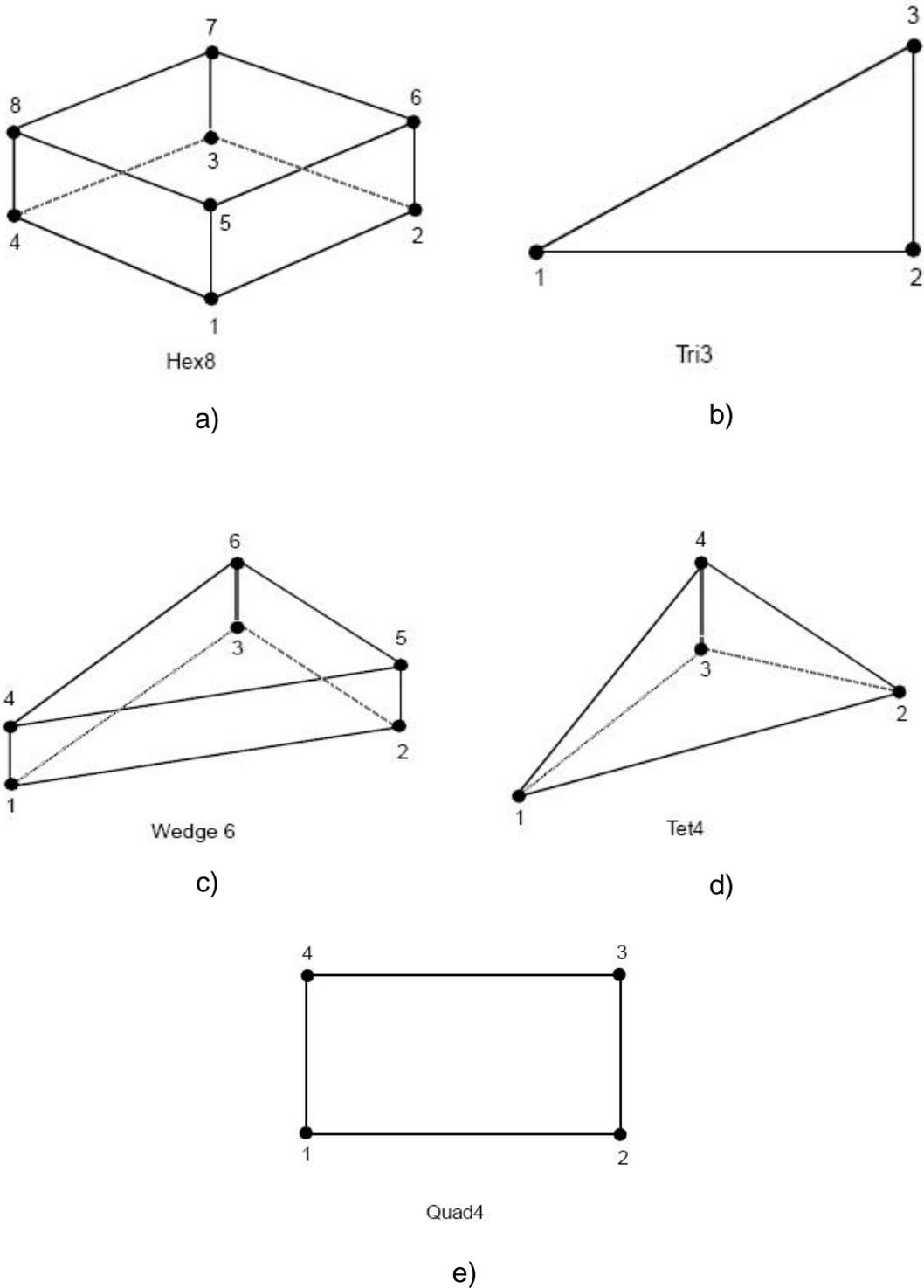
**c) Modelo de análisis con elementos bidimensionales.**

El modelo creado para la realización del análisis en frecuencia corresponde a una versión simplificada del modelo sólido. Se representa la geometría por superficies sin espesor y éste se añade como una propiedad asociada a dichas superficies. Los elementos bidimensionales, al tener un menor número de g.d.l. permiten reducir sensiblemente los tiempos de computación.

Para el modelo antes referido (ver apartado 4.5 de este proyecto) se han utilizado elementos **Quad4** (que pueden considerarse los elementos más simples a la hora de mallar de forma homogénea superficies de 4 congruentes de 4 bordes) de tamaño medio **40 mm.**, utilizando **Isomesh** como herramienta de mallado.



**Fig. 2.3.2.7.- Ficha de aplicación asociada al mallado con elementos Quad4.**



**Fig. 2.3.2.8.- a) Elemento Hex8; b) Elemento Tria3; c) Elemento Wedge6; d) Elemento Tet4; e) Elemento Quad4.**

Las **Fig. 2.3.2.8 a),b), c) y d)** muestran representaciones gráficas de los distintos tipos de elementos a los que se ha hecho referencia en este apartado así como la localización de los nodos asociados a dichos elementos.

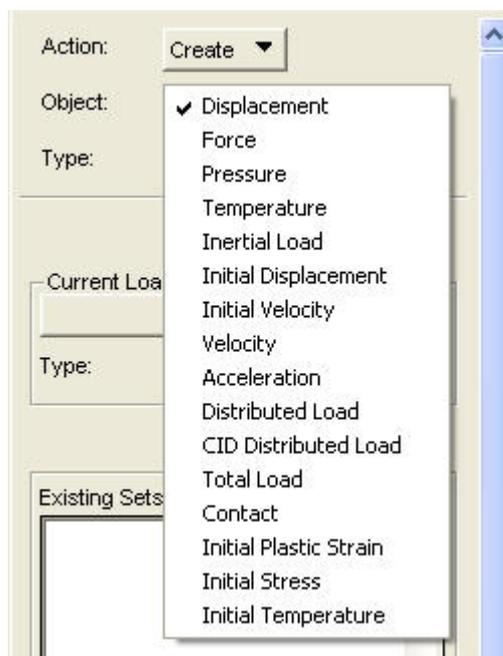
Una vez realizado el mallado, antes de proceder a la aplicación de cargas y condiciones de contorno, es necesario aplicar el comando *Equivalence* dentro de las opciones contenidas en el primero de los botones de selección. Esta orden se encarga de eliminar los nodos coincidentes, de forma que queda un solo nodo en cada ubicación. De no hacerse, podría haber después problemas al realizar el análisis.



### 2.3.3.- Load / Boundary Conditions.

Esta aplicación permite introducir las cargas y condiciones de contorno. Más adelante (capítulos 3, 4 y anexo) se especifican las condiciones de contorno del problema concreto, de forma que aquí sólo se trata la forma de introducirlas.

