Estudio Numérico de la Generación y Difracción de Ondas Elásticas Cilíndricas Guiadas en Placas

Presentado por: María Moreno Moreno

Dirigido por: Jose Manuel Galán Fernández

Departamento de Ingeniería del Diseño
Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla

Abril 2007

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los ensayos no destructivos (END) se han convertido en un elemento de uso común en muchos campos científicos e industriales como herramienta fundamental en el desarrolllo de tareas de mantenimiento, comprobación de la integridad estructural, control de calidad en la producción e inspección permanente durante la vida útil de muchos productos y estructuras. La combinación de factores tales como el aumento continuo de los costes de fabricación, las condiciones de servicio cada vez más extremas para los componentes estructurales y la tendencia en el diseño hacia un ajuste más estrecho de los márgenes de seguridad, han impulsado una constante evolución y avance en los métodos de END. El desarrollo de nuevas técnicas proporciona, entre otros muchos beneficios, un aumento de la calidad de los productos para el consumidor, una mejora de la seguridad pública (en el caso de la inspección de centrales nucleares y de aviones por ejemplo) y una reducción global de costes a la industria y a los usuarios al conseguir prevenir fallos mecánicos que podrían suponer grandes pérdidas materiales y humanas. Entre los campos de actividad que utilizan estas técnicas se encuentran las relacionadas con la producción de energia, transformación petroquímica, transporte de gases y líquidos, estructuras aeronáuticas y aerospaciales, etc. A partir del dictamen de los ensayos no destructivos de un elemento se puede evaluar la seguridad frente a un posible fallo, realizar predicciones de la vida útil restante y establecer programas de mantenimiento y reparación. Este proceso se encuadra dentro de una filosofía de tolerancia al daño basada en que la presencia de defectos en un componente ya no significa necesariamente que dicho elemento esté al final de su vida útil de servicio, o ni tan siquiera cerca de él.

Dentro del campo de los END, las ondas guiadas ultrasónicas constituyen un área de gran interés hoy en día. Estas ondas se producen en elementos tales como placas, tuberías y barras, en los cuales la geometría finita constriñe la propagación de las ondas elásticas y confina así el flujo de energía a su sección transversal. De esta forma, la atenuación por radiación (geométrica) se reduce o incluso desaparece, quedando como únicos mecanismos de atenuación la difracción por obstáculos y la disipación de energía debido a la naturaleza dispersiva del medio. Como resultado, dichas ondas tienen la capacidad de recorrer grandes distancias, lo que permite realizar la inspección de un área amplia desde una posición fija, sin necesidad de desplazar el palpador como en las técnicas ultrasónicas clásicas (basadas en ondas P o S). Además, es posible emplearlas para inspeccionar zonas ocultas o de difícil acceso como, por ejemplo, estructuras parcialmente enterradas, recubiertas de un material protector o aislante, o escondidas tras otros elementos. Las ondas guiadas permiten evaluar la presencia de defectos en la sección transversal completa del elemento, puesto que su propagación provoca la deformación de todos sus puntos. La existencia de multitud de modos para cada frecuencia aporta flexibilidad a la hora de seleccionar el punto de trabajo que proporcione una mayor sensibilidad. Sin embargo, para poder realizar esta selección de forma adecuada es necesario conocer como interaccionan las ondas guiadas con los defectos.

1.1. Objetivos

Los objetivos principales que se pretenden lograr con este proyecto son los siguientes:

- Estudiar el fenómeno de generación de ondas cilíndricas desde un agujero circular pasante en placas homogéneas elásticas y comparar los resultados obtenidos con soluciones analíticas en determinados casos límite (valores bajos de frecuencia).

- Estudiar el fenómeno de difracción de ondas cilíndricas en placas homogéneas ela'sticas cuando sobre ella incide una onda plana.

- En la literatura existen pocos artículos sobre la propagación y la difracción de ondas de frente circular y aún menos acerca del comportamiento de dichas ondas ante diferentes acciones externas. Por ello, en este proyecto se pretende realizar un desarrollo en esos campos debido a la importante utilidad que conlleva el conocimiento de estas ondas en aplicaciones geofísicas e ingenieriles (ingeniería sísmica y cimientos), y particularmente en temas de ensayos no destructivos de placas laminadas.

1.2. Resumen de contenidos

En el Capítulo 2 se presenta un estudio analítico de la propagación libre de ondas guiadas en placas homogéneas de materiales elásticos e isótropos, restringido al caso de ondas planas y cilíndricas. En ambos, el planteamiento matemático desemboca en dos problemas bidimensionales: ondas SH guiadas y ondas de Lamb. Se presentan las soluciones de ambos tipos de onda destacando sus características esenciales, haciendo énfasis tanto en los rasgos diferenciadores como en los numerosos aspectos comunes. Entre estos últimos cabe destacar su naturaleza dispersiva y multimodal, que emerge al resolver la ecuación característica no lineal de cada problema y que se muestra gráficamente en las denominadas curvas de dispersión.

En el Capítulo 3 se desarrolla una formulación semi-analítica de la propagación libre de ondas cilíndricas guiadas en una placa homogénea de un material elástico, lineal e isótropo. Para ello se realiza una discretización del espesor de la placa con Elementos Finitos unidimensionales, pero manteniendo la expresión analítica de la variación funcional con el resto de variables. De esta forma la ecuación característica se convierte en un sistema de autovalores lineal.

En el Capítulo 4 se utiliza la superposición modal para estudiar la generación de ondas cilíndricas desde un agujero circular pasante en una placa homogénea, elástica, lineal, isótropa e infinita, al someter dicha placa a un campo de tensiones prescrito en su borde interior. Para ello, se expresa el campo elastodinámico como una superposición de los modos de propagación semi-analíticos de la placa infinita, lo que conlleva una consideración en 3D del problema de propagación. En primer lugar, se estudiará dicha generación obteniendo el campo de tensiones en la placa para valores bajos de frecuencia y se comprobará la validez del método desarrollado frente a los obtenidos analíticamente por otras fuentes bibliográficas.

En el Capítulo 5 se utiliza la superposición modal para estudiar la difracción de ondas cilíndricas desde un agujero circular pasante en una placa homogénea, elástica, lineal, isótropa e infinita, cuando sobre ella incide una onda plana incidente. Se considerarán dos casos: si tenemos el borde interior empotrado, o bien si el borde es libre. En primer lugar, se estudiará dicha generación obteniendo el campo de tensiones en la placa para valores bajos de frecuencia y se comprobará la validez del método desarrollado frente a resultados analíticos.

Capítulo 2

Ondas guiadas en placas

2.1. Introducción

Cualquier fuente de excitación dinámica que actúe sobre una placa genera ondas elásticas en su interior, las cuales durante su propagación sufren múltiples reflexiones en las superficies superior e inferior. Todas estas ondas, que están atrapadas en la placa, interfieren entre sí, y bajo ciertas condiciones se produce una interferencia constructiva que se caracteriza por una estructura estacionaria en la sección transversal y una dirección de propagación paralela a la placa. En lugar de hacer un seguimiento de todas estas ondas individualmente, resulta más conveniente analizar los patrones de interferencia que se originan, a los cuales se les denomina modos. Las múltiples posibilidades de interferencias constructivas dan lugar a un infinito número de modos posibles, que sólo se propagan para ciertas combinaciones de frecuencia y número de onda, de acuerdo con la solución elastodinámica. La velocidad de propagación de cada modo depende no solo del material, sino también de la frecuencia y del espesor de la placa, lo que confiere a estas ondas un carácter dispersivo. Además, la estructura modal de desplazamientos en la sección varía en general con la frecuencia.

Otro aspecto importante de las ondas guiadas es su capacidad para viajar grandes distancias. Una onda cilíndrica propagándose en un espacio bidimensional infinito sufre una atenuación del orden de $O\left(1/r\right)$, con r la distancia a la fuente, que se debe al reparto de la energía elástica en un frente de onda con un área creciente como $O\left(r\right)$. Por contra, las ondas guiadas en placas bidimensionales no sufren atenuación por radiación porque la geometría finita de la placa constriñe la propagación de las ondas y confina así el flujo de energía a su sección transversal. Los únicos mecanismos de atenuación en este caso serán la difracción por obstáculos y la disipación de energía debido a la naturaleza dispersiva del medio.

En este capítulo se presenta un planteamiento analítico de la propagación de ondas guiadas planas y cilíndricas en placas elásticas y homogéneas [3]. Como sus nombres indican, las ondas planas tendrán frente de onda plano mientras que las ondas cilíndricas tendrán frente de onda cilíndrico. En ambos casos el planteamiento analítico dará lugar a dos subproblemas bidimensionales: deformación antiplana y deformación plana. Cada uno de ellos origina una variedad de onda guiada diferente (ondas SH guiadas y ondas de Lamb, respectivamente), cuyas características esenciales se analizarán en secciones posteriores. No obstante podemos adelantar que, en el caso de ondas planas, ambas ondas (SH y Lamb) estarán desacopladas, algo que no ocurre en el caso de ondas cilíndricas.

2.2. Ondas planas guiadas en placas homogéneas e isótropas

En esta sección se estudia una onda plana y armónica en régimen estacionario [3, 8], que se encuentra guiada en una placa plana e infinita de material elástico lineal, homogéneo e isótropo, con espesor constante y con sus superficies libres de tracciones, como se muestra en la Figura 2.1, donde se representan su dirección de propagación y su frente de onda.

Para simplificar la descripción matemática del problema, el sistema de referencia cartesiano se elige de forma que el eje y coincida con la dirección de propagación de la onda, el eje z sea perpendicular a la placa y tenga como origen el plano medio de la misma, y el eje x quede definido por la regla de la mano derecha. Por tratarse de una onda plana y gracias a la elección de ejes realizada, las variables elastodinámicas son independientes de la coordenada x.

Los desplazamientos tendrán la dirección de las coordenadas escogidas, siendo los desplazamientos en el plano de la placa u_x y u_y según las coordenadas x e y, respectivamente, y el desplazamiento vertical u_z según la coordenada z.

La propagación de ondas en un material elástico lineal e isótropo está gobernada por las ecuaciones de Navier:

$$(\lambda + \mu)\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) + \mu\underline{\nabla}^2\underline{u} = \rho\ddot{\underline{u}} \tag{2.1}$$

Para resolverlas es conveniente emplear la representación de Helmholtz, que expresa el campo de desplazamientos en función de un potencial escalar φ y

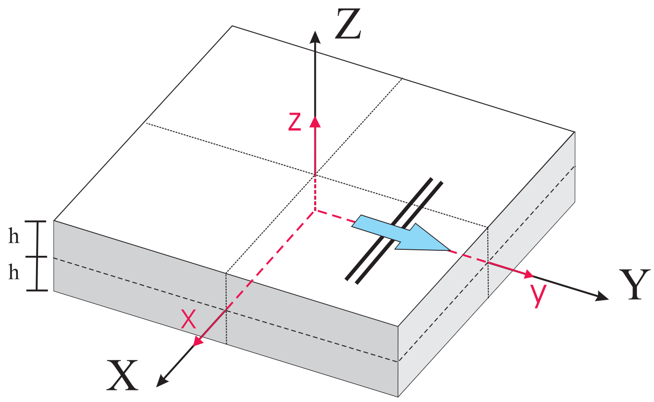


Figura 2.1. Onda plana guiada en una placa infinita. Geometría y sistema de coordenadas

otro vectorial $\underline{\psi}$ de la siguiente forma:

$$\underline{u} = \underline{\nabla}\varphi + \underline{\nabla} \wedge \underline{\psi} \tag{2.2}$$

donde el campo de desplazamientos vendrá representado por el siguiente vector:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Esta representación del campo de desplazamientos es solución de las ecuaciones de Navier si los potenciales satisfacen las siguientes ecuaciones de onda desacopladas:

$$\underline{\nabla}^2\varphi = \frac{1}{c_L^2}\ddot{\varphi} \tag{2.4}$$

$$\underline{\nabla}^2\underline{\psi} = \frac{1}{c_T^2}\ddot{\underline{\psi}} \tag{2.5}$$

donde c_L y c_T son las velocidades de propagación de las ondas longitudinales y transversales respectivamente y tienen la expresión:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad ; \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.6}$$

Además, el laplaciano en cartesianas tiene la siguientes expresión:

$$\underline{\nabla}^2 \;\; = \;\; \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.7}$$

Puesto que la ec. (2.2) relaciona las tres componentes de los desplazamientos con cuatro funciones independientes, es necesario añadir una restricción adicional que establezca una relación entre estas últimas. Habitualmente se emplea la siguiente condición:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\psi} = 0 \tag{2.8}$$

Empleando coordenadas cartesianas y teniendo en cuenta que las ondas objeto de estudio son planas propagándose paralelamente al eje y ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$), la ec. (2.2) puede reescribirse como:

$$u_x = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \tag{2.9}$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \tag{2.10}$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \tag{2.11}$$

Del mismo modo, la ec. (2.8) puede escribirse como:

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0 \tag{2.12}$$

Para introducir las condiciones de contorno en las superficies superior e inferior de la placa, es necesario emplear las ecuaciones de compatibilidad y la ley de comportamiento a las ecs. (2.9) a (2.11) para obtener las expresiones de las tracciones en un plano $z = cte$. Por tanto, tras la aplicación de lo anterior, en el caso analizado se obtiene:

$$\sigma_{yz} = \mu \left[2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \right] \tag{2.13}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \underline{\nabla}^2 \varphi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} \right] \tag{2.14}$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left[\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right] = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{2.15}$$

Observando las ecs. (2.9) a (2.15), se comprueba que el problema tridimensional puede descomponerse en dos problemas desacoplados:

- **deformación en el plano yz exclusivamente**, que corresponde a unas condiciones de deformación plana e implica a las siguientes variables de campo: u_y, u_z, σ_{yz}, σ_{zz}, σ_{yy}, σ_{xx}. En este caso sólo intervienen los potenciales φ y ψ_x.

- **deformación en la dirección x únicamente**, que corresponde a un caso antiplano e implica a las siguientes variables de campo: u_x, σ_{xz}, σ_{xy}. En este subproblema intervienen los potenciales ψ_y y ψ_z.

Aunque los problemas de deformación plana y antiplana se resolverán por separado, la variación espacio-temporal de las variables de campo (desplazamientos, deformaciones y tensiones) para una onda guiada plana y armónica en régimen estacionario admite en ambos casos la misma expresión en variables separadas. Dicha expresión, teniendo en cuenta la no dependencia con la coordenada x, es:

$$f(x, y, z, t) = [[\frac{\partial}{\partial x} = 0]] = f(y, z, t) = \widehat{f}(z)e^{i(ky+\omega t)} \tag{2.16}$$

donde ω es la frecuencia angular, $k = \omega/c$ es el número de onda, c es la velocidad de fase de la onda guiada y $\widehat{f}(z)$ es la estructura de la onda guiada a través del espesor de la placa. En la propagación de ondas planas, debido a que el factor $e^{i(ky+\omega t)}$ aparece en todas las variables, se puede simplificar la notación definiendo unas variables auxiliares (con gorro) dividiendo las originales por dicho factor. Estas nuevas variables son funciones exclusivas de z y representan la estructura de la onda guiada a través del espesor de la placa.

2.2.1. Caso antiplano: ondas SH guiadas

En este problema en particular se tiene una placa de material elástico lineal, isótropo y homogeneo de espesor $d = 2h$, en condiciones de deformación antiplana en el plano yz ($u_y = u_z = 0$, $\partial/\partial x = 0$), cuyas superficies están libres de tracciones y cuya geometria se muestra en la Figura 2.2. Las ecuaciones que lo gobiernan son, como se ha visto en el apartado anterior:

$$\nabla^2\psi_j = \frac{1}{c_T^2}\ddot{\psi}_j \tag{2.17}$$

donde el subíndice j puede tomar los valores y o z.

Al tratarse de ondas armónicas propagándose en la dirección y y con una estructura estacionaria en la dirección z, los potenciales pueden escribirse en variables separadas:

$$\psi_j(y, z, t) = \widehat{\psi}_j(z)e^{i(ky+\omega t)} \tag{2.18}$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecs. (2.17) se obtienen sendas ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\frac{d^2\widehat{\psi}_j}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2\right)\widehat{\psi}_j \quad = \quad 0 \tag{2.19}$$

cuyas soluciones son:

$$\widehat{\psi}_j(z) = A_j \mathrm{sen}(qz) + B_j \cos(qz) \tag{2.20}$$

donde:

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \tag{2.21}$$

A partir de los potenciales de Helmholtz se obtienen los desplazamientos y tensiones empleando las ecs. (2.9) y (2.15). Combinando los términos comunes y definiendo unas nuevas constantes se obtiene:

$$\begin{aligned} \widehat{u_x}(z) &= A_0 \mathrm{sen}(qz) + B_0 \cos(qz) & (2.22)\\ \widehat{\sigma}_{xz}(z) &= \mu q[A_0 \cos(qz) - B_0 \mathrm{sen}(qz)] & (2.23)\\ \widehat{\sigma}_{xy}(z) &= \mu i k \widehat{u}_x(z) & (2.24) \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno de tracciones nulas en las superficies de la placa $z = \pm h$, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo como el siguiente, cuyas incógnitas son los coeficientes desconocidos A_0 y B_0:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{xz}(+h) \\ \widehat{\sigma}_{xz}(-h) \end{bmatrix} = \mu q \begin{bmatrix} \cos(qh) & -\mathrm{sen}(qh) \\ \cos(qh) & \mathrm{sen}(qh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Sólo cuando el determinante de la matriz sea nulo, este sistema admite soluciones no triviales que corresponden a modos de propagación de ondas SH guiadas en la placa. Esta condición proporciona la siguiente *ecuación característica* (también denominada *ecuación de la dispersión* o *de la frecuencia*):

$$0 = q^2 \mathrm{sen}(qh) \cos(qh) \tag{2.26}$$

La ec. (2.26) se satisface de dos formas:

- **sen(qh)=0**, en cuyo caso se tiene que $A_0 = 0$, que corresponde a modos cuyos desplazamientos son simétricos respecto al plano medio de la placa ($z = 0$):

$$\widehat{u}_x(z) = B_0 \cos(qz) \quad ; \quad \widehat{\sigma}_{xz} = -\mu q B_0 \mathrm{sen}(qz) \tag{2.27}$$

- **cos(qh)=0**, en cuyo caso se tiene que $B_0 = 0$, que corresponde a modos cuyos desplazamientos son antisimétricos respecto al plano medio de la placa ($z = 0$):

$$\widehat{u}_x(z) = A_0 \mathrm{sen}(qz) \quad ; \quad \widehat{\sigma}_{xz} = \mu q A_0 \cos(qz) \tag{2.28}$$

La solución de la ecuación característica admite una expresión analítica explícita válida para ambos casos:

$$qh = \frac{n\pi}{2} \tag{2.29}$$

siendo n un número natural. Cada valor de n corresponde a un modo distinto (que se designa a partir de ahora como SHn), siendo los modos relaccionados con los valores de n pares modos simétricos, y los relacionados con valores de n impares antisimétricos.

Es conveniente emplear las siguientes variables adimensionales:

- **número de onda adimensional**, definido como $\xi = kh$
- **frecuencia adimensional**, definida como $\Omega = \frac{\omega h}{c_T}$
- **velocidad adimensional**, definida como $\overline{c} = \frac{c}{c_T}$

Empleando estas variables adimensionales y teniendo en cuenta la ec. (2.21), se puede reescribir la ec. (2.29) como:

$$\xi^2 = \Omega^2 - \Omega_n^2 \tag{2.30}$$

donde $\Omega_n = n\pi/2$ es la frecuencia para la que el modo SHn tiene un número de onda nulo, $\xi = 0$, y se denomina *frecuencia de corte* del modo SHn.

Para una frecuencia fija, la ec. (2.30) proporciona un número finito de números de onda reales y un número infinito de números de onda imaginarios. Teniendo en cuenta que la dependencia funcional con y y t tiene la forma $e^{i(ky+\omega t)}$, los primeros dan lugar a modos que se propagan a lo largo de la placa sin experimentar variación en su amplitud (denominados *modos reales*) y los segundos dan lugar a modos que no se propagan y cuya amplitud decae exponencialmente en la dirección y (denominados *modos evanescentes*). Si se adopta un número imaginario del número de onda $k = ib$, la variación con y y t resultante es $e^{i\omega t - by}$ siendo el factor e^{-by} el causante de la disminución de la amplitud del modo con la distancia[1]. En el caso de números de onda reales, $k = a$, la variación resultante con y y t es $e^{i(ay+\omega t)}$, siendo el factor e^{iay} el causante de la propagacón en la dirección y[2].

[1] Lo cual exige una elección adecuada del signo de b: $b > 0$ para $y \to +\infty$ y $b < 0$ para $y \to -\infty$.

[2] La dirección de propagación viene definida por el signo de a: $y \to -\infty$ para valores positivos de a y $y \to +\infty$ para valores negativos.

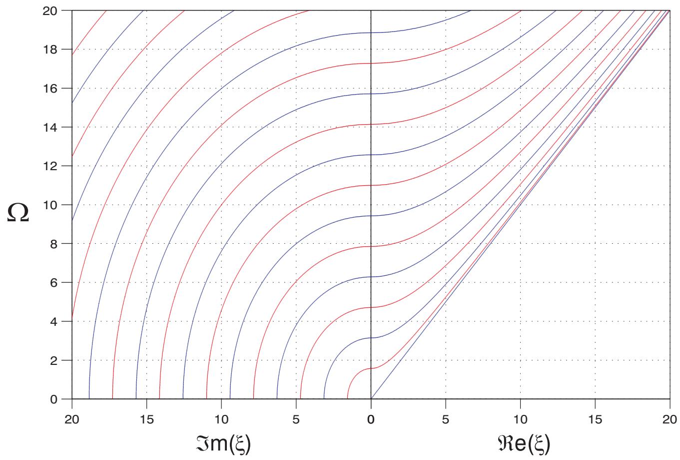


Figura 2.2. Espectro de frecuencia analítico de ondas SH guiadas. Modos reales y evanescentes

Sólo el modo $n = 0$ ($SH0$) es real para todas las frecuencias. Cualquier otro modo SHn es evanescente para frecuencias inferiores a su frecuencia de corte, Ω_n. Este *carácter multimodal* es común a la propagación de ondas en cualquier guía de onda.

Si se estudia un modo cualquiera SHn de forma aislada, la solución de la ecuación característica proporciona una relación entre ξ y Ω que se representa como una curva (o rama) en el espacio $|\Re e(\xi)| - |\Im m(\xi)| - \Omega$. La representación conjunta de las ramas correspondientes a todos los modos se denomina *espectro de frecuencia*. Las proyecciones del espectro de frecuencia sobre los planos coordenados $|\Re e(\xi)| - \Omega$ y $|\Im m(\xi)| - \Omega$ se muestran en la Figura 2.2 para $\Omega \leq 20$, donde se representan con una línea azul las ramas de modos simétricos y con una línea roja las ramas de modos antisimétricos.

Teniendo en cuenta la ec. (2.30), para cualquier rama $n \neq 0$ el tramo correspondiente a números de onda ξ reales es una parábola con asíntota $\Omega = \xi$, y el tramo correspondiente a números de onda ξ imaginarios es una circunferencia de radio Ω_n y centro el punto de coordenadas (0,0) del espectro de frecuencias. La rama del modo $SH0$ es la recta $\Omega = \xi$.

La velocidad de fase[3] tiene la definición habitual:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\Omega}{\xi} c_T \Rightarrow \bar{c} = \frac{c}{c_T} = \frac{\Omega}{\xi} \tag{2.31}$$

[3]Velocidad a la que se propagan los valles y picos de una onda armónica.

La interpretación gráfica de esta definición sobre el espectro de frecuencia es que la velocidad de fase adimensionalizada en un punto de la rama es la pendiente de la recta secante que une dicho punto con el origen. En el caso de ondas SH guiadas es sencillo obtener una expresión analítica de la velocidad de fase adimensionalizada:

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_n}{\Omega}\right)^2}} \tag{2.32}$$

En la Figura 2.3 se representa la variación de $\bar{c}$ con la frecuencia para los modos reales y $\Omega \leq 20$. Se observa que la velocidad de fase de todos los modos varía con la frecuencia, salvo en el modo $SH0$, por lo que todos los modos $n \neq 0$ son dispersivos. Consecuentemente, cuando un pulso monocromático de duración finita, caracterizado por un contenido en frecuencia que abarca un cierto ancho de banda, se propague en la placa, experimentará un ensanchamiento en su forma debido a la diferente velocidad de propagación de cada frecuencia que constituye el pulso. Es decir, el pulso se esparce en el espacio y el tiempo a medida que se propaga. Este *carácter dispersivo* es común a la propagación de ondas en cualquier guía de onda. La representación de las velocidades (de fase o de grupo) de los modos reales frente a la frecuencia se denomina *curvas de dispersión*.

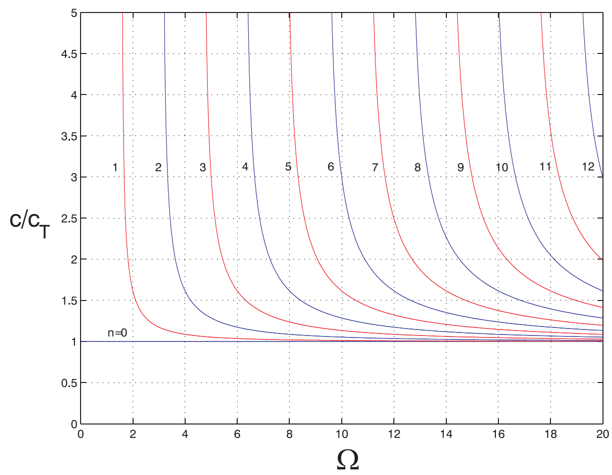


Figura 2.3. Curvas de dispersión $\Omega - \bar{c}$ analíticas de ondas SH guiadas. Modos reales

Como las ondas SH guiadas son dispersivas, la velocidad de grupo[4] es difer-

[4]Velocidad de propagación del pulso formado por un conjunto de ondas de frecuencias próximas y, también, velocidad de propagación de la energía.

ente a la velocidad de fase y tiene la siguiente expresión:

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow \bar{c}_{gr} = \frac{c_{gr}}{c_T} = \frac{d\Omega}{d\xi} \tag{2.33}$$

La interpretación gráfica de esta definición sobre el espectro de frecuencia es que la velocidad de grupo en un punto de la rama es la pendiente de la recta tangente a dicha rama en el punto considerado. Puede obtenerse de forma sencilla una expresión analítica para la velocidad de grupo de los modos SHn reales:

$$\bar{c}_{gr} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_n}{\Omega}\right)^2} = \frac{1}{\bar{c}} \tag{2.34}$$

en la cual se observa que la velocidad de grupo adimensional es la inversa de la velocidad de fase adimensional.

En la Figura 2.4 se representa la variación de $\bar{c}_{gr}$ con la frecuencia para los modos reales y para $\Omega \leq 20$.

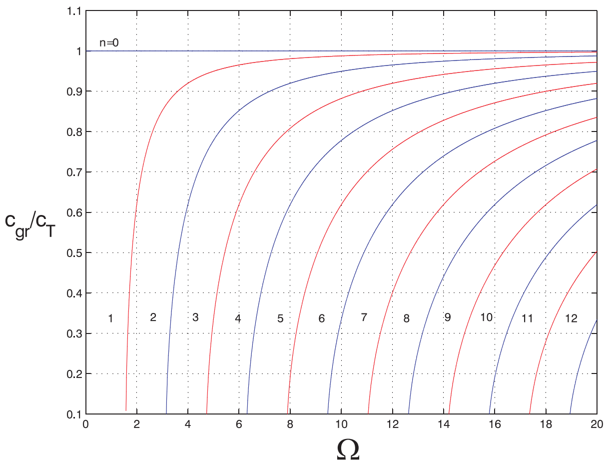


Figura 2.4. Curvas de dispersión $\Omega - \bar{c}_{gr}$ analíticas de ondas SH guiadas. Modos reales

Para ilustrar con mayor claridad el concepto de velocidad de grupo es conveniente mostrar la propagación de un pulso sencillo formado por la superposición de dos ondas con frecuencias muy próximas ω_1 y ω_2, pertenecientes a la misma rama SHn (es decir, al mismo modo), con la misma amplitud y propagándose en la misma dirección y sentido:

$$u_{pulso}(z) = A\widehat{u}_x^{(n)}(z)e^{i(k_1 y + \omega_1 t)} + A\widehat{u}_x^{(n)}(z)e^{i(k_2 y + \omega_2 t)} \tag{2.35}$$

Por otro lado, si se emplean razones trigonométricas se obtiene:

$$A\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right)=2Ae^{\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{2.36}$$

Con este resultado se puede reescribir la ecuación (2.35) de la siguiente forma:

$$u_{pulso}(z)=2A\widehat{u}_x^{(n)}(z)\underbrace{e^{i(k_m y+\omega_m t)}}_{onda\ portadora}\underbrace{\cos\left(\frac{\Delta k}{2}y+\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}_{onda\ moduladora} \tag{2.37}$$

donde $k_m=(k_1+k_2)/2$, $\omega_m=(\omega_1+\omega_2)/2$, $\Delta k=k_2-k_1$ y $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$.

Puede observarse en la ecuación anterior que el pulso consiste en una onda portadora de alta frecuencia ω_m que viaja a una velocidad de fase $c=\omega_m/k_m$, modulada en amplitud por una onda de baja frecuencia $\Delta\omega/2$ que viaja a una velocidad de grupo $c_{gr}=\Delta\omega/\Delta k$ (en el límite se convierte en $c_{gr}=d\omega/dk$). En la Figura 2.5 se representan los desplazamientos superficiales normalizados producidos por un pulso de este tipo en un instante determinado, donde se identifican claramente tanto la onda portadora como los paquetes de ondas.

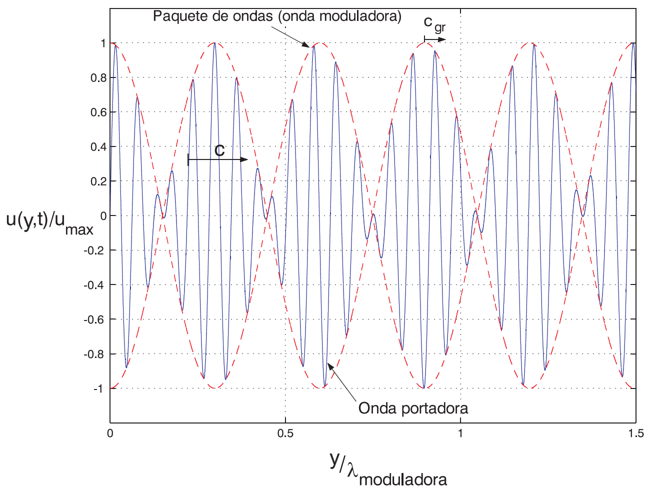


Figura 2.5. Pulso sencillo formado por dos ondas monocromáticas de frecuencias ligeramente diferentes, del mismo modo, de igual amplitud y propagándose en la misma dirección

En el caso de ondas SH guiadas se tiene que $c_{gr}<c$ (este mismo comportamiento dispersivo lo exhiben las ondas producidas por una piedra en un

estanque de agua en reposo[5], y se denomina *dispersión normal*), salvo para el modo $SH0$ donde $c_{gr} = c$ (modo no dispersivo, que se propaga sin variación de la forma del pulso).

En lo que respecta a la estructura de los modos, las ecs. (2.22) y (2.29) revelan que $\widehat{u}_x(z)$ es independiente de la frecuencia y del sentido de propagación (signo del número de onda).

