Capítulo 6

EL PROBLEMA ESPACIAL Y EL PROBLEMA TEMPORAL

6.1 El problema espacial. Cálculo de las frecuencias naturales

La [ec.73] es una ecuación de frecuencia, y como su nombre indica, las infinitas soluciones de esa ecuación serán los autovalores del problema, y darán las infinitas frecuencias naturales del sistema.

Para hallar estos autovalores, dibujaremos los dos miembros de la ecuación como dos funciones independientes, y los cortes entre ambas serán los valores buscados.

Para no tener que escribirla muchas veces, a partir de ahora llamaremos al miembro de la izquierda de la [ec.73] "función i" y al de la derecha "función d".

Para hacer un estudio general del problema, se mostrarán distintas gráficas donde se aprecie lo que ocurre cuando variamos cada uno de los parámetros de los que depende la ecuación.

1) Variación de ρ: dejaremos fija la asíntota de la función i , es decir, tomaremos cualquier valor de $\sqrt{r}$ (por ejemplo, 1.4) y le damos a ρ tres valores distintos: 0.5, 2 y 20. La línea discontinua representa la función i y la continua, la función d. Para las gráficas que se encuentran a continuación, hemos empleado el fichero de Matlab varia_ro.m (ver apéndice).

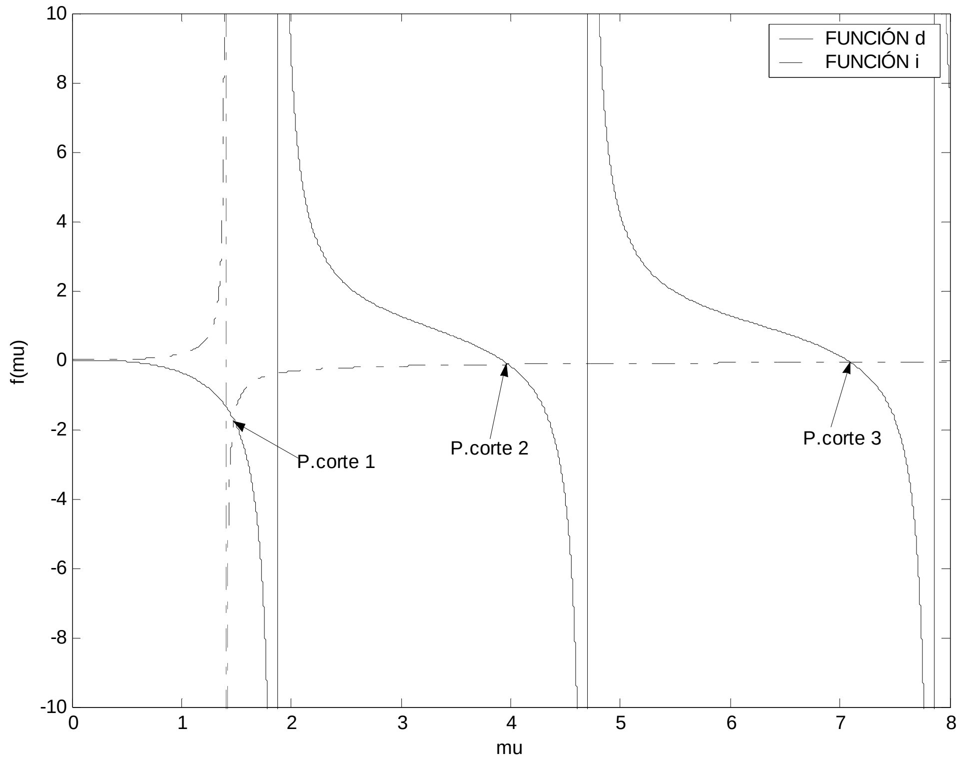

Figura nº 7: $\rho = 0.5; \sqrt{r} = 1.4$

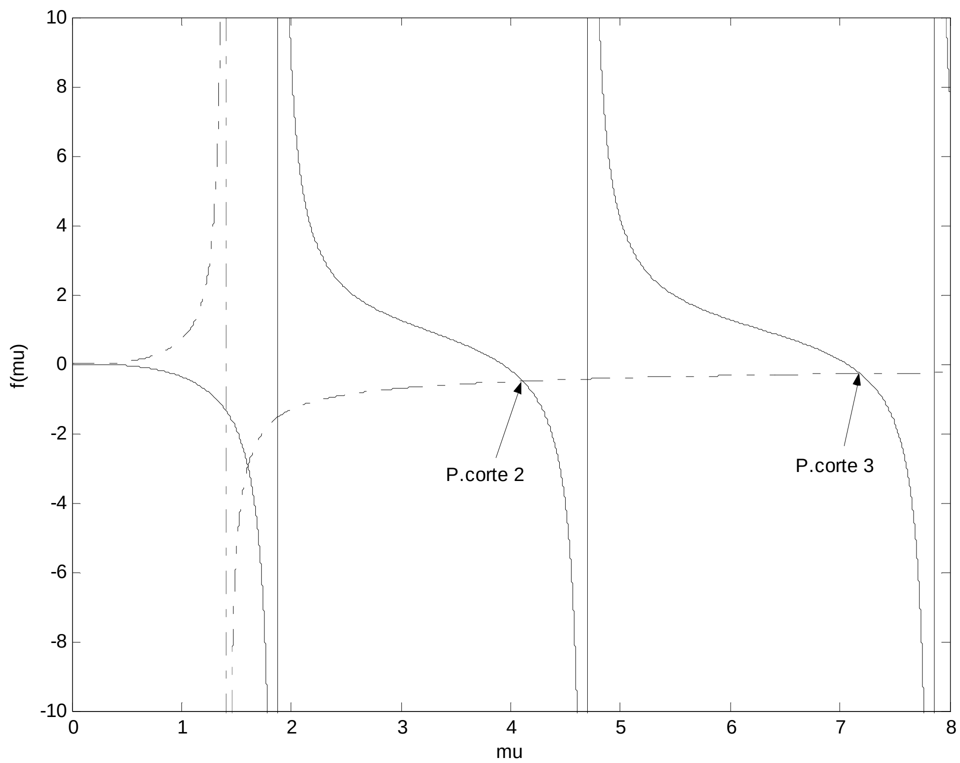

Figura nº 8: $\rho = 2; \sqrt{r} = 1.4$

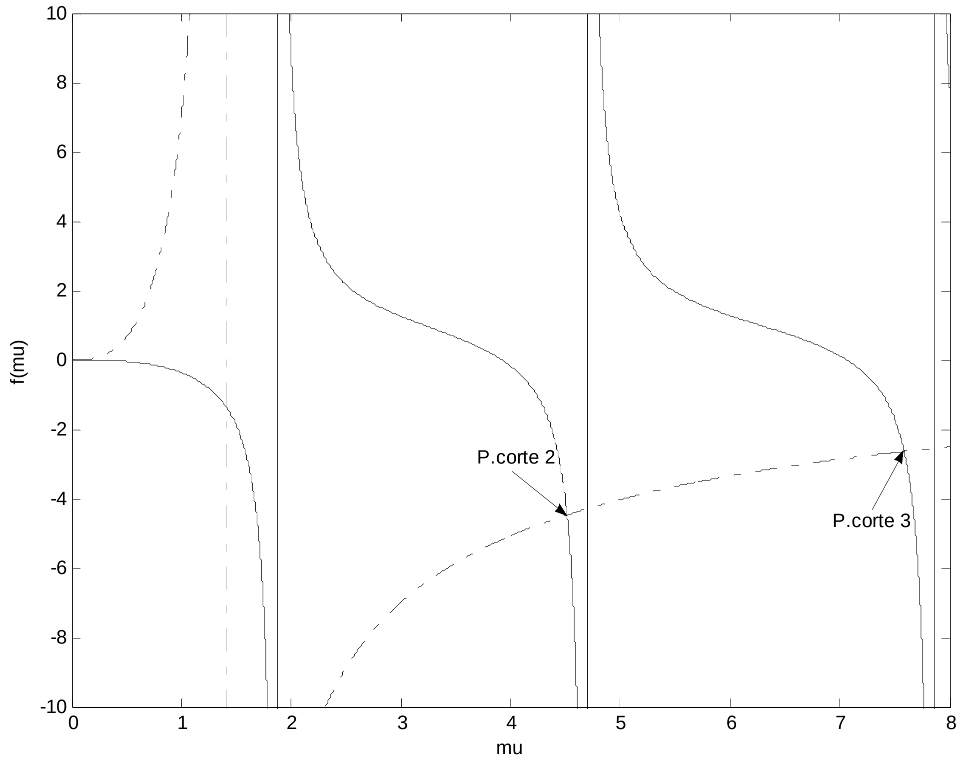

Figura nº 9: $\rho = 20; \sqrt{r} = 1.4$

Como se puede apreciar en las gráficas, a medida que aumenta el valor de ρ, los puntos de corte o valores de μ (P.corte en la gráfica) se acercan a las asíntotas de la función d. Los valores de las asíntotas de la función d son los ceros del denominador de dicha función.