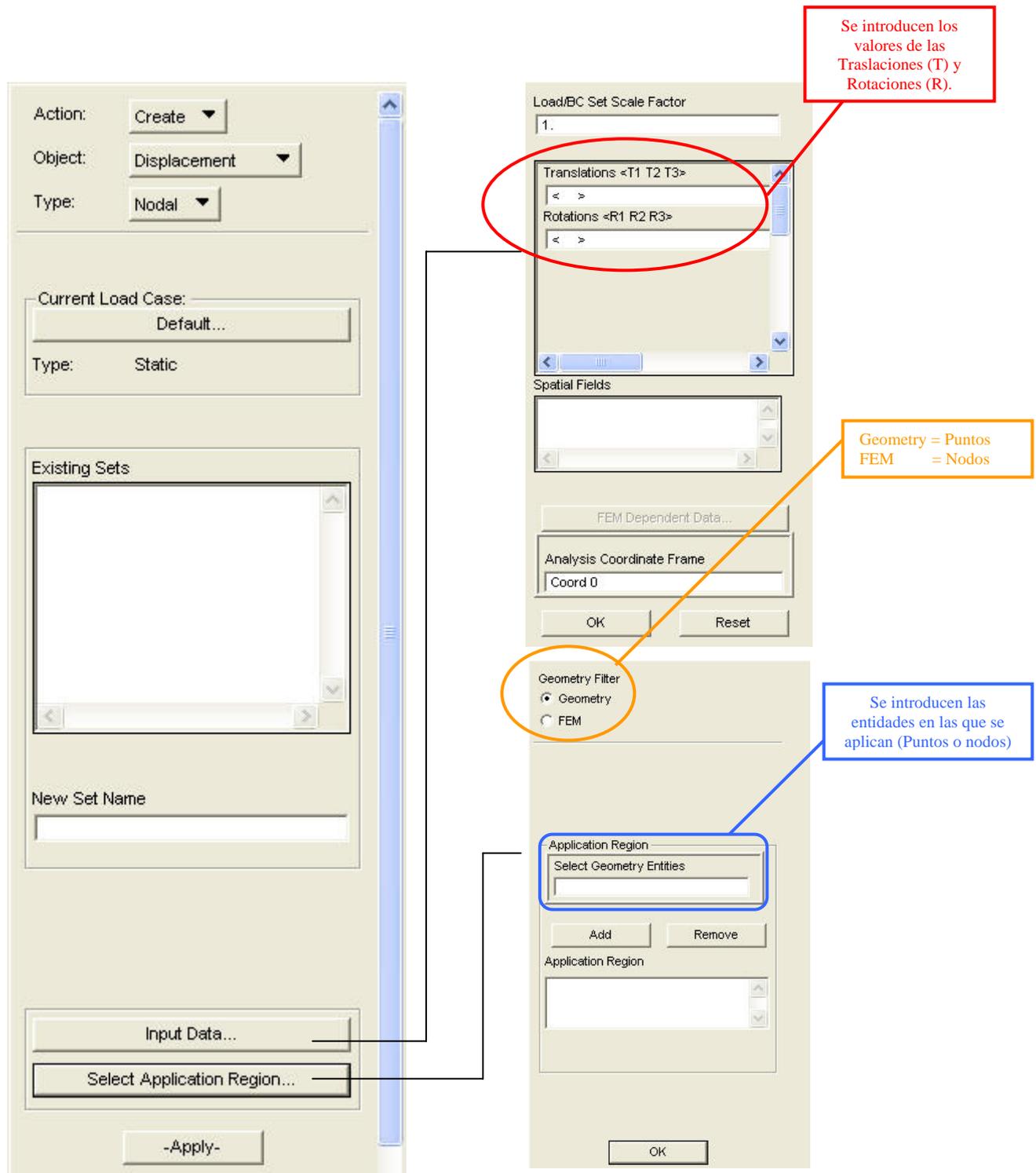
Precisamente el primero de los botones de selección de la ficha de la aplicación sirve para elegir el tipo de condición de contorno a añadir al modelo (ver **Fig. 2.3.3.1**).



**Fig. 2.3.3.1.- Ficha de la aplicación Load and Boundary conditions.**

Para la elaboración de los modelos que se describirán posteriormente sólo es precisa la aplicación de cargas (Force) y condiciones de contorno en

desplazamientos (Displacements). Las fichas de aplicación en las que se muestra la forma de introducirlas se muestran en las **Fig. 2.3.3.3** y **2.3.3.2** respectivamente.



**Fig. 2.3.3.2.- Ficha de introducción de datos para Displacements.**

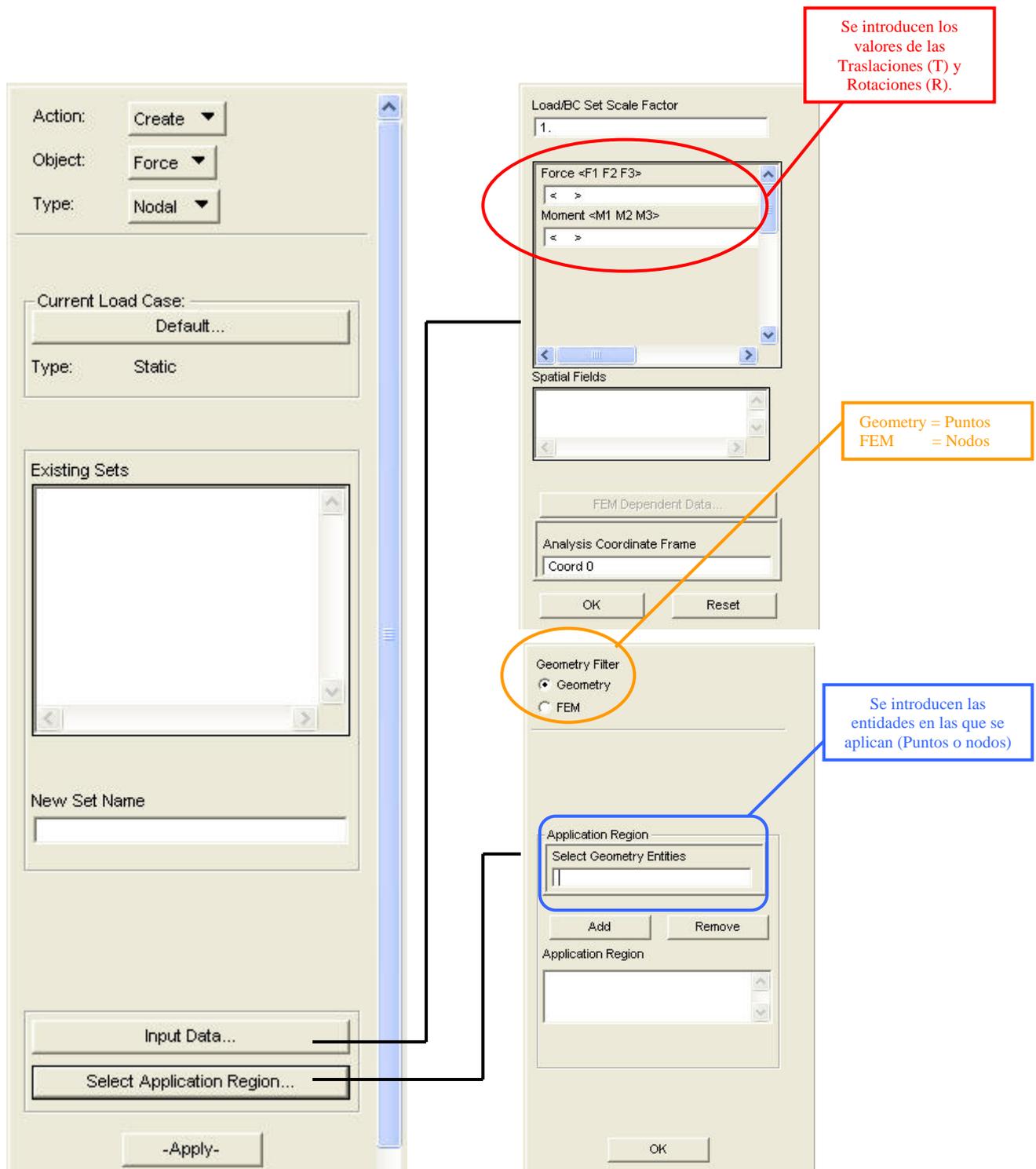
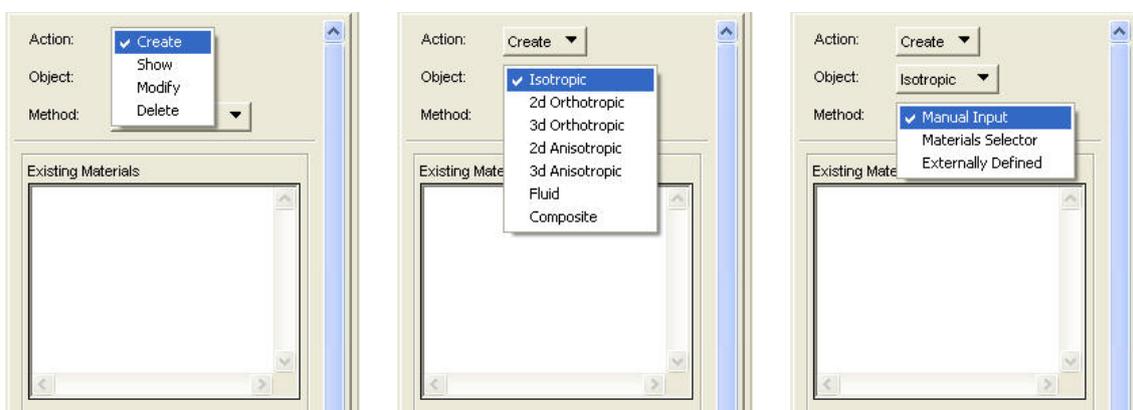


Fig. 2.3.3.3.- Ficha de introducción de datos para Force.



