Capítulo 9

CONCLUSIONES

Respecto a los casos límites, veremos que es lo que ocurre en casa caso y vamos comparando.

- Cuando ρ vale 0.01 y $\sqrt{r}$ vale 0.1(caso límite 1), es cuando los coeficientes decaen más rápidamente. A_1 es de mucho más importancia que los demás, de hecho es más de 3800 veces mayor que A_2. Podemos recordar los dos primeros coeficientes para saber de lo que hablamos:

$$A_1 = -8.711, A_2 = -0.0022614.$$

Además incluimos una gráfica, implementando el fichero de Matlab compara.m (ver apéndice), comparando la caída de los coeficientes para cada caso límite.

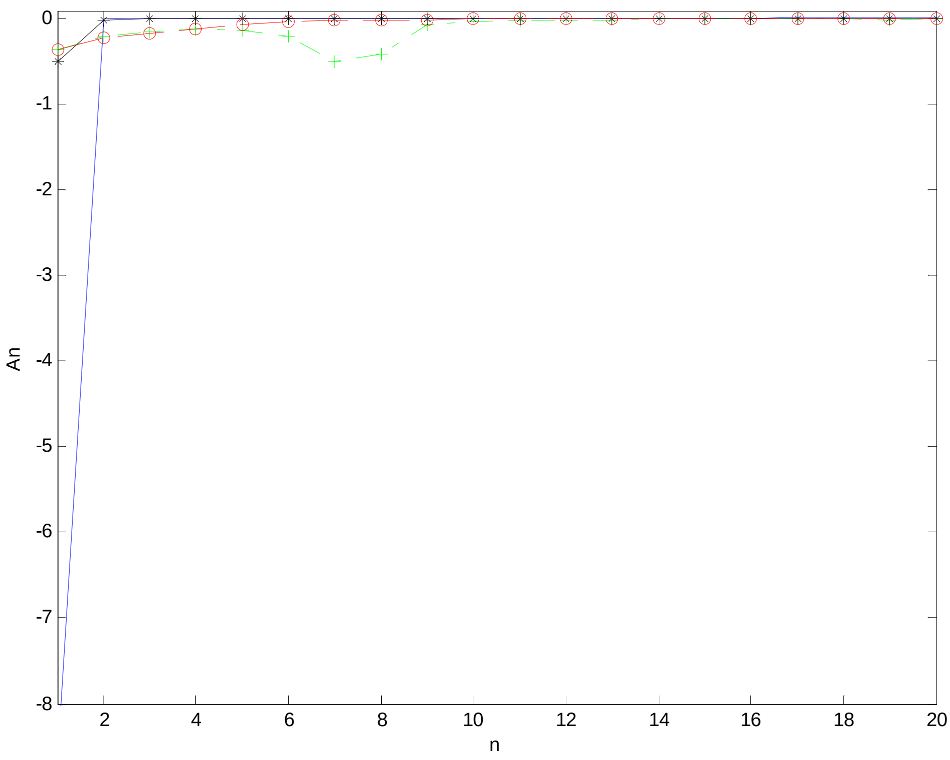

Figura nº 62: Comparación caída de coeficientes.
Los colores se corresponden con:
$\rho = 0.01; \sqrt{r} = 0.1$ (caso límite 1): azul; $\rho = 200; \sqrt{r} = 0.1$ (caso límite 3): * y negro
$\rho = 0.01; \sqrt{r} = 22$ (caso límite 2): + y verde; $\rho = 200; \sqrt{r} = 22$ (caso límite 4):o y rojo

En el caso en el que estábamos el modo uno será el que predomine y viendo la forma que tiene (en la figura nº 16) vemos que nuestro sistema vibra como una viga en voladizo.

Por la ecuación de movimiento del extremo vemos que no hay transmisión de energía del sistema masa-muelle a la viga ni viceversa. Y en la gráfica de la FFT vemos que sólo hay un pico, a una muy baja frecuencia y es de gran altura.

▪ Cuando ρ vale 0.01 y $\sqrt{r}$ vale 22 (caso límite 2), los coeficientes ya no decaen como antes. Todos los modos de vibración hasta llegar al octavo se ven excitados. Esto nos lleva a pensar que conforme la asíntota de la función i pasa por las asíntotas de la función d, va excitando modos. Así que como $\sqrt{r} = 22$ cae después de la séptima asíntota, se excitan los 8 primeros modos.

Respecto a los autovalores se ve que van pareciéndose cada vez más a los autovalores de una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro (los autovalores de ésta viga son los ceros de numerador de la función d):

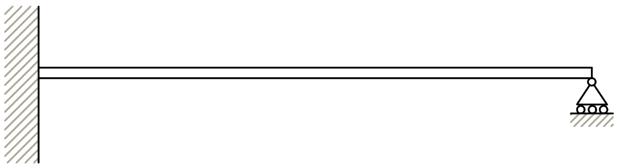

Figura nº 63: Viga empotrada-apoyada.