Ondas SH como superposición de ondas planas

Las ondas SH guiadas también se pueden estudiar como la superposición de dos ondas SH planas: una propagándose en la dirección z positiva y otra en la dirección z negativa, ambas bajo un cierto ángulo de inclinación θ_{SH} en el plano yz, como se muestra en la Figura 2.6. Si se reescribe la ec. (2.22) con funciones exponenciales, la relación entre ambos planteamientos se hace evidente:

$$u_x(y,z,t) = \left(\frac{A_0 - iB_0}{2}\right) e^{i(ky+qz+\omega t)} - \left(\frac{A_0 + iB_0}{2}\right) e^{i(ky-qz+\omega t)} \tag{2.38}$$

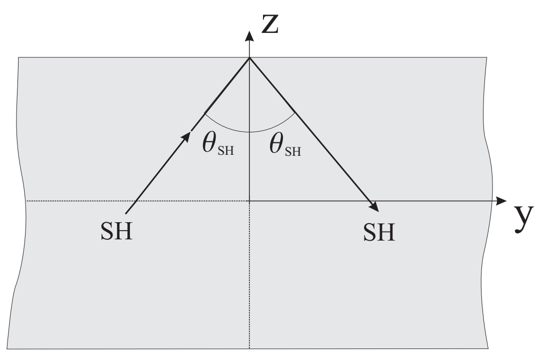


Figura 2.6. Ondas SH guiadas como superposición de ondas SH planas

La inclinación de las ondas SH respecto al eje z es:

$$\tan\theta_{SH} = \pm\frac{k}{q} \tag{2.39}$$

[5]Citando a Lord Rayleigh: "Con frecuencia se ha destacado que cuando un grupo de ondas avanza en el agua en reposo, la velocidad del grupo es menor que la velocidad de las ondas individuales de las que está compuesto; las ondas individuales parecen avanzar a través del grupo y desaparecer cuando alcanzan el frente del mismo". Las ondas individuales parecen originarse en la cola del grupo y avanzar hacia el frente del mismo, donde finalmente desaparecen. Por tanto, en este caso de ondas en la superficie del agua en reposo se tiene que $c_{gr} < c$.

Para, y sólo para, ciertas combinaciones de ángulo de inclinación y frecuencia, definidas por la relación de dispersión, la superposición de ambas ondas da lugar a una estructura estacionaria en la dirección z que se propaga en la dirección y. A este hecho también se le denomina *resonancia transversal* de la placa y constituye una explicación alternativa al carácter multimodal de las ondas SH guiadas.

2.2.2. Caso plano: ondas de Lamb

En los siguientes desarrollos se parte de una placa de un material elástico lineal, isótropo y homogéneo de espesor $d = 2h$, en condiciones de deformación plana en el plano yz ($u_x = 0$, $\partial/\partial x = 0$), cuyas superficies están libres de tracciones y cuya geometría se muestra en la Figura 2.1. Para resolver las ecuaciones de Navier se emplea la representación de Helmholtz, ec. (2.2). Los potenciales que intervienen son:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c_L^2}\ddot{\varphi} \tag{2.40}$$

$$\nabla^2\psi_x = \frac{1}{c_T^2}\ddot{\psi}_x \tag{2.41}$$

Como se están estudiando ondas armónicas propagándose en la dirección y y estacionarias en la dirección z, los potenciales pueden escribirse en variables separadas:

$$\varphi(y,z,t) = \widehat{\varphi}(z)e^{i(ky+\omega t)} \tag{2.42}$$

$$\psi_x(y,z,t) = \widehat{\psi}_x(z)e^{i(ky+\omega t)} \tag{2.43}$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecs. (2.40) y (2.41) se obtienen sendas ecuaciones diferenciales ordinarias para φ y ψ_x, de la forma:

$$\frac{d^2\widehat{\varphi}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2\right)\widehat{\varphi} = 0 \tag{2.44}$$

$$\frac{d^2\widehat{\psi}_x}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2\right)\widehat{\psi}_x = 0 \tag{2.45}$$

cuyas soluciones son:

$$\widehat{\varphi}(z) = A_1\mathrm{sen}(pz) + A_2\cos(pz) \tag{2.46}$$

$$\widehat{\psi}_x(z) = B_1\mathrm{sen}(pz) + B_2\cos(pz) \tag{2.47}$$

donde:

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad ; \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \tag{2.48}$$

Siguiendo el planteamiento del libro de Achenbach [1], se distinguen entre modos simétricos (Sn) y antisimétricos (An) con respecto al plano medio de la placa $z = 0$. Los modos simétricos se llaman también modos longitudinales porque el desplazamiento medio en el espesor va en la dirección longitudinal. Los modos antisimétricos se llaman también modos de flexión porque el desplazamiento medio tiene dirección transversal.

Usando la relación entre desplazamientos y potenciales, ecs. (2.9) a (2.11) se obtienen los primeros, a partir de los cuales de consiguen las tensiones empleando la ley de comportamiento del material. Así, para los *modos simétricos* o *longitudinales* se tiene:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_y(z) &= ikA_2\cos(pz) + qB_1\cos(qz) && (2.49)\\
\widehat{u}_z(z) &= -pA_2\mathrm{sen}(pz) - ikB_1\mathrm{sen}(qz) && (2.50)\\
\widehat{\sigma}_{xx}(z) &= -\lambda(k^2+p^2)A_2\cos(pz) && (2.51)\\
\widehat{\sigma}_{yy}(z) &= \widehat{\sigma}_{xx} + 2\mu[-k^2A_2\cos(pz) + ikqB_1\cos(qz)] && (2.52)\\
\widehat{\sigma}_{zz}(z) &= \widehat{\sigma}_{xx} - 2\mu[p^2A_2\cos(pz) + ikqB_1\cos(qz)] && (2.53)\\
\widehat{\sigma}_{yz}(y) &= \mu[-2ikpA_2\mathrm{sen}(pz) + (k^2-q^2)B_1\mathrm{sen}(qz)] && (2.54)
\end{aligned}$$

y para los modos antisimétricos o de flexión:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_y(z) &= ikA_1\mathrm{sen}(pz) - qB_2\mathrm{sen}(qz) && (2.55)\\
\widehat{u}_z(z) &= pA_1\cos(pz) - ikB_2\cos(qz) && (2.56)\\
\widehat{\sigma}_{xx}(z) &= -\lambda(k^2+p^2)A_1\mathrm{sen}(pz) && (2.57)\\
\widehat{\sigma}_{yy}(z) &= \widehat{\sigma}_{xx} - 2\mu[k^2A_1\mathrm{sen}(pz) + ikqB_2\mathrm{sen}(qz)] && (2.58)\\
\widehat{\sigma}_{zz}(z) &= \widehat{\sigma}_{xx} - 2\mu[p^2A_1\mathrm{sen}(pz) - ikqB_2\mathrm{sen}(qz)] && (2.59)\\
\widehat{\sigma}_{yz}(z) &= \mu[2ikpA_1\cos(pz) + (k^2-q^2)B_2\cos(qz)] && (2.60)
\end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno de tracciones nulas en las superficies de la placa $z = \pm h$ se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo cuyas incógnitas son los coeficientes desconocidos de la solución general:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{yz}(h) \\ \widehat{\sigma}_{zz}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Particularizando para los modos longitudinales se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -2\mu ikp\,\mathrm{sen}(ph) & \mu(k^2-q^2)\mathrm{sen}(qh) \\ -(\lambda(k^2+p^2)+2\mu p^2)\cos(ph) & -2\mu ikq\cos(qh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

y para los de flexión:

$$\begin{bmatrix} 2\mu ikp\cos(ph) & \mu(k^2-q^2)\cos(qh) \\ -(\lambda(k^2+p^2)+2\mu p^2)\mathrm{sen}(ph) & 2\mu ikq\,\mathrm{sen}(qh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Sólo cuando el determinante de las matrices sea nulo los sistemas admiten soluciones no triviales, las cuales corresponden a modos de propagación de ondas guiadas en la placa. Esta condición proporciona dos ecuaciones características (conocidas como *ecuaciones de Rayleigh-Lamb*) que relacionan la frecuencia ω y el número de onda k para los modos simétricos y antisimétricos, respectivamente[6]:

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{4k^2pq}{(q^2-k^2)^2} \tag{2.64}$$

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{(q^2-k^2)^2}{4k^2pq} \tag{2.65}$$

Se trata de ecuaciones transcendentales que admiten un número infinito de soluciones complejas. La solución del sistema de ecuaciones anterior proporciona también la siguiente relación entre las constantes:

$$\frac{B_1}{A_2} = \frac{2ikp\mathrm{sen}(ph)}{(k^2-q^2)\mathrm{sen}(qh)} = \frac{(k^2-q^2)\cos(ph)}{2ikq\cos(qh)} \tag{2.66}$$

$$\frac{B_2}{A_1} = -\frac{2ikp\cos(ph)}{(k^2-q^2)\cos(qh)} = -\frac{(k^2-q^2)\mathrm{sen}(ph)}{2ikq\mathrm{sen}(qh)} \tag{2.67}$$

Para una determinada frecuencia ambas ecuaciones características admiten un número finito de soluciones k reales, que corresponden a modos que se propagan (modos reales), un número infinito de soluciones complejas y un número finito de soluciones imaginarias. Las soluciones con parte imaginaria no nula corresponden a modos cuya amplitud decae exponencialmente en la dirección y (modos evanescentes). De nuevo aparece la estructura multimodal característica de las ondas guiadas.

Se definen las *frecuencias de corte* como aquellas para las cuales la ecuación característica admite como solución real un número de onda nulo, $k = 0$. Esta situación corresponde a un modo que no presenta variación respecto a y. Su expresión analítica es la siguiente:

$$\Omega_d = \frac{n_d\pi}{2} \quad ; \quad \Omega_e = \frac{n_e\pi}{2}\kappa \tag{2.68}$$

donde n_d y n_e son números naturales y $\kappa = \frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$. Estos valores corresponden respectivamente a situaciones de resonancia de ondas P y SV planas

[6]Para deducir estas expresiones se ha utilizadola siguiente relación: $\lambda(k^2+p^2)+2\mu p^2 = (\lambda+2\mu)(k^2+p^2)-2\mu k^2 = (\lambda+2\mu)\frac{\omega^2}{c_L^2} - 2\mu k^2 = \rho\omega^2 - 2\rho c_T^2 k^2 = \mu(\frac{\omega^2}{c_T^2} - 2k^2) = \mu(q^2-k^2)$, donde $\rho c_L^2 = \lambda + 2\mu$ y $\rho c_T^2 = \mu$.

propagándose perpendicularmente a la placa, que se denominan respectivamente *resonancias dilatacionales* y *resonancias equivoluminales*. Estas frecuencias de corte corresponden a modos simétricos para valores pares de n_e e impares de n_d y a modos antisimétricos para valores impares de n_e y pares de n_d.

Reescribiendo las ecuaciones de Rayleigh-Lamb, ecs. (2.64) y (2.65), en términos de las variables adimensionales Ω y ξ se tiene:

$$\frac{\tan(\sqrt{\frac{\Omega^2}{\kappa^2}-\xi^2})}{\tan(\sqrt{\Omega^2-\xi^2})} = -\left[\frac{4\xi^2\sqrt{(\frac{\Omega^2}{\kappa^2}-\xi^2)(\Omega^2-\xi^2)}}{(\Omega^2-2\xi^2)^2}\right]^{\pm 1} \tag{2.69}$$

donde el signo del exponente, positivo o negativo, permite seleccionar la ecuación de modos simétricos o antisimétricos respectivamente. Se observa que la única constante del material que interviene es κ, que es por tanto el único parámetro que influye en las raíces de dichas ecuaciones. Las curvas de dispersión adimensionales sólo dependen del coeficiente de Poisson ν.

Para valores muy grandes de la frecuencia, las ramas del espectro de frecuencia se aproximan a una de las asíntotas siguientes: la recta $\Omega = \frac{c_R}{c_T}\xi$ en el caso de los modos fundamentales ($S0$ y $A0$), donde c_R es la velocidad de las ondas superficiales o de Rayleigh (que es también función exclusiva de ν), o la recta $\Omega = \xi$ para el resto de modos.

Como ejemplo para ilustrar el aspecto de las curvas de dispersión de ondas de Lamb se ha elegido un material con $\nu = 0{,}25$. Las soluciones k reales e imaginarias de la ec. (2.64) se muestran en la Figura 2.7 con línea azul (modos simétricos), y las soluciones reales e imaginarias de la ec. (2.65) se muestran en la misma Figura 2.7 con línea roja (modos antisimétricos). Dicha representación gráfica se ha realizado en un rango de frecuencias amplio, $\Omega \leq 20$, y muestra las ramas del espectro de frecuencia que están contenidas en los planos coordenados $|\Re e(\xi)| - \Omega$ e $|\Im m(\xi)| - \Omega$. Sobre esta misma figura, en la parte correspondiente a modos reales se han dibujado tres líneas punteadas cuyas pendientes ($\Omega/\xi = \bar{c}$) corresponden a velocidades de fase de valores $c_L = \sqrt{3}c_T$, c_T y $c_R = 0{,}919c_T$, respectivamente.

Las curvas de dispersión con las velocidades de fase $\bar{c}$ frente a la frecuencia se muestran en la Figura 2.8 donde además se han señalado con líneas horizontales punteadas las velocidades de referencia (c_L, c_T y c_R) y con líneas verticales punteadas las frecuencias de corte (Ω_{Sn}, Ω_{An}).

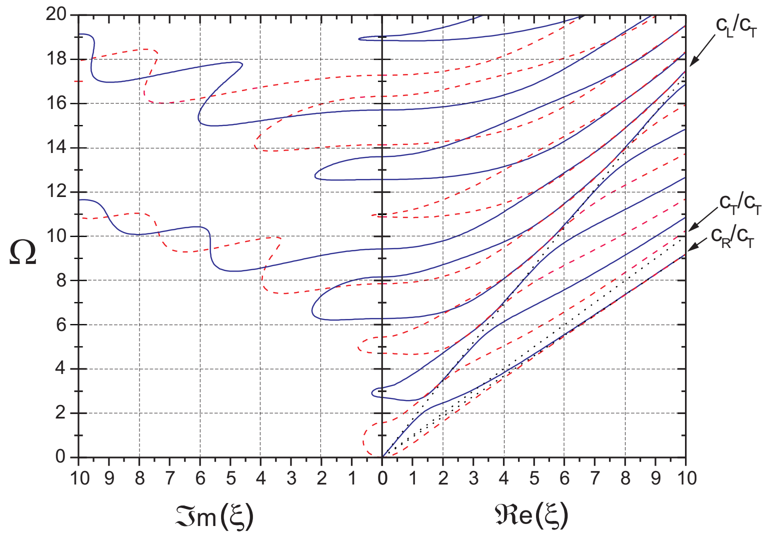


Figura 2.7. Espectro de fecuencia $\xi - \Omega$ de modos de Lamb reales e imaginarios para $\nu = 0{,}25$

Las curvas de dispersión con las velocidades de grupo adimensionales $\bar{c}_{gr}$ frente a la frecuencia se muestran en la Figura 2.9.

Ningún modo de Lamb presenta un carácter no dispersivo ($\bar{c} = cte$) para todas las frecuencias como sucedía con el modo $SH0$. Sin embargo, todos los modos exhiben una dispersión mínima en ciertos rangos de frecuencia, correspondientes a aquellos tramos de la curva de dispersión donde la velocidad de fase apenas cambia con la frecuencia (mesetas prácticamente horizontales en la Figura 2.8.

Para ilustrar con mayor claridad el concepto de velocidad de grupo es conveniente mostar la propagación de un pulso sencillo. En la Figura 2.5 se muestran los desplazamientos superficiales en un instante dado para un pulso sencillo formado por dos ondas de frecuencias muy próximas, pertenecientes a la misma rama, con la misma amplitud y propagándose en la misma dirección. Para ondas de Lamb, a diferencia de lo descrito para ondas SH guiadas, en algunos casos se tiene que $c_{gr} > c$ (las ondas individuales parecen originarse en el frente del grupo y retroceder hacia la cola del mismo, donde finalmente desaparecen), como sucede para el modo A_0 para todo el rango de frecuencias (Figuras 2.8 y 2.9). A esta situación se le denomina *dispersión anómala*. En la mayoría de los casos se tiene $c_{gr} < c$ (*dispersión normal*), lo cual produce un comportamiento de los pulsos similar al obtenido para ondas SH guiadas: las ondas individuales parecen generarse en la cola del grupo y avanzar hacia el frente del mismo,

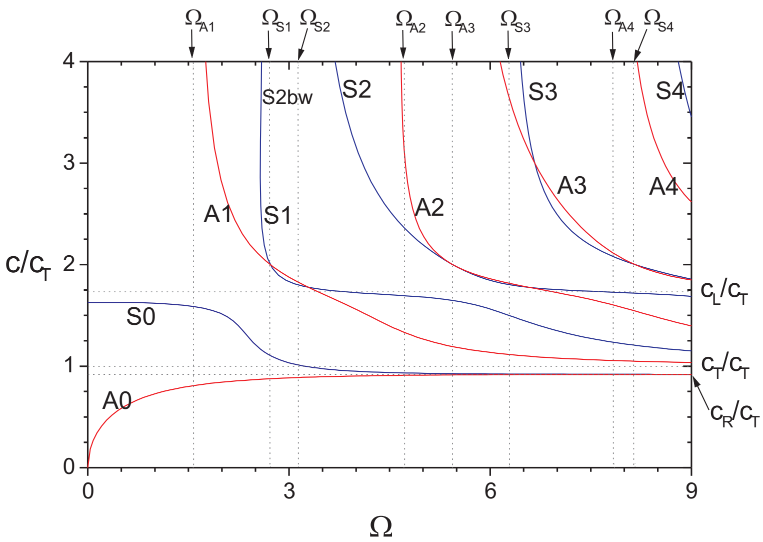


Figura 2.8. Curvas de dispersión $\Omega - \bar{c}$ de modos de Lamb reales para $\nu = 0{,}25$

donde parecen morir. Se observa que algunas ramas tienen tramos con velocidades de grupo negativas $c_{gr} < 0$, lo cual implica que el paquete de ondas y las ondas individualmente se mueven en sentidos opuestos. Este hecho no sucede en el caso de ondas SH guiadas.

"Backward waves"

Si se estudia la rama correspondiente a un modo determinado, Figuras 2.8 y 2.9, se observa que dicho modo no se propaga para todas las frecuencias (salvo en el caso de los modos fundamentales $S0$ y $A0$). Matemáticamente esto significa que sólo para valores superiores a una cierta *frecuencia umbral* la ecuación de Rayleigh-Lamb admite una solución k real para dicho modo. En el caso de las ondas SH guiadas esta frecuencia umbral coincide con la frecuencia de corte, pero no sucede lo mismo en el caso de ondas de Lamb, donde existen modos que se propagan para frecuencias inferiores a su frecuencia de corte (por ejemplo los modos $S1$ y $A2$).

En un rango de frecuencias inmediatamente por debajo de algunas frecuencias de corte existen dos modos reales que, aunque dibujados como una línea contínua, no pertenecen a la misma rama (en la Figura 2.8 sucede en Ω_{S1} y Ω_{A2}). Uno de estos modos presenta una velocidad de grupo negativa (ver Figura 2.9) y por ello se llama *onda "backward"*, puesto que su energía y su fase viajan en sentidos opuestos. El otro modo tiene una velocidad de grupo pos-

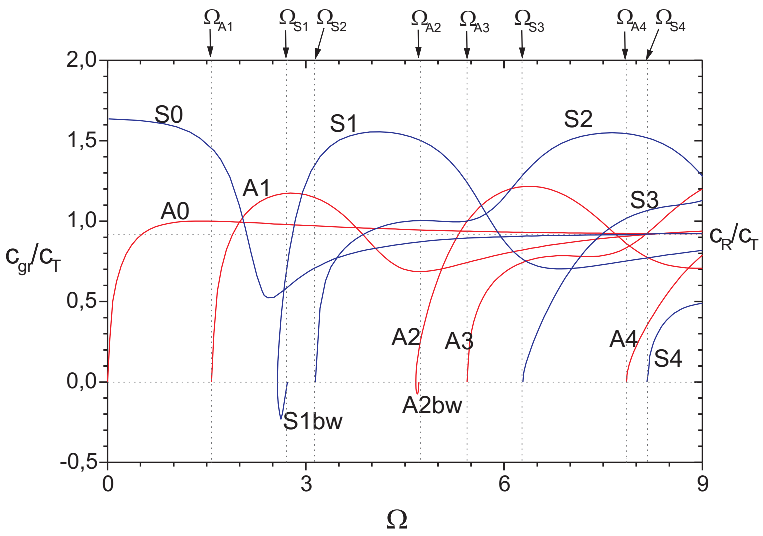


Figura 2.9. Curvas de dispersión $\Omega - \bar{c}_{gr}$ de modos de Lamb reales para $\nu = 0{,}25$

itiva. Este hecho se destaca etiquetando con nombres distintos los tramos de curva correspondientes a ondas “backward” y a ondas “forward”.

La estructura de los modos de Lamb, a diferencia del caso antiplano, varía con la frecuencia y con el sentido de propagación, como puede extraerse de las ecs. (2.49) a (2.60), (2.66) y (2.67). El cambio de dirección de propagación provoca el cambio de signo de una de las componentes de los desplazamientos. El efecto del cambio de frecuencia es más complejo y se abordará cuando se obtengan las estructuras modales de los desplazamientos, lo cual se detalla en el Capítulo 4.

La propagación de una onda armónica plana monocromática (conteniendo un único modo del espectro) hace que las partículas de la placa describan trayectorias elípticas alrededor de su posición indeformada, excepto para modos imaginarios puros donde las partículas describen trayectorias rectas.

Ondas de Lamb como superposición de ondas planas

Una forma alternativa de estudiar las ondas de Lamb consiste en superponer cuatro ondas planas que se propagan en la placa con una cierta inclinación en el plano yz: una onda longitudinal P y otra transversal SV propagándose en la dirección z positiva, y una onda longitudinal y otra transversal SV propagándose en la dirección z negativa, como se muestra en la Figura 2.10. Al reescribir las soluciones de los potenciales de Helmholtz de las ecs. (2.46) y (2.47) con funciones exponenciales esta relación se hace evidente:

$$\varphi(y,z,t) = \left(\frac{A_1 - iA_2}{2}\right) e^{i(ky+pz+\omega t)} - \left(\frac{A_1 + iA_2}{2}\right) e^{i(ky-pz+\omega t)} \quad (2.70)$$

$$\psi(y,z,t) = \left(\frac{B_1 - iB_2}{2}\right) e^{i(ky+qz+\omega t)} - \left(\frac{B_1 + iB_2}{2}\right) e^{i(ky-qz+\omega t)} \quad (2.71)$$

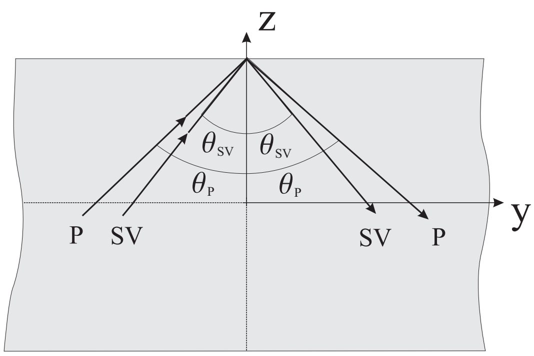


Figura 2.10. Ondas de Lamb como superposición de ondas P y SV planas

Las inclinaciones de las ondas P y SV respecto al eje z son respectivamente:

$$\tan(\theta_P) = \pm\frac{k}{p} \quad ; \quad \tan(\theta_{SV}) = \pm\frac{k}{q} \quad (2.72)$$

Esta superposición de ondas da lugar, para ciertas combinaciones de frecuencia, ángulos de inclinación y amplitudes, a estructuras estacionarias en el espesor de la placa producidas por la interferencia constructiva, y que corresponden a los distintos modos de Lamb. A este fenómeno se le llama *resonancia transversal* de la placa.

2.3. Ondas cilíndricas guiadas en placas homogéneas e isótropas

En esta sección se estudia una onda cilíndrica y armónica en régimen estacionario, que se encuentra guiada en una placa plana e infinita de material elástico lineal, homogéneo e isótropo, con espesor constante y con sus superficies libres de tracciones, como se muestra en la Figura 2.11, donde se representan su dirección de propagación y su frente de onda. El desarrollo que se expondrá para este tipo de onda será similar al caso ya expuesto de onda plana, por lo que se harán algunas referencias a éste último en este apartado.

Para simplificar la descripción matemática del problema, el sistema de referencia escogido es un sistema de coordenadas cilíndricas. Éste se elige de tal forma que la coordenada r coincida con la dirección de propagación de la onda, la coordenada z sea perpendicular a la placa y tenga por origen el plano medio de la misma, y la coordenada θ quede definida por la regla de la mano derecha.

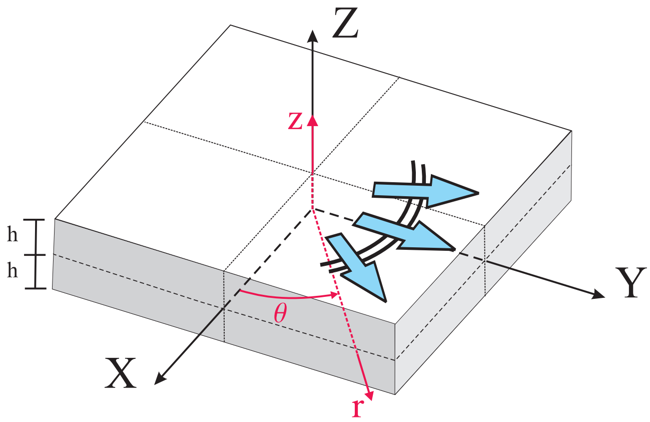


Figura 2.11. Onda cilíndrica guiada en una placa infinita. Geometría y sistema de coordenadas

Los desplazamientos tendrán la dirección de las coordenadas escogidas, siendo el desplazamiento radial u_r según la coordenada r, el desplazamiento vertical u_z según la coordenada z y el desplazamiento circunferencial u_θ según la coordenada θ.

Como ya hemos visto, la propagación de ondas en un material elástico lineal e isótropo está gobernada por las ecuaciones de Navier (ec. (2.1)), por lo que volveremos a emplear la representación de Helmholtz para resolverlas (ec. (2.2)), donde el campo de desplazamientos en éste caso vendrá representado por el siguiente vector:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

Las ecuaciones de onda que deben satisfacer los potenciales de la descomposición de Helmholtz son:

$$\underline{\nabla}^2\varphi = \frac{1}{c_L^2}\ddot{\varphi} \tag{2.74}$$

$$\underline{\nabla}^2\psi_z = \frac{1}{c_T^2}\ddot{\psi}_z \tag{2.75}$$

$$\underline{\nabla}^2\psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{c_T^2}\ddot{\psi}_r \tag{2.76}$$

$$\underline{\nabla}^2\psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} = \frac{1}{c_T^2}\ddot{\psi}_\theta \tag{2.77}$$

donde c_L y c_T vienen dadas por la ec. (2.6) y el laplaciano, en coordenadas cilíndricas, tiene la siguiente expresión:

$$\underline{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.78}$$

En las expresiones de las ecs. (2.74) a (2.77) podemos comprobar que existe acoplamiento entre los potenciales ψ_r y ψ_θ, algo que no ocurría en el caso de ondas planas. Además puesto que la ec. (2.2) relaciona las tres componentes de los desplazamientos con cuatro funciones de forma independientes, es necesario añadir una restricción adicional que establezca una relación entre estas últimas. Habitualmente se emplea la siguente condición (aunque no es la única válida):

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\psi} = 0 \tag{2.79}$$

Empleando coordenadas cilíndricas, la ec. (2.2) puede reescribirse como:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z} \tag{2.80}$$

$$u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} \tag{2.81}$$

$$u_\theta = \frac{1}{-r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r} \tag{2.82}$$

Del mismo modo, la ec. (2.79) puede escribirse como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} = 0 \tag{2.83}$$

Para aplicar las condiciones de contorno en las superficies superior e inferior de la placa, es necesario emplear las ecuaciones de compatibilidad y la ley de comportamiento a las ecs. (2.80) a (2.82) para obtener las expresiones de las tracciones en un plano $z = cte$. Por tanto, tras la aplicación de lo anterior, en el caso de tener simetría respecto al eje analizado se obtiene:

$$\sigma_{rr} = \lambda\underline{\nabla}^2\varphi + 2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial z}\right] \tag{2.84}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\underline{\nabla}^2\varphi + 2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi_\theta)}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta\partial z}\right] \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} = {} & \lambda\underline{\nabla}^2\varphi + 2\frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z\partial\theta}\right. \\ & \left. - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial\theta}\right]\end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rz} = {} & \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta\partial z} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi_\theta)}{\partial r}\right)\right. \\ & \left. - \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{\psi_r}{r}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} = {} & \mu\left[2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2}\right. \\ & \left. + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta^2}\right]\end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\sigma_{\theta z} = \mu\left[\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(r\psi_\theta)}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial z}\right] \tag{2.89}$$

Observando las ecs. (2.80) a (2.89), se comprueba que el problema tridimensional no puede descomponerse en dos problemas desacoplados, como ocurría en el caso de ondas planas.

No obstante para estudiar éste fenómeno de propagación, podemos utilizar los resultados analíticos establecidos por Achenbach [2] donde se expresa la forma general de los distintos modos de propagación de una onda en la placa. Achenbach obtiene los desplazamientos que produce una excitación armónica, aplicada internamente o en una de las superficies de la placa, como suma de los modos simétricos y antisimétricos de propagación a lo largo de la misma. De forma general, expresa el campo de desplazamientos como superposición de un movimiento en el espesor de la placa y una onda portadora que define la propagación a lo largo de la misma, cada uno de éstos descompuesto en sus componentes simétrica y antisimétrica respecto al plano medio de la placa. Sucede que, independientemente de la onda portadora, siempre se obtienen las mismas ecuaciones de dispersión que para el caso de frente de onda plano (ver ec. (2.26) para ondas SH guiadas y ecs. (2.64) y (2.65) para ondas de Lamb).

Por tanto, la propagación de la onda se debe a la superposición de las propagaciones de dos tipos de ondas independientes: ondas SH (horizontalmente polarizadas) y ondas de Lamb, ambas definidas en términos de sus modos simétricos y antisimétricos.

Para el caso de ondas cilíndricas, la onda portadora viene definida por las funciones de Hankel, mientras que al analizar el movimiento en el espesor de la placa obtenemos la ya conocida ecuación de Rayleigh-Lamb. Según dichos resultados, la variación espacio-temporal de las variables del campo de desplazamientos para una onda circular y armónica admite la siguiente expresión en variables separadas:

$$f(r, z, \theta, t) = \widehat{g}(z)\widehat{h}(r, \theta)e^{i\omega t} \tag{2.90}$$

donde ω es la frecuencia angular, $\widehat{g}(z)$ es la estructura de la onda guiada a través del espesor de la placa y $\widehat{h}(r, \theta)$ es la función que absorbe la dependencia respecto a las variables r y θ. En la propagación de ondas cilíndricas, debido a que el factor $e^{i\omega t}$ aparece en todas las variables, se puede simplificar la notación definiendo unas variables auxiliares (con gorro) dividiendo las originales por dicho factor. Estas nuevas variables son funciones exclusivas de r, z y θ y representan la estructura de la onda guiada a través de la placa.

Consideraremos el caso de una placa de un material elástico lineal, isótropo y homogéneo de espesor $d = 2h$, cuyas superficies están libres de tracciones y cuya geometría se muestra en la Figura 2.11.

2.3.1. Caso antiplano: ondas SH guiadas

Las expresiones (deducidas por Achenbach [2]) que definen de forma general los modos de propagación en la placa para una onda SH con número de onda k, aplicadas al caso de coordenadas cilíndricas y eliminando de las mismas la dependencia temporal, son las siguentes:

$$\widehat{u}_r = \frac{1}{kr}\widehat{U}(z)\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\theta}(r, \theta) \tag{2.91}$$

$$\widehat{u}_\theta = -\frac{1}{k}\widehat{U}(z)\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial r}(r, \theta) \tag{2.92}$$

$$\widehat{u}_z = 0 \tag{2.93}$$

donde $\widehat{\psi}(r, \theta)$ es solución de la ecuación de onda reducida de membrana:

$$\underline{\nabla}^2\widehat{\psi} + k^2\widehat{\psi} = 0 \tag{2.94}$$

Para determinar el valor de la función que representa el movimiento en el espesor de la placa, $\widehat{U}(z)$, usamos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\widehat{U}}{dz^2} + q^2\widehat{U} = 0 \tag{2.95}$$

donde:

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \tag{2.96}$$

Si ahora distinguimos entre las componentes simétrica y antisimétrica de los modos de propagación de las ondas SH respecto al plano medio de la placa ($z = 0$), podemos obtener dos soluciones para la ec. (2.95):

- para los modos simétricos:

$$\widehat{U}^S(z) = \cos(qz) \tag{2.97}$$

- para los modos antisimétricos:

$$\widehat{U}^A(z) = \operatorname{sen}(qz) \tag{2.98}$$

Además, aplicando la condición que establece que las superficies de la placa están libres de tracciones obtenemos que:

$$q = \frac{n\pi}{2h} \tag{2.99}$$

siendo n un número natural. Cada valor de n corresponde a un modo distinto (que se designará como SHn), correspondiendo los valores de n pares a los modos simétricos y los impares a los modos antisimétricos.

