

Capítulo 5

LA ADIMENSIONALIZACIÓN

5.1 Introducción a la adimensionalización

La adimensionalización es una técnica matemática en la cual la variable dependiente del modelo de interés se expresa sin dimensiones y es reescalada, de forma que su variación oscile entre 0 y 1.

La adimensionalización ofrece las ventajas de que reduce el número de parámetros del modelo (y por lo tanto, lo simplifica) y ayuda a identificar los grupos adimensionales que tienen influencia en el fenómeno que se está describiendo matemáticamente. Además, permite obtener resultados más generales, al ser éstos independientes de las dimensiones particulares del sistema.

5.2. Adimensionalización del problema

Comencemos nuestro problema adimensionalizándolo desde el principio.

Los cambios a realizar serán:

$$x = sL$$

$$y = Y\delta$$

$$\tau = \Omega_2 t$$

Las nuevas variables son s, Y y τ . L es la escala de la x , la longitud de la viga. La magnitud δ es la escala de la y , que es el máximo desplazamiento inicial en el extremo no empotrado de la viga, y Ω_2 es la escala de tiempo que tendremos que averiguar.

Se va a comenzar introduciendo los cambios en:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_v \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

sustituyendo las nuevas variables

$$EI\delta\frac{\partial^4 Y}{\partial s^4}\frac{\partial^4 s}{\partial x^4} + m_v\delta\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0, \quad [\text{ec.54}]$$

$$EI\frac{1}{L^4}\frac{\partial^4 Y}{\partial s^4} + m_v\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}\Omega_2^2 = 0, \quad [\text{ec.55}]$$

$$Y_{\text{ssss}} + \frac{m_v L^4 \Omega_2^2}{EI} Y_{\tau\tau} = 0. \quad [\text{ec.56}]$$

Haciendo $\frac{m_v L^4 \Omega_2^2}{EI} = 1$, ya tenemos la escala de tiempos que no sabíamos. Así que

$$\Omega_2^2 = \frac{EI}{m_v L^4} \quad [\text{ec.57}]$$

Pasamos ahora a las condiciones de contorno:

- $y(0, t) = 0$ pasa a ser

$$Y(0, \tau) = 0, \quad [\text{ec.58}]$$

- $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ pasa a ser

$$Y_s(0, \tau) = 0, \quad [\text{ec.59}]$$

- $EI\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=L} = m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=L} + 2ky(L, t)$ será

$$\frac{EI\delta}{L^3}\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial s^3}\right)_{s=L} = m\delta\Omega_2^2\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}\right)_{s=L} + 2k\delta Y(1, \tau), \quad [\text{ec.60}]$$

que simplificando y dividiendo por la masa queda:

$$\frac{EI}{mL^3} Y_{\text{ssss}} = \Omega_2^2 Y_{\tau\tau} + \frac{2k}{m} Y. \quad [\text{ec.61}]$$

A $\frac{2k}{m}$, que es la frecuencia natural (al cuadrado) del sistema masa-muelle le llamaremos Ω_1^2 . Introduciendo este parámetro en la [ec.61] y dividiendo dicha ecuación por Ω_2^2 tenemos:

$$\frac{EI}{mL^3} \frac{1}{\Omega_2^2} Y_{\text{ssss}} = Y_{\tau\tau} + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} Y, \quad [\text{ec.62}]$$

y haciendo uso de la [ec.57]:

$$\frac{EI}{mL^3} \frac{m_v L^4}{EI} Y_{sss} = Y_{\tau\tau} + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} Y. \quad [\text{ec.63}]$$

Si llamamos $\rho = \frac{EI}{mL^3} \frac{m_v L^4}{EI} = \frac{m_v L}{m}$ (relación de masas), entonces la condición de contorno finalmente nos queda:

$$\rho Y_{sss} = Y_{\tau\tau} + r^2 Y, \quad [\text{ec.64}]$$

donde hemos llamado r^2 a la relación de frecuencias al cuadrado, $r^2 = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2}$.

La última condición:

$$\bullet \quad EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=L} = 0 \quad \text{queda}$$

$$Y_{ss}(1, \tau) = 0. \quad [\text{ec.65}]$$

Quedan las condiciones iniciales:

$$\bullet \quad y(x, 0) = -\frac{\delta}{2L^3} x^3 + \frac{3\delta}{2L^2} x^2 \quad \text{pasa a ser}$$

$$\delta Y(s, 0) = -\frac{\delta}{2L^3} s^3 L^3 + \frac{3\delta}{2L^2} s^2 L^2, \quad [\text{ec.66}]$$

que se convierte en

$$Y(s, 0) = -\frac{1}{2} s^3 + \frac{3}{2} s^2. \quad [\text{ec.67}]$$

$$\bullet \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad \text{queda}$$

$$Y_\tau(s, 0) = 0. \quad [\text{ec.68}]$$

El problema adimensionalizado queda finalmente así:

$$y_{xxxx} + y_{tt} = 0, \quad [\text{ec.69}]$$

$$\begin{aligned} & y(0, t) = 0, \\ & y_x(0, t) = 0, \\ \text{c.c:} \quad & \rho y_{xxx}(1, t) = y_{tt}(1, t) + r^2 y(1, t), \\ & y_{xx}(1, t) = 0, \end{aligned} \quad [\text{ec.70}]$$

$$\text{c.i: } \begin{aligned} y(x,0) &= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2, \\ y_t(x,0) &= 0, \end{aligned} \quad [\text{ec.71}]$$