### 2.3.4.- Materials.

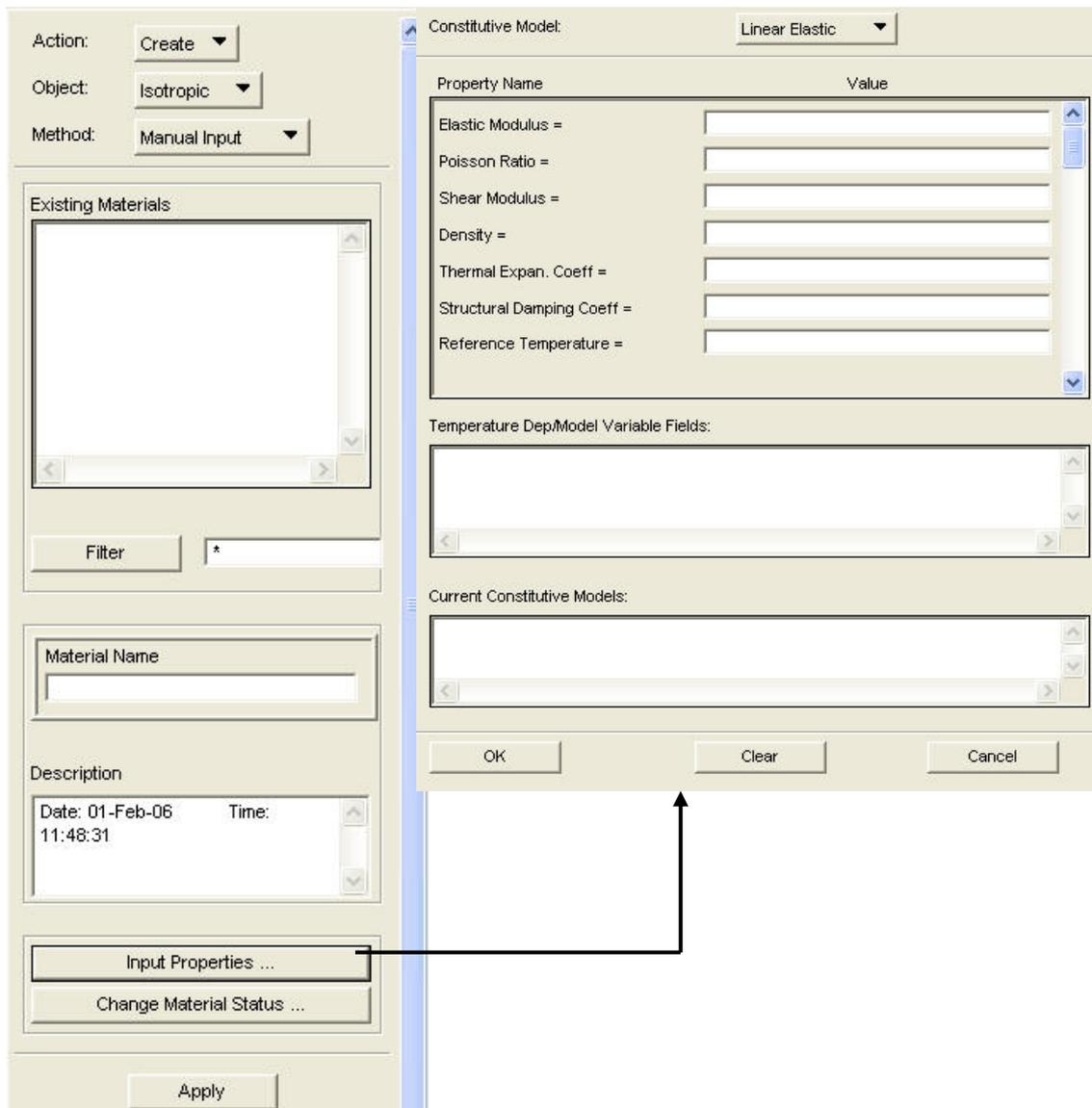
Este botón de aplicación permite introducir las propiedades de los materiales utilizados en el modelo. La **Fig. 2.3.4.1** muestra las posibilidades de selección de los botones asociados a *Action*, *Object* y *Method* (de izda. a dcha.).



**Fig. 2.3.4.1.- Posibilidades de elección para los 3 botones de selección de la aplicación Materials.**

Para este caso particular existían 2 materiales metálicos aleación de aluminio (útil y cama) y magnesio (mesa de vibración), de forma que ambos eran isotrópos (*Object* → *Isotropic*). Además se optó por la introducción manual de las propiedades obtenidas (*Method* → *Manual Input*).

La ficha de introducción de las propiedades puede observarse en la **Fig. 2.3.4.2.**



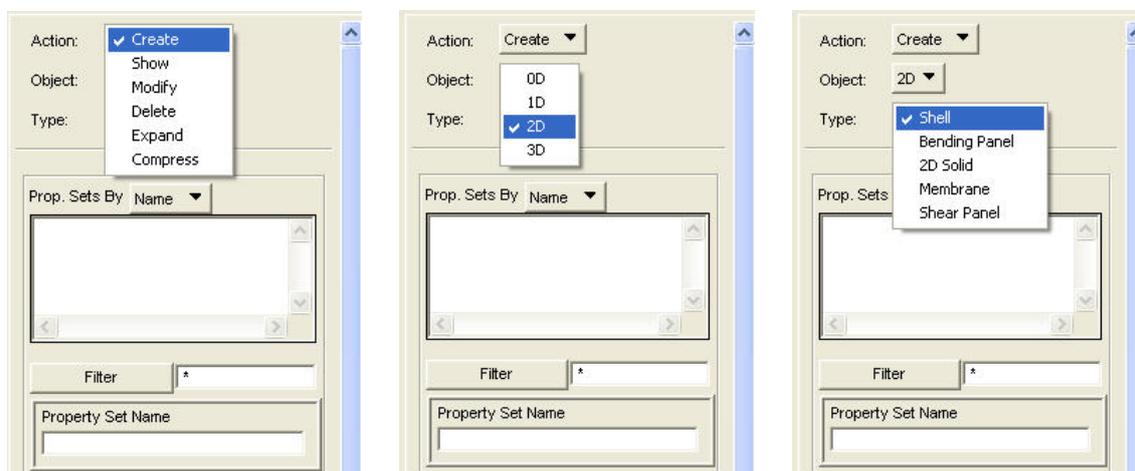
**Fig. 2.3.4.2.- Introducción manual de las propiedades de los materiales que aparecen en el modelo (aplicación Materials).**

### 2.3.5.- Propiedades.



Este botón de aplicación permite asignar las propiedades a entidades geométricas o elementos del modelo. En función de la dimensión de la entidad geométrica o el tipo de elemento las propiedades que pueden introducirse varían.