Por tanto, usando las ecs. (2.91) a (2.93), el campo de desplazamientos para las componentes correspondientes a los modos simétricos, en coordenadas cilíndricas, queda de la siguiente forma:

$$\widehat{u}_r^S = \frac{1}{kr}\cos\left(\frac{n\pi z}{2h}\right)\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\theta}(r,\theta) \tag{2.100}$$

$$\widehat{u}_\theta^S = -\frac{1}{k}\cos\left(\frac{n\pi z}{2h}\right)\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial r}(r,\theta) \tag{2.101}$$

$$\widehat{u}_z^S = 0 \tag{2.102}$$

Por otro lado, la función $\widehat{\psi}(r,\theta)$ debe verificar la ecuación de onda correspondiente:

$$\frac{\partial^2\widehat{\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widehat{\psi}}{\partial\theta^2} + k^2\psi = 0 \tag{2.103}$$

cuya solución general tomamos de la forma:

$$\widehat{\psi}(r,\theta) \;=\; \widehat{\Psi}(r)\mathrm{sen}(m\theta) \tag{2.104}$$

no obstante Achenbach sólo considera el valor $m = 1$, con lo que la solución a la ec. (2.103) queda de la forma:

$$\widehat{\psi}(r,\theta) \;=\; \widehat{\Psi}(r)\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.105}$$

Observamos que en su desarrollo Achenbach considera, para las ondas SH, sólo la forma antisimétrica de los desplazamientos según la coordenada θ; no obstante, esta expresión se generalizará en un apartado posterior en la forma $e^{im\theta}$, para considerar simultáneamente las componentes simétrica y antisimétrica de la dependencia con θ.

Al sustituir la expresión dada por la ec. (2.104) en la ec. (2.103) obtenemos la ecuación de Bessel:

$$\frac{d^2\widehat{\Psi}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\widehat{\Psi}}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\widehat{\Psi} \;=\; 0 \tag{2.106}$$

donde se concluye que la dependencia con la coordenada radial viene expresada en términos de las funciones de Hankel:

$$\widehat{\Psi}(r) \;=\; A_\Psi H_m^{(1)}(kr) + B_\Psi H_m^{(2)}(kr) \tag{2.107}$$

Teniendo en cuenta que la variación temporal es $e^{i\omega t}$, la segunda función de Hankel, $H_m^{(2)}(kr)$, representa la propagación de la onda hacia valores $r \to +\infty$ mientras que la primera función de Hankel, $H_m^{(1)}(kr)$, representa la propagación para valores $r \to 0$[7]. Teniendo en cuenta que Achenbach toma en sus expresiones el valor $m = 1$, en adelante las funciones $H_m^{(1)}(kr)$ y $H_m^{(2)}(kr)$ se expresarán como $H^{(1)}(kr)$ y $H^{(2)}(kr)$, respectivamente, donde se sobreentenderá el valor $m = 1$ aunque no aparezca dicho subíndice.

En este desarrollo sólo supondremos propagación hacia valores $r \to +\infty$, por lo que la solución de la ec. (2.106) vendrá expresada en términos de la segunda función de Hankel:

$$\widehat{\Psi}(r) \;=\; H^{(2)}(kr) \tag{2.108}$$

[7]En el Capítulo 3 se estudiará la dependencia de la dirección de propagación en función del número de onda y se verificarán las afimaciones aquí realizadas.

Teniendo en cuenta lo anterior, el campo de desplazamientos debido a las ondas SH viene dado por las siguientes expresiones:

$$\widehat{u}_r = \frac{1}{kr}\widehat{U}(z)H^{(2)}(kr)\cos(\theta) \tag{2.109}$$

$$\widehat{u}_\theta = -\frac{1}{k}\widehat{U}(z)\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big]\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.110}$$

$$\widehat{u}_z = 0 \tag{2.111}$$

siendo estas expresiones las correspondientes a los desplazamientos de los modos simétricos al sustituir la función $\widehat{U}(z)$ por la expresión $\cos\left(\frac{n\pi z}{2h}\right)$ y a los modos antisimétricos al sustituir dicha función por la expresión $\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi z}{2h}\right)$.

En cuanto a las tensiones, las expresiones generales de las mismas quedan de la siguente forma:

$$\widehat{\sigma}_{rr} = \mu\widehat{U}(z)\Big[\frac{2}{kr}\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big] - \frac{2}{kr^2}H^{(2)}(kr)\Big]\cos(\theta) \tag{2.112}$$

$$\widehat{\sigma}_{r\theta} = \mu\widehat{U}(z)\Big[\frac{2}{kr}\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big] + \Big(k - \frac{2}{kr^2}\Big)H^{(2)}(kr)\Big]\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.113}$$

Vemos que hemos obtenido las mismas expresiones (ecs. (2.96) y (2.99)) que en las ondas SH del caso plano, por lo que el espectro de frecuencias, correspondería al mostrado en la Figura 2.2 y por consiguiente también obtendríamos los mismos diagramas de dispersión para la velocidad de fase (Figura 2.3) y velocidad de grupo (Figura 2.4). Además, observamos que las funciones $\widehat{U}(z)$ obtenidas para frente de onda cilíndrico (ecs. (2.97) y (2.98)) coinciden con las estructuras modales de las ondas SH guiadas con frente de onda plano (ecs. (2.27) y (2.28)).

Por tanto, todo lo comentado de dichas representaciones para las ondas SH del caso plano es de aplicación a las ondas SH del caso cilíndrico, con la salvedad de que para estas últimas no tiene sentido la propagación hacia $r \rightarrow -\infty$, ya que siempre $r \geq 0$, por lo que en este caso la propagación será hacia $r \rightarrow 0$. Por último, la dependencia de la dirección de propagación con el número de onda k será estudiada y justificada posteriormente en el Capítulo 3.

2.3.2. Caso plano: ondas de Lamb

Las expresiones (presentadas por Achenbach [2]) que definen de forma general los modos de propagación en la placa para una onda de Lamb con número de onda k, aplicadas al caso de coordenadas cilíndricas y eliminando de las mismas la dependencia temporal, son las siguentes:

$$\widehat{u}_r = \frac{1}{k}\widehat{V}(z)\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial r}(r,\theta) \tag{2.114}$$

$$\widehat{u}_\theta = \frac{1}{kr}\widehat{V}(z)\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\theta}(r,\theta) \tag{2.115}$$

$$\widehat{u}_z = \widehat{W}(z)\widehat{\varphi}(r,\theta) \tag{2.116}$$

donde $\widehat{\varphi}(r,\theta)$ es solución de la ecuación de onda reducida de membrana:

$$\underline{\nabla}^2\widehat{\varphi} + k^2\widehat{\varphi} = 0 \tag{2.117}$$

Las funciones que representan el movimiento en el espesor de la placa, $\widehat{V}(z)$ y $\widehat{W}(z)$, pueden ser expresadas en modos de Lamb simétricos y antisimétricos, respecto al plano medio de la placa ($z = 0$), de la siguiente forma:

- para los modos simétricos:

$$\widehat{V}^S(z) = S_1\cos(pz) + S_2\cos(qz) \tag{2.118}$$

$$\widehat{W}^S(z) = S_3\mathrm{sen}(pz) + S_4\mathrm{sen}(qz) \tag{2.119}$$

- para los modos antisimétricos:

$$\widehat{V}^A(z) = A_1\mathrm{sen}(pz) + A_2\mathrm{sen}(qz) \tag{2.120}$$

$$\widehat{W}^A(z) = A_3\cos(pz) + A_4\cos(qz) \tag{2.121}$$

donde:

$$S_1 = 2\cos(qh) \tag{2.122}$$

$$S_2 = -\left[\frac{k^2-q^2}{k^2}\right]\cos(ph) \tag{2.123}$$

$$S_3 = -2\left(\frac{p}{k}\right)\cos(qh) \tag{2.124}$$

$$S_4 = -\left[\frac{k^2-q^2}{qk}\right]\cos(ph) \tag{2.125}$$

$$A_1 = 2\sin(qh) \tag{2.126}$$

$$A_2 = -\left[\frac{k^2-q^2}{k^2}\right]\mathrm{sen}(ph) \tag{2.127}$$

$$A_3 = 2\left(\frac{p}{k}\right)\mathrm{sen}(qh) \tag{2.128}$$

$$A_4 = \left[\frac{k^2-q^2}{qk}\right]\mathrm{sen}(ph) \tag{2.129}$$

y además:

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2, \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \tag{2.130}$$

Comparando las ecs. (2.118) a (2.130) con las ecs. (2.66) y (2.67) del caso plano, se observa que ambos grupos de soluciones coinciden y puede obtenerse una relación entre las constantes que aparecen en ambos grupos de expresiones:

$$\left[\widehat{V}(z)\right]_{cil} = \left[\widehat{u}_y(z)\right]_{plano} \tag{2.131}$$

$$\left[\widehat{W}(z)\right]_{cil} = \left[i\widehat{u}_z(z)\right]_{plano} \tag{2.132}$$

Por otro lado, la función $\widehat{\varphi}(r,\theta)$ debe verificar la ecuación de onda correspondiente:

$$\frac{\partial^2\widehat{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widehat{\varphi}}{\partial\theta^2} + k^2\varphi = 0 \tag{2.133}$$

cuya solución tomamos de la forma:

$$\widehat{\varphi}(r,\theta) = \widehat{\Phi}(r)\cos(m\theta) = \widehat{\Phi}(r)\cos(\theta) \tag{2.134}$$

donde de nuevo tomamos $m = 1$, siendo consistentes con la notación empleada para ondas SH guiadas. Observamos que en su desarrollo Achenbach considera, para las ondas de Lamb, sólo la forma simétrica de los desplazamientos según la coordenada θ; no obstante, ésta expresión se generalizará en un apartado posterior en la forma $e^{im\theta}$, para considerar simultáneamente las componentes simétrica y antisimétrica de la dependencia con θ.

Al sustituir la expresión anterior en la ec. (2.133) resulta la ecuación de Bessel, que generalizando para uyn valor cuaalquiera del parámetro m, resulta:

$$\frac{d^2\widehat{\Phi}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\widehat{\Phi}}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\widehat{\Phi} = 0 \tag{2.135}$$

donde se concluye que la dependencia con la coordenada radial viene expresada en términos de la función de Hankel:

$$\widehat{\Phi}(r) = A_\Phi H_m^{(1)}(kr) + B_\Phi H_m^{(2)}(kr) \tag{2.136}$$

Análogamente al caso de ondas SH cilíndricas, teniendo en cuenta que la variación temporal es $e^{i\omega t}$, la segunda función de Hankel, $H_m^{(2)}(kr)$, representa la propagación de la onda hacia valores $r \to +\infty$ mientras que la primera función de Hankel, $H_m^{(1)}(kr)$, representa la propagación para valores $r \to 0$[8]. Por tanto. en adelante supondremos propagación hacia valores $r \to +\infty$, por lo que la solución de la ec. (2.135) vendrá expresada en términos de la segunda función de Hankel, por lo que usando la misma notación que en el caso de ondas SH al considerar $m = 1$ tenemos:

$$\widehat{\Phi}(r) = H^{(2)}(kr) \tag{2.137}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el campo de desplazamientos debido a las ondas de Lamb viene dado por las siguientes expresiones:

$$\widehat{u}_r = \frac{1}{k}\widehat{V}(z)\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big]\cos(\theta) \tag{2.138}$$

$$\widehat{u}_\theta = -\frac{1}{kr}\widehat{V}(z)H^{(2)}(kr)\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.139}$$

$$\widehat{u}_z = \widehat{W}(z)H^{(2)}(kr)\cos(\theta) \tag{2.140}$$

siendo estas expresiones las correspondientes a los desplazamientos de los modos simétricos al sustituir las funciones $\widehat{V}(z)$ y $\widehat{W}(z)$ por las expresiones dadas en las ecs. (2.118) y (2.119), respectivamente, y a los modos antisimétricos al sustituir dichas funciones por las ecs. (2.120) y (2.121), respectivamente.

Para aplicar la condición de contorno de superficies libres de tensiones calculamos la expresión de dichas tensiones, que en el caso de los modos de Lamb simétricos tienen las siguientes expresiones:

$$\widehat{\sigma}^S_{rz} = -\Sigma^S_{rz}(z)\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big]\cos(\theta) \tag{2.141}$$

$$\widehat{\sigma}^S_{zz} = \Sigma^S_{zz}(z)H^{(2)}(kr)\cos(\theta) \tag{2.142}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}^S_{rr} = {} & \Sigma^S_{rr}(z)H^{(2)}(kr)\cos(\theta) \\ & - \bar{\Sigma}^S_{rr}(z)\Big[\frac{1}{kr}\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big] - \frac{1}{kr^2}H^{(2)}(kr)\Big]\cos(\theta)\end{aligned} \tag{2.143}$$

$$\widehat{\sigma}^S_{\theta z} = -\Sigma^S_{\theta z}(z)\frac{1}{kr}H^{(2)}(kr)\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.144}$$

$$\widehat{\sigma}^S_{r\theta} = \Sigma^S_{r\theta}(z)\Big[-\frac{1}{kr}\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big] + \frac{1}{kr^2}H^{(2)}(kr)\Big]\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.145}$$

[8]En el Capítulo 3 se estudiará la dependencia de la dirección de propagación en función del número de onda y se verificarán las afimaciones aquí realizadas.

donde:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{rz}^{S}(z) &= \mu\big[S_5\mathrm{sen}(pz) + S_6\mathrm{sen}(qz)\big] && (2.146)\\
\Sigma_{zz}^{S}(z) &= \mu\big[S_7\cos(pz) + S_8\cos(qz)\big] && (2.147)\\
\Sigma_{rr}^{S}(z) &= \mu\big[S_9\cos(pz) + S_{10}\cos(qz)\big] && (2.148)\\
\bar{\Sigma}_{rr}^{S}(z) &= \mu\big[S_{11}\cos(pz) + S_{12}\cos(qz)\big] && (2.149)\\
\Sigma_{\theta z}^{S}(z) &= -\Sigma_{rz}^{S}(z) && (2.150)\\
\Sigma_{r\theta}^{S}(z) &= \bar{\Sigma}_{rr}^{S}(z) && (2.151)
\end{aligned}$$

siendo los coeficientes de las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}
S_5 &= 4p\cos(qh) && (2.152)\\
S_6 &= \Big[\frac{(k^2-q^2)^2}{qk^2}\Big]\cos(ph) && (2.153)\\
S_7 &= \Big[2\frac{(k^2-q^2)}{k}\Big]\cos(qh) && (2.154)\\
S_8 &= -\Big[2\frac{(k^2-q^2)}{k}\Big]\cos(ph) && (2.155)\\
S_9 &= \Big[2\frac{(2p^2-k^2-q^2)}{k}\Big]\cos(qh) && (2.156)\\
S_{10} &= \Big[2\frac{(k^2-q^2)}{k}\Big]\cos(ph) && (2.157)\\
S_{11} &= 4\cos(qh) && (2.158)\\
S_{12} &= -\Big[2\frac{(k^2-q^2)}{k^2}\Big]\cos(ph) && (2.159)
\end{aligned}$$

De forma similar, las expresiones de las tensiones para el caso de los modos de Lamb antisimétricos tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_{rz}^{A} &= -\Sigma_{rz}^{A}(z)\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big]\cos(\theta) && (2.160)\\
\widehat{\sigma}_{zz}^{A} &= \Sigma_{zz}^{A}(z)H^{(2)}(kr)\cos(\theta) && (2.161)\\
\widehat{\sigma}_{rr}^{A} &= \Sigma_{rr}^{A}(z)H^{(2)}(kr)\cos(\theta)\\
&\quad -\bar{\Sigma}_{rr}^{A}(z)\Big[\frac{1}{kr}\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big] - \frac{1}{kr^2}H^{(2)}(kr)\Big]\cos(\theta) && (2.162)\\
\widehat{\sigma}_{\theta z}^{A} &= -\Sigma_{\theta z}^{A}(z)\frac{1}{kr}H^{(2)}(kr)\mathrm{sen}(\theta) && (2.163)\\
\widehat{\sigma}_{r\theta}^{A} &= \Sigma_{r\theta}^{A}(z)\Big[-\frac{1}{kr}\frac{\partial}{\partial r}\Big[H^{(2)}(kr)\Big] + \frac{1}{kr^2}H^{(2)}(kr)\Big]\mathrm{sen}(\theta) && (2.164)
\end{aligned}$$

donde:

$$\Sigma^A_{rz}(z) = \mu\big[A_5\cos(pz) + A_6\cos(qz)\big] \tag{2.165}$$
$$\Sigma^A_{zz}(z) = \mu\big[A_7\text{sen}(pz) + A_8\text{sen}(qz)\big] \tag{2.166}$$
$$\Sigma^A_{rr}(z) = \mu\big[A_9\text{sen}(pz) + A_{10}\text{sen}(qz)\big] \tag{2.167}$$
$$\bar{\Sigma}^A_{rr}(z) = \mu\big[A_{11}\text{sen}(pz) + A_{12}\text{sen}(qz)\big] \tag{2.168}$$
$$\Sigma^A_{\theta z}(z) = -\Sigma^A_{rz}(z) \tag{2.169}$$
$$\Sigma^A_{r\theta}(z) = \bar{\Sigma}^A_{rr}(z) \tag{2.170}$$

siendo los coeficientes de las expresiones anteriores:

$$A_5 = -4p\text{sen}(qh) \tag{2.171}$$
$$A_6 = -\Big[\frac{(k^2-q^2)^2}{qk^2}\Big]\text{sen}(ph) \tag{2.172}$$
$$A_7 = \Big[2\frac{(k^2-q^2)}{k}\Big]\text{sen}(qh) \tag{2.173}$$
$$A_8 = -\Big[2\frac{(k^2-q^2)}{k}\Big]\text{sen}(ph) \tag{2.174}$$
$$A_9 = \Big[2\frac{(2p^2-k^2-q^2)}{k}\Big]\text{sen}(qh) \tag{2.175}$$
$$A_{10} = \Big[2\frac{(k^2-q^2)}{k}\Big]\text{sen}(ph) \tag{2.176}$$
$$A_{11} = 4\text{sen}(qh) \tag{2.177}$$
$$A_{12} = -\Big[2\frac{(k^2-q^2)}{k^2}\Big]\text{sen}(ph) \tag{2.178}$$

Si aplicamos las condiciones de contorno en tensiones, según las cuales son nulas las tensiones en los planos $z = \pm h$, obtenemos las tres igualdades siguientes:

$$\widehat{\sigma}_{zz}(h) = \widehat{\sigma}_{zr}(h) = \widehat{\sigma}_{z\theta}(h) = 0 \tag{2.179}$$

de las cuales $\widehat{\sigma}_{zz}(h) = 0$ se satisface automáticamente y las otras dos son equivalentes entre sí. Por tanto, de lo anterior obtenemos las ecuaciones de Rayleigh-Lamb, que para los modos simétricos son:

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{4k^2pq}{(q^2-k^2)^2} \tag{2.180}$$

y para los modos antisimétricos:

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{(q^2-k^2)^2}{4k^2pq} \tag{2.181}$$

Vemos que hemos obtenido las mismas expresiones (ecs. (2.130), (2.180) y (2.181)) que en las ondas de Lamb del caso plano, por lo que el espectro de frecuencias correspondería al mostrado en la Figura 2.7 y por consiguiente también obtendríamos los mismos diagramas de dispersión para la velocidad de fase (Figura 2.8) y velocidad de grupo (Figura 2.9).

Por tanto, todo lo comentado para las ondas de Lamb del caso plano es de aplicación a las ondas de Lamb del caso cilíndrico, con la salvedad de que para estas últimas no tiene sentido la propagación hacia $r \to -\infty$, ya que siempre $r \geq 0$, por lo que en este caso la propagación será hacia $r \to 0$. Por último, la dependencia de la dirección de propagación con el número de onda k será estudiada y justificada posteriormente en el Capítulo 3.

2.3.3. Problema total de propagación de ondas cilíndricas

Como hemos comentado anteriormente, la solución desarrollada por Achenbach establece una forma general de los desplazamientos de una onda en la placa como la superposición de las propagaciones de dos tipos de ondas independientes: ondas SH y ondas Lamb, ambas definidas en términos de sus modos simétricos y antisimétricos respecto al plano medio de la placa ($z = 0$). Por tanto, la expresión global de los desplazamientos de la onda cilíndrica será la suma de las expresiones de los desplazamientos de las respectivas ondas SH y Lamb.

Sumando los desplazamientos de ambos tipos de onda según sus componentes r, z y θ, obtenemos el campo total de desplazamientos, que tiene la siguiente expresión:

$$\widehat{u}_r = A\frac{1}{k}\widehat{V}(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[H^{(2)}(kr)\right]\cos(\theta) + B\frac{1}{kr}\widehat{U}(z)H^{(2)}(kr)\cos(\theta) \qquad (2.182)$$

$$\widehat{u}_z = A\widehat{W}(z)H^{(2)}(kr)\cos(\theta) \qquad (2.183)$$

$$\widehat{u}_\theta = -A\frac{1}{kr}\widehat{V}(z)H^{(2)}(kr)\mathrm{sen}(\theta) - B\frac{1}{k}\widehat{U}(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[H^{(2)}(kr)\right]\mathrm{sen}(\theta) \qquad (2.184)$$

donde $\widehat{U}(z)$, $\widehat{V}(z)$ y $\widehat{W}(z)$ vendrán definidos por las ecs. (2.97), (2.118) y (2.119) para los modos simétricos, y por las ecs. (2.98), (2.120) y (2.121) para los modos antisimétricos. Observamos que sólo aparecen dos constantes, siendo la misma constante la que multiplica a cada modo en las tres componenetes del campo de desplazamientos (A para las ondas de Lamb y B para las ondas SH).

2.3.4. Generalización del Problema de propagación de ondas cilíndricas

La solución al problema de la propagación de ondas dada por Achenbach [2] puede generalizarse considerando simultáneamente las componentes simétrica y antisimétrica de la dependencia de los desplazamientos con la coordenada circunferencial θ. Para ello, podemos emplear las expresiones establecidas por Zhao [10] en base al desarrollo de Achenbach, con lo que obtendríamos unas ecuaciones para los desplazamientos de la onda cilíndrica donde la dependencia con la coordenada θ se expresaría mediante el factor $e^{im\theta}$, lo que conlleva realizar un desarrollo en Series de Fourier de los desplazamientos según la coordenada circunferencial θ (siendo m el orden de dicho desarrollo).

Según esta generalización, las ecs. (2.104) y (2.134) quedarían respectivamente de la siguiente forma:

$$\widehat{\psi}(r,\theta) = \widehat{\Psi}(r)e^{im\theta} \tag{2.185}$$
$$\widehat{\varphi}(r,\theta) = \widehat{\Phi}(r)e^{im\theta} \tag{2.186}$$

donde $\widehat{\Psi}(r)$ y $\widehat{\Phi}(r)$ vienen dados respectivamente por las siguientes expresiones (considerando propagación hacia $r \to +\infty$):

$$\widehat{\Psi}(r) = H_m^{(2)}(kr) \tag{2.187}$$
$$\widehat{\Phi}(r) = H_m^{(2)}(kr) \tag{2.188}$$

siendo $H_m^{(2)}(kr)$ la segunda función de Hankel de orden m[9].

Las expresiones del campo de desplazamientos para las ondas SH (ecs. (2.109) a (2.111)), tras la generalización de la dependencia con la coordenada circunferencial, vienen dadas por:

$$\widehat{u}_r^{(SH)} = \frac{im}{kr}\widehat{U}(z)H_m^{(2)}(kr)e^{im\theta} \tag{2.189}$$
$$\widehat{u}_\theta^{(SH)} = -\frac{1}{k}\widehat{U}(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]e^{im\theta} \tag{2.190}$$
$$\widehat{u}_z^{(SH)} = 0 \tag{2.191}$$

Las expresiones del campo de desplazamientos para las ondas de Lamb (ecs. (2.138) a (2.140)), tras la generalización de la dependencia con la coordenada

[9] El orden m viene dado por el orden del desarrollo en serie de Fourier considerado para el campo de desplazamientos

circunferencial, vienen dadas por:

$$\widehat{u}_r^{(Lamb)} = \frac{1}{k}\widehat{V}(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]e^{im\theta} \tag{2.192}$$

$$\widehat{u}_\theta^{(Lamb)} = \frac{im}{kr}\widehat{V}(z)H_m^{(2)}(kr)e^{im\theta} \tag{2.193}$$

$$\widehat{u}_z^{(Lamb)} = \widehat{W}(z)H_m^{(2)}(kr)e^{im\theta} \tag{2.194}$$

Por tanto el campo de desplazamientos total, tras la generalización de la dependencia con la coordenada θ, vendrá dado por la superposición de las propagaciones de los dos tipos de ondas anteriores:

$$u_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(A\frac{1}{k}\widehat{V}(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right] + B\frac{im}{kr}\widehat{U}(z)H_m^{(2)}(kr)\right)e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{2.195}$$

$$u_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A\widehat{W}(z)H_m^{(2)}(kr)e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{2.196}$$

$$u_\theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(A\frac{im}{kr}\widehat{V}(z)H_m^{(2)}(kr) - B\frac{1}{k}\widehat{U}(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]\right)e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{2.197}$$

donde las funciones que definen la dependencia con z dependen de si se emplean los modos simétricos o antisimétricos respecto al plano $z = 0$.

Capítulo 3

Formulación semi-analítica para ondas guiadas en placas

3.1. Introducción

La propagación libre de las ondas guiadas en placas, incluso en el caso más sencillo de placas elásticas homogéneas, está gobernada por ecuaciones características con un aspecto aparentemente simple pero de gran complejidad, que sólo pueden ser resueltas analíticamente en el caso antiplano, mientras que en el caso plano, ondas de Lamb, sólo puede resolverse numéricamente. En el caso general de placas laminadas, las ecuaciones características analíticas de las ondas guiadas se obtienen como el determinante de una matriz que se construye con el Método de la Matriz de Transferencia (Thomson-Haskell) o el Método de la Matriz Global (Knopoff), siendo necesario recurrir a algoritmos numéricos muy complejos para localizar las raíces de dicho determinante, sobre todo en el caso de raíces complejas.

Una alternativa a los métodos anteriores consiste en emplear un planteamiento variacional para obtener una ecuación característica aproximada. En este capítulo se describe una formulación semi-analítica de Elementos Finitos para estudiar el comportamiento de las ondas guiadas en placas laminadas. Su formulación comienza planteando una separación de variables sobre la solución elastodinámica en la placa y suponiendo una variación armónica en todas las variables salvo en la coordenada transversal. A continuación la sección transversal se subdivide en elementos, en cada uno de los cuales se aproximan unas determinadas funciones, que aparecen tras realizar una separación de variables en la ecuación que proporciona campo de desplazamientos exactos de la placa, a través de funciones de interpolación unidimensionales. Esta aproximación es válida bajo la hipótesis de que el elemento sea mucho más pequeño que la menor longitud de onda presente en el material.

Utilizando esta solución semi-analítica en la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales se obtendrán las matrices de rigidez y de masa de la placa infinita. Se describirá cómo, en el caso de superficies libres de tracciones, este procedimiento proporciona un sistema de autovalores cuadrático que relaciona la frecuencia y el número de onda de las ondas guiadas, y que representa por tanto una ecuación característica aproximada. La solución de dicho sistema constituye una aproximación del espectro de frecuencia y de las curvas de dispersión, así como de la estructura de los desplazamientos de cada modo en la sección transversal.

3.2. Formas fuerte y débil de la Elastodinánica

Las ecuaciones de equilibrio interno, compatibilidad y comportamiento de un problema armónico en 3D según la Teoría de la Elasticidad son (forma fuerte):

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3.2}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{3.3}$$

Siguiendo el desarrollo presentado por Kausel [6] y aplicando las expresiones para el campo de desplazamientos en la placa obtenidas por Sezawa [9], vamos a transformar las expresiones anteriores en una forma más adecuada para la resolución del problema de la propagación de ondas cilíndricas.

Como notación se empleará la variable con una barra subscrita cuando se trate de un vector y en negrita cuando sea una matriz.

3.2.1. Desplazamientos modales

Según el sistema en coordenadas cilíndricas mostrado en la Figura 3.1, los desplazamientos según la direcciones radial, vertical y tangencial se denotarán como u_r, u_z y u_θ, respectivamente. Estos desplazamientos pueden ser expresa-

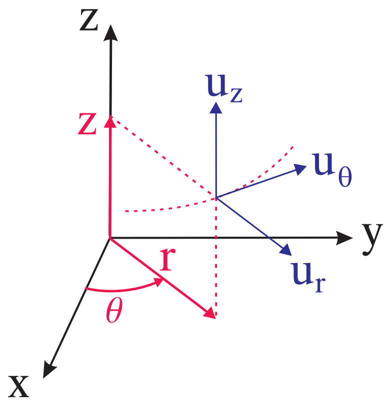


Figura 3.1. Sistema de referencia y componentes del campo de desplazamientos en coordenadas cilíndricas

dos como desarrollos en Series Finitas de Fourier de la forma siguiente[1]:

$$u_r = \sum_{m=0}^{\infty} (\widehat{u}_{rs,m} \cos(m\theta) + \widehat{u}_{ra,m} \operatorname{sen}(m\theta)) e^{i\omega t} = \widehat{u}_r \, e^{i\omega t} \tag{3.4}$$

$$u_z = \sum_{m=0}^{\infty} (\widehat{u}_{zs,m} \cos(m\theta) + \widehat{u}_{za,m} \operatorname{sen}(m\theta)) e^{i\omega t} = \widehat{u}_z \, e^{i\omega t} \tag{3.5}$$

$$u_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} (-\widehat{u}_{\theta s,m} \operatorname{sen}(m\theta) + \widehat{u}_{\theta a,m} \cos(m\theta)) e^{i\omega t} = \widehat{u}_\theta \, e^{i\omega t} \tag{3.6}$$

donde los subíndices s y a representan las componentes simétrica y antismétrica de las estructuras de los desplazamientos, siendo el parámetro m el orden del desarrollo.

El desarrollllo en series de Fourier en dirección θ admite dos notaciones equivalentes, una como suma de senos y cosenos para $\theta \in [0, +\infty)$ y otra como exponenciales del tipo $e^{im\theta}$ para $\theta \in (-\infty, +\infty)$. La relación entre ambas notaciones es la siguiente:

$$\widehat{u}_{rs,m} = \left[\widehat{u}_{r,m} + \widehat{u}_{r,-m}\right] \qquad \widehat{u}_{ra,m} = -i\left[\widehat{u}_{r,m} - \widehat{u}_{r,-m}\right] \tag{3.7}$$

$$\widehat{u}_{zs,m} = \left[\widehat{u}_{z,m} + \widehat{u}_{z,-m}\right] \qquad \widehat{u}_{za,m} = -i\left[\widehat{u}_{z,m} - \widehat{u}_{z,-m}\right] \tag{3.8}$$

$$\widehat{u}_{\theta s,m} = \left[\widehat{u}_{\theta,m} + \widehat{u}_{\theta,-m}\right] \qquad \widehat{u}_{\theta a,m} = -i\left[\widehat{u}_{\theta,m} - \widehat{u}_{\theta,-m}\right] \tag{3.9}$$

[1]Siendo consistentes con la notación del capítulo 2, para indicar que no consideramos la dependencia temporal usaremos variables con gorro.

