

Capítulo 3

LAS VIBRACIONES

3.1 Introducción a las vibraciones

El estudio de las vibraciones mecánicas, también llamado mecánica de las vibraciones, es una rama de la mecánica, o más generalmente de la ciencia, que estudia los movimientos oscilatorios de los cuerpos o sistemas y de las fuerzas asociadas.

Por vibración se entiende el movimiento de vaivén que ejercen las partículas de un cuerpo debido a una excitación.

Para que un cuerpo o sistema pueda vibrar debe poseer características potenciales y cinéticas. Si un cuerpo no tiene la capacidad de vibrar se puede unir a otro y formar un sistema que vibre; por ejemplo, una masa y resorte o muelle donde la masa posee características energéticas cinéticas, y el resorte, características energéticas potenciales.

Nuestro sistema vibratorio estará formado por una viga, una masa y dos resortes donde la viga y la masa forman la parte cinética y el cambio de posición y los muelles la parte potencial.

Por vibración mecánica se entiende el movimiento de vaivén de las moléculas de un cuerpo o sistema debido a que posee características energéticas cinéticas y potenciales.

En cualquiera que sea el caso, la excitación es el suministro de energía.

Generalmente, las vibraciones mecánicas se pueden dividir en:

- 1) Vibraciones libres, cuando un sistema vibra debido a una excitación instantánea.
- 2) Vibraciones forzadas, cuando un sistema vibra debido a una excitación externa.

Cuando el comportamiento vibratorio de un sistema se puede representar por medio de una ecuación matemática entonces se dice que la vibración es determinística, pero si se tiene que determinar por ecuaciones probabilísticas entonces la vibración es probabilística.

Si el comportamiento determinístico se repite de igual forma después de cierto tiempo entonces la vibración es periódica, de lo contrario es no periódica.

Términos básicos referidos a la vibración son:

- Frecuencia natural: es la frecuencia propia de un cuerpo o sistema al poseer elementos elásticos o inerciales. Es la frecuencia resultante de la vibración libre.
- Resonancia: es cuando la excitación es de igual frecuencia a la natural.
- Excitación: es cualquier choque, fuerza o desplazamiento que le apliquemos a nuestro sistema mecánico para sacarlo de su estado de equilibrio.

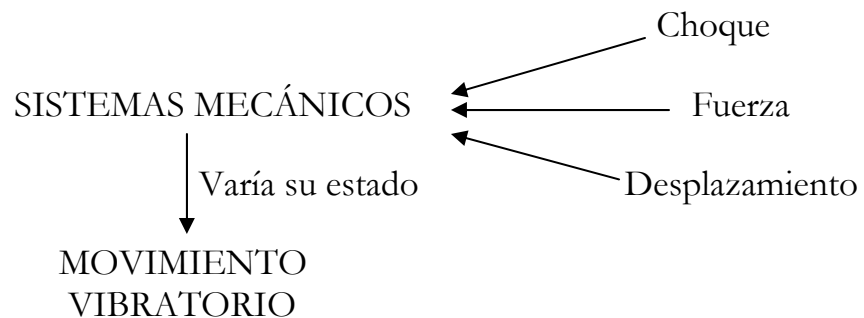


Figura n° 1: Esquema de vibración

- Grado de libertad: es el mínimo número de coordenadas requeridas e independientes para determinar completamente la posición de todas las partes de un sistema en un instante. En nuestro sistema serán infinitos.

Aunque los sistemas vibratorios generalmente trabajan como sistemas forzados el análisis de sistemas libres adquiere importancia debido a que uno de los problemas es la resonancia, de aquí que el cálculo de frecuencias naturales es importante.

Con todo esto la respuesta a la pregunta ¿por qué medimos las vibraciones? se podría responder con las siguientes respuestas:

- a) Para verificar que las frecuencias y amplitud de la vibración, no excedan de los límites de ruptura de materiales.
- b) Para ser capaces de aislar vibraciones.
- c) Para construir o comprobar modelos matemáticos de estructuras (análisis modal).

3.2. Introducción a las vibraciones laterales o transversales en vigas

El estudio de las vibraciones laterales de vigas, como cuerpos elásticos con infinitos grados de libertad, y, por tanto, con infinitos modos naturales de vibrar, ofrece el mayor interés en el análisis dinámico de todo tipo de estructuras.

Se establecen las siguientes hipótesis:

- a) Las deformaciones elásticas de flexión son pequeñas.
- b) La viga o pieza tiene un eje elástico por el que pasan las cargas y no se produce torsión.
- c) El eje elástico coincide con el eje de los c.d.m. de las secciones rectas de la viga.
- d) Las secciones rectas, perpendiculares al eje elástico, tienen sus ejes principales dirigidos vertical y horizontalmente.
- e) Las cargas aplicadas se consideran verticales y pasan por el eje elástico.
- f) Las perturbaciones iniciales se toman verticales, siendo de igual valor para cualquier punto de una sección, que las causadas en el centro de cortadura.
- g) Se desconsidera la flecha de cortadura (deformaciones debido al cortante) y también la inercia rotatoria de las secciones rectas al girar, si se admite que las dimensiones transversales son muy pequeñas respecto a la longitud.

Con las hipótesis anotadas para la viga flexionada en el plano vertical, que se supone de simetría, denotamos la deflexión vertical dinámica, a partir de la posición de equilibrio estático, por $y = y(x, t)$, que depende de la abscisa x y el tiempo t (ver figura nº 2).