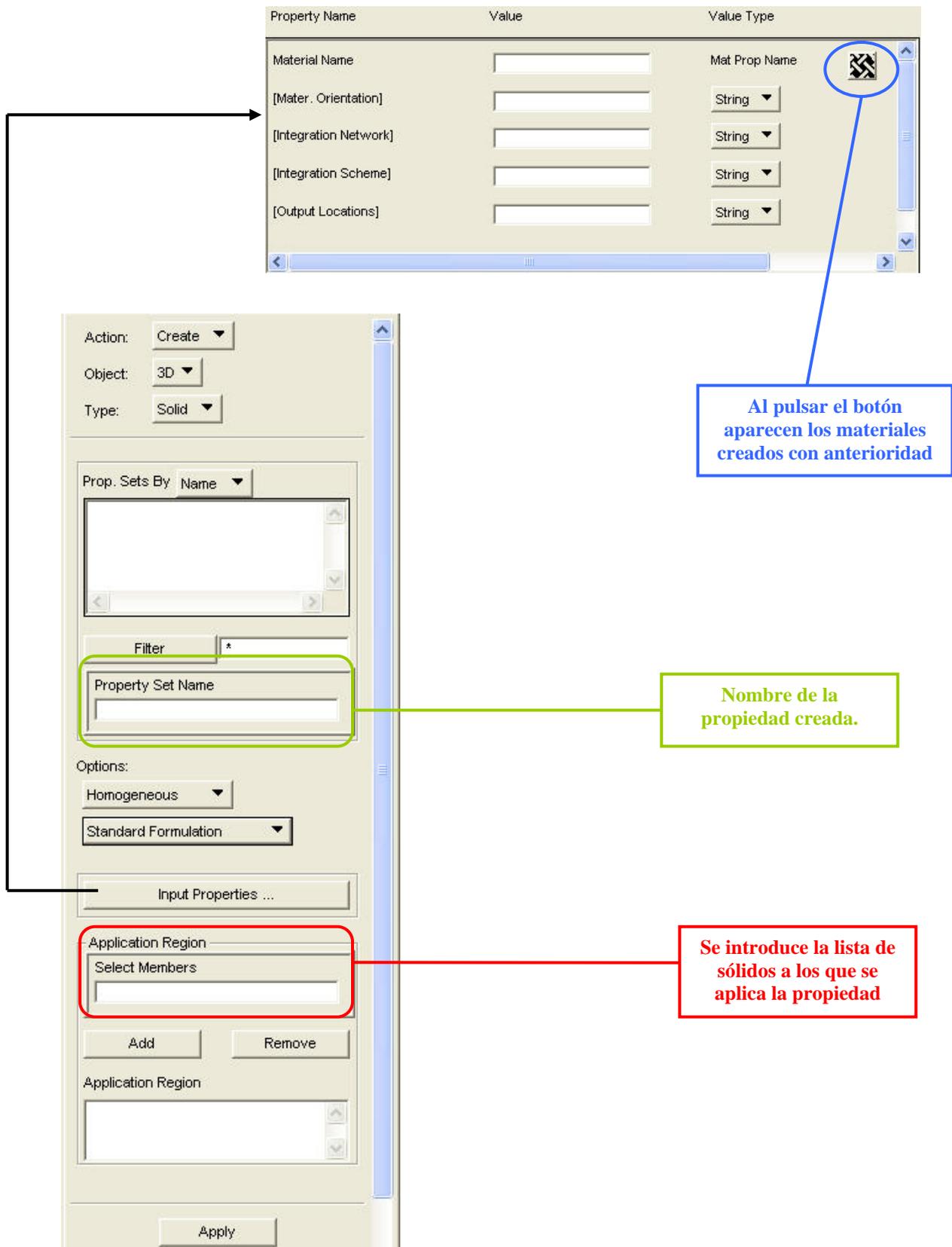
La **Fig. 2.3.5.1** muestra las opciones entre las que se puede elegir asociadas a los 3 botones de selección de la ficha que aparece al activar este botón de selección.



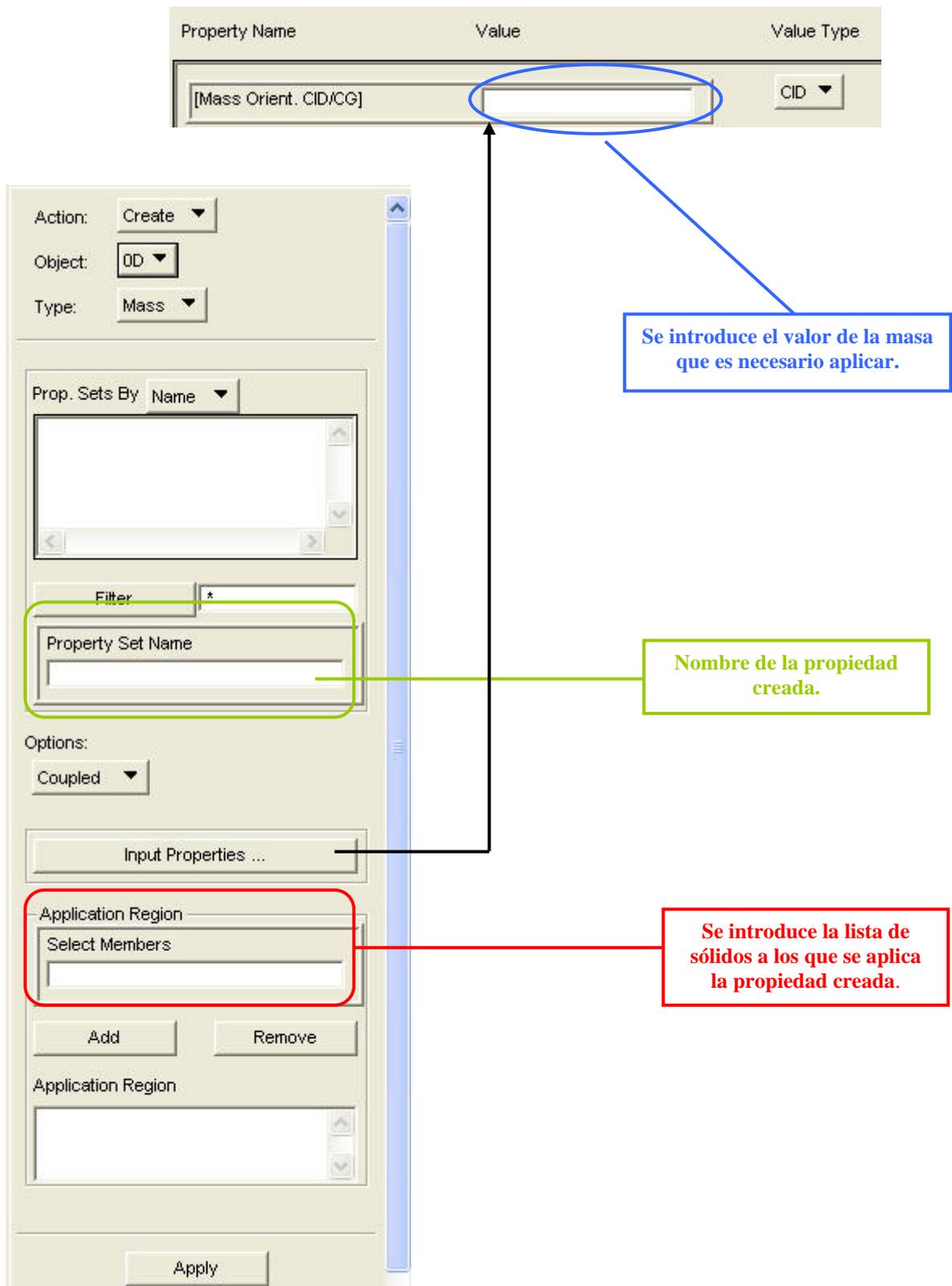
**Fig. 2.3.5.1.- Posibilidades de selección en la ficha Properties para el caso concreto de creación de propiedades para entidades 2D.**