Para simplificar la notación, podemos eliminar la dependencia temporal (que viene dada por el factor $e^{i\omega t}$) y agrupar términos de la siguiente forma:

$$\widehat{u}_r = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\begin{array}{cc} \widehat{u}_{rs,m} & \widehat{u}_{ra,m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \cos(m\theta) \\ \operatorname{sen}(m\theta) \end{array} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{u}}_{rsa,m} \left[\begin{array}{c} \cos(m\theta) \\ \operatorname{sen}(m\theta) \end{array} \right] \tag{3.10}$$

$$\widehat{u}_z = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\begin{array}{cc} \widehat{u}_{zs,m} & \widehat{u}_{za,m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \cos(m\theta) \\ \operatorname{sen}(m\theta) \end{array} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{u}}_{zsa,m} \left[\begin{array}{c} \cos(m\theta) \\ \operatorname{sen}(m\theta) \end{array} \right] \tag{3.11}$$

$$\widehat{u}_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\begin{array}{cc} \widehat{u}_{\theta s,m} & \widehat{u}_{\theta a,m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{r} -\operatorname{sen}(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{array} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{u}}_{\theta sa,m} \left[\begin{array}{r} -\operatorname{sen}(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{array} \right] \tag{3.12}$$

o bien, empleando la notación exponencial, pueden expresarse como:

$$\widehat{u}_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_{r,m}\, e^{im\theta} \tag{3.13}$$

$$\widehat{u}_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_{z,m}\, e^{im\theta} \tag{3.14}$$

$$\widehat{u}_\theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_{\theta,m}\, ie^{im\theta} \tag{3.15}$$

Podemos observar que los desplazamientos "en el plano" se acompañan del factor $e^{im\theta}$, mientras que los desplazamientos "fuera del plano" lo hacen del factor $ie^{im\theta}$.

Las amplitudes modales (para el caso de cargas armónicas) son funciones solamente de r y z, y no dependen de θ. El signo menos introducido en el término seno del desplazamiento tangencial (ec. (3.12)) tiene el efecto de producir la misma ecuación de desplazamiento (ecuación de onda) para las componentes simétrica y antisimétrica (es decir, producirá la misma matriz de rigidez en la formulación de elementos finitos).

Es conveniente dividir el vector de desplazamientos de la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{c} \widehat{u}_r \\ \widehat{u}_z \end{array} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c} \underline{\widehat{u}}_{rsa,m} \\ \underline{\widehat{u}}_{zsa,m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \cos(m\theta) \\ \operatorname{sen}(m\theta) \end{array} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{u}}_{1sa,m} \left[\begin{array}{c} \cos(m\theta) \\ \operatorname{sen}(m\theta) \end{array} \right] \tag{3.16}$$

$$\left[\widehat{u}_\theta \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\underline{\widehat{u}}_{\theta sa,m} \right] \left[\begin{array}{r} -\operatorname{sen}(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{array} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{u}}_{2sa,m} \left[\begin{array}{r} -\operatorname{sen}(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{array} \right] \tag{3.17}$$

donde:

$$\widehat{\mathbf{u}}_{1sa,m} = \left[\begin{array}{c} \underline{\widehat{u}}_{rsa,m} \\ \underline{\widehat{u}}_{zsa,m} \end{array} \right] \qquad \underline{\widehat{u}}_{2sa,m} = \left[\underline{\widehat{u}}_{\theta sa,m} \right] \tag{3.18}$$

O bien, si empleamos la notación exponencial resulta:

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}_r \\ \widehat{u}_z \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \widehat{u}_{r,m} \\ \widehat{u}_{z,m} \end{bmatrix} e^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{\widehat{u}}_{1,m}\ e^{im\theta} \tag{3.19}$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}_\theta \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \widehat{u}_{\theta,m} \end{bmatrix} ie^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_{2,m}\ ie^{im\theta} \tag{3.20}$$

donde:

$$\underline{\widehat{u}}_{1,m} = \begin{bmatrix} \widehat{u}_{r,m} \\ \widehat{u}_{z,m} \end{bmatrix} \qquad \widehat{u}_{2,m} = \begin{bmatrix} \widehat{u}_{\theta,m} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Por tanto el vector de desplazamientos modales queda expresado, en notación exponencial, de la siguiente forma:

$$\underline{u} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \underline{\widehat{u}}_{1,m} \\ i\underline{\widehat{u}}_{2,m} \end{bmatrix} e^{im\theta}\, e^{i\omega t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \widehat{u}_{r,m} \\ \widehat{u}_{z,m} \\ i\widehat{u}_{\theta,m} \end{bmatrix} e^{im\theta}\, e^{i\omega t} \tag{3.22}$$

La peculiar elección de las dependencias angulares en los dos desarrollos en serie para $m\theta$ ($\begin{bmatrix} -\mathrm{sen}(m\theta)\,, \cos(m\theta) \end{bmatrix}^T$, $ie^{im\theta}$) se justifica porque las derivadas respecto a la coordenada θ en ambos casos proporcionan las mismas relaciones entre las sucesivas derivadas de la función con respecto a θ y la función original. Así, denominando los términos senoidales como:

$$\underline{f}_s(m\theta) = \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \mathrm{sen}(m\theta) \end{bmatrix}, \qquad \underline{f}_a(m\theta) = \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

tenemos:

$$\frac{d}{d\theta}[\underline{f}_s(m\theta)] = m[\underline{f}_a(m\theta)], \qquad \frac{d}{d\theta}[\underline{f}_a(m\theta)] = -m[\underline{f}_s(m\theta)] \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}[\underline{f}_s(m\theta)] = -m^2[\underline{f}_s(m\theta)], \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}[\underline{f}_a(m\theta)] = -m^2[\underline{f}_a(m\theta)] \tag{3.25}$$

$$\frac{d}{d\theta}[e^{im\theta}] = m[ie^{im\theta}], \qquad \frac{d}{d\theta}[ie^{im\theta}] = -m[e^{im\theta}] \tag{3.26}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}[e^{im\theta}] = -m^2[e^{im\theta}], \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}[ie^{im\theta}] = -m^2[ie^{im\theta}] \tag{3.27}$$

3.2.2. Relación entre Desplazamientos y Deformaciones

En coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de compatibilidad se expresan según las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} && (3.28)\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} && (3.29)\\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} && (3.30)\\
\gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} && (3.31)\\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} && (3.32)\\
\gamma_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} && (3.33)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores los desplazamientos (ecs. (3.10) a (3.12)), eliminando la dependencia temporal (que viene dada por el factor $e^{i\omega t}$) y agrupando términos, las deformaciones quedan de la siguiente forma (empleando tanto notación senoidal como exponencial):

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{rr} &= \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{\varepsilon}}_{rrsa,m} \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \mathrm{sen}(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\varepsilon}_{rr,m}\, e^{im\theta} && (3.34)\\
\widehat{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{\varepsilon}}_{\theta\theta sa,m} \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \mathrm{sen}(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\varepsilon}_{\theta\theta,m}\, e^{im\theta} && (3.35)\\
\widehat{\varepsilon}_{zz} &= \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{\varepsilon}}_{zzsa,m} \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \mathrm{sen}(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\varepsilon}_{zz,m}\, e^{im\theta} && (3.36)\\
\widehat{\gamma}_{rz} &= \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{\gamma}}_{rzsa,m} \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \mathrm{sen}(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\gamma}_{rz,m}\, e^{im\theta} && (3.37)\\
\widehat{\gamma}_{r\theta} &= \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{\gamma}}_{r\theta sa,m} \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\gamma}_{r\theta,m}\, ie^{im\theta} && (3.38)\\
\widehat{\gamma}_{\theta z} &= \sum_{m=0}^{\infty} \underline{\widehat{\gamma}}_{\theta zsa,m} \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\gamma}_{\theta z,m}\, ie^{im\theta} && (3.39)
\end{aligned}
$$

donde:

$$\widehat{\underline{\varepsilon}}_{rrsa,m} = \frac{\partial \widehat{\underline{u}}_{rsa,m}}{\partial r} \tag{3.40}$$

$$\widehat{\underline{\varepsilon}}_{\theta\theta sa,m} = \frac{1}{r}\Big(\widehat{\underline{u}}_{rsa,m} - m\widehat{\underline{u}}_{\theta sa,m}\Big) \tag{3.41}$$

$$\widehat{\underline{\varepsilon}}_{zzsa,m} = \frac{\partial \widehat{\underline{u}}_{zsa,m}}{\partial z} \tag{3.42}$$

$$\widehat{\underline{\gamma}}_{rzsa,m} = \frac{\partial \widehat{\underline{u}}_{rsa,m}}{\partial z} + \frac{\partial \widehat{\underline{u}}_{zsa,m}}{\partial r} \tag{3.43}$$

$$\widehat{\underline{\gamma}}_{r\theta sa,m} = \frac{1}{r}\Big(m\widehat{\underline{u}}_{rsa,m} - \widehat{\underline{u}}_{\theta sa,m} + r\frac{\partial \widehat{\underline{u}}_{\theta sa,m}}{\partial r}\Big) \tag{3.44}$$

$$\widehat{\underline{\gamma}}_{\theta zsa,m} = \Big(m\frac{\widehat{\underline{u}}_{zsa,m}}{r} + \frac{\partial \widehat{\underline{u}}_{\theta sa,m}}{\partial z}\Big) \tag{3.45}$$

o bien:

$$\widehat{\varepsilon}_{rr,m} = \frac{\partial \widehat{\underline{u}}_{rsa,m}}{\partial r} \tag{3.46}$$

$$\widehat{\varepsilon}_{\theta\theta,m} = \frac{1}{r}\Big(\widehat{u}_{r,m} - m\widehat{u}_{\theta,m}\Big) \tag{3.47}$$

$$\widehat{\varepsilon}_{zz,m} = \frac{\partial \widehat{u}_{z,m}}{\partial z} \tag{3.48}$$

$$\widehat{\gamma}_{rz,m} = \frac{\partial \widehat{u}_{r,m}}{\partial z} + \frac{\partial \widehat{u}_{z,m}}{\partial r} \tag{3.49}$$

$$\widehat{\gamma}_{r\theta,m} = \frac{1}{r}\Big(m\widehat{u}_{r,m} - \widehat{u}_{\theta,m} + r\frac{\partial \widehat{u}_{\theta,m}}{\partial r}\Big) \tag{3.50}$$

$$\widehat{\gamma}_{\theta z,m} = \Big(m\frac{\widehat{u}_{z,m}}{r} + \frac{\partial \widehat{u}_{\theta,m}}{\partial z}\Big) \tag{3.51}$$

Vemos que con las deformaciones sucede lo mismo que sucedía antes con los desplazamientos, es decir, las deformaciones modales son funciones solamente de r y z, no de θ. Además podemos escribir las expresiones anteriores de forma más compacta empleando la siguiente notación matricial:

$$\widehat{\underline{\varepsilon}} = \mathbf{L}\,\widehat{\underline{u}} \tag{3.52}$$

donde $\widehat{\underline{\varepsilon}} = \left[\; \widehat{\underline{\varepsilon}}_{rrsa,m},\ \widehat{\underline{\varepsilon}}_{\theta\theta sa,m},\ \widehat{\underline{\varepsilon}}_{zzsa,m},\ \widehat{\underline{\gamma}}_{rzsa,m},\ \widehat{\underline{\gamma}}_{r\theta sa,m},\ \widehat{\underline{\gamma}}_{\theta zsa.m} \;\right]^T$ es el vector de deformaciones modales ($\widehat{\underline{\varepsilon}} = \left[\; \widehat{\varepsilon}_{rr,m},\ \widehat{\varepsilon}_{\theta\theta,m},\ \widehat{\varepsilon}_{zz,m},\ \widehat{\gamma}_{rz,m},\ \widehat{\gamma}_{r\theta,m},\ \widehat{\gamma}_{\theta z,m} \;\right]^T$ para notación exponencial), $\widehat{\underline{u}} = \left[\; \widehat{\underline{u}}_{rsa,m},\ \widehat{\underline{u}}_{zsa,m},\ \widehat{\underline{u}}_{\theta sa,m} \;\right]^T$ es el vector de desplazamientos modales ($\widehat{\underline{u}} = \left[\; \widehat{u}_{r,m},\ \widehat{u}_{z,m},\ \widehat{u}_{\theta,m} \;\right]^T$ para notación exponencial), y $\mathbf{L}$

es un operador matricial formado por derivadas parciales que relaciona ambos vectores, que tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{m}{r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{m}{r} & 0 & r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) \\ 0 & \frac{m}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Conviene reseñar que la matriz $\mathbf{L}$ sólo depende de la coordenada radial r.

Para simplificar aún más la notación, es conveniente dividir el vector de defomaciones modales en sus componentes "en el plano" y "fuera del plano"; así:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

donde el campo de deformaciones puede expresarse como función de las componentes de las deformaciones modales, en notación exponencial, de la siguiente forma:

$$\underline{\varepsilon}_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\underline{\varepsilon}}_{1,m} \, e^{im\theta} \, e^{i\omega t} \tag{3.55}$$

$$\underline{\varepsilon}_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\underline{\varepsilon}}_{2,m} \, ie^{im\theta} \, e^{i\omega t} \tag{3.56}$$

siendo:

$$\widehat{\underline{\varepsilon}}_{1,m} = \begin{bmatrix} \widehat{\varepsilon}_{rr,m} \\ \widehat{\varepsilon}_{\theta\theta,m} \\ \widehat{\varepsilon}_{zz,m} \\ \widehat{\gamma}_{rz,m} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\underline{\varepsilon}}_{2,m} = \begin{bmatrix} \widehat{\gamma}_{r\theta,m} \\ \widehat{\gamma}_{\theta z,m} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

Por tanto, la relación modal entre deformaciones y desplazamientos quedará según la expresión:

$$\widehat{\underline{\varepsilon}}_{1,m} = \mathbf{L}_{11} \, \widehat{\underline{u}}_{1,m} + m\mathbf{L}_{12} \, \widehat{\underline{u}}_{2,m} \tag{3.58}$$

$$\widehat{\underline{\varepsilon}}_{2,m} = m\mathbf{L}_{21} \, \widehat{\underline{u}}_{1,m} + \mathbf{L}_{22} \, \widehat{\underline{u}}_{2,m} \tag{3.59}$$

donde el operador matricial $\mathbf{L}$ se formula consistentemente como:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & m\mathbf{L}_{12} \\ m\mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

siendo:

$$\mathbf{L}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

$$\tag{3.62}$$

$$\mathbf{L}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L}_{22} = \begin{bmatrix} r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

3.2.3. Relación entre Tensiones y Deformaciones

Para obtener la expresión de la Ley de Comportamiento de nuestro problema, vamos a expandir las tensiones de las misma forma que antes lo hicimos con las deformaciones, siendo entonces la relación entre las respectivas componentes modales la siguiente:

$$\underline{\sigma} = \mathbf{D}\,\underline{\varepsilon} = \mathbf{D}\,\widehat{\underline{\varepsilon}}\,e^{i\omega t} \tag{3.64}$$

donde $\mathbf{D}$ es una matriz que contiene las propiedades del material. En general, $\mathbf{D}$ es una función de r, z y θ, debido a que las propiedades del material dependen del punto del mismo donde consideremos el estudio. No obstante, en nuestro caso, al tener una placa de material elástico, homogéneo e isótropo, las propiedades son independientes del punto considerado y por tanto la matriz $\mathbf{D}$ resulta constante.

Si en la ec. (3.64) procedemos a divididr el campo de tensiones de la misma forma que lo hicimos para las deformaciones en el apartado anterior obtenemos:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \underline{\sigma}_2 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

donde el campo de tensiones puede expresarse como función de las componentes de las tensiones modales, en notación exponencial, de la siguiente forma:

$$\underline{\sigma}_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\underline{\sigma}}_{1,m}\,e^{im\theta}\,e^{i\omega t} \tag{3.66}$$

$$\underline{\sigma}_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\underline{\sigma}}_{2,m}\,ie^{im\theta}\,e^{i\omega t} \tag{3.67}$$

siendo:

$$\widehat{\underline{\sigma}}_{1,m} = \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{rr,m} \\ \widehat{\sigma}_{\theta\theta,m} \\ \widehat{\sigma}_{zz,m} \\ \widehat{\sigma}_{rz,m} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\underline{\sigma}}_{2,m} = \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{r\theta,m} \\ \widehat{\sigma}_{z\theta,m} \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

Para un material isótropo la matriz $\mathbf{D}$ puede escribirse como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

donde λ y μ son las denominadas constantes de Lame. Éstas se obtienen a través del módulo de Young y del coeficiente de Poisson de la siguiente manera:

$$\lambda = E\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G\frac{2\nu}{1-2\nu} \tag{3.70}$$

$$\mu = G = E\frac{1}{2(1+\nu)} \tag{3.71}$$

De nuevo podemos dividir la matriz de comportamiento $\mathbf{D}$ en dos submatrices, $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$, de forma consistente con la formulación de tensiones y deformaciones, tal que:

$$\widehat{\underline{\sigma}}_{1,m} = \mathbf{D}_1\, \widehat{\underline{\varepsilon}}_{1,m} \tag{3.72}$$

$$\widehat{\underline{\sigma}}_{2,m} = \mathbf{D}_2\, \widehat{\underline{\varepsilon}}_{2,m} \tag{3.73}$$

En adelante, se simplificará la notación eliminando de los subíndices la dependencia explícita de m así como la indicación del tipo de desarrollo de Fourier elegido (en senos y cosenos o con exponenciales). A partir del contexto, es sencilllo identificar cúal de los dos desarrollos estamos considerando.

3.2.4. Ecuación Modal de Ondas

La ecuación general de ondas expresada, en coordenadas cilíndricas, en función de los desplazamientos tiene la siguiente expresión simplificada:

$$\rho\ddot{u}_r = (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial\omega_z}{\partial\theta} + 2\mu\frac{\partial\omega_\theta}{\partial z} \tag{3.74}$$

$$\rho\ddot{u}_z = (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial\omega_r}{\partial\theta} \tag{3.75}$$

$$\rho\ddot{u}_\theta = (\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta} - 2\mu\frac{\partial\omega_r}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial\omega_z}{\partial r} \tag{3.76}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} && (3.77)\\
\omega_r &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\Big), \qquad \ddot{u}_r = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} && (3.78)\\
\omega_\theta &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\Big), \qquad \ddot{u}_\theta = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} && (3.79)\\
\omega_z &= \frac{1}{2r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\Big), \qquad \ddot{u}_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} && (3.80)
\end{aligned}
$$

Si en las expresiones anteriores, en el lugar de los desplazamientos introducimos los desarrollos en Series de Fourier proporcionados por las ecs. (3.4) a (3.6) obtenemos:

$$
-\rho\omega^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_r\, e^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[(\lambda+2\mu)\frac{\partial \widehat{\Delta}}{\partial r} + \frac{2m\mu}{r}\widehat{\omega}_z + 2\mu\frac{\partial \widehat{\omega}_\theta}{\partial z}\Big]\, e^{im\theta} \tag{3.81}
$$

$$
-\rho\omega^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_z\, e^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[(\lambda+2\mu)\frac{\partial \widehat{\Delta}}{\partial r} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial (r\widehat{\omega}_\theta)}{\partial r} - \frac{2m\mu}{r}\widehat{\omega}_r\Big]\, e^{im\theta} \tag{3.82}
$$

$$
-\rho\omega^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_\theta\, ie^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[(\lambda+2\mu)\frac{m\widehat{\Delta}}{r} - 2\mu\frac{\partial \widehat{\omega}_r}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial \widehat{\omega}_z}{\partial r}\Big]\, ie^{im\theta} \tag{3.83}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta} &= \frac{\widehat{u}_r}{r} + \frac{\partial \widehat{u}_r}{\partial r} - m\frac{\widehat{u}_\theta}{r} + \frac{\partial \widehat{u}_z}{\partial z}, \qquad \Delta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\Delta}\, e^{im\theta} && (3.84)\\
\widehat{\omega}_r &= \frac{1}{2}\Big(\frac{m}{r}u_z - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\Big), \qquad \omega_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_r\, ie^{im\theta} && (3.85)\\
\widehat{\omega}_\theta &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \widehat{u}_r}{\partial z} - \frac{\partial \widehat{u}_z}{\partial r}\Big), \qquad \omega_\theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_\theta\, e^{im\theta} && (3.86)\\
\widehat{\omega}_z &= \frac{1}{2r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(r\widehat{u}_\theta) - m\widehat{u}_r\Big), \qquad \omega_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_z\, ie^{im\theta} && (3.87)
\end{aligned}
$$

Vemos que en las anteriores ecuaciones, al poder eliminar la dependencia con respecto a la coordenada θ, los desplazamientos modales son independientes de dicha coordenada. Según esto obtenemos:

$$-\rho\omega^2\widehat{u}_r = (\lambda+2\mu)\frac{\partial\widehat{\Delta}}{\partial r} + \frac{2m\mu}{r}\widehat{\omega}_z + 2\mu\frac{\partial\widehat{\omega}_\theta}{\partial z} \tag{3.88}$$

$$-\rho\omega^2\widehat{u}_z = (\lambda+2\mu)\frac{\partial\widehat{\Delta}}{\partial z} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial(r\widehat{\omega}_\theta)}{\partial r} - \frac{2m\mu}{r}\widehat{\omega}_r \tag{3.89}$$

$$-\rho\omega^2\widehat{u}_\theta = (\lambda+2\mu)\frac{m\widehat{\Delta}}{r} - 2\mu\frac{\partial\widehat{\omega}_r}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial\widehat{\omega}_z}{\partial r} \tag{3.90}$$

Las ecs. (3.88) a (3.90) se denominan *Ecuaciones Modales de Ondas*, las cuales son funciones sólo de r y z, y contienen el parámetro m procedente del desarrollo en serie de Fourier, que toma valores $m = 0, 1, \ldots$ Dichas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales que proporciona las expresiones de los desplazamientos modales. La solución general de dichas ecuaciones fue obtenida por Sezawa [9], que para una onda cilíndrica propagándose con número de onda k tienen la siguiente expresión:

$$u_r = kA\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]e^{-dz+i\omega t} + B\frac{m}{r}H_m^{(2)}(kr)e^{-sz+i\omega t} - Cs\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]e^{-sz+i\omega t} \tag{3.91}$$

$$u_z = -kdAH_m^{(2)}(kr)e^{-dz+i\omega t} + Ck^2H_m^{(2)}(kr)e^{-sz+i\omega t} \tag{3.92}$$

$$u_\theta = kA\frac{m}{r}H_m^{(2)}(kr)e^{-dz+i\omega t} + B\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]e^{-sz+i\omega t} - Cs\frac{m}{r}H_m^{(2)}(kr)e^{-sz+i\omega t} \tag{3.93}$$

en las cuales: $H_m^{(2)}(kr)$ es la segunda función de Hankel[2] de órden m (parámetro que define el orden del desarrollo de Fourier), los parámetros A, B y C son constantes de integración, y k es el número de onda. Además:

$$d = \pm\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}} = \pm ip, \qquad s = \pm\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}} = \pm iq \tag{3.94}$$

donde c_L y c_T son las velocidades de propagación de las ondas longitudinales y transversales, respectivamente, definidas en la ec. (2.6), y p y q son variables que fueron definidas en la ec. (2.48).

En las ecs. (3.91) a (3.93) hemos omitido el término $H_m^{(1)}(kr)$ que aparece al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, ya que dicho término junto con el

[2]Dicha función, para una dependencia temporal de la forma $e^{i\omega t}$, representa las ondas que se propagan hacia $r \to +\infty$

factor $e^{i\omega t}$ representa las ondas que se propagan desde el infinito hacia el origen ($r \rightarrow 0$). Con el objetivo de simplificar la notación, en adelante el superíndice $^{(2)}$ y el argumento (kr) serán eliminados de los desarrollos posteriores, de tal forma que cuando se indique el término H_m será entendido como $H_m^{(2)}(kr)$. De forma análoga se eliminará de las ecuaciones posteriores el término $e^{i\omega t}$.

Por tanto, en la solución de Sezawa, simplificando la notación y sacando como factor común los términos donde aparece la función de Hankel, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\widehat{u}_r = f_1(z)H_m' + f_3(z)H_m \tag{3.95}$$

$$\widehat{u}_z = f_2(z)H_m \tag{3.96}$$

$$\widehat{u}_\theta = f_1(z)\frac{m}{r}H_m + f_3(z)H_m' \tag{3.97}$$

donde:

$$H_m' = \frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right] \tag{3.98}$$

y los términos donde se agrupa la dependencia con respecto al espesor quedan agrupados en las siguientes funciones:

$$f_1(z) = k(A_1e^{-dz} + A_2e^{dz}) - s(C_1e^{-sz} - C_2e^{sz}) \tag{3.99}$$

$$f_2(z) = -d(A_1e^{-dz} - A_2e^{dz}) + k(C_1e^{-sz} + C_2e^{sz}) \tag{3.100}$$

$$f_3(z) = B_1e^{-sz} + B_2e^{sz} \tag{3.101}$$

Por tanto las ecs. (3.95) a (3.97) pueden ser escritas en notación matricial de la siguiente forma:

$$\underline{\widehat{u}}(r,z) = \mathbf{H}(r)\,\underline{F}(z) \tag{3.102}$$

donde puede observarse que el vector de desplazamientos modales ha sufrido una separación de variables, ya que toda la dependencia funcional respecto a la variable radial r lo representa la matriz $\mathbf{H}$, mientras que la dependencia con respecto a la coordenada z lo representa el vector $\underline{F}$. Además, la matriz $\mathbf{H}$ estará formada por las funciones de Hankel y sus derivadas, de tal forma que se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_m' & 0 & \frac{m}{r}H_m \\ 0 & kH_m & 0 \\ \frac{m}{r}H_m & 0 & H_m' \end{bmatrix} \tag{3.103}$$

y el vector $\underline{F}$ viene definido de la siguiente forma:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

Tras el desarrollo realizado, las ecuaciones modales de onda representadas en las ecs. (3.88) a (3.90) pueden ser expresadas en notación matricial de la siguiente manera:

$$\underline{W} = \mathbf{H}\ \underline{R} = \underline{0} \tag{3.105}$$

donde:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1(z) \\ R_2(z) \\ R_3(z) \end{bmatrix} \tag{3.106}$$

siendo las componentes $\{R_i\}$, con $i = 1, 2, 3$, del vector $\underline{R}$ las dadas por las siguientes expresiones (teniendo en cuenta que $f_i' = \frac{\partial f_i}{\partial z}$):

$$R_1 = k(\lambda + 2\mu)(f_2' - kf_1) + \mu(f_1'' - kf_2') + \rho\omega^2 f_1 \tag{3.107}$$
$$R_2 = (\lambda + 2\mu)(f_2'' - kf_1') + \mu k(f_1' - kf_2) + \rho\omega^2 f_2 \tag{3.108}$$
$$R_3 = \mu(f_3'' - k^2 f_3) + \rho\omega^2 f_3 \tag{3.109}$$

Obtenidas las expresiones para los desplazamientos modales, podemos obtener las correspondientes a las deformaciones y las tensiones en términos de las funciones $f_i(z)$ que nos serán de utilidad en desarrollos posteriores. Así, sub-tituyendo las ecs. (3.95) a (3.97) en las ecs. (3.34) a (3.39) obtenemos las ecuaciones de compatibilidad:

$$\widehat{\varepsilon}_{rr} = f_1 H_m'' + \frac{m}{r} f_3 (H_m' - \frac{1}{r} H_m) \tag{3.110}$$
$$\widehat{\varepsilon}_{\theta\theta} = f_1(\frac{1}{r} H_m' - \frac{m^2}{r^2} H_m) - f_3 \frac{m}{r}(H_m' - \frac{1}{r} H_m) \tag{3.111}$$
$$\widehat{\varepsilon}_{zz} = f_2' k H_m \tag{3.112}$$
$$\widehat{\gamma}_{rz} = f_1' H_m' + f_3' \frac{m}{r} H_m + k f_2 H_m' \tag{3.113}$$
$$\widehat{\gamma}_{r\theta} = 2 f_1 \frac{m}{r}(H_m' - \frac{1}{r} H_m) + f_3(H_m'' - \frac{1}{r} H_m' + \frac{m^2}{r^2} H_m) \tag{3.114}$$
$$\widehat{\gamma}_{\theta z} = f_1' \frac{m}{r} H_m + f_3' H_m' + k f_2 \frac{m}{r} H_m \tag{3.115}$$

y tomando:

$$\widehat{\Delta} = \widehat{\varepsilon}_{rr} + \widehat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \widehat{\varepsilon}_{zz} = (f_2' - kf_1) k H_m \tag{3.116}$$

las expresiones que resultan para las tensiones (ley de comportamiento) son las siguientes:

$$\widehat{\sigma}_{rr} = 2\mu\widehat{\varepsilon}_{rr} + \lambda\widehat{\Delta} \tag{3.117}$$

$$\widehat{\sigma}_{\theta\theta} = 2\mu\widehat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \lambda\widehat{\Delta} \tag{3.118}$$

$$\widehat{\sigma}_{zz} = 2\mu\widehat{\varepsilon}_{zz} + \lambda\widehat{\Delta} \tag{3.119}$$

$$\widehat{\sigma}_{rz} = \mu\widehat{\gamma}_{rz} \tag{3.120}$$

$$\widehat{\sigma}_{r\theta} = \mu\widehat{\gamma}_{r\theta} \tag{3.121}$$

$$\widehat{\sigma}_{z\theta} = \mu\widehat{\gamma}_{z\theta} \tag{3.122}$$

3.2.5. Forma débil del problema Elastodinámico

La forma débil del problema anterior se obtiene mediante la aplicación del Principio de Trabajos Virtuales, cuya expresión usando la notación matricial que se ha expuesto anteriormente es:

$$\int_\Omega \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}\; d\Omega = \int_\Gamma \delta\underline{u}^T \underline{t}\; d\Gamma + \omega^2 \int_\Omega \rho\, \delta\underline{u}^T \underline{u}\; d\Omega \tag{3.123}$$

donde $\underline{t}$ es un vector que contiene las tracciones en el contorno, es decir:

$$\underline{t} = \underline{\sigma}\; \underline{n} \tag{3.124}$$

donde $\underline{n}$ es el vector unitario normal al contorno.

3.3. Forma débil para ondas cilíndricas guiadas en placas

En este apartado se pretende particularizar la forma débil general (ec. (3.123)) al caso de una placa infinita de espesor $d = 2h$ en la cual se propagan ondas elásticas guiadas cilíndricas.

Se adoptan soluciones de $\underline{u}$ correspondientes a ondas guiadas cilíndricas y armónicas propagándose en la dirección $r \to +\infty$. El término exponencial que contiene la variación con θ y t se incluye analíticamente de la siguiente forma:

$$\underline{u}(r, z, \theta, t) = \widehat{\underline{u}}(r, z)\, e^{i(m\theta+\omega t)} \tag{3.125}$$

donde el término $\widehat{\underline{u}}$, que depende únicamente de las coordenadas r y z, representa la estructura de la onda guiada en el plano que forman ambas coordenadas. Esta separación de variables sólo es posible si las propiedades del material no dependen de r ni de θ. En los desarrollos posteriores siempre se supondrá que es posible una separación de variables similar a la indicada para los desplazamientos. Indicaremos sin gorro la variable completa (que es función de r, z, θ y t) y con gorro su dependencia funcional con r y z. Ésta notación es consistente con la utilizada en la introducción teórica de las ondas guiadas en placas desarrollada en el Capítulo 2 para las ondas cilíndricas.

Para los sistemas conservativos, el principio de los trabajos virtuales establece que el trabajo desarrollado por las cargas externas aplicadas y las fuerzas de inercia sobre un campo de desplazamientos virtuales compatible con las condiciones de contorno, es igual al cambio en la energía de deformación.