2) Variación de $\sqrt{r}$, o lo que es lo mismo, movimiento de la asíntota de la función i. Tomamos un valor cualquiera de ρ (por ejemplo, 4) y movemos la asíntota a los valores 0.5, 2.1 y 6.5. Para las gráficas que se encuentran a continuación, hemos empleado el fichero varia_r.m (ver apéndice).

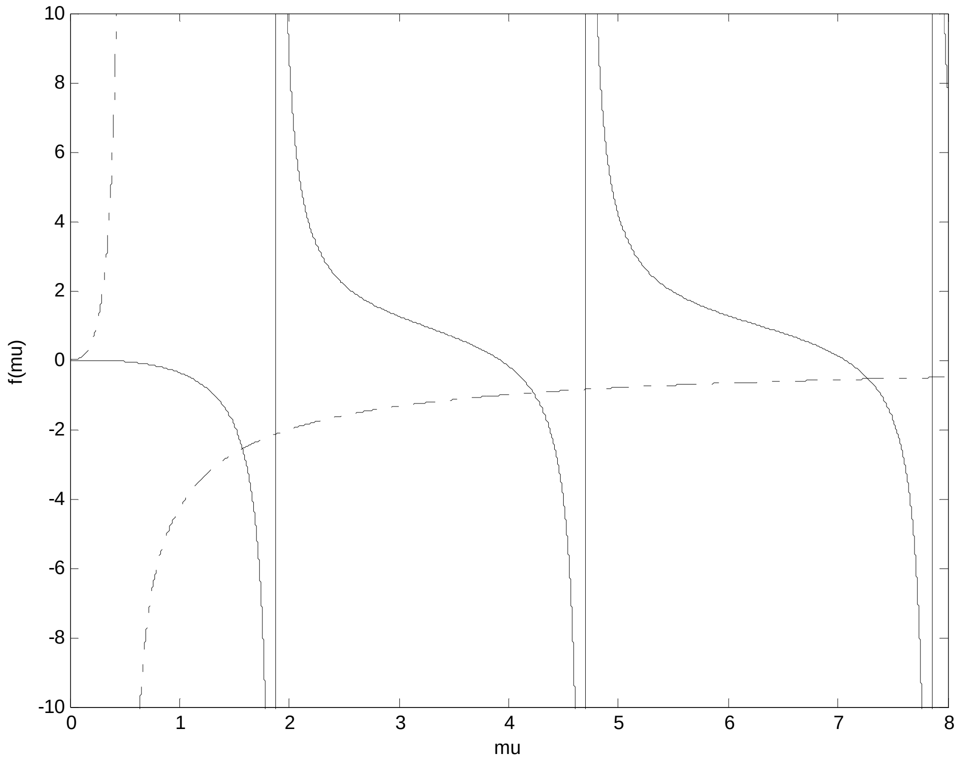

Figura nº 10: $\rho = 4; \sqrt{r} = 0.5$

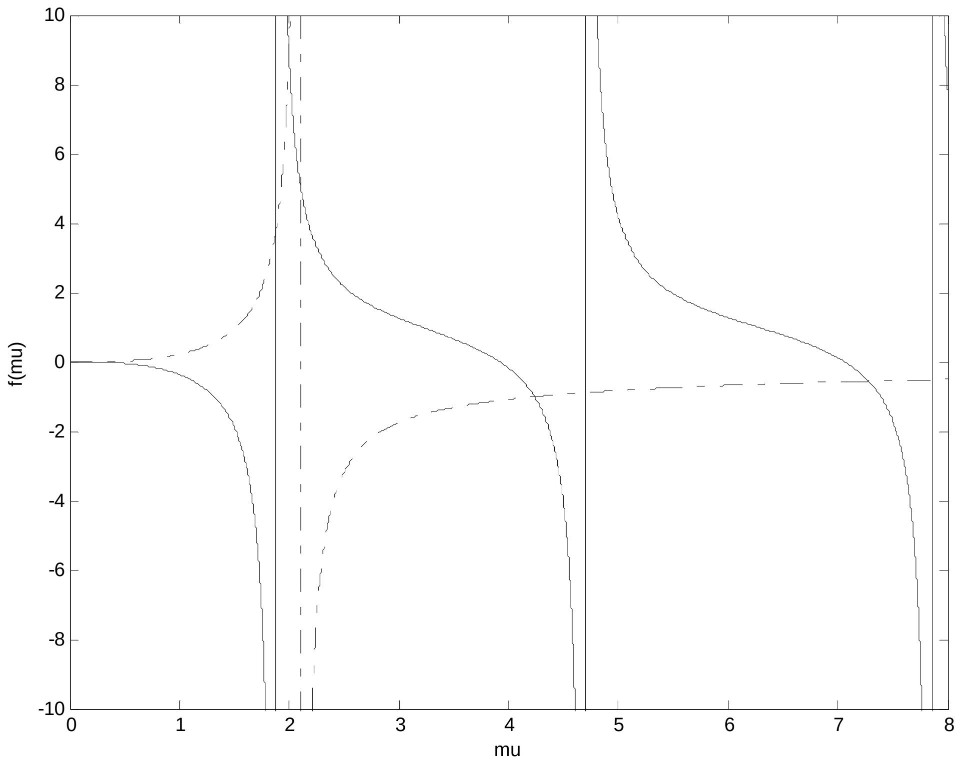

Figura nº 11: $\rho = 4; \sqrt{r} = 2.1$

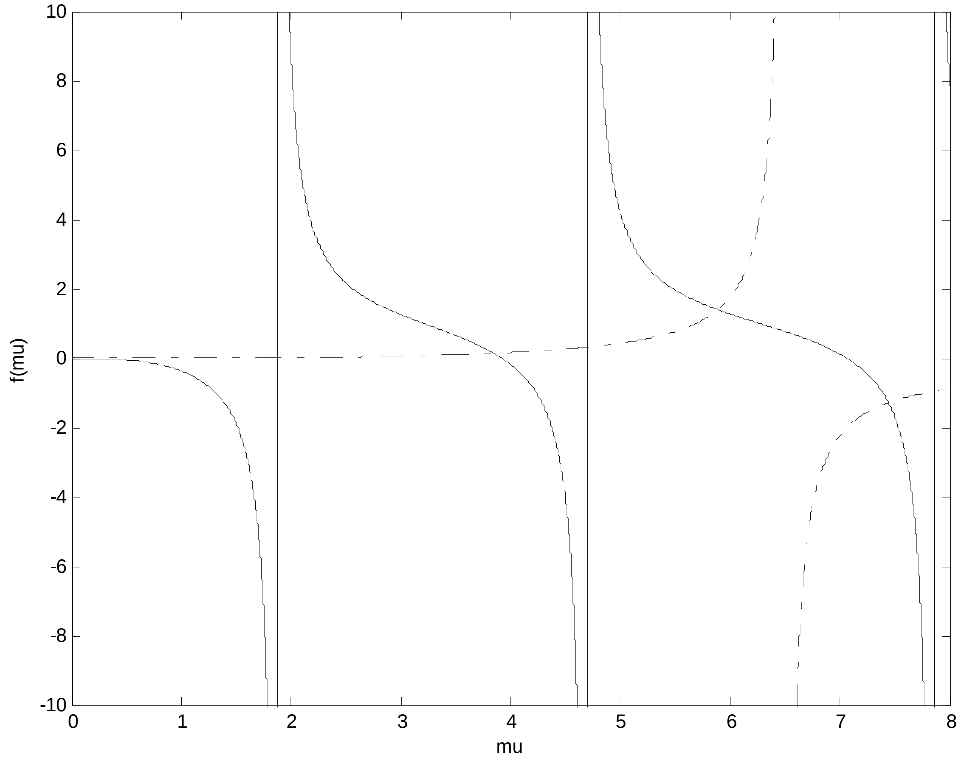

Figura nº 12: $\rho = 4; \sqrt{r} = 6.5$

Como hemos dicho, los distintos cortes entre la función discontinua y la continua representan, en el eje de abcisa, los valores que necesito para hallar las frecuencias naturales. Aunque el cero sea un valor de corte, este no es ningún valor de la frecuencia, ya que daría lugar a una solución incompatible al cumplirse que $\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = -\frac{\ddot{y}(t)}{y(t)} = 0$ además de que $\omega = 0$ significaría que el sistema no vibra.