Durante la realización de los modelos mencionados más adelante en el proyecto se crearon 2 tipos de propiedades distintas:

- a) **Propiedades de los sólidos** asociados al útil, la cama y la mesa de vibración (*Properties* → *3D* → *Solid*). Tan sólo se aplicaron los materiales anteriormente creados a los sólidos que constituían cada una de las piezas. (ver **Fig. 2.3.5.2**)
- b) **Propiedades de los elementos puntuales rígidos** requeridos en el *Método de las masas puntuales*. (*Properties* → *0D* → *Mass*). Se creó la propiedad masa asociada a los elementos puntuales creados mediante el botón de aplicación *Elements*, introduciéndose el valor de la misma según las recomendaciones del manual del programa para la aplicación del *Método de las masas puntuales* (ver apartado 2.4).El proceso de introducción se muestra en la **Fig. 2.3.5.3**.



**Fig. 2.3.5.2.- Ficha de creación de propiedades para los sólidos que conformaban las piezas de los modelos.**



**Fig. 2.3.5.3.- Ficha de creación de la propiedad de masa para los elementos puntuales creados para el Método de las grandes masas puntuales.**



### 2.3.6.- Load Cases.

Este botón de aplicación sirve para definir los *casos de carga* a aplicar. Cada caso de carga se define a partir de las condiciones de contorno en desplazamientos, carga, etc., creadas mediante el botón *Load / BCs*. De esta forma, en primer lugar se crearían todas las condiciones de carga y de contorno y mediante este botón de aplicación, podrían combinarse unas y otras dando lugar a distintos problemas.

En los modelos que nos ocupan se crearon distintos casos de carga en función de que se procediera al cálculo de frecuencias naturales (no se precisaban cargas aplicadas) o se realizase un análisis en frecuencia utilizando el *Método de las grandes masas puntuales* (en el que se introducían acciones de tipo *Force*).



### 2.3.7.- Analysis.

Este botón de aplicación permite realizar los distintos tipos de análisis sobre el modelo de EF que ha sido creado a partir de los botones anteriores. La **Fig. 2.3.7.1** muestra la ficha principal de Analysis.

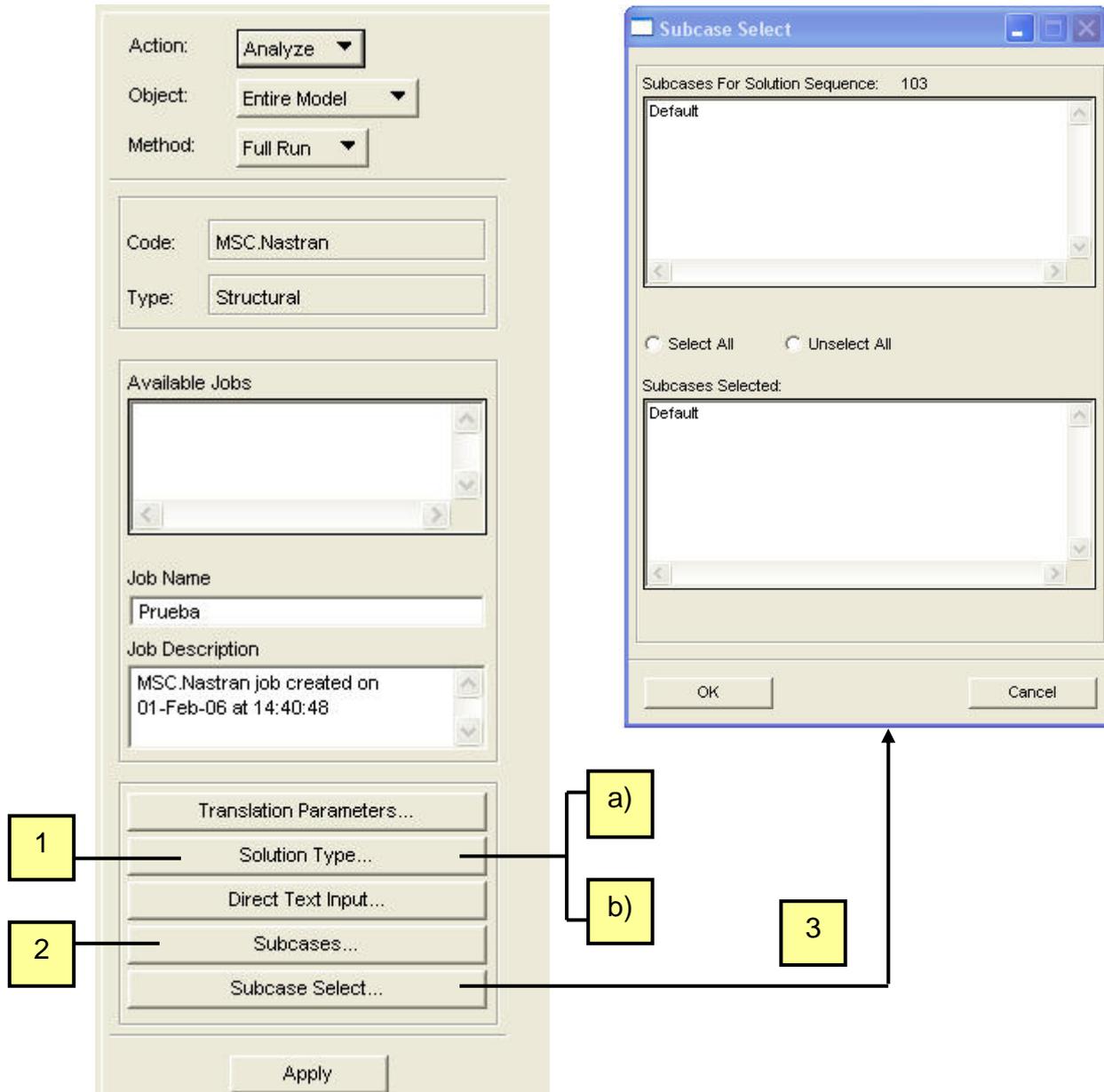
En el caso particular de este proyecto, se realizaron 2 tipos de análisis:

**a) Análisis de frecuencias naturales (*NORMAL MODES*).**

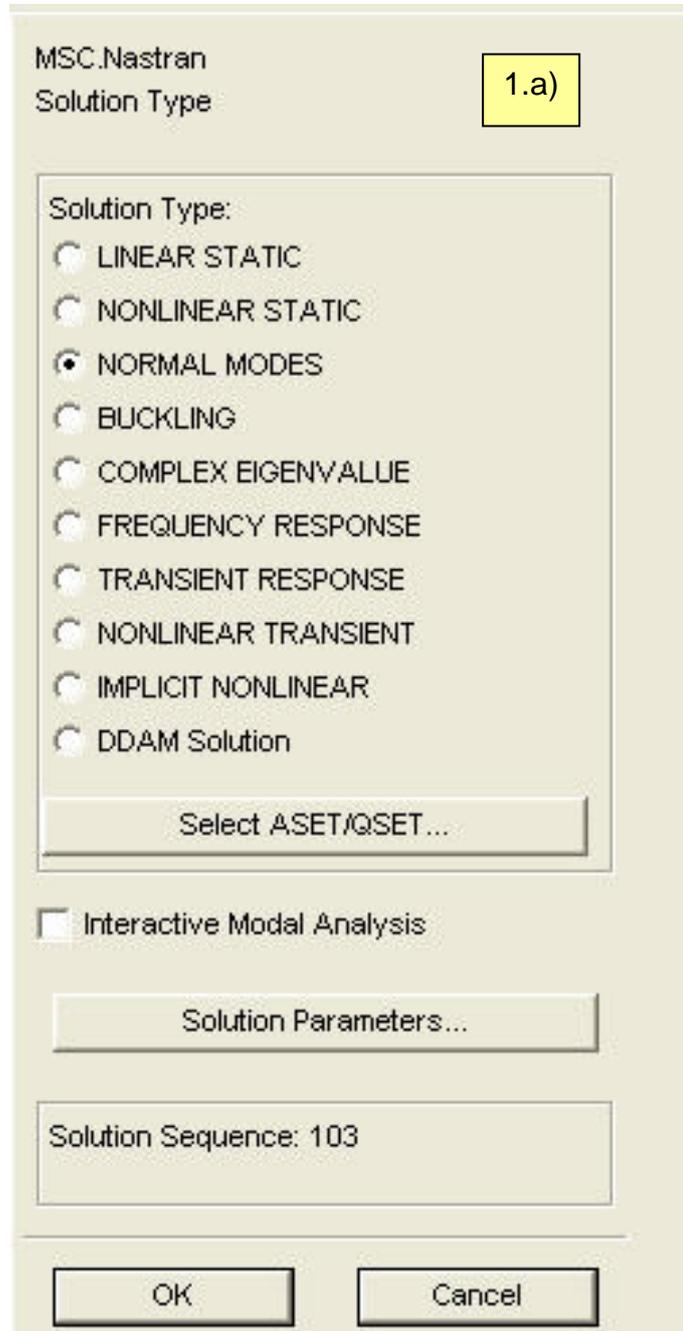
Utilizado para obtener las frecuencias naturales del modelo de EF. En la **Fig. 2.3.7.2** se muestra la configuración de la ficha de *Analysis* para el análisis de frecuencias naturales.

**b) Análisis de respuesta en frecuencia (*FREQUENCY RESPONSE*).**

Se utiliza para obtener la respuesta a una excitación vibratoria. La **Fig. 2.3.7.3** y **2.3.7.4** muestran la configuración de la ficha de *Analysis* para el análisis de respuesta en frecuencia.



**Fig. 2.3.7.1.- Ficha principal del botón Analysis.**



**Fig. 2.3.7.2.- Ficha de selección del tipo de análisis a realizar.**

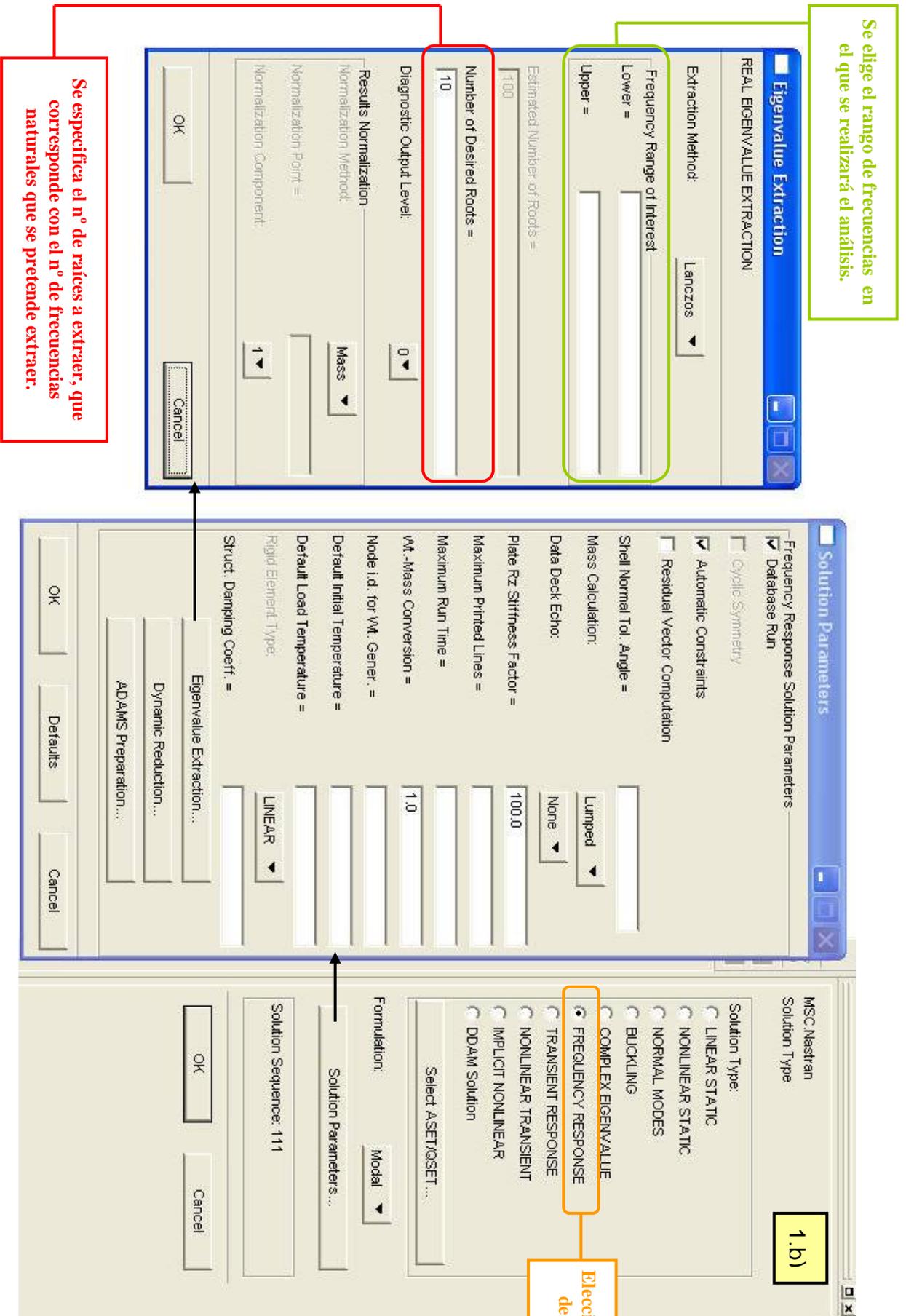


Fig. 2.3.7.3.-Proceso de configuración del análisis en frecuencia (Parte I).

