2. Teoría del oscilador

En el estudio dinámico del generador se va a considerar este como una masa puntual sobre la que van a actuar un conjunto de fuerzas, las cuales van a determinar su comportamiento dinámico y la potencia que va a ser capaz de generar, lo que equivale a decir la potencia que se disipa. Los resultados del análisis aportarán lo datos necesarios para poder trabajar tanto en el diseño como en el control.

Como el principio de funcionamiento del generador se basa en el movimiento armónico de una masa con un movimiento monodimensional lineal, a continuación se va a hacer una breve revisión de la teoría de vibraciones del punto.

2.1. Vibraciones libres. Modelo masa-muelle

En la *figura 2.1.1* se representa el esquema típico de un sistema mecánico elástico. Una masa que sufre oscilaciones monodimensionales sometida a una fuerza restauradora del tipo postulado por Hooke, es decir, función lineal del desplazamiento.

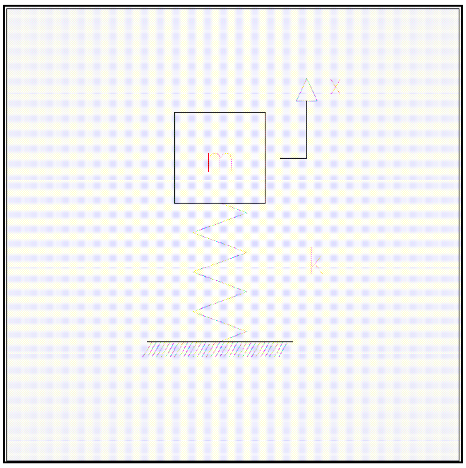

figura 2.1.1

Si se desplaza la masa m un Δx, de su posición de equilibrio, el sistema masa-muelle realizará un movimiento armónico.

La frecuencia a la que vibra un sistema libre, se le llama frecuencia natural:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

2.2. Vibraciones forzadas

Las características esenciales del sistema mecánico en estudio son:

- Fuerza exterior armónica
- Componente inercial, capaz de transportar energía cinética.
- Componente elástica, capaz de almacenar energía potencial elástica. El caso más estudiado es que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento. Ley de Hooke.
- Componente disipativa: amortiguamiento viscoso y de Coulomb

Las vibraciones libres de un sistema físico real cualquiera desaparecen siempre al cabo del tiempo. Es decir todo sistema mecánico posee una característica disipativa mediante la cual se va perdiendo la energía mecánica de vibración. Aquí se van a describir los dos sistemas de amortiguamiento más habituales.

Amortiguamiento viscoso

En el *amortiguamiento viscoso*, el caso más estudiado, la fuerza disipativa es proporcional a la velocidad de la masa.

Si sobre la masa actúa una fuerza periódica, la ecuación diferencial que describe la ley de desplazamiento de la masa con el tiempo se obtiene del equilibrio de fuerzas:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = Fo \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

La solución de la ecuación diferencial se puede separar en dos parte, una corresponde al transitorio, que depende de las condiciones iniciales. Y la otra corresponde al permanente, la repuesta que no depende de las condiciones iniciales, y que se mantiene en el tiempo. Esta segunda solución es la que nos interesa, para estudiar el comportamiento del generador.

La solución del régimen permanente se puede expresar de la siguiente forma:

$$x(t) = X(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta(\omega))$$

Para el amortiguamiento viscoso la frecuencia de vibración del sistema que hace que la amplitud sea máxima es:

$$\omega_m = \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2 \cdot \gamma^2}}$$

La amplitud del movimiento armónico descrito por la masa es función de la frecuencia ω de la fuerza impulsora.

$$X(\omega(= \frac{F_0/m}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + (\gamma \cdot \omega)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{F_0}{m \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0/\omega}{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\right]^{1/2}}$$

El desfase δ, también es función de la frecuencia de la fuerza impulsora.

$$\operatorname{tag} \delta(\omega) = \frac{\gamma \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1/Q}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Con $\gamma = \frac{c}{m}$, y $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$

Las siguientes curvas representa la variación de la amplitud y desfase, respectivamente, con la frecuencia impulsora.