6.2. El problema temporal

Teníamos que $y(t) = c\cos(\omega t - \varphi)$, que después de la adimensionalización de nuestro problema, nos queda $y(t) = c\cos(\mu^2 t - \varphi)$.

La respuesta total del sistema es

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) y_n(t)}, \qquad [ec.74]$$

con **n** el número de grados de libertad del sistema, y con

$$\phi(x) = B_1 \sin(\mu x) + B_2 \cos(\mu x) + B_3 \sinh(\mu x) + B_4 \cosh(\mu x). \qquad [ec.75]$$

Usando la relación entre las constantes B_n queda:

$$\phi_n(x) = B_n \left[\frac{\cos(\mu_n) + \cosh(\mu_n)}{\sin(\mu_n) + \sinh(\mu_n)} (\sin(\mu_n x) - \sinh(\mu_n x)) + \cosh(\mu_n x) - \cos(\mu_n x) \right], \ [ec.76]$$

Así que la respuesta total del sistema quedará

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n{}^2 t - \varphi_n) \left[\frac{\cos(\mu_n) + \cosh(\mu_n)}{\sin(\mu_n) + \sinh(\mu_n)} (\sin(\mu_n x) - \sinh(\mu_n x)) + \cosh(\mu_n x) - \cos(\mu_n x) \right].$$

[ec.77]

Aplicamos la condición inicial en velocidad:

$$y_t(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) y'_n(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_n(0) = 0,$$

$$y'_n(t) = -c\mu_n^2 \sin(\mu_n^2 t - \varphi_n),$$
$$y'_n(0) = 0 \Rightarrow \sin(-\varphi_n) = 0,$$

$$\boxed{\varphi_n = \pm n\pi} \qquad [ec.78]$$

Ahora la respuesta total del sistema es

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n{}^2 t \pm n\pi) \left[\frac{\cos(\mu_n) + \cosh(\mu_n)}{\sin(\mu_n) + \sinh(\mu_n)} (\sin(\mu_n x) - \sinh(\mu_n x)) + \cosh(\mu_n x) - \cos(\mu_n x) \right].$$

[ec.79]

Puesto que los μ_n son valores que podemos calcular sólo con fijar el valor de los parámetros ρ y $\sqrt{r}$, la única constante que nos queda calcular son los A_n. Sin embargo, el cálculo de esta última constante no es fácil, debido a que estamos ante un sistema de autovalores no ortogonal, por las condiciones de contorno que tenemos. Este cálculo se puede realizar de dos formas diferentes:

1) Recurriendo a un método que nos dará estos valores teniendo en cuenta que nuestro sistema no es ortogonal.

El desarrollo de dicho método es el siguiente:

Vamos a expresar la respuesta total del sistema de la forma

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot u_n(x)\cdot q_n(t). \qquad \text{[ec.80]}$$

Tenemos que

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n q_n(0) u_n(x) = D(x). \qquad \text{[ec.81]}$$

Pues lo que haremos será premultiplicar [ec.81] por u_1, luego otra vez [ec.81] por u_2, después por u_3 y así tendremos una matriz como la que veremos a continuación, de donde sacaremos las últimas incógnitas. El desarrollo sería el siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 u_1(x) q_n(0) u_n(x)dx = \int_0^1 u_1 D(x)dx, \qquad \text{[ec.82]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 u_2(x) q_n(0) u_n(x)dx = \int_0^1 u_2 D(x)dx, \qquad \text{[ec.83]}$$

llamando a

$$\begin{aligned} &\int_0^1 u_m(x) q_n(0) u_n(x)dx = v_{mn}, \\ &\int_0^1 u_m D(x)dx = p_m, \end{aligned} \qquad \text{[ec.84]}$$

tenemos finalmente

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 v_{11} + \tilde{A}_2 v_{12} + \cdots + \tilde{A}_n v_{1n} &= p_1 \\ \tilde{A}_1 v_{21} + \tilde{A}_2 v_{22} + \cdots + \tilde{A}_n v_{2n} &= p_2 \\ &\vdots \\ \tilde{A}_1 v_{m1} + \tilde{A}_2 v_{m2} + \cdots + \tilde{A}_n v_{mn} &= p_m \end{aligned}$$