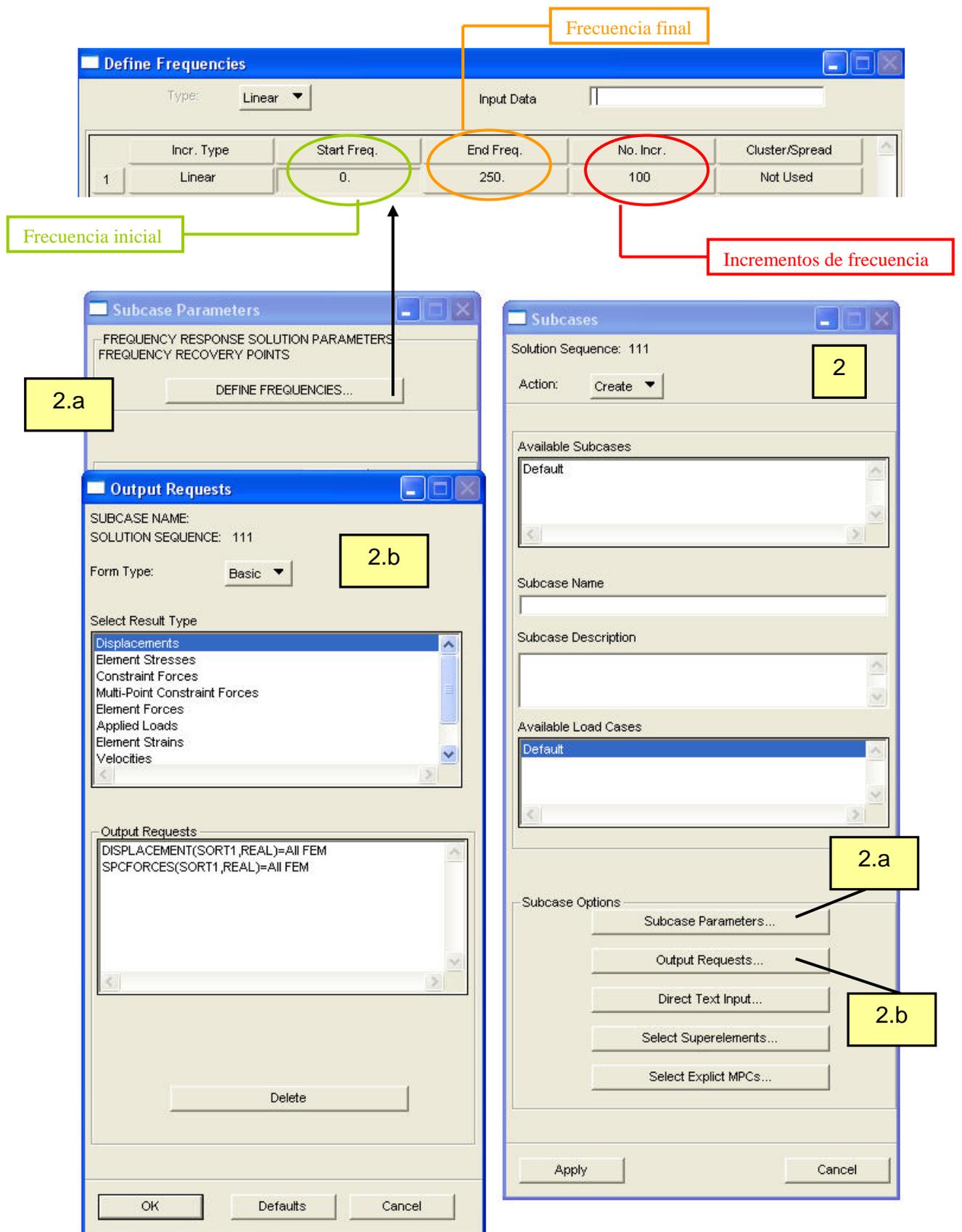


Fig. 2.3.7.4.- Proceso de configuración del análisis en frecuencia (Parte II).

El capítulo 5 de la documentación de MSC.Patran estaba dedicado al **Análisis de Respuesta en frecuencia** y en él se distingue entre 2 tipos de análisis en frecuencia: **1) Análisis de Respuesta en Frecuencia Directo** y **2) Análisis de respuesta en frecuencia modal**.

Sin embargo el capítulo 7, denominado **Movimiento forzado (Enforced Motion)** era el que mejor recogía la forma de simular las características asociadas al movimiento de la base, que es el que mejor recoge los efectos asociados a terremotos, bases móviles y, por similitud, el más adecuado para emular un ensayo en el que el movimiento vibratorio es transferido al conjunto a través de una mesa de vibración (ver apartado **c**).

### **b.1 ) Análisis de respuesta en frecuencia (ARFD).**

En el primero de los casos (**ARFD**) la respuesta estructural es obtenida para frecuencias de excitación discretas mediante la resolución de un conjunto de ecuaciones matriciales acopladas a partir del álgebra compleja.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [B]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{P(\omega)\} e^{i\omega t} \quad [\text{b.1.1}]$$

$[M] \equiv$  Matriz de masa

$\{\ddot{x}(t)\} \equiv$  Vector aceleracion

$[B] \equiv$  Matriz de amortiguamiento

$\{\dot{x}(t)\} \equiv$  Vector velocidad

$[K] \equiv$  Matriz de rigidez

$\{x(t)\} \equiv$  Vector de posicion

$\{P(\omega)\} e^{i\omega t} \equiv$  Excitacion en funcion del tiempo

Para el movimiento armónico (base de cualquier análisis de respuesta en frecuencia) se asume que una solución armónica de la forma:

$$\{x(t)\} = \{u(\omega)\} e^{i\omega t} \quad [\text{b.1.2}]$$

$$\{\dot{x}(t)\} = i\omega \cdot \{u(\omega)\} e^{i\omega t} \quad [\text{b.1.3}]$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2 \cdot \{u(\omega)\} e^{i\omega t} \quad [\text{b.1.4}]$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación [b.1.1] se llega a:

$$\left[ \omega^2 \cdot M + i\omega \cdot B + K \right] \{u(\omega)\} e^{i\omega t} = \{P(\omega)\} e^{i\omega t} \quad [\text{b.1.5}]$$

De donde se deduce:

$$\left[ \omega^2 \cdot M + i\omega \cdot B + K \right] \{u(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad [\text{b.1.6}]$$

Que corresponde a un sistema de ecuaciones con variables acopladas que es lo que se encarga de resolver numéricamente el software en este caso.

### **b.2.- Análisis de respuesta en frecuencia Modal (ARFM).**

El **Análisis de Respuesta en Frecuencia Modal (ARFM)**, sin embargo, es una aproximación alternativa a la respuesta en frecuencia de una estructura. Este método utiliza las formas derivadas de los distintos modos de vibración de la estructura para reducir el tamaño, desacoplar ecuaciones de movimiento y conseguir una solución numérica más eficiente. Es por ello que este método incluye un análisis modal previo del modelo, a partir del cual (tras las simplificaciones adecuadas) construye la solución.

La ecuación de partida vuelve a ser [b.1.1] y lo que cambia es la forma de resolverla:

En primer lugar se realiza una transformación de coordenadas físicas  $u(\omega)$  a coordenadas modales  $\xi(\omega)$ , estando constituida la matriz de transformación por las formas de los modos de vibración  $[\phi]$ , de forma que:

$$\{x\} = [\phi] \{\xi(\omega)\} e^{i\omega t} \quad [\text{b.2.1}]$$

La introducción de las coordenadas modales en la ecuación hace que desaparezca el término debido al amortiguamiento  $[B]$  quedando [b.1.1] reducida, una vez utilizadas [b.1.2], [b.1.3] y [b.1.4], a:

$$-\omega^2 \cdot [M] \{x\} + [K] \{x\} = \{P(\omega)\} \quad [\text{b.2.2}]$$

Si se sustituye la expresión de  $\{x\}$  en función de las formas de los modos de vibración (únicamente válida para este tipo de resolución) que viene dada por [b.2.1] se obtiene:

$$-\omega^2 \cdot [M][\phi] \{\xi(\omega)\} + [K][\phi] \{\xi(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad [\text{b.2.3}]$$

En este punto se tienen las ecuaciones en términos de las coordenadas modales pero aún permanecen acopladas. Para conseguir el desacoplamiento, basta premultiplicar por  $[\phi^T]$ :

$$-\omega^2 [\phi^T] \cdot [M][\phi] \{\xi(\omega)\} + [\phi^T] \cdot [K][\phi] \{\xi(\omega)\} = [\phi^T] \cdot \{P(\omega)\} \quad [\text{b.2.4}]$$

donde,,  $[\phi^T] [M][\phi] \equiv$  Matriz de masa modal (generalizada)  
 $[\phi^T] [K][\phi] \equiv$  Matriz de rigidez modal (generalizada)  
 $[\phi^T] \{P\} \equiv$  Vector de fuerzas modal

La ortogonalidad de los modos de vibración hace que las matrices de masa y rigidez modales sean matrices diagonales, con lo que el número de elementos a tener en cuenta es mucho menor que antes, cuando las matrices eran llenas y además las ecuaciones derivadas de este hecho están desacopladas. De esta forma, para cada grado de libertad puede escribirse:

$$-\omega^2 \cdot m_i \cdot \xi_i(\omega) + k_i \cdot \xi_i(\omega) = p_i(\omega) \quad [\text{b.2.5}]$$

donde:

- $m_i \equiv$  Masa modal i-ésima
- $k_i \equiv$  Rigidez modal i-ésima
- $p_i \equiv$  Fuerza modal i-ésima

## 2.4.- MOVIMIENTO FORZADO. EL MÉTODO DE LAS GRANDES MASAS CONCENTRADAS.

El *movimiento forzado (Enforced Motion)* se usa cuando se especifica la base del movimiento en lugar de 0, junto con, una serie de cargas aplicadas. Una aplicación bastante común es la excitación provocada por un terremoto sobre un edificio. En este caso no hay cargas aplicadas sino que la base del edificio se desplaza a uno y otro lado de forma alternativa en relación a un desplazamiento forzado o una historia de aceleraciones.

