Capítulo 4

VIGA CON CONDICIONES DE CONTORNO NO SIMPLES

4.1 Planteamiento

El sistema que se va a estudiar está compuesto por el acoplamiento entre un sistema continuo como es la viga y un sistema discreto, que es el formado por el sistema masa-muelle. Este sistema está representado en la figura nº 5.

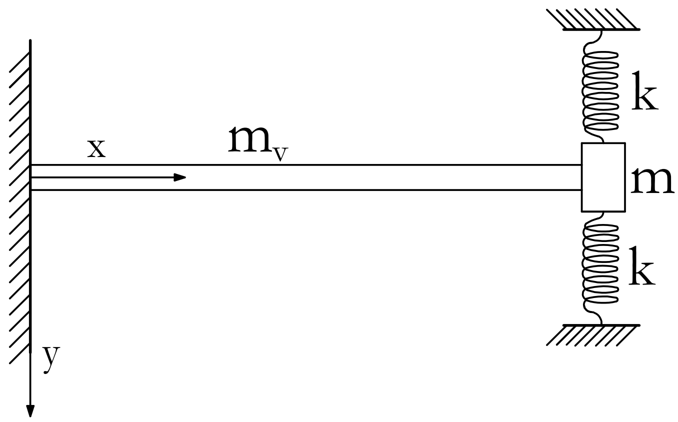

Figura nº 5: El sistema de estudio.

La ecuación del movimiento ya la teníamos con la [ec.9]. Nos faltan las condiciones de contorno y las condiciones iniciales.

Las condiciones de contorno son las siguientes:

- para $x = 0$

$$y(0,t) = 0\,, \qquad [\text{ec},12]$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = 0\,, \qquad [\text{ec}.13]$$

- para $x = L$

$$EI\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=L} = m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=L} + 2ky(L,t)\,, \qquad [\text{ec}.14]$$

$$EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=L} = 0 . \qquad \text{[ec.15]}$$

Condiciones iniciales:

- para $t = 0$

$$y(x,0) = D(x), \qquad \text{[ec.16]}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 . \qquad \text{[ec.17]}$$

4.2 La condición inicial en desplazamiento

La condición inicial D(x) podría ser cualquiera, así que hemos optado por una ecuación que cumpla la ecuación de la elástica de una viga en voladizo sin cargas. Es decir, que cumpla $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$.

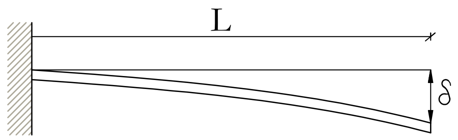

Figura nº 6: Viga en voladizo sin cargas.

Será un polinómio cúbico, $D(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, que además tiene que ser compatible con las condiciones de contorno siguientes:

$D(0)=0$, $D(L)=\delta$,
$D'(0)=0$, $D''(L)=0$. [ec.18]

Resolvemos:

$$D = 0,$$
$$C = 0, \qquad \text{[ec.19]}$$
$$\left.\begin{array}{l} AL^3 + BL^2 = \delta \\ 6AL + 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{\delta}{2L^3};\, B = \frac{3\delta}{2L^2} .$$

con lo que queda

$$\boxed{D(x) = -\frac{\delta}{2L^3}x^3 + \frac{3\delta}{2L^2}x^2} \qquad \text{[ec.20]}$$

4.3 Método para la solución de la ecuación de movimiento.

Resolvemos por separación de variables. Haciendo $y(x,t)=\phi(x)\cdot y(t)$, se tiene:

$$\phi^{IV}(x)\cdot y(t)+\frac{m_v}{EI}\phi(x)\cdot \ddot{y}(t)=0 . \qquad \text{[ec.21]}$$

Separando los términos función de x de los que son función de t, queda:

$$\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)}=-\frac{m_v}{EI}\frac{\ddot{y}(t)}{y(t)}=\lambda^4 , \qquad \text{[ec.22]}$$

de donde

$$\ddot{y}(t)+\frac{EI}{m_v}\lambda^4 y(t)=0 , \qquad \text{[ec.23]}$$

$$\phi^{IV}(x)-\lambda^4\phi(x)=0 . \qquad \text{[ec.24]}$$

De la [ec.23] se obtiene:

$$y(t)=c\cos(\omega t-\varphi) , \qquad \text{[ec.25]}$$

donde c y φ dependen de las condiciones iniciales.