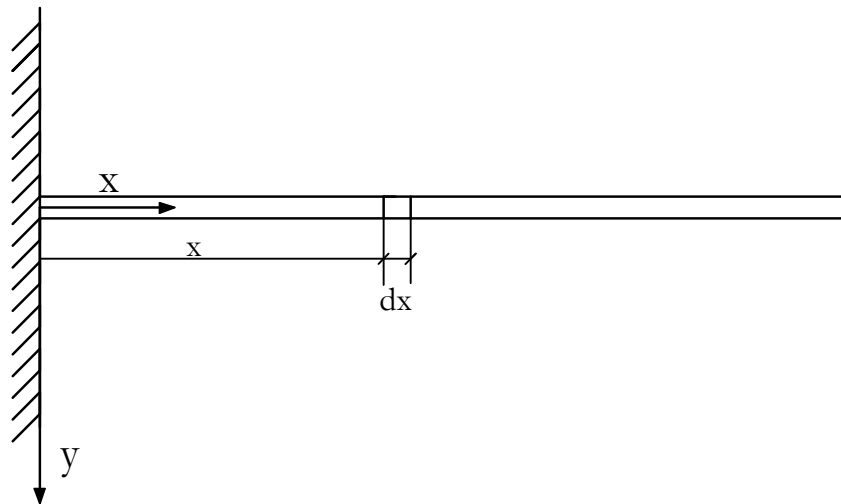


Figura n° 2: Ejes de coordenadas x-y.

Debido al peso de la viga existirá una deformación inicial que suponemos pequeña y en torno de la cual consideramos las vibraciones del sistema, pudiendo prescindir de las fuerzas de la gravedad y de las fuerzas elásticas debidas a los esfuerzos iniciales, que forman un sistema de fuerzas equilibrado en todo instante.

Consideraremos vibración libre, ya que nuestro sistema estará perturbado por una excitación en este caso como desplazamiento inicial.

Para el estudio de la viga, hay que hacer que el sistema cumpla tres condiciones:

- 1) Ecuaciones de equilibrio
- 2) Ley de comportamiento
- 3) Compatibilidad de movimiento

Planteando las ecuaciones de equilibrio e introduciendo en ellas la ley de comportamiento, se obtiene la ecuación de movimiento. Lo último será cumplir la condición de compatibilidad que se hará imponiendo las condiciones de contorno.

Consideraremos las convenciones de signo para los esfuerzos cortantes (V) y flectores (M) de la figura n° 3:

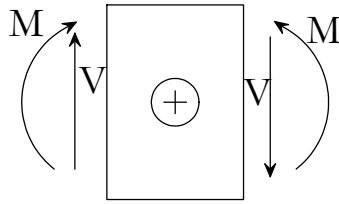


Figura n° 3: Convenio de signo para los esfuerzos

3.2.1 Equilibrio de un diferencial de viga.

- Sea $m_v = m_v(x)$ la masa por unidad de longitud de la viga;
 $EI = EI(x)$ el módulo de rigidez a flexión;
 E módulo elástico de Young;
 I momento de inercia central horizontal de la sección recta;
 V la fuerza cortante;
 M el momento flector;
 y la deflexión vertical a partir de la posición de equilibrio estático.

Planteando el equilibrio de un elemento dx :

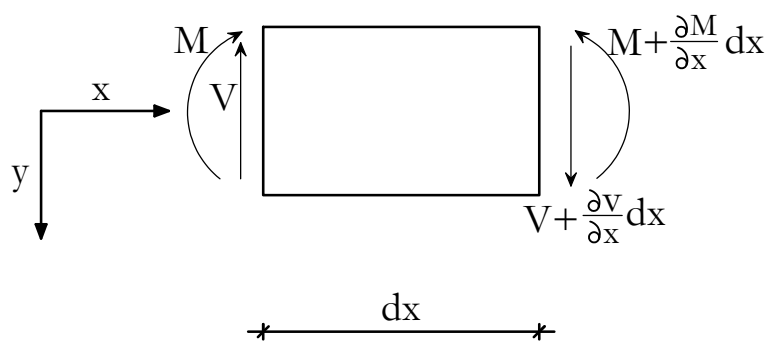


Figura n° 4: Equilibrio de un elemento dx .

Equilibrio de fuerzas:

$$V + \frac{\partial V}{\partial x} dx - V - m_v(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = 0. \quad [\text{ec.1}]$$

Equilibrio de momentos:

$$M + Vdx - M - \frac{\partial M}{\partial x} dx = 0. \quad [\text{ec.2}]$$

Simplificando, estas ecuaciones pueden expresarse:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = m_v(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad [\text{ec.3}]$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}. \quad [\text{ec.4}]$$

Derivando la [ec.4] respecto a x y sustituyendo en la [ec.3], resulta

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m_v(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad [\text{ec.5}]$$

Teniendo en cuenta la ley de comportamiento, que puede expresarse (según nuestro sistema de coordenadas y convenios sobre el signo de los esfuerzos):

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{EI(x)}, \quad [\text{ec.6}]$$

que derivando dos veces el momento flector respecto a x y cambiando de signo queda:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right). \quad [\text{ec.7}]$$

Introduciendo la [ec.7] en la [ec.5] se tiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m_v(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad [\text{ec.8}]$$

que es la ecuación de movimiento en el caso de vibraciones transversales de vigas, con las hipótesis indicadas anteriormente.

Si las características elásticas y másicas, EI y m_v , son constantes a lo largo de la longitud de la viga, la [ec.8] puede expresarse:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_v \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad [\text{ec.9}]$$

El problema queda definido al completar la ecuación diferencial con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno, como se describe a continuación.

- Las condiciones iniciales están determinadas al dar la perturbación inicial mediante dos funciones $F(x)$, $f(x)$, de forma tal que:

$$\text{para } t = 0 \quad y(x,0) = F(x), \quad [\text{ec.10}]$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = f(x). \quad [\text{ec.11}]$$

- Las condiciones de contorno dependen de las restricciones en los apoyos.