Para adaptar ese principio a un sistema de coordenadas cilíndrico emplearemos transformaciones de Fourier según la coordenada circunferencial θ. La Elastodinámica nos proporciona la forma general del principio:

$$\int_\Omega \delta\varepsilon_{ij}\,\sigma_{ij}\,d\Omega \;=\; \int_\Gamma \delta u_i\,t_i\,d\Gamma + \omega^2 \int_\Omega \rho\;\delta u_i\,u_i\,dV \qquad (3.126)$$

Una forma alternativa para la ecuación anterior podemos obtenerla mediante integración por partes, resultando la siguiente expresión para el principio de los trabajos virtuales:

$$\int_\Omega \delta u_i\,(\sigma_{ij,j} + \rho\;\omega^2\;u_i)\,d\Omega + \int_\Gamma \delta u_i\,(t_i - n_j\;\sigma_{ij})\,d\Gamma \;=\; 0 \qquad (3.127)$$

en la cual n_j es el vector unitario normal al contorno Γ. Observando la nueva expresión del principio, vemos que el término entre paréntesis de la primera integral coincide con la expresión de la ecuación de ondas. Por tanto, la ec. (3.127) queda de la siguiente forma:

$$\int_\Omega \delta u_i\,(\mathit{ecuacion\ de\ ondas})\,d\Omega + \int_\Gamma \delta u_i\,(t_i - n_j\;\sigma_{ij})\,d\Gamma \;=\; 0 \qquad (3.128)$$

y ésta última expresión será de gran utilidad más adelante.

Volviendo a la ec. (3.126), podemos expresarla en notación matricial de la siguiente forma:

$$\int_\Omega \delta\underline{\varepsilon}^T\underline{\sigma}\;d\Omega = \int_\Gamma \delta\underline{u}^T\underline{t}\;d\Gamma + \omega^2\int_\Omega \rho\,\delta\underline{u}^T\underline{u}\,d\Omega \qquad (3.129)$$

El principio de los trabajos virtuales, aplicado a las componentes modales de la formulación axisimétrica, puede ser obtenido aproximando las deformaciones, tensiones y desplazamientos como se hizo en las ecs. (3.4) a (3.6), es decir, mediante desarrollos en Series de Fourier alrededor del eje z. Para el caso de un material isótropo ($\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21} = \mathbf{0}$), podemos realizar la integración según la coordenada θ teniendo en cuenta: $d\Omega = rdrd\theta dz$, la ec. (3.64) y las expresiones:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m\theta)\operatorname{sen}(n\theta)\,d\theta = (\delta_{mn} - \delta_{m0}\delta_{n0})\pi = \begin{cases} \pi, & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \tag{3.130}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\,\cos(n\theta)\,d\theta = (\delta_{mn} + \delta_{m0}\delta_{n0})\pi = \begin{cases} \pi, & \text{si } m = n \neq 0 \\ 2\pi, & \text{si } m = n = 0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \tag{3.131}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m\theta)\,\cos(n\theta)\,d\theta = 0 \tag{3.132}$$

Como resultado obtenemos una nueva expresión para el principio de los trabajos virtuales:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (\delta\underline{\widehat{\varepsilon}}_s^T \mathbf{D}\,\underline{\widehat{\varepsilon}}_s + \delta\underline{\widehat{\varepsilon}}_a^T \mathbf{D}\,\underline{\widehat{\varepsilon}}_a)\,rdrdz = \int_{S_p} (\delta\underline{\widehat{u}}_s^T \underline{\widehat{t}}_s + \delta\underline{\widehat{u}}_a^T \underline{\widehat{t}}_a)\,rds\,+ \\ +\,\omega^2 \int_\Gamma \rho\,(\delta\underline{\widehat{u}}_s^T \underline{\widehat{u}}_s + \delta\underline{\widehat{u}}_a^T \underline{\widehat{u}}_a)\,rdrdz \end{aligned} \tag{3.133}$$

donde observamos que las variables elastodinámicas aparecen con la notación que las identifica como amplitudes modales resultantes de la aplicación de los desarrollos en Series de Fourier. Además, en la expresión anterior los pares $(\delta\underline{\widehat{\varepsilon}}_s, \delta\underline{\widehat{u}}_s)$ y $(\delta\underline{\widehat{\varepsilon}}_a, \delta\underline{\widehat{u}}_a)$ son independientes y arbitrarios, por lo que los subíndices s y a pueden ser eliminados de dicha expresión y considerarse en adelante como sobrentendidos. Por tanto, la ec. (3.133) queda de la siguiente forma:

$$\int_\Gamma \delta\underline{\widehat{\varepsilon}}^T \mathbf{D}\,\underline{\widehat{\varepsilon}}\,rdrdz = \int_{S_p} \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{t}}\,rds + \omega^2 \int_\Gamma \rho\,\delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{u}}\,rdrdz \tag{3.134}$$

Por otro lado, podemos hacer algo similar con la ec. (3.128), obteniendo una nueva expresión de la misma al realizar la integración sobre la coordenada circunferencial θ:

$$\int_\Gamma \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{W}\,rdrdz + \int_{S_p} \delta\underline{\widehat{u}}^T (\underline{\widehat{t}} - \underline{\widehat{\sigma}}_v)\,rdS = 0 \tag{3.135}$$

donde $\underline{W}$ representa la ecuación modal de onda y $\underline{\widehat{\sigma}}_v = n_j \widehat{\sigma}_{ij}$ son las proyecciones de las tensiones modales sobre la normal al contorno considerado.

En el apartado siguiente veremos como, al usar el principio de los trabajos virtuales, es preferible la expresión dada por la ec. (3.135) frente a las ecs. (3.129) o (3.134) para definir el problema de autovalores que surge tras la aplicación de la condición de contorno absorbente. Además dicha expresión facilitará el desarrollo al no ser necesario realizar una integración de productos de funciones de Hankel sobre la coordenada r.

3.4. Ecuaciones del MEF para ondas cilíndricas guiadas en placas

La resolución numérica de la ec. (3.134) requiere la discretización de la sección transversal de la placa en elementos para reducir el infinito número de grados de libertad de la solución continua (desplazamientos $\widehat{\underline{u}}(r,z)$ en todos los puntos de la sección) a un número finito en la solución discreta (desplazamiento $\underline{d}_i$ en diversos puntos de la sección -nodos-).

En este apartado se van a plantear las ecuaciones del MEF para el problema de ondas guiadas en placas mediante el procedimiento habitual. En primer lugar se discretiza el dominio (en este caso la sección transversal de la placa) en elementos. Las funciones obtenidas tras realizar una separación de variables sobre los desplazamientos reales y virtuales en el dominio, se interpolan empleando funciones de forma, para obtener así unos campos elastodinámicos discretizados. Por último se obliga a que dichos campos satisfagan la forma débil, ec. (3.134), lo cual proporciona un sistema de ecuaciones cuya solución aproxima a la solución elastodinámica exacta. Esta aproximación se caracteriza por minimizar el error energético cometido.

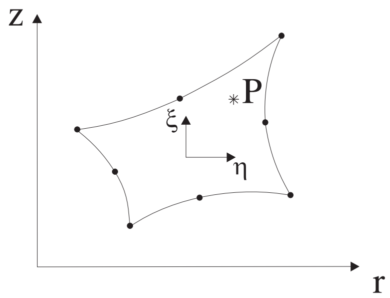


Figura 3.2. Sistema de coordenadas isoparamétrico

3.4.1. Formulación de Elementos Finitos

En la formulación isoparamétrica, el campo de desplazamientos se aproxima de la misma forma que las coordenadas del sistema de referencia escogido (en nuestro caso r, z y θ). Tengamos un sistema como el mostrado en la Figura 3.2, en el que discretizaremos un dominio continuo en una serie de puntos (denominados nodos); es decir, aproximaremos las coordenadas de todos los puntos del dominio a través de interpolaciones de las coordenadas nodales.

Si denotamos como $\underline{\phi}$ el vector de aproximación, las coordenadas de un punto P cualquiera pueden expresarse de la siguiente manera:

$$r = \underline{\phi}^T \underline{R_0} \tag{3.136}$$

$$z = \underline{\phi}^T \underline{Z_0} \tag{3.137}$$

$$\theta = \underline{\phi}^T \underline{\Theta_0} \tag{3.138}$$

donde $\underline{R_0}$, $\underline{Z_0}$ y $\underline{\Theta_0}$ son vectores que contienen las coordenadas nodales con la siguiente forma:

$$\underline{R_0} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{Z_0} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{\Theta_0} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.139}$$

y donde $\underline{\phi}$ es el vector de funciones de forma que viene dado por:

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

siendo en todos los casos nn el número de nodos del elemento finito ($nn = 2$ para elementos lineales, $nn = 3$ para elementos cuadráticos). Si usamos para los desplazamientos la misma forma de aproximar que para las coordenadas obtenemos:

$$\underline{\widehat{u}} = \mathbf{\Phi}^T \underline{\widehat{u}}_0, \quad \underline{\widehat{u}} = \begin{bmatrix} \widehat{u}_r \\ \widehat{u}_z \\ \widehat{u}_\theta \end{bmatrix}, \quad \underline{\widehat{u}}_0 = \begin{bmatrix} \{\widehat{u}_{r_i}\} \\ \{\widehat{u}_{z_i}\} \\ \{\widehat{u}_{\theta_i}\} \end{bmatrix} \tag{3.141}$$

donde $\underline{\widehat{u}}_0$ es el vector de desplazamientos nodales agrupado por componenetes, que tiene la forma:

$$\begin{aligned} \underline{\widehat{u}}_0 &= \left[\; \widehat{u}_{r_1}, \cdots, \widehat{u}_{r_{nn}}, \widehat{u}_{z_1}, \cdots, \widehat{u}_{z_{nn}}, \widehat{u}_{\theta_1}, \cdots, \widehat{u}_{\theta_{nn}} \; \right]^T = \\ &= \left[\; \widehat{u}_{r_0}, \widehat{u}_{z_0}, \widehat{u}_{\theta_0} \; \right]^T \end{aligned} \tag{3.142}$$

y $\mathbf{\Phi}$ es la matriz de interpolación que viene dada por:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \underline{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\phi} \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

Por otro lado, las deformaciones pueden expresarse en función de los desplazamientos, con lo cual se pueden aproximar según la siguiente expresión:

$$\widehat{\underline{\varepsilon}} = \mathbf{L}\,\widehat{\underline{u}} = \mathbf{L}\,\mathbf{\Phi}^T\,\widehat{\underline{u}}_0 = \mathbf{B}\,\widehat{\underline{u}}_0 \tag{3.144}$$

de esta forma, tras la interpolación realizada para los desplazamientos, podemos definir la nueva "matriz de compatibilidad" de la siguiente manera:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\,\mathbf{\Phi}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & m\mathbf{B}_{12} \\ m\mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.145}$$

Sustituyendo lo anterior en el Principio de los Trabajos Virtuales, dado por la ec. (3.134), sumando para todos los elementos obtenemos:

$$\sum_{Elementos} \delta\widehat{\underline{u}}_0^T \left\{ \int_\Gamma (\mathbf{B}^T\mathbf{D}\,\mathbf{B} - \rho\omega^2\,\mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Phi}^T)\widehat{\underline{u}}_0\, r dr dz - \int_{S_p} \mathbf{\Phi}\,\widehat{\underline{t}}\, r dS \right\} = 0 \tag{3.146}$$

Como la expresión anterior debe cumplirse para cualquier campo de desplazamientos virtuales $\delta\widehat{\underline{u}}_0$, la expresión se reduce a:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\,\widehat{\underline{u}} = \widehat{\underline{t}} \tag{3.147}$$

donde los vectores $\widehat{\underline{u}}$ y $\widehat{\underline{t}}$ representan los desplazamientos y las cargas sobre todos los nodos. Las matrices totales de rigidez, $\mathbf{K}$, y de masa, $\mathbf{M}$, así como el vector de cargas nodales, $\widehat{\underline{t}}$, se montarán a partir de las correspondientes matrices elementales, que para el k-ésimo elemento son:

$$K_k^e = \int_\Gamma \mathbf{B}^T\mathbf{D}\,\mathbf{B}\, r dr dz \tag{3.148}$$

$$M_k^e = \int_\Gamma \rho\,\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T r dr dz \tag{3.149}$$

$$t_k^e = \int_{S_p} \mathbf{\Phi}\,\widehat{\underline{t}}\, r dS \tag{3.150}$$

Sustituyendo las ecs. (3.69), (3.143) y (3.145) en las expresiones de las matrices elementales, dadas por las ecs. (3.148) a (3.150), obtenemos:

$$\mathbf{K}_k^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + m^2\mathbf{K}_2 & m\mathbf{K}_3 \\ m\mathbf{K}_3^T & \mathbf{K}_4 + m^2\mathbf{K}_5 \end{bmatrix} \tag{3.151}$$

$$\mathbf{M}_k^e = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m} \end{bmatrix} \tag{3.152}$$

donde:

$$\mathbf{K}_1 = \int_\Gamma \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{D}_1 \, \mathbf{B}_{11} \, r dr dz \tag{3.153}$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_\Gamma \mathbf{B}_{21}^T \mathbf{D}_2 \, \mathbf{B}_{21} \, r dr dz \tag{3.154}$$

$$\mathbf{K}_3 = \int_\Gamma (\mathbf{B}_{11}^T \mathbf{D}_1 \, \mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}_{21}^T \mathbf{D}_2 \, \mathbf{B}_{22}) \, r dr dz \tag{3.155}$$

$$\mathbf{K}_4 = \int_\Gamma \mathbf{B}_{22}^T \mathbf{D}_2 \, \mathbf{B}_{22} \, r dr dz \tag{3.156}$$

$$\mathbf{K}_5 = \int_\Gamma \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{D}_1 \, \mathbf{B}_{12} \, r dr dz \tag{3.157}$$

$$\mathbf{m} = \int_\Gamma \rho \, \underline{\phi} \, \underline{\phi}^T r dr dz \tag{3.158}$$

Todas estas integrales se realizan para cada elemento usando la cuadratura Gaussiana con las coordenadas ξ y η. Dicho proceso será omitido en este proyecto, por lo que el desarrollo continuará con la aplicación de dichas expresiones directamente al caso de la placa homogénea en coordenadas cilíndricas que nos ocupa.

3.4.2. Semi-discretización

La geometría de nuestro problema consiste en una placa infinita de espesor $d = 2h$ compuesta por un material homogeneo e isótropo. Como dominio de integración en la ecuación de la formulación débil, ec. (3.134), se considerará la sección toroidal que se produce en la placa al establecer dos superficies cilíndricas arbitrarias con coordenadas $r = a$ y $r = b$, siendo $b > a$. Para obtener las ecuaciones del MEF, la sección transversal de la placa se discretiza con n elementos (estratos o capas) y N nodos, de forma que las interfases entre los distintos elementos serán circunferencias, tal como se muestra en la Figura 3.3.

El dominio a discretizar, al ser axisimétrico, puede considerarse como monodimensional (1D) y se corresponde con la sección transversal de la placa $z \in [-h, h]$, de manera que para su discretización se puede emplear cualquier elemento finito 1D. En particular, en este desarrollo se utilizan elementos 1D isoparametricos (lineales o cuadráticos)[3]. Las funciones de forma de ambos tipos de elementos se encuentran representadas en la Figura 3.4.

[3]Aunque se desarrollará el MEF para ambas clases de elementos, los resultados numéricos que se presentarán en el Capítulo 4 han sido obtenidos con elementos cuadráticos, ya que con estos se consigue una mejor aproximación a la forma analítica de los resultados.

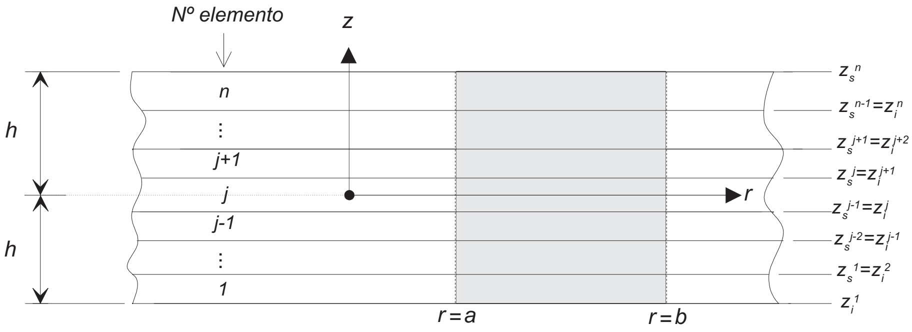


Figura 3.3. Discretización con n elementos de una placa homogénea e isótropa

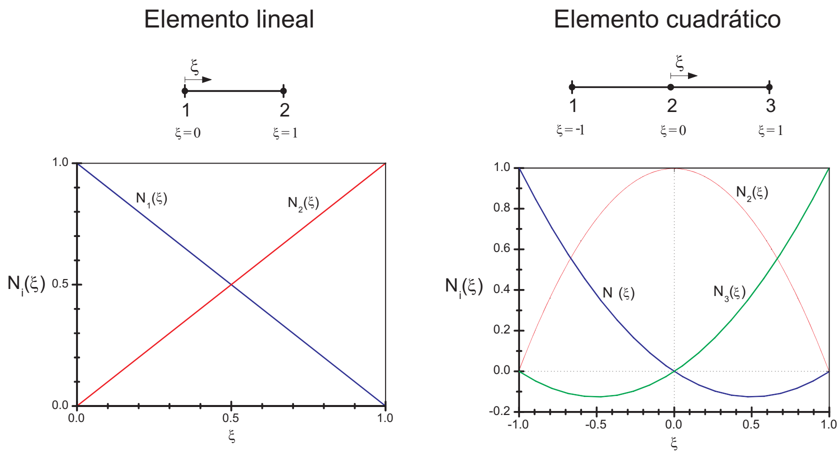


Figura 3.4. Funciones de forma lineales y cuadráticas para elementos mododimensionales

Según se muestra en la Figura 3.3, un elemento j abarca el intervalo $z \in \left[z_i^j, z_s^j\right]$, donde los subíndices i y s indican los bordes inferior y superior del elemento, respectivamente. El número de nodos de la discretización N depende del tipo de elemento seleccionado: $N = n + 1$ para elementos lineales, $N = 2n + 1$ para elementos cuadráticos. La numeración nodal adoptada se realiza en sentido ascendente de la coordenada z, estando el nodo 1 situado en la superficie inferior, $z = -h$, y el nodo N en la superficie superior, $z = h$. El número de grados de libertad (gdl) en cada nodo es $g = 3$ (u_r, u_z y u_θ) y el número total de gdl de la malla G será $G = N \cdot g$.

Cuando obtuvimos la solución general de la ecuación modal de ondas, concluimos que los desplazamientos $\underset{\sim}{\widehat{u}}$ en cualquier punto de la placa vienen definidos por la ec. (3.102), en la cual podemos observar que se produce una separación de variables donde las expresiones de la matriz de funciones de Hankel $\mathbf{H}$ y el vector $\underline{F}$ vienen dadas por las ecs. (3.103) y (3.104), respectivamente. El vector $\underline{F}$ está formado por funciones ($\{f_i\}$, con $i = 1, 2, 3$) que sólo depende de z. Por tanto, dicho vector toma un valor determinado en cada punto de la placa que depende de la coordenada z del punto considerado.

Según la discretización propuesta para la sección transversal de la placa, a cada nodo le corresponderá un determinado valor de z y por tanto las funciones $f_i(z)$ tomarán un valor para cada nodo. Ésto conlleva a una discretización del vector $\underline{F}$ al sólo poder tomar valores para las coordenadas z de los nodos de nuestra malla. Si denominamos $\underline{X}$ al vector resultante de calcular el vector $\underline{F}$ en cada nodo, tenemos que para un nodo concreto i obtendremos el siguiente vector:

$$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} x_r \\ x_z \\ x_\theta \end{bmatrix}_i = \underline{F}(z_i) \tag{3.159}$$

donde aparecen tres componentes correspondientes a los 3 gdl del nodo i-ésimo de la malla. Si hacemos lo mismo para todos los nodos de la malla podemos fomar el vector $\underline{X}$ que estaría formado por la unión de los vectores $\underline{X}_i$, donde $i = 1, .., N$. Por tanto, considerando todos los nodos obtendremos el siguiente vector para la discretización de la placa:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \vdots \\ \underline{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_z \\ x_\theta \end{pmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} x_r \\ x_z \\ x_\theta \end{pmatrix}_N \end{bmatrix} \tag{3.160}$$

donde el vector nodal $\underline{X}$ tiene dimensión $(3N \times 1)$.

La expresión exacta para los desplazamientos en cualquier punto de la placa viene definida por la ec. (3.102), que nos proporciona un campo de desplazamientos continuo y unos valores exactos para las funciones del vector $\underline{F}$. A continuación, empleando la misma aproximación que para las coordenadas y los desplazamientos, vamos a expresar, para un elemento concreto, el vector de funciones $\underline{F}$ en cualquier punto del mismo a través del vector $\underline{X}$ en los nodos de dicho elemento utilizando funciones de aproximación. Lo anterior queda reflejado en la siguiente expresión:

$$\underline{F}(z) = \mathbf{N}(z)\, \underline{X}^e \tag{3.161}$$

donde $\mathbf{N}$ es una matriz que contiene las funciones de forma utilizadas en la interpolación y $\underline{X}^e$ es un vector con los valores nodales del vector $\underline{X}$ en dicho elemento.

La matriz de funciones de forma, para el caso de elementos lineales tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{cc} N_1\mathbf{I} & N_2\mathbf{I} \end{array} \right] \tag{3.162}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden g, mientras que $N_1 = 1 - \xi$ y $N_2 = \xi$ son las funciones de forma lineales que se muestran en la Figura 3.4, y $\xi \in [0, 1]$ es la coordenada natural del elemento. Si los valores de $\underline{X}$ del nodo i-ésimo se denotan por $\underline{X}_i$, el vector nodal correspondiente al elemento lineal puede escribirse como:

$$\underline{X}^e = \left[\begin{array}{cc} \underline{X}_1^T & \underline{X}_2^T \end{array} \right]^T \tag{3.163}$$

Para un elemento cuadrático, la matriz de funciones de forma tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{ccc} N_1\mathbf{I} & N_2\mathbf{I} & N_3\mathbf{I} \end{array} \right] \tag{3.164}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden g, mientras que $N_1 = \xi(\xi - 1)/2$, $N_2 = 1 - \xi^2$ y $N_3 = \xi(1 + \xi)/2$ son las funciones de forma que se muestran en la Figura 3.4, y $\xi \in [-1, 1]$ es la coordenada natural del elemento. El vector nodal correspondiente al elemento cuadrático se organiza en un vector de la siguiente manera:

$$\underline{X}^e = \left[\begin{array}{ccc} \underline{X}_1^T & \underline{X}_2^T & \underline{X}_3^T \end{array} \right]^T \tag{3.165}$$

Si sustituimos la aproximación expresada en la ec. (3.161) en la ec. (3.102), el campo de desplazamientos en cualquier punto de la placa puede obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$\underline{\widehat{u}} = \mathbf{H}\,\mathbf{N}\,\underline{X}^e \tag{3.166}$$

La ec. (3.166) representa una semi-discretización de la solución en la placa, donde las dependencias funcionales con r, θ y t se incluyen de forma analítica y tan sólo se discretiza en la dirección z para aproximar numéricamente la variación en dicho elemento.

3.4.3. Cálculo de las matrices elementales

El propósito ahora es determinar soluciones admisibles para el problema de la propagación libre de ondas usando la aproximación del campo de desplazamientos expresada en la ec. (3.166). La expresión exacta para el campo de desplazamientos (ec. (3.102)) satisface el principio de los trabajos virtuales (ec. (3.134) o ec. (3.135), ambas idénticas), y además es solución de la ecuación de ondas.

Para obtener la formulación del MEF a nivel elemental, se sustituye la aproximación de la solución del campo de desplazamientos indicada en la ec. (3.166) en la expresión de la formulación débil del principio de los trabajos virtuales, ec. (3.135)[4], realizándose una integración sobre la región toroidal definida por un elemento cualquiera e de espesor l comprendido entre z_i^e y z_s^e (ver Figura 3.5). Además, se requiere que el equilibrio sea preservado sobre cualquier sección vertical donde se aplican las fuerzas nodales consistentes (P_0 y P_0' en $r = a$ y $r = b$, respectivamente).

Definiendo los contornos verticales de la región como S_1 y S_2 y los horizontales (resultado de la discretización) como S_3 y S_4, la ec. (3.135) puede ser reformulada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{W}\, r dr dz + \int_{S_1} \delta\underline{\widehat{u}}^T (\underline{\widehat{t}} - \underline{\widehat{\sigma}}_v)\, r dS \,+ \\ \int_{S_2} \delta\underline{\widehat{u}}^T (\underline{\widehat{t}} - \underline{\widehat{\sigma}}_v)\, r dS + \int_{S_3+S_4} \delta\underline{\widehat{u}}^T (\underline{\widehat{t}} - \underline{\widehat{\sigma}}_v)\, r dS &= 0 \end{aligned} \tag{3.167}$$

Las fuerzas nodales consistentes, P_0 y P_0', están aplicadas en los contornos de coordenadas $r = a$ y $r = b$, respectivamente, de tal manera que las integrales sobre S_1 y S_2 desaparecen, ya que:

$$\int_{S_1} \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{t}}\, r dS = \int_{S_1} \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{\sigma}}_v\, r dS \tag{3.168}$$

donde una expresión similar puede obtenerse para el contorno S_2.

Por otro lado, al no haber cargas prescritas actuando en los contornos superiores, S_3 y S_4, la ec. (3.167) queda:

$$\int_\Gamma \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{W}\, r dr dz + \int_{S_3+S_4} \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{\sigma}}_v\, r dS = 0 \tag{3.169}$$

[4] Aunque la ec. (3.134) es equivalente a la ec. (3.135), esta última es preferible ya que posteriormente evitará una dificultosa integración sobre la coordenada r

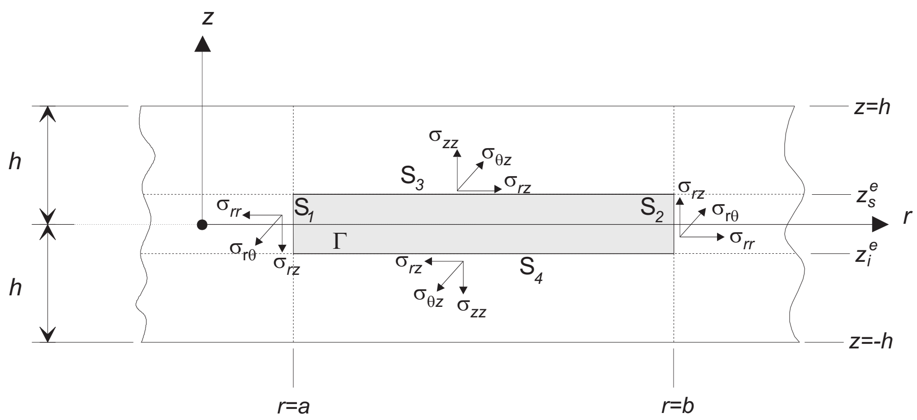


Figura 3.5. Región toroidal Γ de integración de la formulación débil para ondas guiadas cilíndricas en placas

Si nos fijamos en las tensiones actuantes en los contornos S_3 y S_4 (ver Figura 3.5), podemos definir el siguiente vector para expresar las proyecciones de las tensiones modales sobre la normal a dichos contornos:

$$\underline{\widehat{\sigma}}_v \;=\; \pm \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{rz} \\ \widehat{\sigma}_{zz} \\ \widehat{\sigma}_{\theta z} \end{bmatrix} \tag{3.170}$$

donde el signo positivo corresponde al contorno S_3 mientras que el negativo lo hace al contorno S_4.

Si definimos σ_v como el vector de tensiones correspondiente al signo positivo (contorno S_3), la ec. (3.169) puede ser modificada de la siguiente manera:

$$\int_\Gamma \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{W}\, rdrdz + \int_a^b \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{\sigma}}_v \Big]_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} rdr \;=\; 0 \tag{3.171}$$

Considerando el último término de la expresión anterior, es posible realizar la siguiente transfomación:

$$\int_r \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{\sigma}}_v \Big]_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} rdr = \int_r \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial}{\partial z}(\delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{\sigma}}_v)\, rdrdz =$$

$$= \int_r \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \delta\underline{\widehat{u}}^T \frac{\partial \underline{\widehat{\sigma}}_v}{\partial z}\, rdrdz + \int_r \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \delta\Big(\frac{\partial \underline{\widehat{u}}^T}{\partial z}\Big) \underline{\widehat{\sigma}}_v\, rdrdz \tag{3.172}$$

y sustituyendo en la ec. (3.171) obtenemos:

$$\int_\Gamma \delta\underline{\widehat{u}}^T \Big(\underline{W} - \frac{\partial \underline{\widehat{\sigma}}_v}{\partial z}\Big)\, rdrdz - \int_\Gamma \delta\Big(\frac{\partial \underline{\widehat{u}}^T}{\partial z}\Big) \underline{\widehat{\sigma}}_v\, rdrdz = 0 \tag{3.173}$$

o bien:

$$\int_r \left\{ \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \delta\underline{\widehat{u}}^T \left(\underline{W} - \frac{\partial \underline{\widehat{\sigma}}_v}{\partial z} \right) dz - \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \delta \left(\frac{\partial \underline{\widehat{u}}^T}{\partial z} \right) \underline{\widehat{\sigma}}_v \, dz \right\} r dr = 0 \tag{3.174}$$

Por otro lado, según las ecs. (3.117) a (3.122) y las ecs. (3.110) a (3.115) podemos expresar el vector de tensiones en el contorno (ec. (3.170))como:

$$\underline{\sigma}_v = \begin{bmatrix} \mu((f_1' + k f_2)H_m' + \frac{m}{r} H_m f_3') \\ ((\lambda + 2\mu) f_2' - \lambda k f_1) k H_m \\ \mu((f_1' + k f_2)\frac{m}{r} H_m + f_3' H_m') \end{bmatrix} \tag{3.175}$$

o lo que es igual, usando la definición de la matriz de funciones de Hankel que empleamos para la obtención de los desplazamientos (ec. (3.103)):

$$\underline{\widehat{\sigma}}_v = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mu(f_1' + k f_2) \\ (\lambda + 2\mu) f_2' - \lambda k f_1 \\ \mu f_3' \end{bmatrix} \tag{3.176}$$

Ahora vamos a expresar matricialmente ciertas ecuaciones que hemos obtenido anteriormente. En concreto, la ecuación modal de ondas (ec. (3.105)) y las tensiones de contorno (ec. (3.170)) pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$\underline{W} = \mathbf{H}\, \underline{R} = \mathbf{H}\, \mathcal{R}\, \underline{F} \tag{3.177}$$

$$\underline{\widehat{\sigma}}_v = \mathbf{H}\, \mathcal{S}\, \underline{F} \tag{3.178}$$

donde los operadores matriciales $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ vienen dados por:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu) + \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} & k(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ -k(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial z} & \rho\omega^2 - k^2\mu + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \rho\omega^2 - k^2\mu + \mu\frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \tag{3.179}$$

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \mu\frac{\partial}{\partial z} & \mu k & 0 \\ -\lambda k & (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \mu\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= k\, \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_2 \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.180}$$

Volviendo al cálculo integral, si empleamos lo desarrollado anteriormente a la ec. (3.174), tomando como desplazamiento virtual $\delta\underline{\widehat{u}} = \mathbf{H}\, \mathbf{N}\, \delta\underline{X}^e$ y teniendo en cuenta la discretización realizada (ec. (3.161)), obtenemos:

$$\int_r \Big\{ \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \delta \underline{X}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, (\mathcal{R} - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}) \, \mathbf{N} \, \underline{X} dz - \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \delta \underline{X}^{eT} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, \mathcal{S} \, \mathbf{N} \, \underline{X} dz \Big\} \, rdr = 0 \tag{3.181}$$

donde:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} = \mathcal{S}' = \begin{bmatrix} \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \mu k \frac{\partial}{\partial z} & o \\ -\lambda k \frac{\partial}{\partial z} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \tag{3.182}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} - \mathcal{S}' = \rho \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} = \\ = \rho \omega^2 \mathbf{I} - k^2 \mathbf{A}_3 - k \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{3.183}$$

A continuación realizaremos las siguientes transformaciones:

$$\mathbf{N}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, (\mathcal{R} - \mathcal{S}') \, \mathbf{N} = \overline{\mathbf{H}} \, \mathbf{N}^T (\mathcal{R} - \mathcal{S}') \, \mathbf{N} \tag{3.184}$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, \mathcal{S} \, \mathbf{N} = \overline{\mathbf{H}} \, \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \mathcal{S} \, \mathbf{N} \tag{3.185}$$

donde la matriz $\overline{\mathbf{H}}$ es una matriz diagonal por bloques formada por nn submatrices $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ de (3×3) cada una, donde nn es el número de nodos del elemento finito ($nn = 2$ para elementos lineales, $nn = 3$ para elementos cuadráticos). Por tanto la matriz $\overline{\mathbf{H}}$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T\mathbf{H} & & & \\ & \mathbf{H}^T\mathbf{H} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{H}^T\mathbf{H} \end{bmatrix} \tag{3.186}$$

cuyo orden es orden $(3nn \times 3nn)$.