Sustituyendo la [ec.25] en la [ec.23] resulta:

$$-c\omega^2\cos(\omega t-\varphi)+\frac{EI}{m_v}\lambda^4 c\cos(\omega t-\varphi)=0 , \qquad \text{[ec.26]}$$

$$-\omega^2+\frac{EI}{m_v}\lambda^4=0 , \qquad \text{[ec.27]}$$

y así

$$\omega^2=\lambda^4\frac{EI}{m_v} \longrightarrow \lambda^4=\frac{\omega^2 m_v}{EI} . \qquad \text{[ec.28]}$$

La [ec.24] tendrá una solución del tipo:

$$\phi(x)=De^{rx} , \qquad \text{[ec.29]}$$

que, sustituida en la [ec.24], queda:

$$r^4-\lambda^4=0 , \qquad \text{[ec.30]}$$

de donde

$$r = \begin{cases} \pm\lambda \\ \pm i\lambda . \end{cases}$$

La solución será por tanto:

$$\phi(x) = D_1 e^{\lambda x} + D_2 e^{-\lambda x} + D_3 e^{i\lambda x} + D_4 e^{-i\lambda x}, \qquad [ec.31]$$

que puede expresarse:

$$\phi(x) = B_1 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x) + B_3 \sinh(\lambda x) + B_4 \cosh(\lambda x), \qquad [ec.32]$$

donde B_1, B_2, B_3 y B_4 dependen de las condiciones de contorno del sistema.

Mediante la aplicación de las dos condiciones en cada extremo se obtienen tres de estas constantes en función de la otra y una ecuación de frecuencia, a partir de la que se calcula λ y por tanto ω.

4.4. Aplicación de las condiciones de contorno

Sabemos que $y(x,t) = \phi(x) \cdot y(t)$, así que vamos a ver cuales serán nuestras condiciones de contorno.

En el extremo empotrado, se cumple que

- $y(0,t) = 0$,

lo que significa que $\phi(0)y(t) = 0$:

$$\boxed{\phi(0) = 0} \qquad [ec.33]$$

- $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$,

lo que significa que $\phi'(0)y(t) = 0$:

$$\boxed{\phi'(0) = 0} \qquad [ec.34]$$

En el otro extremo se cumple que:

- $EI\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=L} = m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=L} + 2ky(L,t)$,

lo que significa que

$$EIy(t)\phi'''(L) = m\ddot{y}\phi(L) + 2ky(t)\phi(L), \qquad \text{[ec.35]}$$

y ya que $y(t) = c\cos(\omega t - \varphi)$, $\ddot{y}(t) = -c\omega^2\cos(\omega t - \varphi) = -\omega^2 y(t)$, que sustituido en la condición de contorno anterior nos lleva a

$$\boxed{EI\phi'''(L) = -m\omega^2\phi(L) + 2k\phi(L)} \qquad \text{[ec.36]}$$

- $EI\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=L} = 0$

que significa que $EIy(t)\phi''(L) = 0$:

$$\boxed{\phi''(L) = 0} \qquad \text{[ec.37]}$$

Para poder utilizar las condiciones de contorno nos hará falta:

$$\phi(x) = B_1\sin(\lambda x) + B_2\cos(\lambda x) + B_3\sinh(\lambda x) + B_4\cosh(\lambda x), \qquad \text{[ec.38]}$$

$$\phi'(x) = B_1\lambda\cos(\lambda x) - B_2\lambda\sin(\lambda x) + B_3\lambda\cosh(\lambda x) + B_4\lambda\sinh(\lambda x), \qquad \text{[ec.39]}$$

$$\phi''(x) = -B_1\lambda^2\sin(\lambda x) - B_2\lambda^2\cos(\lambda x) + B_3\lambda^2\sinh(\lambda x) + B_4\lambda^2\cosh(\lambda x), \qquad \text{[ec.40]}$$

$$\phi'''(x) = -B_1\lambda^3\cos(\lambda x) + B_2\lambda^3\sin(\lambda x) + B_3\lambda^3\cosh(\lambda x) + B_4\lambda^3\sinh(\lambda x). \qquad \text{[ec.41]}$$

Particularizando la [ec.38] y la [ec.39] en 0, y la [ec.40] y [ec.41] en L, y sustituyendo estas ecuaciones particularizadas en las respectivas condiciones de contorno dadas en las ecuaciones [ec.33], [ec.34], [ec.36] y [ec.37], obtenemos:

$$B_2 + B_4 = 0, \qquad \text{[ec.42]}$$

$$B_1 + B_3 = 0, \qquad \text{[ec.43]}$$

$$\begin{aligned} &EI\lambda^3(-B_1\cos(\lambda L) + B_2\sin(\lambda L) + B_3\cosh(\lambda L) + B_4\sinh(\lambda L)) = \\ &(-m\omega^2 + 2k)(B_1\sin(\lambda L) + B_2\cos(\lambda L) + B_3\sinh(\lambda L) + B_4\cosh(\lambda L)), \end{aligned} \qquad \text{[ec.44]}$$

$$-B_1\sin(\lambda L) - B_2\cos(\lambda L) + B_3\sinh(\lambda L) + B_4\cosh(\lambda L) = 0. \qquad \text{[ec.45]}$$