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

donde hemos vuelto a renombrar las variables para usar x, t e y , con las cuales estamos más acostumbrados a trabajar.

Volvamos ahora a retomar la [ec.53] (ecuación en frecuencia) y vamos a adimensionalizarla, tomando $\lambda L = \mu$ (número adimensional, ya que λ tiene dimensiones de $\frac{1}{L}$).

$$\frac{EI\lambda^3}{2k - m\omega^2} = \frac{\cos(\mu)\sinh(\mu) - \cosh(\mu)\sin(\mu)}{1 + \cos(\mu)\cosh(\mu)}. \quad [\text{ec.72}]$$

Tomamos el primer miembro de la ecuación, que es el que queda por adimensionalizar:

$$\frac{EI\lambda^3}{2k - m\omega^2} = \frac{\frac{EI}{m}\lambda^3}{\frac{2k}{m} - \omega^2} = \frac{\frac{EI}{m}\frac{\mu^3}{L^3}}{\Omega_1^2 - \lambda^4 \frac{EI}{m_v}} = \frac{\frac{EI}{mL^3}\mu^3}{\Omega_1^2 - \frac{EI}{m_v L^4}\mu^4} = \frac{\frac{EI}{mL^3}\mu^3 \frac{m_v L^4}{EI}}{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 \mu^4) \frac{m_v L^4}{EI}} = \frac{\frac{m_v L}{m}\mu^3}{\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - \mu^4}$$

Uniando los dos miembros tenemos:

$$\boxed{\frac{\rho\mu^3}{r^2 - \mu^4} = \frac{\cos(\mu)\sinh(\mu) - \cosh(\mu)\sin(\mu)}{1 + \cos(\mu)\cosh(\mu)}} \quad [\text{ec.73}]$$

que es la expresión de donde sacaremos las frecuencias naturales, ya que se pueden dibujar ambos miembros de la [ec.73] y los cortes serán (en el eje de abcisa) los valores de μ para los que se cumple la [ec.73] y esta variable al cuadrado es la frecuencia natural del problema adimensional. Podría comprobarse resolviendo por separación de variables la [ec.69].

Como vemos en la [ec.73], nos han quedado los mismos parámetros que los utilizados al adimensionalizar nuestro problema desde el principio, o sea, desde la ecuación diferencial de cuarto orden.

A partir de ahora, estudiando el problema adimensional, que depende sólo de dos parámetros, podremos saber el comportamiento de cualquier

sistema y las variables que queramos simplemente pasando del problema adimensional al problema dimensional. Y esto se consigue multiplicando por unos números.

Ejemplo: si sale (en el problema adimensional) que el extremo de la viga cuando pasa un segundo está en $y = 0.6$ y realmente, en el instante inicial hemos bajado el extremo de la viga 2 cm, realmente, el extremo de mi sistema cuando pase un segundo estará en $y = 0.6 \cdot 2 = 1.2$ cm.

Los dos parámetros de los que depende el problema son:

1) ρ , que es el cociente entre la masa de viga y la masa del extremo:

$$\rho = \frac{m_v L}{m}.$$

2) $\sqrt{r}$, que es el cero del denominador del miembro de la izquierda de la [ec.73]. Que es lo mismo que decir que es la asíntota de la función que corresponde al miembro de la izquierda de la [ec.73]. Es la asíntota de la función:

$$\frac{\rho \mu^3}{r^2 - \mu^4}$$

Si quiero saber la frecuencia natural de un sistema con unos valores concretos de L , E , I , y m_v , basta con calcular los parámetros ρ y $\sqrt{r}$ y estudiar el problema adimensional. Así se obtienen los valores de μ , que como ya se ha dicho, al cuadrado es la frecuencia natural del problema adimensional, y para ver la frecuencia real del sistema tendríamos que ver la relación entre ésta y los valores de μ . Para ello partimos de la [ec.28], despejamos ω (frecuencia natural del sistema) y hacemos aparecer μ que es lo que tenemos:

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 m_v}{EI} \rightarrow \omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{m_v}} = \frac{\lambda^2 L^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_v}} = \frac{\mu^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_v}}.$$