Además al ser la matriz $\overline{\mathbf{H}}$ independiente de la coordenada z, si sustituimos las ecs. (3.184) y (3.185) en la ec. (3.181) obtenemos:

$$\delta \underline{X}^{eT} \Big\{ \int_r \overline{\mathbf{H}} \, rdr \Big\} \Big\{ \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T (\mathcal{R} - \mathcal{S}') \, \mathbf{N} dz - \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \, \mathcal{S} \, \mathbf{N} \, dz \Big\} \underline{X}^e = 0 \tag{3.187}$$

Si realizamos la integración sobre r y definimos la siguiente matriz:

$$\int_a^b \overline{\mathbf{H}}\, r dr \;=\; \mathcal{H} \tag{3.188}$$

de forma que la ec. (3.187) puede expresarse como:

$$\delta \underline{X}^{eT} \mathcal{H} \left\{ \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T (\mathcal{R} - \mathcal{S}')\, \mathbf{N} dz - \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}^T \mathcal{S}\, \mathbf{N}\, dz \right\} \underline{X}^e = 0 \tag{3.189}$$

Como la matriz $\mathcal{H}$ es la misma para toda la placa y la igualdad anterior debe cumplirse para cualquier valor del vector $\underline{X}^e$, la ec. (3.189) se reduce a la siguiente expresión:

$$\left\{ \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T (\mathcal{R} - \mathcal{S}')\, \mathbf{N} dz - \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}^T \mathcal{S}\, \mathbf{N}\, dz \right\} \underline{X}^e = 0 \tag{3.190}$$

donde operando sobre ambos términos obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T (\mathcal{R} - \mathcal{S}')\, \mathbf{N} dz \;&=\; \rho\omega^2 \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dz - k^2 \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{A}_3\, \mathbf{N} dz - \\ &\quad - k \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\, dz \end{aligned} \tag{3.191}$$

$$\int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}^T \mathcal{S}\, \mathbf{N}\, dz \;=\; k \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}^T \mathbf{A}_1^T\, \mathbf{N}\, dz + \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}^T \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\, dz \tag{3.192}$$

Por tanto, el término entre llaves de la ec. (3.189) puede expresarse como:

$$\int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T (\mathcal{R} - \mathcal{S}')\, \mathbf{N} dz - \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}^T \mathcal{S}\, \mathbf{N}\, dz = \omega^2 \mathbf{M}^e - k^2 \mathbf{A}^e - k\mathbf{B}^e - \mathbf{G}^e \tag{3.193}$$

siendo $\mathbf{A}^e, \mathbf{B}^e, \mathbf{G}^e, \mathbf{M}^e$ las matrices para un elemento concreto y se obtienen como resultado de las siguientes integrales:

$$\mathbf{A}^e \;=\; \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{A}_3\, \mathbf{N} dz \tag{3.194}$$

$$\mathbf{B}^e \;=\; \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \left(\mathbf{N}^T \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}^T \mathbf{A}_1^T\, \mathbf{N} \right) dz \tag{3.195}$$

$$\mathbf{G}^e \;=\; \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}^T \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\, dz \tag{3.196}$$

$$\mathbf{M}^e \;=\; \rho \int_{z_i{}^e}^{z_s{}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dz \tag{3.197}$$

Tras los desarrollos anteriores, la ec. (3.189) resulta:

$$\left(k^2\mathbf{A}^e + k\mathbf{B}^e + \mathbf{G}^e - \omega^2\mathbf{M}^e\right)\underline{X}^e = \underline{0} \tag{3.198}$$

pudiéndose escribir la matriz de rigidez elemental $\mathbf{K}^e$ como una función cuadrática del número de onda k:

$$\mathbf{K}^e = k^2\mathbf{A}^e + k\mathbf{B}^e + \mathbf{G}^e \tag{3.199}$$

Tras la obtención de las matrices elementales, según establece Kausel [6], puede observarse que, por su constitución, representan dos problemas de autovalores en k que están desacoplados:

- un problema de autovalores cuadrático en k, definido por las variables nodales x_1 y x_2, equivalente a un problema de deformación plana cuya solución son las ondas de Lamb:

$$\left(k^2\mathbf{A}^e + k\mathbf{B}^e + \mathbf{G}^e - \omega^2\mathbf{M}^e\right)\underline{X}^e = \underline{0} \tag{3.200}$$

  donde:

$$\underline{X}^e = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_z \end{pmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} x_r \\ x_z \end{pmatrix}_N \end{bmatrix} \tag{3.201}$$

- un problema de autovalores lineal en k^2, definido por la variable nodal x_3, equivalente a un problema de deformación antiplana cuya solución son las ondas SH:

$$\left(k^2\mathbf{A}^e + \mathbf{G}^e - \omega^2\mathbf{M}^e\right)\underline{X}^e = \underline{0} \tag{3.202}$$

  donde:

$$\underline{X}^e = \begin{bmatrix} \left(x_\theta \right)_1 \\ \vdots \\ \left(x_\theta \right)_N \end{bmatrix} \tag{3.203}$$

Podemos observar como los problemas de autovalores son independientes de m, es decir, del coeficiente del desarrollo de Fourier para la coordenada θ. Por tanto, el campo de desplazamientos tridimensional en la placa puede expresarse como superposición de los desplazamientos de ondas SH y ondas de Lamb, con números de onda dados por la teoría de deformación plana bidimensional y afectados por los factores de participación, las funciones de Hankel y el factor $cos(m\theta)$ o $\text{sen}(m\theta)$, según corresponda.

A continuación se detallan las matrices elementales según sea el tipo de elemento escogido para el MEF (lineales o cuadráticos). En primer lugar, para simplificar la notación, vamos a definir unas submatrices con las que posteriormente formaremos las matrices elementales. Para el caso de deformación plana, las submatrices son las siguientes:

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda - \mu \\ \lambda - \mu & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda + \mu) \\ \lambda + \mu & 0 \end{bmatrix}$$

y para el caso antiplano, las submatrices son las siguientes:

$$\mathbf{D}_{11} = [\mu] \quad ; \quad \mathbf{D}_{22} = [\mu]$$

$$\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21} = [0]$$

Las expresiones de las matrices elementales $\mathbf{A}^e$, $\mathbf{B}^e$, $\mathbf{G}^e$ y $\mathbf{M}^e$ para un elemento lineal de espesor l son:

$$\mathbf{A}^e = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{D}_{11} & 2\mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} \tag{3.204}$$

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{D}_{21}^T & -\mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \tag{3.205}$$

$$\mathbf{G}^e = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{22} & -\mathbf{D}_{22} \\ -\mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.206}$$

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho l}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.207}$$

y para un elemento cuadrático de espesor l son:

$$\mathbf{A}^e = \frac{l}{30}\begin{bmatrix} 4\mathbf{D}_{11} & 2\mathbf{D}_{11} & -\mathbf{D}_{11} \\ 2\mathbf{D}_{11} & 16\mathbf{D}_{11} & 2\mathbf{D}_{11} \\ -\mathbf{D}_{11} & 2\mathbf{D}_{11} & 4\mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} \tag{3.208}$$

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3\mathbf{D}_{12} & 4\mathbf{D}_{21} & -\mathbf{D}_{21} \\ 4\mathbf{D}_{21}^T & \mathbf{0} & 4\mathbf{D}_{21} \\ -\mathbf{D}_{21}^T & 4\mathbf{D}_{21}^T & -3\mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \tag{3.209}$$

$$\mathbf{G}^e = \frac{1}{3l}\begin{bmatrix} 7\mathbf{D}_{22} & -8\mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{22} \\ -8\mathbf{D}_{22} & 16\mathbf{D}_{22} & -8\mathbf{D}_{22} \\ \mathbf{D}_{22} & -8\mathbf{D}_{22} & 7\mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.210}$$

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho l}{30}\begin{bmatrix} 4\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ 2\mathbf{I} & 16\mathbf{I} & 2\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & 4\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.211}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz unidad de dimensión g, siendo $g = 2$ para problemas de deformación plana y $g = 1$ para problemas de deformación antiplana.

3.4.4. Montaje de las matrices globales

Las matrices de rigidez y masa globales para la placa infinita discretizada con n elementos y N nodos en la dirección transversal z, pueden obtenerse a partir de las correspondientes matrices elementales mediante el proceso de montaje habitual de EF[5]. Como resultado, el sistema de ecuaciones globales puede escribirse como:

$$(k^2\mathbf{A} + k\mathbf{B} + \mathbf{G} - \omega^2\mathbf{M})\underline{X} = \underline{P} \tag{3.212}$$

donde las matrices globales $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{M}$ son simétricas, el vector $\underline{X}$ contiene los valores nodales del vector $\underline{F}$ (denominándose en adelante *autovalor generalizado*) y el vector $\underline{P}$ contiene las fuerzas de todos los nodos de la placa (G gdl):

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1^T & \underline{X}_2^T & \cdots & \underline{X}_N^T \end{bmatrix}^T, \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1^T & \underline{P}_2^T & \cdots & \underline{P}_N^T \end{bmatrix}^T \tag{3.213}$$

La ec. (3.212) es válida tanto para problemas de deformación plana como para problemas de deformación antiplana, aunque existen dos diferencias entre ambos:

[5]El cual consiste en aplicar compatibilidad en desplazamientos y equilibrio de fuerzas en las interfases entre elementos

1. las dimensiones de las matrices globales son distintas puesto que el número de grados de libertad G es distinto incluso al utilizar la misma malla.

2. el término lineal en k es nulo en el caso antiplano, es decir $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Una representación gráfica del montaje de las matrices globales a partir de las matrices elementales para una placa en deformación plana discretizada con los elementos lineales y cuadráticos se muestra en las Figuras 3.6 y 3.7, respectivamente.

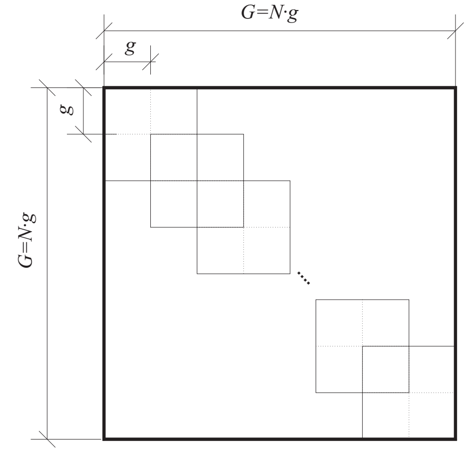


Figura 3.6. Montaje de la matriz global a partir de las matrices elementales ($2g \times 2g$) para n elementos lineales

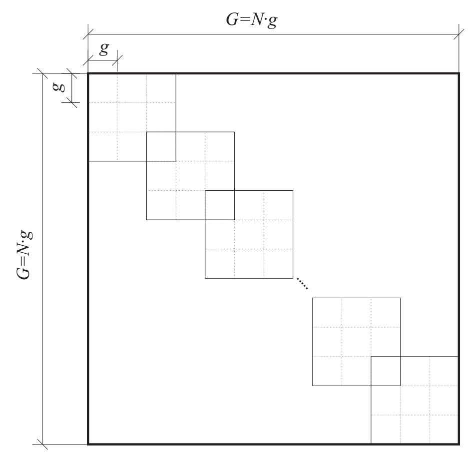


Figura 3.7. Montaje de la matriz global a partir de las matrices elementales ($3g \times 3g$) para n elementos cuadráticos

La imposición de las condiciones de contorno de la placa sobre la ec. (3.212) proporciona un sistema de ecuaciones que gobierna la respuesta dinámica de la placa discretizada frente a solicitaciones armónicas. La solución se compone de dos partes:

- la solución general del problema homogéneo, correspondiente a $\underline{P} = \underline{0}$, que representa la respuesta de la placa en ausencia de acciones exteriores (su *vibración libre*, si empleamos la terminología de dinámica de estructuras). Esta situación corresponde precisamente con la estudiada de forma analítica en el Capítulo 2, a partir de la cual se obtuvieron el espectro de frecuencia y los modos de propagación de ondas guiadas en la placa.

- la solución particular de la ecuación completa para una acción $\underline{P} \neq \underline{0}$. La inclusión de este término permite obtener la *vibración forzada* de la placa bajo la acción de solicitaciones externas.

En los apartados siguientes se estudia el problema del MEF homogéneo, $\underline{P} = \underline{0}$, cuya solución proporciona una aproximación del espectro de frecuencia y de los modos de propagación de las ondas guiadas en la placa.

Si se fija el número de onda k, la ec. (3.212) se convierte en un sistema de autovalores lineal en ω^2 con la siguiente forma:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\underline{X} = \underline{0} \tag{3.214}$$

donde: $\mathbf{K} = k^2\mathbf{A} + ik\mathbf{B} + \mathbf{G}$ es la matriz de rigidez del sistema y es una matriz conocida, $\mathbf{M}$ es la matriz de masa del sistema, y $\underline{X}$ es el autovector generalizado y viene dado por la ec. (3.160).

3.5. Placa en deformación antiplana: Ondas SH

Cuando se estudia una frecuencia fija ω en el problema de deformación antiplana, la ec. (3.212) representa un sistema de autovalores lineal en k^2 como el siguiente:

$$(k^2\mathbf{A} + \mathbf{C})\underline{X} = \underline{0} \tag{3.215}$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{G} - \omega^2\mathbf{M}$ es una matriz conocida. Ambas matrices son simétricas y reales, por lo que todos los autovalores k^2 son reales. Consecuentemente, se obtienen valores de k reales o imaginarios puros, que corresponden a los números de onda de los distintos modos SH guiados (reales o evanescentes respectivamente).

Los autovectores cumplen una relación de ortogonalidad que se obtiene tomando dos números de onda distintos, $k^{(m)}$ y $k^{(r)}$, y sus correspondientes autovectores, $\underline{\phi}^{(m)}$ y $\underline{\phi}^{(r)}$. Utilizando la ec. (3.214) y la simetría de las matrices, se llega a las siguientes igualdades:

$$\left(\underline{\phi}^{(m)}\right)^T \mathbf{C}\,\underline{\phi}^{(r)} = -\left[k^{(r)}\right]^2 \left(\underline{\phi}^{(m)}\right)^T \mathbf{A}\,\underline{\phi}^{(r)} = -\left[k^{(m)}\right]^2 \left(\underline{\phi}^{(r)}\right)^T \mathbf{A}\,\underline{\phi}^{(m)} \quad (3.216)$$

De las ecuaciones cabe concluir que se verifican las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \left(\underline{\phi}^{(m)}\right)^T \mathbf{C}\,\underline{\phi}^{(r)} &= \left(\underline{\phi}^{(m)}\right)^T \mathbf{A}\,\underline{\phi}^{(r)} = 0 \quad si \quad k^{(m)} \neq k^{(r)} && (3.217) \\ \left(\underline{\phi}^{(m)}\right)^T \mathbf{C}\,\underline{\phi}^{(r)} &= -\left[k^{(m)}\right]^2 \left(\underline{\phi}^{(r)}\right)^T \mathbf{A}\,\underline{\phi}^{(m)} \quad si \quad k^{(m)} = k^{(r)} && (3.218) \end{aligned}$$

3.6. Placa en deformación plana: Ondas de Lamb

Al estudiar una frecuencia fija ω en el problema de deformación plana, la ec. (3.212) se transforma en un sistema de autovalores cuadrático en k como el siguiente:

$$(k^2\mathbf{A} + k\mathbf{B} + \mathbf{C})\underline{X} = \underline{0} \quad (3.219)$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{G} - \omega^2\mathbf{M}$ es una matriz conocida.

Cualquier problema de autovalores cuadrático se puede reescribir como un problema de autovalores lineal con matrices no simétricas duplicando el número de incógnitas. Sin embargo, para materiales isótropos, atendiendo a la especial estructura de las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, y $\mathbf{C}$, se puede llevar a cabo un sencillo cambio de variable que transforma el problema original en un sistema de autovalores lineal con el mismo número de incógnitas, pero con matrices no simétricas.

3.6.1. Reformulación como problema de autovalores lineal

Si se organiza el vector $\underline{X}$ (vector de dimensión $(2N \times 1)$ al estar en el caso de deformación plana) de manera que se almacenan en las N primeras posiciones la componente en la dirección r de todos los nodos, y en las N últimas posiciones las componentes en la dirección z, se tiene:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_r \\ \underline{X}_z \end{bmatrix} \quad (3.220)$$

donde $\underline{X}_r = [x_{r_1}\ x_{r_2}\ \cdots\ x_{r_N}]^T$ y $\underline{X}_z = [x_{z_1}\ x_{z_2}\ \cdots\ x_{z_N}]^T$ son los vectores de dimensión $(N \times 1)$ que almacenan respectivamente las componentes r y z de los vectores $\underline{X}$ de todos los nodos.

Esta reorganización de los grados de libertad supone la reorganización de las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ en la ec. (3.212), la cual produce para un material isótropo las siguientes expresiones:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_{rz} \\ \mathbf{B}_{rz}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \tag{3.221}$$

donde las submatrices que aparecen se pueden obtener fácilmente a partir de las respectivas globales por simple inspección.

Si se escribe la ec. (3.212) con la nueva organización de los grados de libertad, tenemos:

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_{rz} \\ \mathbf{B}_{rz}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{X}_r \\ \underline{X}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{3.222}$$

Multiplicando el vector $\underline{X}_z$ por k y dividiendo las columnas correspondientes para mantener el sistema se tiene:

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{k}\mathbf{A}_z \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{k}\mathbf{B}_{rz} \\ \mathbf{B}_{rz}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{k}\mathbf{C}_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{X}_r \\ k\underline{X}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{3.223}$$

Multiplicando las últimas N filas por k queda:

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_{rz} \\ k^2\mathbf{B}_{rz}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{X}_r \\ k\underline{X}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{3.224}$$

y agrupando:

$$\left(k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{rz}^T & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{B}_{rz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{X}_r \\ k\underline{X}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{3.225}$$

Se ha obtenido un problema de autovalores lineal en k^2 con matrices no simétricas que se puede reescribir como:

$$(k^2\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{C}})\underline{\phi}_d = \underline{0} \tag{3.226}$$

donde el vector columna $\underline{\phi}_d = [\underline{X}_r^T\ k\underline{X}_z^T]^T$ es el *autovector por la derecha* de las siguientes matrices:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{rz}^T & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \quad y \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{B}_{rz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \tag{3.227}$$

Otra forma alternativa de plantear un sistema lineal de autovectores a partir de la ec. (3.212) se obtiene multiplicando $\underline{X}_r$ por k y dividiendo las columnas correspondientes para mantener el sistema intacto, es decir:

$$\left(k^2\begin{bmatrix} \frac{1}{k}\mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_{rz} \\ \frac{1}{k}\mathbf{B}_{rz}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{k}\mathbf{C}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} k\underline{X}_r \\ \underline{X}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{3.228}$$

Multiplicando las N primeras filas por k y agrupando se llega a:

$$\left(k^2\begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_{rz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{rz}^T & \mathbf{C}_z \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} k\underline{X}_r \\ \underline{X}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{3.229}$$

donde se ha obtenido un problema de autovalores lineal en k^2 con matrices no simétricas, las cuales son traspuestas de las que aparecen en la ec. (3.226). Trasponiendo la ec. (3.229) se obtiene:

$$\underline{\phi}_i(k^2\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{C}}) = \underline{0} \tag{3.230}$$

donde el vector fila $\underline{\phi}_i = [k\underline{X}_r^T \ \underline{X}_z^T]$ es el *autovector por la izquierda* de las matrices $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{C}}$.

En problemas de autovalores con matrices simétricas, los autovectores por la izquierda y por la derecha son iguales, es decir, $\underline{\phi}_d = \underline{\phi}_i^T$, pero la relación entre ambos no es tan directa cuando las matrices no son simétricas.

3.6.2. Relación de ortogonalidad entre autovectores

Los autovectores por la izquierda y por la derecha de una matriz no simétrica cumplen también una cierta relación de ortogonalidad, que puede deducirse al tomar dos números de onda distintos $k^{(m)}$ y $k^{(r)}$ y sus correspondientes autovectores. Utilizando las ecs. (3.226) y (3.230) se obtienen fácilmente las siguientes igualdades:

$$\underline{\phi}_i^{(m)}\overline{\mathbf{C}}\,\underline{\phi}_d^{(r)} = -\left[k^{(m)}\right]^2\underline{\phi}_i^{(m)}\overline{\mathbf{A}}\,\underline{\phi}_d^{(r)} = -\left[k^{(r)}\right]^2\underline{\phi}_i^{(m)}\overline{\mathbf{A}}\,\underline{\phi}_d^{(r)} \tag{3.231}$$

$$\underline{\phi}_i^{(r)}\overline{\mathbf{C}}\,\underline{\phi}_d^{(m)} = -\left[k^{(m)}\right]^2\underline{\phi}_i^{(r)}\overline{\mathbf{A}}\,\underline{\phi}_d^{(m)} = -\left[k^{(r)}\right]^2\underline{\phi}_i^{(r)}\overline{\mathbf{A}}\,\underline{\phi}_d^{(m)} \tag{3.232}$$

De estas ecuaciones cabe concluir las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\underline{\phi}_i^{(m)}\overline{\mathbf{A}}\,\underline{\phi}_d^{(r)} = \underline{\phi}_i^{(r)}\overline{\mathbf{A}}\,\underline{\phi}_d^{(m)} = 0 \quad si \quad k^{(m)} \neq k^{(r)} \tag{3.233}$$

$$\underline{\phi}_i^{(m)}\overline{\mathbf{C}}\,\underline{\phi}_d^{(r)} = \underline{\phi}_i^{(r)}\overline{\mathbf{C}}\,\underline{\phi}_d^{(m)} = 0 \quad si \quad k^{(m)} \neq k^{(r)} \tag{3.234}$$

$$\underline{\phi}_i^{(m)}\overline{\mathbf{C}}\,\underline{\phi}_d^{(m)} = -\left[k^{(m)}\right]^2\underline{\phi}_i^{(m)}\overline{\mathbf{A}}\,\underline{\phi}_d^{(m)} \neq 0 \quad si \quad k^{(m)} = k^{(r)} \tag{3.235}$$

3.6.3. Modos de propagación del problema de Deformación Plana

Para un número de onda cualquiera $k^{(m)}$, el vector de desplazamientos nodales de dicho modo, que denotaremos por $\underline{\phi}^{(m)}$, se puede obtener a partir de los correspondientes autovectores por la derecha y por la izquierda, $\underline{\phi}_d^{(m)}$ y $\underline{\phi}_i^{(m)}$, deshaciendo los cambios de variable descritos anteriormente. Adoptando una organización de los grados de libertad que los agrupe por componentes, como se indica en la ec. (3.220), se llega a la siguiente relación:

$$\underline{\phi}^{(m)} = \underline{X}^{(m)} = \begin{bmatrix} \underline{X}_r^{(m)} \\ \underline{X}_z^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_{d,r}^{(m)} \\ \frac{1}{k^{(m)}} \underline{\phi}_{d,z}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k^{(m)}} \underline{\phi}_{i,r}^{(m)} & \underline{\phi}_{i,z}^{(m)} \end{bmatrix}^T \qquad (3.236)$$

En la ec. (3.236) puede observarse que los desplazamientos modales dependen del signo del número de onda y, por tanto, del sentido de propagación. El cambio de signo del número de onda conlleva cambiar el signo de una de las componentes de los desplazamientos modales. Esta observación coincide con el resultado analítico obtenido para las ondas de Lamb en placas elásticas homogéneas.

3.7. Comentarios sobre los autovalores y autovectores

Las ecuaciones que gobiernan los modos de propagación en una placa discretizada para una frecuencia fija ω se han planteado como un sistema de autovalores lineal en $\lambda = k^2$ tanto en el caso de deformación plana, ec. (3.226), como en el de deformación antiplana, ec. (3.215). Para una malla de N nodos, la solución del sistema proporciona $G = N \cdot g$ autovalores[6] $\lambda^{(m)}$ y sus correspondientes autovectores ($\underline{\phi}_d^{(m)}$ y $\underline{\phi}_i^{(m)}$ en deformación plana y $\underline{\phi}^{(m)}$ en el caso antiplano). Al tomar raices cuadradas de los autovalores anteriores se obtienen $2G$ números de onda, puesto que cada $\lambda^{(m)}$ genera dos valores de $k^{(m)}$: $\pm\sqrt{\lambda^{(m)}}$.

Si $\lambda^{(m)}$ es real y positivo, ambos números de onda $k^{(m)}$ son también reales pero de signos contrarios y corresponden a modos reales. Para el resto de valores de $\lambda^{(m)}$, los números de onda $k^{(m)}$ obtenidos son imaginarios o complejos y corresponden a modos evanescentes.

[6]Siendo $g = 2$ para deformación plana y $g = 1$ para deformación antiplana

Teniendo en cuenta que la dependencia funcional con r viene expresada a través de la función $H_m^{(n)}(kr)$, la dirección de propagación de la onda dependerá del tipo de función de Hankel empleada (valor de n). Si fijando el orden del desarrollo de Fourier (m) obtenemos la expresión de su expansión asintótica, es decir, estudiamos la forma de la función de Hankel para valores elevados de su argumento ($kr \to \infty$), obtenemos las siguientes expresiones [7]:

$$H_m^{(1)}(kr) = \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(kr-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(m,k)(2ikr)^{-k} + O(|kr|^{-n-1})\Big] \tag{3.237}$$

$$H_m^{(2)}(kr) = \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(kr-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(m,k)(2ikr)^{-k} + O(|kr|^{-n-1})\Big] \tag{3.238}$$

donde la única diferencia entre ambas expresiones es el signo del complejo i, siendo además:

$$(m,k) = \frac{(-1)^k}{k!}(\frac{1}{2}-m)_k\,(\frac{1}{2}+m)_k = \frac{(4m^2-1)(4m^2-3^2)\cdots(4m^2-(2k-1)^2)}{2^{2k}k!} \tag{3.239}$$

que para el caso $k=0$ resulta:

$$(m,0) = 1 \tag{3.240}$$

Sabiendo que la coordenada radial será siempre $r \geqslant 0$ y que la dependencia temporal es de la forma $e^{i\omega t}$, observando las ecs. (3.237) y (3.238) se puede concluir inmediatamente que, para valores reales y positivos de k, la función $H_m^{(2)}(kr)$ representa a una onda que se propaga hacia $r \to +\infty$, mientras que la función $H_m^{(1)}(kr)$ representa a una onda que se propaga hacia $r \to 0$. Para ambas direcciones de propagación, la función de Hankel produce una atenuación de la amplitud modal con la coordenada r del $O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right)$.

Por tanto, si $\lambda^{(m)}$ es real y positivo ambos números de onda también serán reales pero con signos contrarios, de forma que a partir las expresiones de las expansiones asintóticas puede deducirse que el número de onda positivo ($k^{(m)} > 0$) representa una onda cuya fase se propaga hacia $r = +\infty$ (caso de $H_m^{(2)}(kr)$) y también una onda propagándose hacia $r = 0$ (caso de $H_m^{(1)}(kr)$). El flujo de energía viaja en el mismo sentido que la fase, salvo en el caso de ondas “backward” que viaja en sentido contrario.

Para el resto de valores de $\lambda^{(m)}$, los números de onda obtenidos son imaginarios o complejos y corresponden a modos evanescentes, los cuales no se propagan sino que sufren una atenuación de su amplitud con r. Si suponemos que $k^{(m)} = a+ib$ y la variación con t es de la forma $e^{i\omega t}$, un valor $b < 0$ implica para la función $H_m^{(2)}(kr)$ que la amplitud modal de la onda decaerá hacia $r = +\infty$, y para $H_m^{(1)}(kr)$, que el decrecimiento se producirá hacia $r = 0$.

Por convención, se designan con $k^{(m,+\infty)}$ a los G números de onda asociados con modos reales que transportan energía hacia $r = +\infty$ y con modos evanescentes con amplitud decreciente hacia $r = +\infty$, ambos obtenidos mediante $H_m^{(2)}(kr)$. En consecuencia, los números de onda $k^{(m,0)} = k^{(m,+\infty)}$ representan modos reales que transportan energía hacia $r = 0$ o modos evanescentes cuya amplitud decae hacia $r = 0$, en este caso ambos obtenidos mediante $H_m^{(1)}(kr)$. Los valores de $k^{(m,+\infty)}$ y $k^{(m,0)}$ son números de onda k reales y positivos en el caso de modos que se propagan, y son números de onda k imaginarios o complejos (con parte imaginaria negativa) en el caso de modos evanescentes.

Los vectores $\underline{\phi}^{(m,+\infty)}$ y $\underline{\phi}^{(m,0)}$, asociados respectivamente a los números de onda $k^{(m,+\infty)}$ y $k^{(m,0)}$, representan la estructura de los *pseudo-desplazamientos*[7] de la sección transversal de la placa para el modo m según los dos posibles sentidos de propagación, si el número de onda es real, o decrecimiento, si el número de onda es imaginario o complejo. Ambos vectores están asociados entre sí debido a las propiedades del problema de autovalores del cual se han obtenido, y además proporcionan una relación esencial entre los problemas antiplano y de deformación plana:

- Caso antiplano: los dos vectores son iguales:

$$\underline{\phi}^{(m,+\infty)}\Big|_{antiplano} = \underline{\phi}^{(m,0)}\Big|_{antiplano} \tag{3.241}$$

  La estructura modal es independiente de la dirección de propagación, lo cual coincide con el resultado analítico obtenido para ondas SH guiadas en placas homogéneas.

- Caso de deformación plana: ya que ambos números de onda $k^{(m,+\infty)}$ y $k^{(m,0)}$ tienen los mismos autovectores "modificados", $\underline{\phi}_d^{(m)}$ y $\underline{\phi}_i^{(m)}$, los autovectores nodales generalizados, $\underline{\phi}^{(m,+\infty)}$ y $\underline{\phi}^{(m,0)}$, son iguales para cada uno de ellos debido a que al deshacer el cambio de variable aparece el número de onda[8]:

[7]Intervienen en la discretización del vector $\underline{F}(z)$, ya que no se discretiza directamente el vector que contiene los desplazamientos $\underline{u}$.

[8]Este hecho se puede apreciar en la ec. (3.236).

$$\underline{\phi}^{(m,0)}\Big|_{plano} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_{d,r}^{(m)} \\ \frac{1}{k^{(m,0)}}\underline{\phi}_{d,z}^{(m)} \end{bmatrix}_{plano} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_{d,r}^{(m)} \\ \frac{1}{k^{(m,+\infty)}}\underline{\phi}_{d,z}^{(m)} \end{bmatrix}_{plano} \tag{3.242}$$

$$\underline{\phi}^{(m,+\infty)}\Big|_{plano} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_{r}^{(m,+\infty)} \\ \underline{\phi}_{z}^{(m,+\infty)} \end{bmatrix}_{plano} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_{r}^{(m,0)} \\ \underline{\phi}_{z}^{(m,0)} \end{bmatrix}_{plano} \tag{3.243}$$

Se observa que para obtener los autovectores generalizados del modo $k^{(m,0)}$ a partir del modo $k^{(m,+\infty)}$ o viceversa, no hace falta realizar ninguna operación ya que ambos son iguales.

3.8. Fuerzas nodales consistentes en una sección $r = r_0$

En la placa infinita discretizada de la figura 3.3 se adopta una sección transversal cualquiera $r = r_0$ con vector normal $\mathbf{n} = [\pm 1, 0]^T$. Para obtener las fuerzas nodales consistentes realizaremos una integración sobre la región toroidal definida por un elemento cualquiera e de espesor l comprendido entre z_i^e y z_s^e (ver Figura 3.5).