Las variables con tilde significa que los valores que se obtienen del método de resolución de los coeficientes son unos valores aproximados, que poco a poco se irán pareciendo más. Para dar con estos valores resolvemos como sigue:

Primero, resolvemos $\tilde{A}_1 v_{11} = p_1$, y nos da el primer valor de A_1. Segundo, resolvemos $\begin{aligned}\tilde{A}_1 v_{11} + \tilde{A}_2 v_{12} &= p_1 \\ \tilde{A}_1 v_{21} + \tilde{A}_2 v_{22} &= p_2\end{aligned}$ que nos da un segundo valor de A_1, y un valor para A_2. Tercero, resolvemos la matriz 3x3, y nos da otro valor de A_1, de A_2 y un valor para A_3.

De esta forma vamos comparando los valores de los coeficientes y nos quedamos con los valores que sean iguales hasta la cuarta cifra decimal.

2) Recurriendo a un método que nos dará estos valores de una forma similar a tener un sistema ortogonal.

El desarrollo de dicho método es el siguiente:

Lo que tengo es

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n q_n(0) u_n(x) = D(x) \quad \text{[ec.85]}$$

Y según el método, se sabe que

$$\int_0^1 u_n(x) u_m(x) dx + \frac{1}{\rho} u_n(1) u_m(1) = 0 \quad \text{[ec.86]}$$

$$\int_0^1 u_m^2(x) dx + \frac{1}{\rho} u_m^2(1) = m_m \quad \text{[ec.87]}$$

Ahora multiplicamos [ec.86] por $A_n q_n(0)$ y [ec.87] por $A_m q_m(0)$.

$$\int_0^1 A_n q_n(0) u_n(x) u_m(x) dx + \frac{1}{\rho} A_n q_n(0) u_n(1) u_m(1) = 0 \quad \text{[ec.88]}$$

$$\int_0^1 A_m q_m(0) u_m^2(x) dx + \frac{1}{\rho} A_m q_m(0) u_m^2(1) = m_m A_m q_m(0) \quad \text{[ec.89]}$$

Sumamos para todo n, aplicamos [ec.85] y despejamos A_n

$$\int_0^1 D(x) u_n(x) dx + \frac{1}{\rho} D(1) u_n(1) = m_n A_n q_n(0)$$

$$\boxed{A_n = \frac{1}{q_n(0)} \frac{\int_0^1 D(x) u_n(x) dx + \frac{1}{\rho} D(1) u_n(1)}{\int_0^1 u_n^2(x) dx + \frac{1}{\rho} u_n^2(1)}}$$

Los resultados que se van a ofrecer van a sacarse utilizando el primer método, ya que al obtener los coeficientes por el segundo método, los valores de éstos no decaen estrictamente, sino que vuelven a subir, lo que nos llevaría a contar con los modos de vibración que a tales coeficientes acompañan y esto da una respuesta de la viga incorrecta. El inconveniente de usar el primer método es que Matlab necesita mucho más tiempo en darnos la respuesta, además de necesitar resolver muchas matrices para que los coeficientes acaben pareciéndose.

Un ejemplo para comparar coeficientes por los dos métodos es el siguiente:

A_n según el primer método	A_n según el segundo método
-8.711	-8.6592
-0.0022614	-4.3554e-005
-0.0013929	-2.4324e-006
-0.00098029	-2.1026e-007
-0.00067011	-9.2749e-008
-0.00032758	3.8136e-008
-0.00022033	-2.3513e-006
-0.00036252	-5.5345e-005
-0.0005374	-0.00037804
-0.00050241	-0.024578
-0.00014887	-1.4823
0.00074426	0.040319
0.00082	0.02394
0.0015778	-0.021186

Tabla nº 1: Comparación de coeficientes.

Después de esto ya estamos en condiciones para poder realizar nuestro programa en Matlab y obtener resultados y conclusiones. Sin embargo, antes de pasar a esto haremos un breve repaso a la FFT (Fast Fourier Transform), una gran herramienta que usaremos para generar los resultados y que en nuestra opinión merece la pena comentar.