Resolviendo de la [ec.42] a la [ec.45] se obtiene:

$$B_2 = -B_4, \qquad \text{[ec.46]}$$

$$B_1 = -B_3. \qquad [ec.47]$$

Sustituyendo la [ec.46] y la [ec.47] en [ec.44] y [ec.45] tenemos

$$B_3 \sin(\lambda L) + B_4 \cos(\lambda L) + B_3 \sinh(\lambda L) + B_4 \cosh(\lambda L) = 0, \qquad [ec.48]$$

y

$$\begin{aligned} & EI\lambda^3 (B_3 \cos(\lambda L) - B_4 \sin(\lambda L) + B_3 \cosh(\lambda L) + B_4 \sinh(\lambda L)) = \\ & (2k - m\omega^2)(-B_3 \sin(\lambda L) - B_4 \cos(\lambda L) + B_3 \sinh(\lambda L) + B_4 \cosh(\lambda L)). \end{aligned} \qquad [ec.49]$$

De la [ec.48] sacamos que

$$B_3 = -\frac{B_4 (\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L))}{\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)}, \qquad [ec.50]$$

y al sustituir la [ec.50] en la [ec.49] nos queda

$$\begin{aligned} & \frac{EI\lambda^3}{2k - m\omega^2} \left[-\frac{B_4 (\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L))^2}{\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)} - B_4 (\sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L)) \right] = \\ & -\frac{B_4 (\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L))(-\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L))}{\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)} - B_4 (\cos(\lambda L) - \cosh(\lambda L)). \end{aligned} \qquad [ec.51]$$

Como B_4 debe ser distinta de cero, ya que si no daría una solución incompatible, la ecuación en frecuencia que nos queda es

$$\begin{aligned} & \frac{EI\lambda^3}{2k - m\omega^2} \left[-\frac{(\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L))^2}{\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)} - (\sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L)) \right] = \\ & -\frac{(\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L))(-\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L))}{\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)} - (\cos(\lambda L) - \cosh(\lambda L)). \end{aligned} \qquad [ec.52]$$

Eliminando $(\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L))$, lo cual es posible porque λ no puede tomar el valor 0 ya que conduciría a una solución incompatible, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{EI\lambda^3}{2k - m\omega^2} \left[-(\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L))^2 - (\sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L))(\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)) \right] = \\ & -(\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L))(-\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)) - (\cos(\lambda L) - \cosh(\lambda L))(\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)), \end{aligned}$$

que desarrollando los productos nos da:

$$\frac{EI\lambda^3}{2k - m\omega^2}[-\cos^2(\lambda L) - 2\cos(\lambda L)\cosh(\lambda L) - \cosh^2(\lambda L) - \sin^2(\lambda L) - \sin(\lambda L)\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)\sinh(\lambda L) + \sinh^2(\lambda L)] = \cos(\lambda L)\sin(\lambda L) - \cos(\lambda L)\sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L)\sin(\lambda L) - \cosh(\lambda L)\sinh(\lambda L) - \cos(\lambda L)\sin(\lambda L) - \cos(\lambda L)\sinh(\lambda L) + \cosh(\lambda L)\sin(\lambda L) + \cosh(\lambda L)\sinh(\lambda L),$$

y simplificando llegamos a:

$$\frac{EI\lambda^3}{2k - m\omega^2}[-2(1 + \cos(\lambda L)\cosh(\lambda L))] = -2(\cos(\lambda L)\sinh(\lambda L) - \cosh(\lambda L)\sin(\lambda L)),$$

que vamos a expresar de la forma:

$$\boxed{\frac{EI\lambda^3}{2k - m\omega^2} = \frac{\cos(\lambda L)\sinh(\lambda L) - \cosh(\lambda L)\sin(\lambda L)}{1 + \cos(\lambda L)\cosh(\lambda L)}} \qquad [ec.53]$$

Una vez llegados a este punto, nos tenemos que plantear la adimensionalización, para quitarnos el excesivo número de parámetros y reducirlos al mínimo.