Pero siempre hay una distinta en el lugar del número de la última asíntota de la función i por la que pasamos, en este caso, el autovalor distinto es el séptimo. Así que teniendo en cuenta esto, para $\sqrt{r} \to \infty$ está claro que nuestro sistema se convertirá en una viga empotrada-apoyada y cuyos autovalores, y por tanto sus frecuencias naturales, se puede ver que tienden a los autovalores, y por tanto frecuencias naturales de la viga empotrada-apoyada. Es obvio, ya que $\sqrt{r} \to \infty$ significa unos muelles tan rígidos que no se moverían.

La gráfica de la ecuación del movimiento está acotada en el valor de t 0,5 y no en 200 como la figura nº 13. De este modo podemos ver que la respuesta es más de 3000 veces más rápida (midiendo los periodos). Esto también se puede ver en la gráfica FFT. En ésta existe sólo un pico y está alrededor de los 50 Hz, frente al pico de la gráfica de la figura nº 14 donde la mayor parte de la energía se va para las frecuencias menores de 1.

Si vemos la forma de los modos de vibración vemos que son los de la viga empotrada-apoyada, menos justo el que hace el número de la última asíntota de la función i que hemos pasado, en este caso ya hemos dicho que es la asíntota 7, o sea el modo 7 es el distinto de los demás.

Vemos además que el coeficiente número 7 es el de mayor magnitud respecto a los demás, por eso el extremo "libre" de la viga va de arriba a abajo sin pretensiones de reducir la magnitud de su movimiento. Hasta un $\sqrt{r}$ bien elevado, no se reduce la amplitud de las oscilaciones del extremo. Y cuando esto ocurre, se sigue manteniendo (en el extremo) un movimiento oscilatorio casi senoidal con un sólo pico en la gráfica FFT, eso sí cada vez el movimiento es más rápido.

- Cuando ρ vale 200 y $\sqrt{r}$ vale 0.1 (caso límite 3), los coeficientes decaen rápido, pero no tanto como cuando ρ era 0.01. El primer coeficiente es el más alto (con diferencia) respecto a los demás. Tenemos un sistema de viga en voladizo pero con un movimiento más rápido, como se puede comprobar con la gráfica FFT, donde el pico está un poco a la derecha que en el primer caso límite. El movimiento oscilatorio va tomando frecuencias un poquito más altas.

Con los autovalores se puede comprobar que el resultado de viga voladizo es correcto, comparándolos con los autovalores de una viga en voladizo. Lo vemos:

Viga en voladizo		Nuestro sistema con ρ 200 y $\sqrt{r}$ 0.1	
1.8751	17.2788	1.8658	17.2
4.6941	20.42	4.6713	20.328
7.8548	23.562	7.8172	23.457
10.9955	26.7035	10.944	26.587
14.1372	29.845	14.072	29.716

Tabla nº 16: Comparación de autovalores.

Es lógico que ocurra esto porque cuando ρ es muy grande, la gráfica discontinua (función i) adquiere una forma que hace que los cortes entre ambas funciones i y d sea justo en las asíntotas de la función d y las asíntotas de la función d se dan en los ceros de denominador, que son exactamente los autovalores de una viga en voladizo.

- Cuando ρ vale 200 y $\sqrt{r}$ vale 22, los coeficientes decaen lentos. Muchos modos de vibración toman parte en la respuesta total del sistema y eso se nota en el movimiento del extremo de la viga, cuya gráfica ya es muy distinta a los demás casos comentados.

Las frecuencias naturales no se parecen a las frecuencias de una viga empotrada-apoyada, pero acabarán pareciéndose, aunque tardarán mucho más, debido a la forma tan abierta que adquiere la gráfica i cuando ρ es muy grande.

La gráfica FFT, toma más frecuencias, y baja su magnitud en general.

Después de estos cuatro casos límites hemos querido hacer 9 casos para ver el progreso de las distintas gráficas y reafirmar las conclusiones cuando estamos en un ρ pequeño, normal y grande y variamos $\sqrt{r}$.

Lo que ocurre es:

- Si mantengo ρ fijo, al aumentar $\sqrt{r}$, o sea, al mover la asíntota de la función i hacia la derecha, el movimiento de la vibración es cada vez más rápido, aumenta la frecuencia en el movimiento del extremo y esto se ve reflejado en las gráficas FFT. Los coeficientes van tomando valores elevados porque conforme paso asíntotas excitamos modos. El valor más elevado se lo lleva el coeficiente que ocupa la posición del número de la última asíntota que pasamos.

- Si mantengo $\sqrt{r}$ fijo, al aumentar ρ, la viga va cogiendo consistencia y se producen los intercambios de energía entre sistema masa-muelle y la viga. Esto se ve reflejado la gráfica del movimiento del extremo, que deja de ser senoidal. Además se ve en la gráfica FFT porque cada vez hay más picos con distintas frecuencias.

En conclusión, cualquiera que sea el problema de viga acoplada con un oscilador armónico que quiera resolver, sólo hay que hallar los parámetros de ρ y de $\sqrt{r}$ correspondientes y sabremos cual será el comportamiento de dicha viga, como responderá y cuales serán sus frecuencias naturales.