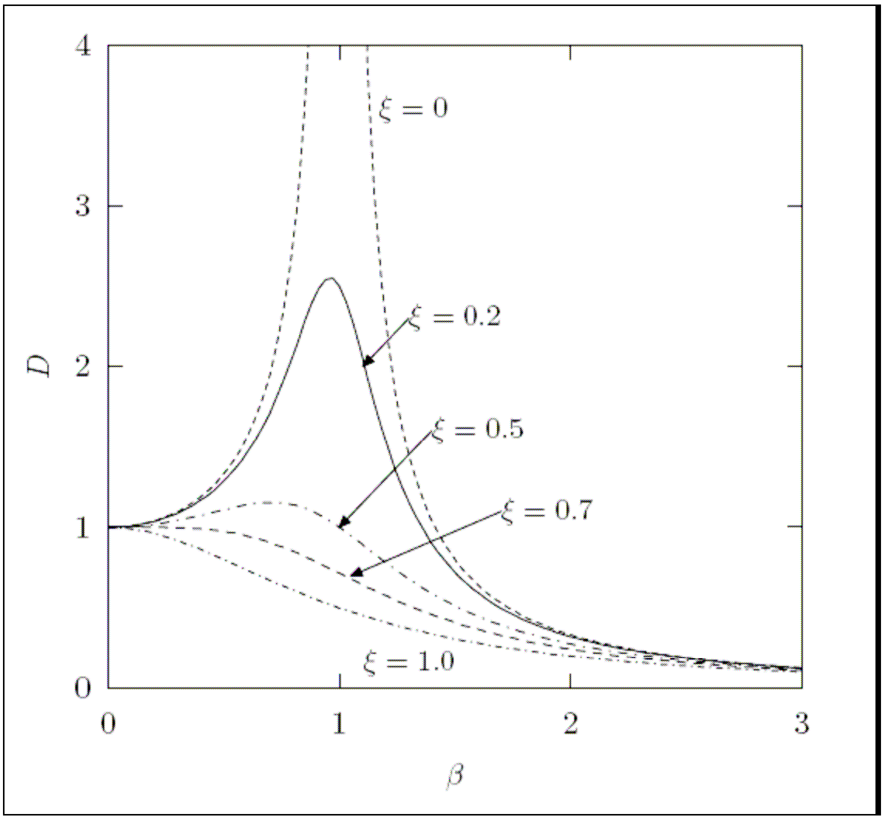

figura 2.2.1

La frecuencia de vibración de la fuerza excitadora que hace que la amplitud sea máxima es:

$$\omega_m = \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \frac{1}{2 \cdot \gamma^2}}$$

Como se puede apreciar la amplitud del movimiento armónico de la partícula se amplifica cuando la frecuencia de la fuerza excitadora es muy parecida a la frecuencia natural del sistema masa-muelle.

Amortiguamiento de Coulomb

Se caracteriza por la fuerza disipativa constante, independiente de la velocidad y de la posición, como es el caso de la fuerza de rozamiento que surge al deslizar un cuerpo sobre una superficie seca.

La potencia disipativa es proporcional a la velocidad (y no a su cuadrado, como en el *amortiguamiento viscoso*).

En este tipo de problemas existen dos ecuaciones de movimiento, una para cada sentido de la velocidad (si existe un movimiento armónico). Ya que el valor de la fuerza es constante, como no aparece en la fuerza el término velocidad obliga a definir dos ecuaciones de movimiento una para cada sentido.

La frecuencia de las oscilaciones es la natural del oscilador, wo, a diferencia de lo que ocurre en el *amortiguamiento viscoso,* el *amortiguamiento de Coulomb* no modifica la frecuencia de vibración del sistema.

2.3. Potencia disipada

Como en cualquier otro fenómeno dinámico, se puede calcular la potencia instantánea disipada P como producto de la fuerza amortiguadora por la velocidad.

Amortiguamiento viscoso

Aquí se analiza la potencia disipada por un sistema de amortiguamiento viscoso.

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{F}\cdot\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{F}\cdot \mathrm{v} = c\cdot v^2$$

Y la potencia media disipada en función de la frecuencia de la fuerza impulsora es:

$$\overline{\mathrm{P}(\omega)} = \frac{\mathrm{F}_0^2\cdot\omega_0}{2\cdot \mathrm{k}\cdot \mathrm{Q}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{1}{\mathrm{Q}^2}}$$

Esta potencia pasa por un máximo para el valor $\omega = \omega_0$, cualquiera que sea el valor de Q.

Siendo la potencia máxima:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{Q}\cdot \mathrm{F}_0^2}{2\cdot \mathrm{m}\cdot\omega_0} = \frac{F_0^2}{2\cdot c}$$

Uno de las tareas principales para conseguir optimizar la potencia producida por el generador es poder modificar, en cada instante, la fuerza de amortiguamiento. El sistema que consiga dar al generador la fuerza más parecida a la teórica para cada instante será el mejor. En el apartado correspondiente se analizan dos sistemas diferentes.