Definiendo los contornos verticales de la región como S_1 y S_2 y los horizontales (resultado de la discretización) como S_3 y S_4, y teniendo en cuenta que las fuerzas nodales consistentes P_0 y P_0' , están aplicadas en los contornos de coordenadas $r = a$ y $r = b$ respectivamente, tenemos que:

$$\delta\underline{\widehat{u}}_0^T \underline{P}_0 = \int_{S_1} \delta\underline{\widehat{u}}^T \underline{\widehat{\sigma}}_v \, r dS \tag{3.244}$$

donde una expresión similar puede obtenerse para el contorno S_2 y la fuerza nodal consistente P_0'.

Teniendo en cuenta que:

$$\delta\underline{\widehat{u}}^T = \delta\underline{\widehat{u}}_0^T \, N^T \tag{3.245}$$

$$ds = dz \tag{3.246}$$

$$r = r_0 \tag{3.247}$$

sustituyéndolo en la ecuación (3.244) obtenemos que:

$$\delta \underline{\widehat{u}}_0^T \underline{P}_0 = \delta \underline{\widehat{u}}_0^T \, r_0 \int_z N^T \underline{\widehat{\sigma}}_v \, dz \tag{3.248}$$

y para variaciones arbitrarias de los desplazamientos modales

$$P_0 = r_0 \int_0^h N^T \underline{\widehat{\sigma}}_v \, dz \tag{3.249}$$

Por otro lado, para cada modo de propagación con número de onda k y coeficiente de participación α_k, las tensiones en el contorno vertical $S1$ vienen dadas por:

$$\underline{\widehat{\sigma}}_v = \alpha_k \underline{\widehat{\sigma}}_{vk} \tag{3.250}$$

y el correspondiente vector de fuerzas nodales será:

$$P_k = r_0 \, \alpha_k \int_0^h N^T \underline{\widehat{\sigma}}_{vk} \, dz \tag{3.251}$$

El vector de tensiones modales en el contorno σ_{vk} viene dado por:

$$\underline{\widehat{\sigma}}_{vk} = - \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{rr} \\ \widehat{\sigma}_{rz} \\ \widehat{\sigma}_{r\theta} \end{bmatrix}_{kmodos} \tag{3.252}$$

Teniendo en cuenta las ecs. (3.117) a (3.122) y las ecs. (3.110) a (3.115) podemos expresar el vector de tensiones en el contorno vertical como:

$$\underline{\widehat{\sigma}}_{vk} = - \begin{bmatrix} (2\mu H''_m - \lambda k^2 H_m) f_1 + \lambda k H_m f'_2 + 2\mu \frac{m}{r_0}(H'_m - \frac{H_m}{r_0}) f_3 \\ \mu H'_m f'_1 + \mu k H'_m f_2 + \mu \frac{m}{r_0} H_m f'_3 \\ 2\mu \frac{m}{r_0}(H'_m - \frac{H_m}{r_0}) f_1 + \mu (H''_m - \frac{1}{r_0} H'_m + \frac{m}{r_0}^2 H_m) f_3 \end{bmatrix} \tag{3.253}$$

o de forma matricial:

$$\widehat{\underline{\sigma}}_{vk} = \mathbf{S}\underline{F} + \mathbf{T}\underline{F}' \qquad (3.254)$$

donde:

$$\mathbf{S} = -\begin{bmatrix} (2\mu H''_m - \lambda k^2 H_m) & 0 & 2\mu\frac{m}{r_0}(H'_m - \frac{H_m}{r_0}) \\ 0 & \mu k H'_m & 0 \\ 2\mu\frac{m}{r_0}(H'_m - \frac{H_m}{r_0}) & 0 & \frac{m}{r_0}^2 H_m \end{bmatrix} \qquad (3.255)$$

$$\mathbf{T} = -\begin{bmatrix} 0 & \lambda k H_m & 0 \\ \mu H'_m & 0 & \mu\frac{m}{r_0} H_m f'_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.256)$$

Sabiendo que:

$$\underline{F} = \mathbf{N}\underline{X}^e \qquad (3.257)$$

$$\underline{F}' = \mathbf{N}'\underline{X}^e \qquad (3.258)$$

la ecuación (3.254) queda:

$$\widehat{\underline{\sigma}}_{vk} = (\mathbf{SN} + \mathbf{TN}')\underline{X}^e \qquad (3.259)$$

por lo que podemos decir que:

$$\mathbf{N}^T\widehat{\underline{\sigma}}_{vk} = (\mathbf{N}^T\mathbf{SN} + \mathbf{N}^T\mathbf{TN}')\underline{X}^e \qquad (3.260)$$

$$\mathbf{N}^T\widehat{\underline{\sigma}}_{vk} = (\mathbf{N}^T\mathbf{N}\overline{\mathbf{S}} + \mathbf{N}^T\mathbf{N}\overline{\mathbf{T}})\underline{X}^e \qquad (3.261)$$

donde las modificadas matrices *overlineS* y *overlineT* vienen dadas por:

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & & & \\ & \mathbf{S} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{S} \end{bmatrix} \qquad (3.262)$$

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & & & \\ & \mathbf{T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T} \end{bmatrix} \tag{3.263}$$

y están construidas con $m+1$ submatrices $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$.

Tras todo ésto, sustituyendo en la ecuación (3.251) obtenemos que:

$$P_k = r_0\ \alpha_k [\int [\mathbf{N}^T\mathbf{N}\ dz]\overline{\mathbf{S}} + \int [\mathbf{N}^T\mathbf{N}'\ dz]\overline{\mathbf{T}}]\underline{X}^e \tag{3.264}$$

3.9. Desarrollo en modos nomales

Si se supone una placa semi-infinita de espesor $d = 2h$ limitada por una sección transversal $r = r_0$, la solución elastodinámica en dicha placa puede expresarse como una combinación lineal de los modos de propagación de la placa (*desarrollo en modos normales*, o también *superposición modal*), donde sólo se incluyen aquellos modos que satisfacen la condición de radiación. Esta condición implica que los modos reales deben extraer energía de la sección r_0 y los modos evanescentes deben decrecer en amplitud cuando $|r - r_0| \to \infty$. La sección transversal $r = r_0$ define dos placas: $(0, r_0]$ y $[r_0, +\infty)$, la segunda de las cuales es infinita y se muestra en la Figura 3.8.

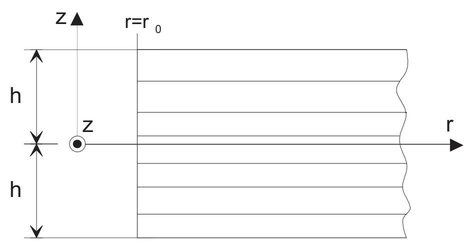


Figura 3.8. Geometría de la placa infinita

Los números de onda k que cumplen la condición de radiación en cada caso serán $k^{(m,0)}$ en el primero (resultado de emplear $H_m^{(1)}(kr)$)) y $k^{(m,+\infty)}$ en el segundo (resultado de emplear $H_m^{(2)}(kr)$)). En los desarrollos siguientes, los números de onda que cumplen la condición de radiación se denotarán con $k^{(m)}$, y sus correspondientes autovectores nodales generalizados con $\underline{\phi}^{(m)}$. En el caso de ondas de Lamb, cuando se estudien frecuencias donde exista una onda "backward" la condición de radiación obliga a seleccionarla de forma que su fase viaje hacia el borde, puesto que el flujo de energía se propaga en sentido opuesto.

Al estudiar una frecuencia fija ω, la formulación de EF aproxima los modos de Lamb y SH guiados mediante las soluciones de dos problemas cuadráticos de autovalores, ecs. (3.219) y (3.215) respectivamente. En ambos casos, una malla de N nodos produce $2G = 6N$ números de onda $k^{(m)}$ y sus correspondientes autovectores nodales $\underline{\phi}^{(m)}$, de los cuales sólo la mitad $G = 3N$ satisface la condición de radiación. Estos modos aproximados se emplean en el desarrollo en modos normales del campo difractado en la placa semi-infinita, en lugar de utilizar los modos analíticos.

La particularización de la superposición modal en el borde $r = r_0$ proporciona la siguiente expresión para los desplazamientos:

- usando el desarrollo en serie de Fourier en θ con exponenciales:

$$\underline{u}^{di} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{G} \alpha^{(j,m)} \underline{u}^{(j,m,r_0)} \, e^{im\theta} \, e^{i\omega t} \tag{3.265}$$

- usando el desarrollo en serie de Fourier en términos de sonos y cosenos[9]:

$$\underline{u}^{di} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{G} \left[\alpha_s^{(j,m)} \, \boldsymbol{\Theta}_s^{(m)} + \alpha_a^{(j,m)} \, \boldsymbol{\Theta}_a^{(m)} \right] \underline{u}^{(j,m,r_0)} \, e^{i\omega t} \tag{3.266}$$

donde $\boldsymbol{\Theta}_i^{(m)}$ $(i = a, s)$ es una matriz que incluye los factores que nos proporcionan las componentes simétricas o antisimétricas de los desplazamientos (dependiendo del vector $\underline{\theta}^{(m)}$ empleado), $\underline{u} = \mathbf{H}^{(j,m,r_0)} \underline{\phi}^{(j)}$es el vector de dsplazamientos modales,$\mathbf{H}^{(j,m,r_0)}$ es una matriz que incluye las funciones de Hankel (obtenidas para el modo j y la coordenada radial $r = r_0$), $\underline{\phi}^{(j)}$ es el autovector generalizado para el modo j (obtenido de resolver el problema lineal en k^2) y $\alpha^{(j,m)}$ es el coeficiente de participación del modo j.

Las matrices $\boldsymbol{\Theta}_s^{(m)}$ y $\boldsymbol{\Theta}_a^{(m)}$ vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\boldsymbol{\Theta}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_s^{(m)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{\Theta}_s^{(m)} \end{bmatrix} ; \qquad \boldsymbol{\Theta}_a^{(m)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_a^{(m)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{\Theta}_a^{(m)} \end{bmatrix} \tag{3.267}$$

[9]Esta última expresión incluye tanto las componentes simétricas como las antisimétricas.

donde $\mathbf{\Theta}_s^{(m)}$ y $\mathbf{\Theta}_a^{(m)}$ son submatrices de órden (3×3), que vienen dadas por:

$$\mathbf{\Theta}_s^{(m)} = \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(m\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{sen}(m\theta) \end{bmatrix} \tag{3.268}$$

$$\mathbf{\Theta}_a^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(m\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(m\theta) \end{bmatrix} \tag{3.269}$$

Por otro lado, $\mathbf{H}^{(j,m,r_0)}$ es una matriz de órden $(G \times G)$ cuya diagonal está formada por las matrices de funciones de Hankel, ya vistas anteriormente, obtenidas para el modo j y la coordenada radial $r = r_0$:

$$\mathbf{H}^{(j,r_0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{(j,m,r_0)} \tag{3.270}$$

donde $\mathbf{H}$ es una matriz que vienen expresada según la ec. (3.103), cuyas funciones deben ser escogidas de forma consistente con la condición de radiación (es decir, emplear $H_m^{(1)}(kr_0)$ cuando propagación sea hacia $r \to 0$ o bien $H_m^{(2)}(kr_0)$ cuando sea hacia $r \to +\infty$).

Tal como se expresa en la ec. (3.265) (también en la ec. (3.266)), para la obtención del campo de desplazamientos es necesario realizar la suma en todo el rango del desarrollo de Fourier (m) para todos los modos existentes en la frecuencia ω considerada. Para realizar esta suma para todos los modos se emplean los coeficientes de participación modales α cuya obtención se abordará en el Capítulo 5.

Capítulo 4

Generación de Ondas Cilíndricas Guiadas

4.1. Introducción

Uno de los aspectos más ventajosos de las ondas guiadas es el potencial que ofrecen para realizar tareas de inspección remota de defectos en placas (detección, localización y caracterización de los mismos) a causa de su pequeña atenuación por radiación, que es nula en el caso plano mientras que para ondas cilíndricas es del $O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$, es decir, pequeña frente a la atenuación de las ondas de volúmen, que es del $O\left(\frac{1}{\sqrt{r^2}}\right)$. Además del alcance, otra ventaja que presentan estas ondas es que permiten evaluar todo el espesor de la placa simultáneamente, y a lo largo de todo el camino recorrido por la onda. Sin embargo, el desarrollo de aplicaciones de este tipo debe afrontar y resolver efectivamente una serie de cuestiones relacionadas con la generación y recepción de ondas guiadas, así como con su interacción con defectos.

En primer lugar es necesario irradiar la placa con una señal ultrasónica guiada que pueda viajar largas distancias. Para ello se deben excitar modos reales.

Experimentalmente es posible generar y detectar de manera selectiva modos concretos empleando diversas técnicas Las dos técnicas más utilizadas son: transductores piezoeléctricos angulares de ondas longitudinales que se acoplan a la placa por inmersión local o mediante cuñas intermedias de metacrilato (por ejemplo plexiglás, perspex), y transductores lineales periódicos de tipo peine ("comb transducer"). En el primer caso, el transductor produce una onda plana en la cuña intermedia que, al incidir con una cierta inclinación en la interfase con la placa, genera ondas guiadas en la misma por refracción (de acuerdo con la ley de Snell). En el segundo caso, se aplica una vibración periódica al transductor, lo cual excita principalmente aquellos modos cuya longitud de onda coincida con la separación entre los elementos del transductor.

La naturaleza multimodal de las ondas guiadas otorga flexibilidad para variar tanto la frecuencia como el modo de trabajo, que consecuentemente podrán elegirse para maximizar la sensibilidad de la inspección al parámetro que se desee medir (por ejemplo: existencia, posición o tamaño de un defecto).

No obstante, los problemas estudiados en la mayoría de los casos son bidimensionales (onda plana incidiendo sobre un defecto de longitud infinita en la dirección paralela al frente de onda). Pero existen defectos que son difíciles de detectar con las técnicas enunciadas, como es el caso de los defectos tridimensionales. Para su detección deben emplearse ondas que se propaguen con un frente de onda tridimensional (como es el caso de las ondas cilíndricas). Para generar este tipo de ondas 3D, pueden excitarse modos de propagación en la placa a través de la aplicación de un campo de desplazamientos prescrito en uno de sus bordes. Ejemplos donde esta técnica es de utilidad pueden ser: la detección y caracterización de grietas que crecen radialmente a partir de los taladros de remachado, o bien la detección de defectos en una tubería mediante ondas guiadas propagándose en dirección circunferencial, tales como las que se generan en algunos vehículos automáticos de inspección interior.

Para usar este tipo de técnicas de inspección, es necesario conocer cómo se comporta la onda cilíndrica en su propagación en la placa. Por ello es fundamental tener un conocimiento exacto no sólo de los modos de propagación excitados según sea el tipo de desplazamiento impuesto en la placa, sino también de la deformada de dichos modos (estructura modal) en su movimiento a través de la misma.

Como apoyo al estudio de este tipo de ondas, en este capítulo se van a aplicar las técnicas numéricas desarrolladas previamente (Capítulo 3) para estudiar problemas de generación de ondas cilíndricas guiadas. Para ello se emplearán placas elásticas homogéneas con un agujero cilíndrico pasante, donde se aplicarán como excitación externa una serie de desplazamientos prescritos. Dichos desplazamientos generarán en la placa ondas cilíndricas que se propagarán a su través.

El campo de desplazamientos producido será calculado numéricamente para su posterior comparación con resultados analíticos extraídos de distintas fuentes bibliográficas. Estas comparaciones se realizarán para valores bajos de frecuencia, en los cuales el problema de generación en 3D se asemeja a un problema de tensión plana o de flexión de placas delgadas. Posteriormente, se propondrán resultados para valores de frecuencia más elevados.

4.2. Coeficientes de participación modal

Cuando una fuente externa se aplica armónicamente sobre el borde de una placa se producen ondas guiadas que se propagan por el interior de la misma, pudiendo en su movimiento llegar a interaccionar con defectos. El resultado de esta interacción consiste en una difracción de la onda, que produce un reparto de la energía incidente entre los campos reflejado y transmitido. Además de este fenómeno de difracción, tiene lugar una conversión modal que produce una redistribución de la energía incidente entre todos los modos reales. Concretamente, el fenómeno de conversión modal se produce no sólo al interaccionar la onda con el defecto, sino también al generar la onda guiada desde el borde donde se encuentra aplicada la fuerza prescrita.

Por tanto al imponer un campo de tensiones sobre un borde de la placa, se están excitando una serie de modos cuya propagación (reparto de la energía cedida por la fuente de excitación) depende de los coeficientes de participación modal de cada modo concreto[1]. En nuestro caso, al tener una placa con un agujero circular pasante sometida a un campo de tensiones prescrito en su borde interior, podemos suponer que las fuerzas impuestas se traducirán en los modos de propagación de la onda a través de la placa (desplazamientos internos), de forma que el modo k estará ponderado respecto al resto de los modos en base al coeficiente de participación modal $\alpha^{(k)}$, y análogamente suederá con el resto de los modos.

Para el estudio que se va a realizar, se empleará una placa de un material homogéneo, elástico e isótropo de espesor constante, con un agujero circular pasante sobre cuyo borde, situado en $r = a$, impondremos una fuerza prescrita. El valor de dicha fuerza producirá tres casos diferentes de estudio, en los cuales se aplicará una fuerza unitaria positiva en la dirección de una sola de las coordenadas del sistema de referencia cilíndrico, siendo la fuerza nula para las otras dos coordenadas.

El problema considerado en este capítulo constituye el caso más sencillo de difracción de ondas guiadas, puesto que su geometría y condiciones de contorno

[1]Los coeficientes de participación modal ($\alpha^{(m)}$ para el modo m) fueron enunciados en el desarrollo en modos normales del Capítulo 3.

permiten una aplicación directa de la técnica de superposición modal, siempre satisfaciendo la condición de radiación en el borde considerado.

Para aplicar la formulación semi-analítica de EF se discretiza el espesor de la placa en un número de elementos que depende de la máxima frecuencia de trabajo según la ecuación:

$$\lambda_T/l > \beta \tag{4.1}$$

donde l es el tamaño del elemento, $\lambda_T = 2\pi c_t/w$ es la longitud de onda de las ondas transversales a la frecuencia w, $\beta = 6$ para elementos lineales y $\beta = 3$ para elementos cuadráticos.

Esto nos permite calcular las curvas de dispersión y los modos de propagación de la placa. A continuación, se aplica el principio de superposición para expresar la solución del problema completo como suma de dos subproblemas:

1. un tren de ondas incidentes propagándose en una placa infinita, cuya solución se supone conocida ($\underline{\widehat{u}}^{in}$; $\underline{\widehat{f}}^{in}$), y que se denominará "campo incidente".

2. un "campo reflejado" de ondas en la placa semi-infinita, que se expresa como una combinación lineal de los modos de la placa infinita

$$\underline{\widehat{u}}^{re} = \mathbf{U}^{m,ro}, \underline{\alpha}^{m} \tag{4.2}$$

$$\underline{\widehat{f}}^{re} = \mathbf{F}^{m,ro}, \underline{\alpha}^{m} \tag{4.3}$$

   donde la única incógnita son los coeficientes de participación modal $\underline{\alpha}^m$.

En las ecuaciones anteriores debemos definir:

$$\mathbf{U}^{m,ro} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\widehat{u}}^{m,1,ro} & \underline{\widehat{u}}^{m,2,ro} & \underline{\widehat{u}}^{m,3N,ro} \end{array} \right] \tag{4.4}$$

$$\mathbf{F}^{m,ro} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\widehat{f}}^{m,1,ro} & \underline{\widehat{f}}^{m,2,ro} & \underline{\widehat{f}}^{m,3N,ro} \end{array} \right] \tag{4.5}$$

$$\underline{\alpha}^{m} = \left[\begin{array}{c} \alpha^{1,m} \\ \alpha^{2,m} \\ \alpha^{3N,m} \end{array} \right] \tag{4.6}$$

Teniendo en cuenta que la superposición de ambos debe satisfacer la condición de contorno en el borde, se puede plantear una ecuación para calcular $\underline{\alpha}$.

La condición de contorno en la sección del borde del agujero, $r = a$, para el problema total es la siguiente:

$$\underline{u}(r = a, z, t) = \underline{u}_{\,borde} \Rightarrow \widehat{\underline{u}}(z) = \widehat{\underline{u}}^{\,in}(z) + \widehat{\underline{u}}^{\,re}(z) = \widehat{\underline{u}}_{\,borde} \tag{4.7}$$

Como en nuestro caso $\widehat{\underline{u}}^{\,in}(z) = \underline{0}$, la ecuación anterior se transforma en una condición de contorno del tipo Dirichlet (desplazamientos prescritos) para el problema de generación desde una cavidad cilíndrica:

$$\widehat{\underline{u}}^{\,re}(z) = \widehat{\underline{u}}_{\,borde} = \widehat{\underline{u}}_{\,prescrito} \tag{4.8}$$

Sustituyendo en la ec. (4.2), y resolviendo el sistema para los coeficientes de participación modal $\underline{\alpha}$, obtenemos la siguiente expresión para dichos coeficientes de participación modal[5]:

$$\underline{\alpha} = \mathbf{U}^{-1}_{m,ro}, (\underline{u}_{presc} - \underline{u}^{in}(z)) \tag{4.9}$$

Si consideramos el problema de fuerzas prescritas, tendremos:

$$\underline{f}(r = a, z, t) = \underline{f}_{\,borde} \Rightarrow \widehat{\underline{f}}(z) = \widehat{\underline{f}}^{\,in}(z) + \widehat{\underline{f}}^{\,re}(z) = \widehat{\underline{f}}_{\,borde} \tag{4.10}$$

y como en nuestro caso $\widehat{\underline{f}}^{\,in}(z) = \underline{0}$, la ecuación anterior se transforma en una condicion de contorno de tipo Newman (fuerzas prescritas):

$$\widehat{\underline{f}}^{\,re}(z) = \widehat{\underline{f}}_{\,borde} = \widehat{\underline{f}}_{\,prescrito} \tag{4.11}$$

Sustituyendo en la ec. (4.3), y resolviendo el sistema para los coeficientes de participación modal $\underline{\alpha}$, obtenemos la siguiente expresión para dichos coeficientes de participación modal:

$$\underline{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}_{m,ro}, (\underline{f}_{presc} - \underline{f}^{in}(z)) \tag{4.12}$$

4.3. Representación del problema de Generación en 3D

Como hemos comentado con anterioridad, una forma de generar ondas guiadas que se propagan en el interior de una placa consiste en imponer un campo de tensiones en uno de sus bordes. Para el caso de las ondas cilíndricas, éstas pueden ser generadas desde una cavidad cilíndrica al aplicar dicho campo de tensiones en el borde interior de un agujero circular existente en la placa.

A continuación, vamos a representar gráficamente los distintos modos de propagación que resultan de generar ondas cilíndricas por el procedimiento comentado. Para ello vamos a hacer uso del MEF desarrollado en el Capítulo 3. Para los cálculos numéricos, se ha empleado una placa de espesor $d = 2h = 2 \cdot 1$, con un agujero circular pasante de radio $r = a = h$, siendo la placa de un material elástico con las siguientes propiedades: densidad $\rho = 1$, coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}25$, velocidad de ondas longitudinales $c_L = sqrt3\, mm/s$ y velocidad de ondas transversales $c_T = 1\, mm/s$.

En este proyecto se van a analizar tres casos simples de desplazamientos prescritos en el agujero:

- Desplazamiento radial uniforme:

$$\begin{aligned} f_r(r = a) &= 1 \\ f_z(r = a) &= 0 \\ f_\theta(r = a) &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

- Desplazamiento axial uniforme:

$$\begin{aligned} f_r(r = a) &= 0 \\ f_z(r = a) &= 1 \\ f_\theta(r = a) &= 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

- Desplazamiento circunferencial uniforme:

$$\begin{aligned} f_r(r = a) &= 0 \\ f_z(r = a) &= 0 \\ f_\theta(r = a) &= 1 \end{aligned} \tag{4.15}$$

cada uno de ellos para los casos axisimétrico ($m = 0$) y no axisimétrico ($m \neq 0$). Concretamente para el caso no axisimétrico se considerará $m = 1$.

En todos los casos estudiados en este apartado, la frecuencia de cálculo será $\Omega = 2{,}8579$ y las ondas cilíndricas se propagarán hacia $r \rightarrow +\infty$ (para mostrar de forma clara la propagación de cada onda se ha representado sólo una placa semicircular, $\theta \in [0, \pi]$). Para el valor de frecuencia considerado existen 6 modos reales: $S0$, $S1$, $A0$, $A1$, $SH0$ y $SH1$,y para discretizar el espesor de la placa se han empleado tantos elementos cuadráticos como son necesarios según lo obtenido por el criterio de mallado. El punto de trabajo aparece representado en la Figura 4.1.

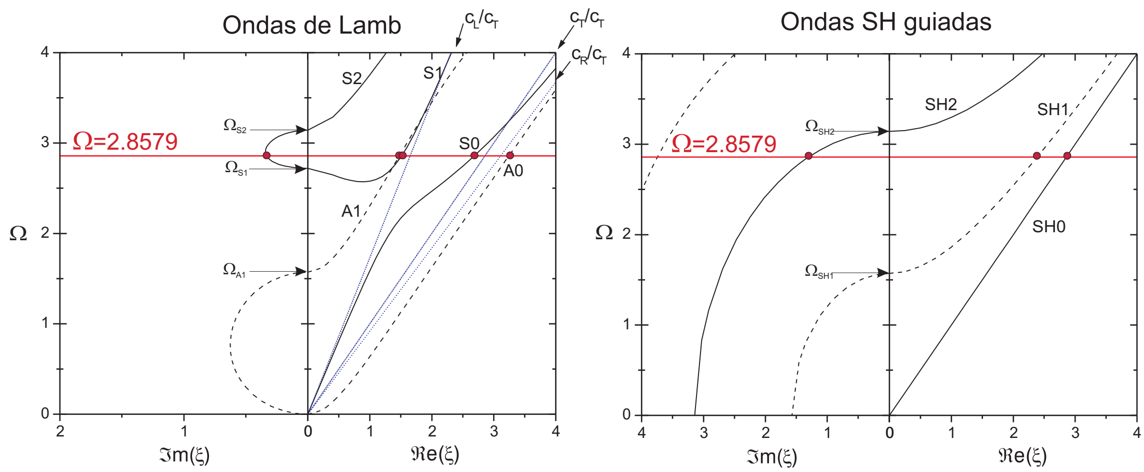


Figura 4.1. Punto de trabajo para $\Omega = 2{,}8579$.

4.3.1. Estructura Modal de Ondas Generadas desde una cavidad cilíndrica

En este apartado se representarán las estructuras de los desplazamientos para los distintos tipos de ondas guiadas cilíndricas que se propagan por el interior de la placa. Consideraremos la misma placa que en los apartados anteriores, con un agujero cilíndrico pasante de radio $r = a = h$ donde aplicaremos los distintos tipos de fuerzas prescritas debido a los cuales se generarán las ondas.

Consideraremos en primer lugar el caso axisimétrico ($m = 0$) y posteriormente el no axisimétrico ($m \neq 0$, donde tomaremos $m = 1$), y vamos a representar las deformadas de los modos más significativos que son generados para cada uno de los tres tipos de fuerzas que impondremos en el borde del agujero. El vector de fuerzas prescrito tendrá las siguientes componentes:

$$f_{prescrito} = \left[\; f_r \, , \, f_z \, , \, f_\theta \; \right]^T \tag{4.16}$$

Los resultados numéricos obtenidos para los casos axisimétrrico y no axisimétrico, tomando como los valores de cálculo $z = h$ y $\theta = 0$, se recogen en los Cuadros 4.1 y 4.2, respectivamente, en los cuales se detallan los valores de los coeficientes de participación modal para cada uno de los casos considerados.

Caso Axisimétrico ($m = 0$)

- Cuando en la cavidad cilíndrica imponemos una fuerza prescrita consistente en una fuerza unidad según la coordenada radial, mientras que para el resto de coordenadas la fuerza es nula:

$$f_{prescrito} = \left[\ 1 \ , \ 0 \ , \ 0 \ \right]^T_{r=a} \tag{4.17}$$

  los modos que se generan en la placa son sólo modos Si, con $i = 0, 1, 2, ..$ (modos simétricos de Lamb), no generándose ni modos A (modos antisimétricos de Lamb) ni modos SH. La representación de la deformada del modo $S0$, generado por la fuerza impuesta dado por la ec. (4.17), para $m = 0$ se muestra en la Figura 4.2.

Modo	$m = 0$		
	$f = [1, 0, 0]^T$	$f = [0, 1, 0]^T$	$f = [0, 0, 1]^T$
$S0$	0,2494	0	0
$S1$	0,8689	0	0
$A0$	0	0,5710	0
$A1$	0	0,4591	0
$SH0$	0	0	0,6667
$SH1$	0	0	0

Cuadro 4.1. Coeficientes de participación $\alpha^{(j,m)}$ para el Caso Axisimétrico ($z = h$, $\theta = 0$).

- Cuando en la cavidad cilíndrica imponemos una fuerza prescrita consistente en una fuerza unidad según la coordenada axial, mientras que para el resto de coordenadas la fuerza es nula:

$$f_{prescrito} = \left[\ 0 \ , \ 1 \ , \ 0 \ \right]^T_{r=a} \tag{4.18}$$

  los modos que se generan en la placa son sólo modos Ai, con $i = 0, 1, 2, ..,$ no generándose ni modos S ni tampoco modos SH. La representación de la deformada del modo $A0$, generado por la fuerza impuesta dada por la ec. (4.18), para $m = 0$ se muestra en la Figura 4.3.

- Cuando en la cavidad cilíndrica imponemos una fuerza prescrita consistente en una fuerza unidad según la coordenada circunferencial, mientras

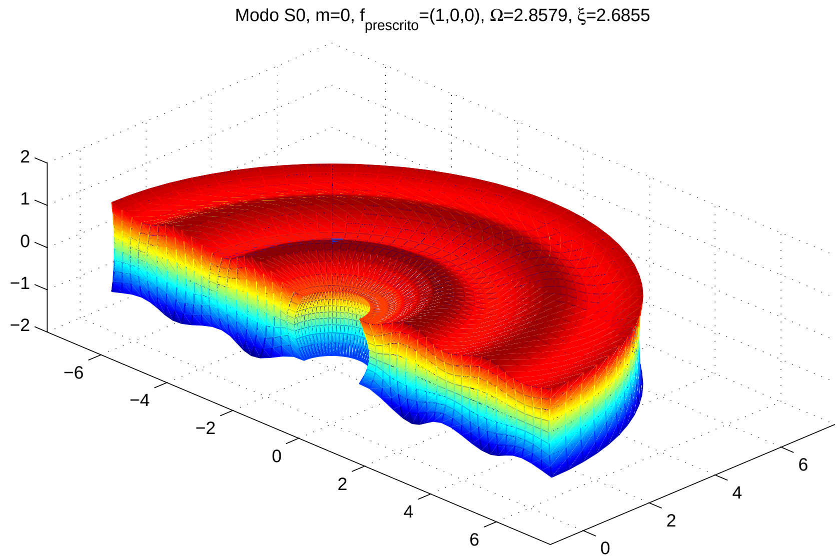


Figura 4.2. Onda S0 generada por una fuerza radial unidad, para $m = 0$.

que para el resto de coordenadas la fuerza es nula:

$$f_{prescrito} = \left[\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ \right]^T_{r=a} \tag{4.19}$$

los modos que se generan en la placa son sólo modos SHi, con $i = 0, 1, 2, ..$, no generándose ni modos S ni modos A. La representación de la deformada del modo $SH0$, generado por la fuerza impuesta dada por la ec. (4.19), para $m = 0$ se muestra en la Figura 4.4.

Para $m = 0$, los desplazamientos de los modos de Lamb y SH están desacoplados como se observa en las soluciones analíticas de Achenbach (ver ecs. (2.189) a (2.194)). Los primeros producen desplazamientos u_z y u_r, mientras que los segundos sólo producen desplazamiento u_θ. Así, al prescribir fuerzas circunferenciales en el agujero sólo se generarán modos SH, mientras que al imponer fuerzas radiales o axiales sólo se generarán modos S o A.