MSC.Nastran no dispone de ningún procedimiento automático para prescribir un movimiento forzado. Para el análisis numérico de estos casos de movimiento de la base con MSC.Nastran se aplica el “*Método de las grandes masas concentradas*” al *Análisis de respuesta en frecuencia*, anteriormente descrito. El “*Método de las grandes masas concentradas*” se basa en lo siguiente:

- Si una masa de gran valor ( $m_0$ ) que es varios órdenes de magnitud mayor que la masa de la estructura completa a analizar se conecta a un determinado grado de libertad y posteriormente se aplica una carga  $p$  asociada a ese mismo grado de libertad, entonces es posible aproximar la aceleración experimentada por ese grado de libertad como:

$$\ddot{u} = \frac{1}{m_0} p \quad [2.4.1]$$

, donde  $\ddot{u} \equiv$  *aceleración asociada al grado de libertad*. En otras palabras, la carga que produce la aceleración deseada  $\ddot{u}$  es aproximadamente:

$$p = m_0 \cdot \ddot{u} \quad [2.4.2]$$

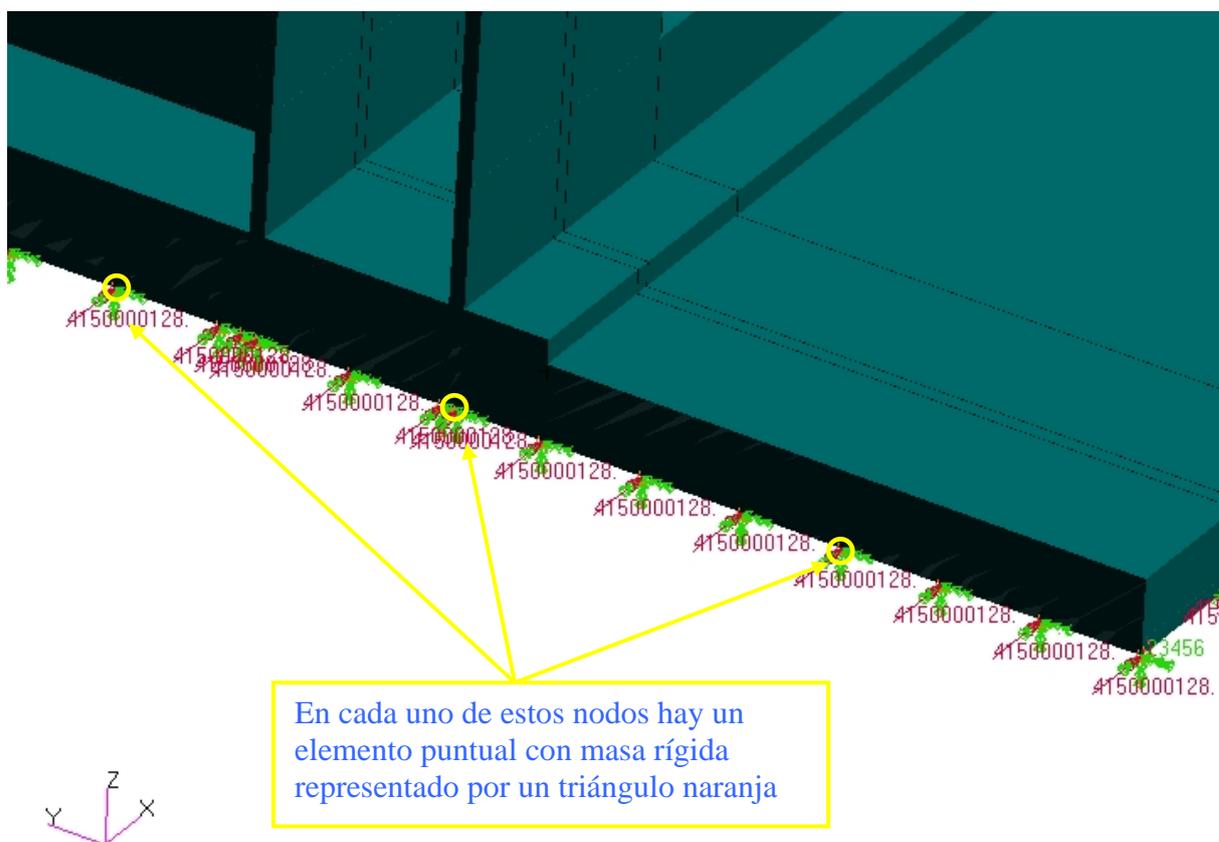
- La bondad de esta aproximación es mayor cuanto más grande sea  $m_0$  con respecto a la masa de la estructura. El único límite para el tamaño de  $m_0$  viene dado por la precisión de la computadora. Así, los desarrolladores del programa (MSC) recomiendan que el valor de  $m_0$  sea del orden de  $10^6$  veces la masa de la estructura completa objeto de estudio.
- El método de las grandes masas concentradas para el caso de análisis de respuesta en frecuencia se implementa colocando masas de gran valor ( $m_0$ ) en todos los grados de libertad en los que se va a forzar el movimiento y aplicando en esos grados de libertad cargas dinámicas cuyo valor se obtendrá a partir de la aceleración impuesta utilizando la ecuación [2.4.2]. En caso de que no fuera conocida la aceleración aplicada sino el desplazamiento la ecuación [2.4.2] puede seguir siendo útil realizando las modificaciones que a continuación se muestran:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{u} = i\omega \cdot \dot{u} \\ \dot{u} = i\omega \cdot u \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{u} = -\omega^2 \cdot u \quad \rightarrow \quad p = m_0 \cdot \ddot{u} = -\omega^2 \cdot m_0 \cdot u$$

El nuevo factor  $\omega^2$  puede obtenerse a partir de la tabla de datos que elabora el programa en la que se especifica un rango discreto de frecuencias en el que se realiza el análisis (frecuencia inicial, frecuencia final e incrementos o número de frecuencias intermedias).

- Así pues, el valor de la carga a aplicar es proporcional a la masa del conjunto a ensayar y su dirección y sentido viene determinado por la dirección del movimiento vibratorio
- La masa de los elementos se determina a partir del volumen del mismo (calculado por el programa) sin más que multiplicar éste último por la densidad y en lo que a la ubicación de masas concentradas se refiere basta con crear elementos puntuales en los nodos asociados a la superficie inferior de la mesa de vibración, para posteriormente crear una

propiedad de tipo masa (donde se especificaría el valor de la misma, recordemos, al menos  $10^6$  veces la masa de la estructura) y aplicarla sobre estos elementos puntuales. De esta forma, tanto las cargas como las condiciones de contorno estarán aplicadas sobre estos elementos puntuales de elevada masa habiéndose sentado las bases para la utilización del *método de las grandes masas puntuales* para la simulación de los ensayos de vibración pertinentes.



**Fig. 2.4.1.- Detalle de la aplicación de cargas y condiciones de contorno sobre los elementos puntuales de elevada masa.**