Además, en ambos casos, si las condiciones de contorno aplicadas son simétricas respecto al plano medio de la placa, sólo se generarán modos simétricos (Si o SHi, con i par). Para condiciones de contorno antisimétricas respecto al plano medio de la placa, sólo se generarán modos antisimétricos (Ai o SHi, con i impar).

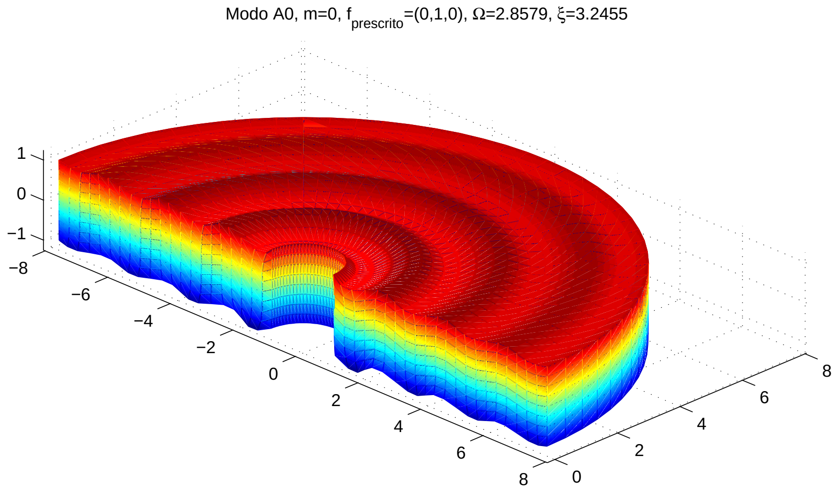


Figura 4.3. Onda A0 generada por una fuerza axial unidad, para $m = 0$.

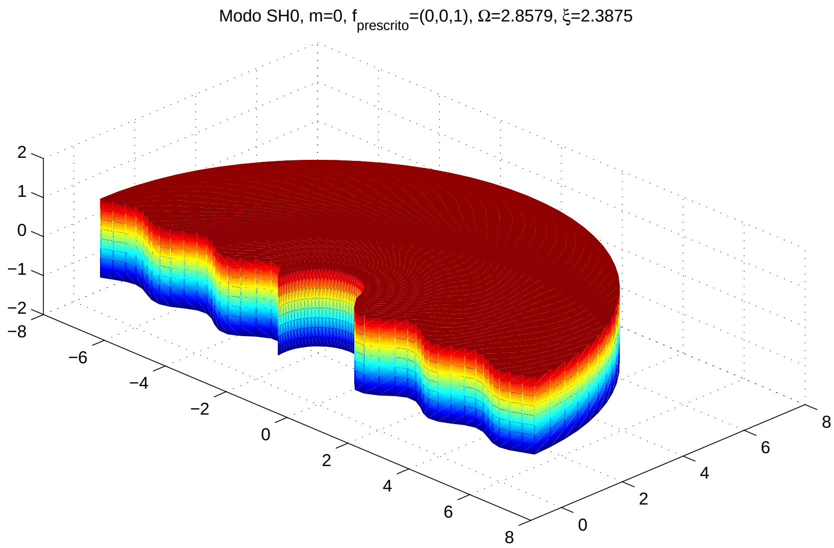


Figura 4.4. Onda SH0 generada por una fuerza circunferencial unidad, para $m = 0$.

Modo	$m = 1$		
	$f = [1, 0, 0]^T$	$f = [0, 1, 0]^T$	$f = [0, 0, 1]^T$
$S0$	0,1997	0	0,1678
$S1$	0,4731	0	0,3974
$A0$	0	0,5715	0
$A1$	0	0,2514	0
$SH0$	0,3430	0	0,3792
$SH1$	0	0,2350	0

Cuadro 4.2. Coeficientes de participación $\alpha^{(j,m)}$ para el Caso No Axisimétrico ($z = h$, $\theta = 0$).

Caso No Axisimétrico ($m = 1$)

- Cuando en la cavidad cilíndrica imponemos una fuerza prescrita consistente en una fuerza unidad según la coordenada radial, mientras que para el resto de coordenadas la fuerza es nula (ec. (4.17)), los modos que se generan en la placa son sólo modos Si, con $i = 0, 1, 2, ..$ y modos SHj, con $j = 0, 2, 4, ..$ (j par), no generándose modos A. La representación de las deformadas de los modos $S0$ y $SH0$, generados por la fuerza impuesta dada por la ec. (4.17), para $m = 1$ se muestra en la Figuras 4.5 y 4.6, respectivamente.

- Cuando en la cavidad cilíndrica imponemos una fuerza prescrita consistente en una fuerza unidad según la coordenada axial, mientras que para el resto de coordenadas la fuerza es nula (ec. (4.18)), los modos que se generan en la placa son sólo modos Ai, con $i = 0, 1, 2, ..$ y modos SHj, con $j = 1, 3, 5, ..$ (j impar), no generándose modos S. La representación de las deformadas de los modos $A0$ y $SH1$, generados por la fuerza impuesta dada por la ec. (4.18), para $m = 1$ se muestra en las Figuras 4.7 y 4.8, respectivamente.

- Cuando en la cavidad cilíndrica imponemos una fuerza prescrita consistente en una fuerza unidad según la coordenada circunferencial, mientras que para el resto de coordenadas la fuerza es nula (ec. (4.19)), los modos que se generan en la placa son sólo modos SHi y modos Si, con $i = 0, 1, 2, ..,$ no generándose modos A. La representación de las deformadas de los modos $SH0$ y $S0$, generados por la fuerza impuesta dada por la ec. (4.19), para $m = 1$ se muestra en las Figuras 4.9 y 4.10, respectivamente.

Para $m \neq 0$, los desplazamientos de los modos de Lamb y SH pasan a estar

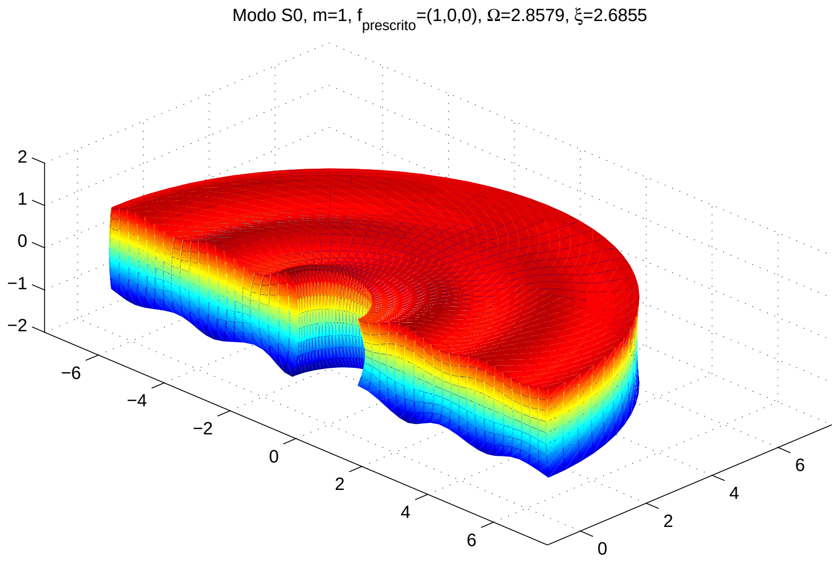


Figura 4.5. Onda S0 generada por una fuerza radial unidad, para $m = 1$.

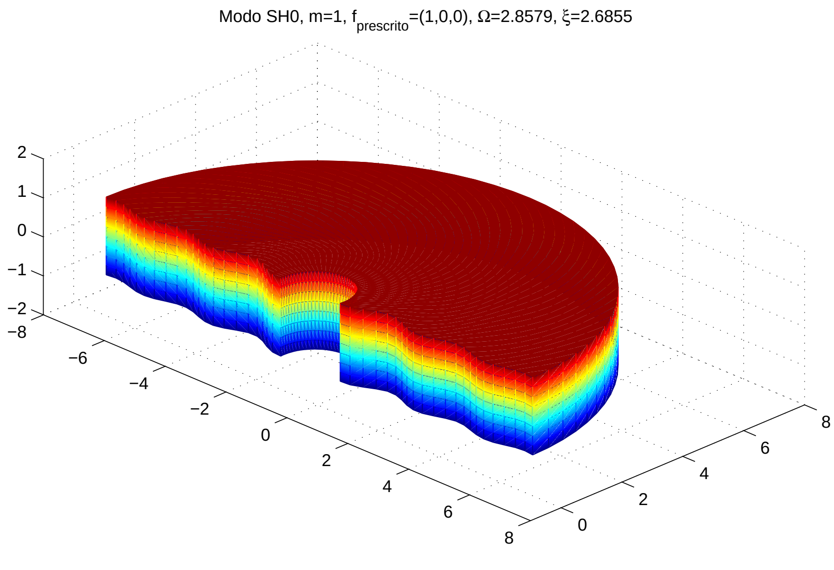


Figura 4.6. Onda SH0 generada por una fuerza radial unidad, para $m = 1$.

acoplados porque todos ellos producen desplazamientos radiales y circunferenciales (ver ecs. (2.189) a (2.194)).

Al prescribir cualquiera de las tres fuerzas en el agujero, se generarán todos los modos del espectro. Sin embargo, si las condiciones de contorno aplicadas son simétricas respecto al plano medio de la placa, sólo se generarán modos simétricos (Si o SHi, con i par). De igual forma sucede para las condiciones de contorno antisimétricas, con las que sólo se generarán modos antisimétricos (Ai o SHi, con i impar).

Como puede constatarse, todos los resultados numéricos obtenidos en este proyecto reproducen con precisión las predicciones técnicas descritas anteriormente:

- para $m = 0$, una fuerza radial en el agujero sólo genera modos Si, una fuerza axial en el agujero sólo genera modos Ai, y una fuerza circunferencial en el agujero sólo genera modos SHi.

- para cualquier valor de m, una fuerza prescrita simétrica respecto al plano medio de la placa sólo genera modos guiados simétricos, mientras que una fuerza prescrita antisimétrica respecto al plano medio de la placa sólo genera modos guiados antisimétricos.

4.3.2. Principio de superposición modal

Según vimos al estudiar el desarrollo en modos normales, la solución elastodinámica en una placa podía expresarse como una combinación lineal de los modos de propagación de la placa de forma que sólo se incluían aquellos modos que satisfacieran la condición de radiación. Por tanto, una onda que viaja por el interior de una placa puede hacerlo según diferentes modos de propagación, los cuales llevan a su vez asociados un determinado número de onda. Estos modos conforman la onda completa y están baremados según los denominados coeficientes de participación modal.

Así, una onda propagándose en la placa puede ser expresada como suma de todos los modos que se propagan en la misma afectados cada uno de ellos por su correspondiente coeficiente de participación. Este concepto recibe el nombre de superposición modal y vamos a mostrarlo gráficamente para un caso concreto de la propagación de ondas cilíndricas: caso de ondas S axisimétricas (modos de Lamb simétricos con $m = 0$). El principio de superposición modal viene definido por la ec. (3.266).

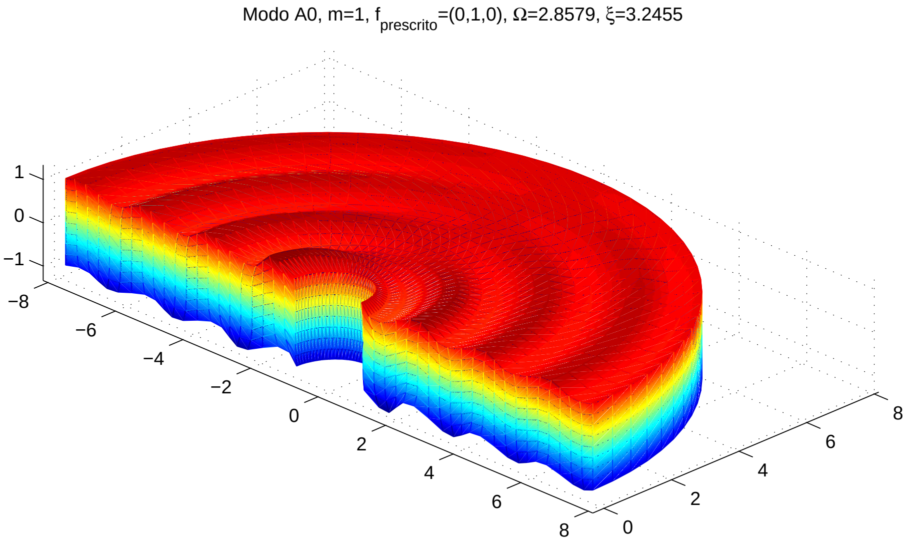


Figura 4.7. Onda A0 generada por una fuerza axial unidad, para $m = 1$.

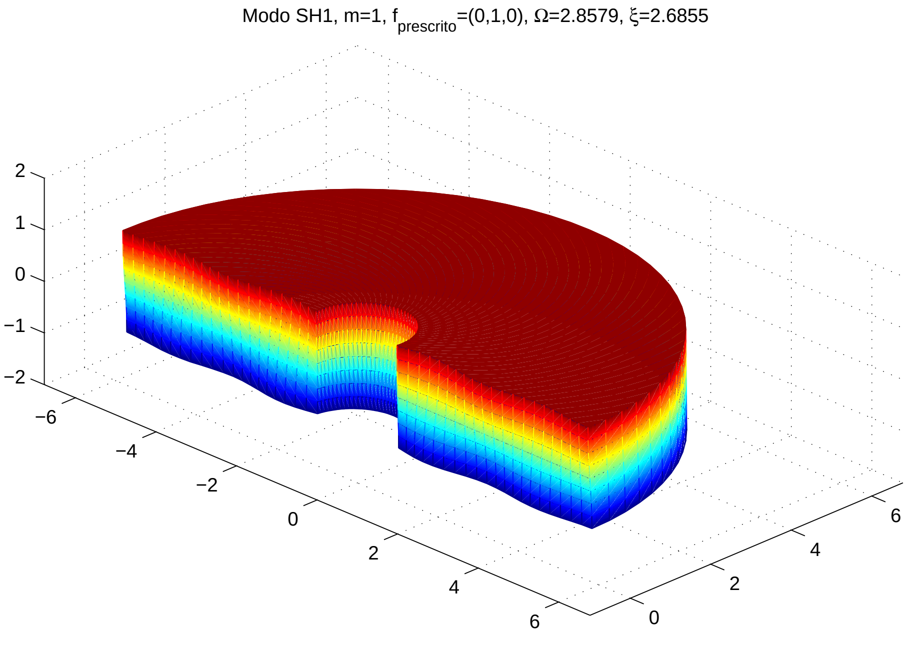


Figura 4.8. Onda SH1 generada por una fuerza axial unidad, para $m = 1$.

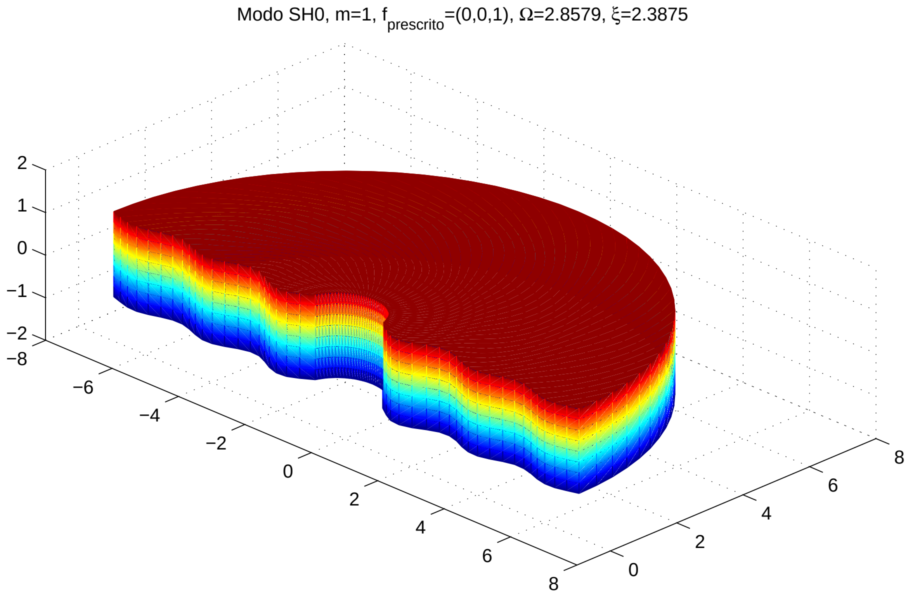


Figura 4.9. Onda SH0 generada por una fuerza circunferencial unidad, para $m = 1$.

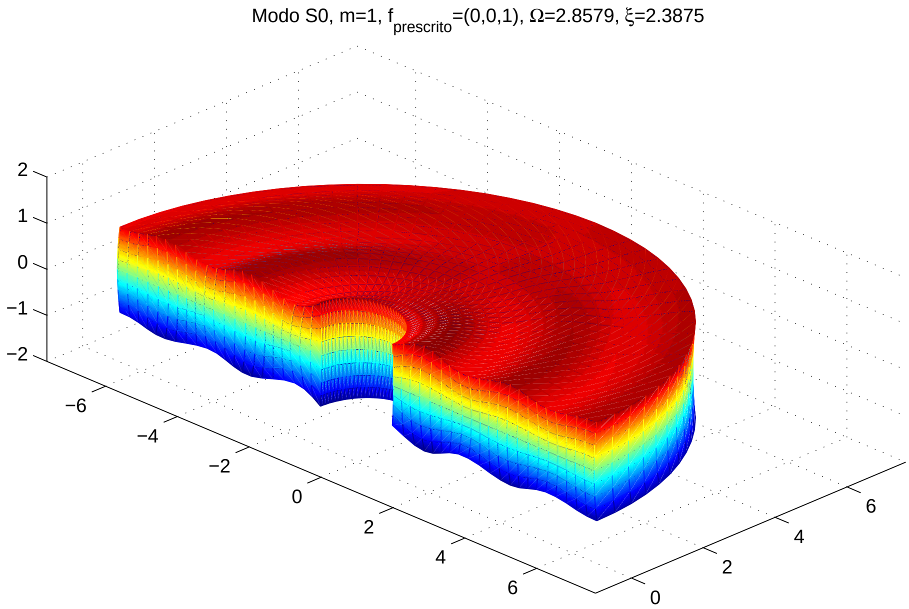


Figura 4.10. Onda S0 generada por una fuerza circunferencial unidad, para $m = 1$.

Un caso axisimétrico implica tomar un valor para el coeficiente del desarrollo de Fourier del tipo $m = 0$, y para generar ondas S en nuestra placa de estudio vamos a aplicar una fuerza radial uniforme ($u_r = 1$, $u_z = u_\theta = 0$) en el borde interior del agujero ($r = a = h$) de dicha placa. Debido a que existen un gran número de modos de propagación del tipo considerado, nos centraremos en aquellos más significativos desde el punto de vista de su contribución a la solución completa del problema de propagación en la placa.

Como comentamos anteriormente, al realizar la superposición modal con el MEF se incluyen todos los modos existentes en la placa (Si, Ai, SHi tanto reales como evanescentes). No obstante, para ilustrar la superposición sólo se han considerdo los modos simétricos ($S0$, $S1$, $S2$, ..., Sn), siendo las deformadas de los modos más significativos las representadas en las Figuras 4.11 y 4.12. Como puede observarse, la contribución del modo evanescente $S2$, así como del resto de los modos no representados, es prácticamente inapreciable salvo en zonas próximas al borde de la cavidad cilíndrica. El resultado de la superposición de dichos modos aparece en la Figura 4.13, donde se comprueba cómo, al considerar la superposición de todos los modos S, la deformada resultante de cumple la condición de contorno impuesta en el agujero: $u_r(a) = 1$.

4.4. Comparación de resultados para el problema de Generación

Una vez obtenidos los resultados analíticos y numéricos del campo de tensiones para el caso de generación de ondas en una placa desde una cavidad cilíndrica, vamos a comparar entre sí dichos resultados para cada uno de los casos estudiados en este capítulo.

Debemos recordar que al calcular el campo de tensiones de forma analítica transformamos nuestro problema de deformación plana en uno de tensión plana, puesto que las condiciones de fuerzas prescritas a las que se ve sometida nuestra placa hacen que, para el caso de frecuencias bajas, dicha placa se comporte como sometida a un estado de tensión plana. Esta asimilación de problemas para bajas frecuencias sólo nos permite comparar los resultados en los casos de fuerza prescrita radial y circunferencial, ya que el caso de fuerza axial (según la coordenada z) se inclumplen las condiciones de un problema tensión plana. Consideraremos para las comparaciones un valor de la frecuencia muy por debajo de la frecuencia de corte más baja: $\Omega = 0{,}28579 << \Omega_{SH_1} = \frac{\pi}{2}$ (diez veces menor que la empleada para las representaciones de resultados en en apartado anterior).

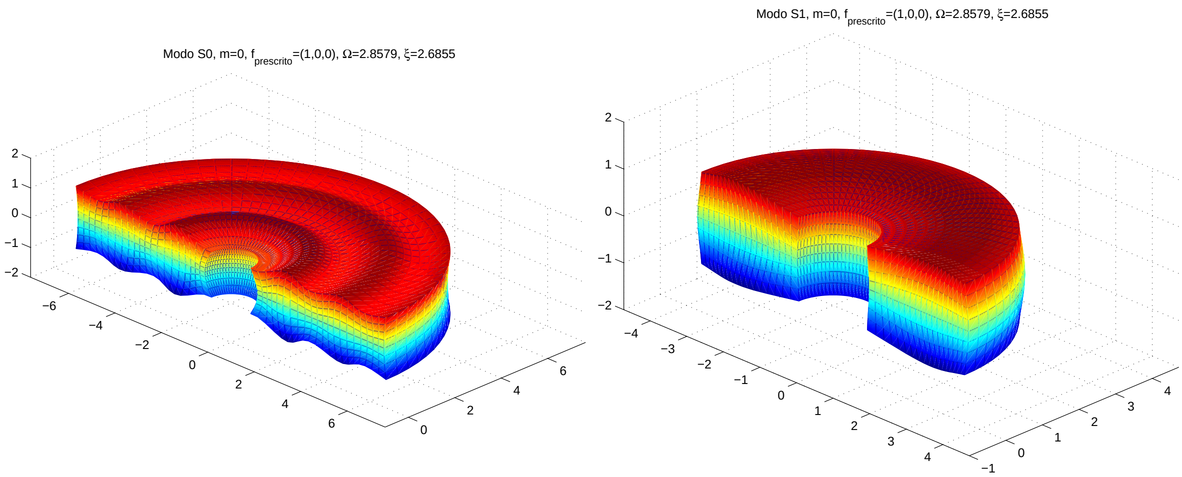


Figura 4.11. Deformadas de los modos $S0$ y $S1$, para $m = 0$ y fuerza prescrita $f_r(r = a) = 1$. Componentes simétricas.

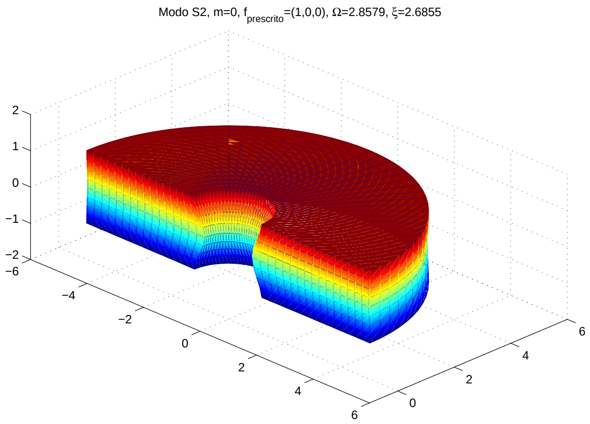


Figura 4.12. Deformada del modo $S2$, para $m = 0$ y fuerza prescrita $f_r(r = a) = 1$. Componentes simétricas.

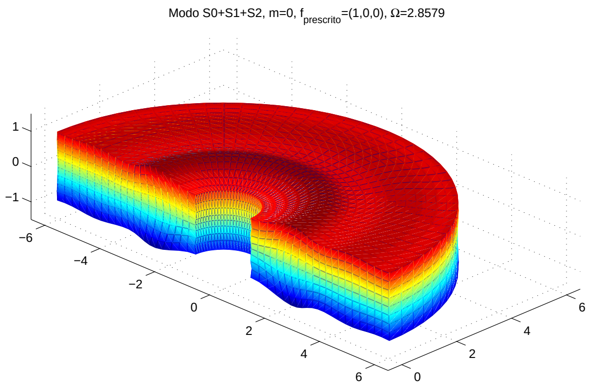


Figura 4.13. Deformada tras la superposición de los modos $S0$, $S1$, $S2$, ..., Sn cilíndricos, para $m = 0$ y fuerza prescrita $f_r(r = a) = 1$. Componentes simétricas.

Para discretizar el espesor de la placa se ha empleado 1 elemento cuadrático. Para el valor de frecuencia considerado existen 3 modos reales: $S0$, $A0$ y $SH0$, cuyos números de onda adimensionales $\xi^{(j)}$ están recogidos en el Cuadro 4.3.

Modo	$\xi^{(j)}$
$S0$	0,1751
$A0$	0,6002
$SH0$	0,2858
$A1$	$-0{,}4982i$

Cuadro 4.3. Números de onda de los modos significativos para $\Omega = 0{,}28579$.

Para valores bajos de frecuencia ($\omega \to 0$), ocurre que el modo $S0$ se comporta como la onda L^* (onda de compresión en tensión plana) y el modo $SH0$ como la onda T^* (onda de cortante en tensión plana). Si obtenemos las velocidades de propagación de dichas ondas en tensión plana resulta:

$$c_{L^*} = \frac{2c_L}{\kappa^2}\sqrt{\kappa^2 - 1} \tag{4.20}$$

$$c_{T^*} = c_T \tag{4.21}$$

y, al ser en este caso $\kappa = \frac{c_L}{c_T} = \sqrt{3}$, la expresión adimensional de dihas velocidades es:

$$\frac{c_{L^*}}{c_T} = 1{,}633 \tag{4.22}$$

$$\frac{c_{T^*}}{c_T} = 1 \tag{4.23}$$

Para comprobar que la frecuencia analizada es suficientemente baja, es necesario verificar que las velocidades de las ondas $SH0$ y $S0$ coinciden con las de las ondas T^* y L^*, respectivamente, para dicho valor de frecuencia. Como el modo $SH0$ no es dispersivo, se cumple automáticamente que:

$$\frac{c_{SH0}}{c_T} = 1 \tag{4.24}$$

valor que coincide con el de las ondas T^*. Para el modo $S0$ y $\Omega = 0{,}28579$, obtenemos un valor del númenro de onda de $\xi_{S0} = 0{,}1751$, luego:

$$\frac{c_{S0}}{c_T} = \frac{\Omega}{\xi_{S0}} = 1{,}63215 \tag{4.25}$$

valor que prácticamente coincide con el de las ondas L^*. Por tanto a la frecuencia considerada los modos $S0$ y $SH0$ aproximan muy bien a las ondas del problema de tensión plana.

El punto de trabajo para la frecuencia considerada en las comparaciones aparece representado en la Figura 4.14.

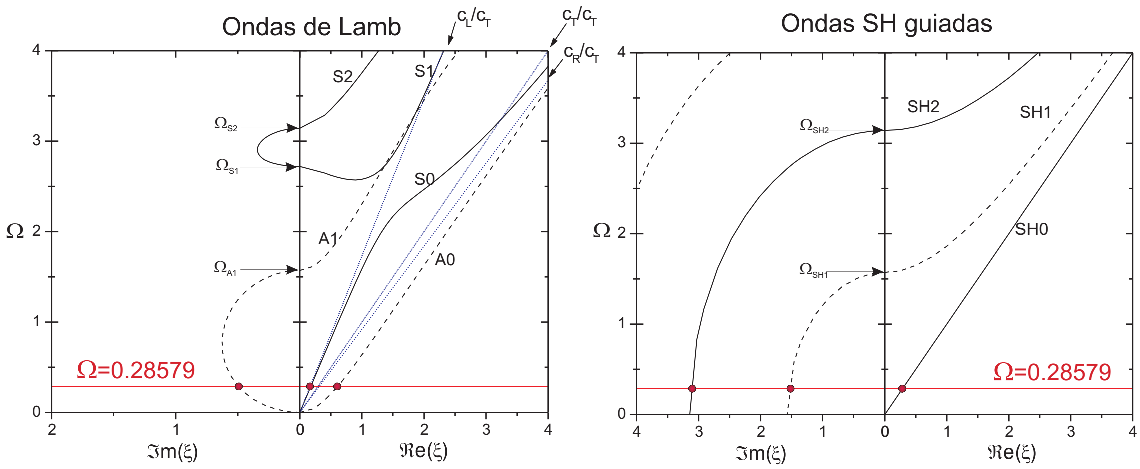


Figura 4.14. Punto de trabajo para $\Omega = 0{,}28579$.

4.4.1. Comparación para la fuerza radial

Vamos a comparar de forma gráfica los campos de desplazamientos obtenidos analítica y numéricamente, representando el primero con líneas contínuas y el segundo con puntos, para los casos de generación de ondas desde una cavidad cilíndrica cuando se aplica una fuerza prescrita $f = [1, 0, 0]^T$ en el borde interior. Dichas representaciones se han realizado considerando un valor bajo de la frecuencia ($\Omega = 0{,}28579$) y los resultados se muestran en las Figuras 4.15 y 4.16 para los casos axisimétrico ($m = 0$) y no axisimétrico ($m = 1$), respectivamente.

En las Figuras 4.15 y 4.16 se muestra cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenida por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados exactos (analíticos) en todo el rango de valores de r representado. A la vista de los resultados concluimos que, para los casos $m = 0, 1$ y baja frecuencia ($\Omega = 0{,}28579$), el método desarrollado en este proyecto proporciona resultados coincidentes con los teóricos.

4.4.2. Comparación para la fuerza circunferencial

Vamos a comparar de forma gráfica los campos de desplazamientos obtenidos analítica y numéricamente, representando el primero con líneas contínuas y el segundo con puntos, para los casos de generación de ondas desde una cavidad cilíndrica cuando se aplica una fuerza prescrita $f = [0, 0, 1]^T$ en el borde interior. Dichas representaciones se han realizado considerando un valor bajo de la frecuencia ($\Omega = 0{,}28579$) y los resultados de muestran en las Figuras 4.17 y 4.18 para los casos axisimétrico ($m = 0$) y no axisimétrico ($m = 1$), respectivamente.

En las Figuras 4.17 y 4.18 se muestra cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenido por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados exactos (analíticos) en todo el rango de valores de r representado. A la vista de los resultados concluimos que, para los casos $m = 0, 1$ y baja frecuencia ($\Omega = 0{,}28579$), el método desarrollado en este proyecto proporciona resultados coincidentes con los teóricos.

4.4.3. Comparación para la fuerza axial

Para el caso de bajas frecuencias, el problema de generación de ondas en la placa mediante la aplicación de una fuerza axial (cuya condición de contorno es $f_z(r = a) = 1$) puede asimilarse al cálculo de la deformada de una placa delgada sometida a flexión. Por ello podemos comparar el resultado numérico para la fuerza axial, que hemos obtenido mediante la aplicación del MEF, con el resultado analítico obtenido de la expresión de la flecha en la placa delgada cuando se le aplica una fuerza en el agujero. Al igual que en las comparaciones anteriores consideraremos tanto el caso axisimétrico como el caso no axisimétrico (donde de nuevo supondremos $m = 1$). En ambos casos la placa tendrá la misma tipología que en las comprobaciones anteriores, es decir, su espesor es $d = 2h$ y posee un agujero cilíndrico pasante de radio $r = a = h$.

Una vez obtenida la expresión analítica para el caso axisimétrico ($m = 0$) de la deformada de una placa delgada sometida a una fuerza axial unitaria en el borde de una cavidad cilíndrica (ec. (B.80)), podemos comparar gráficamente dicho resultado, para el caso de bajas frecuencias, con el obtenido numéricamente mediante el MEF para dicha fuerza. De dicha comparación se concluye que necesitamos reducir aún más la frecuencia considerada respecto a los casos de fuerza prescrita radial y circunferencial. En este caso las comparaciones que dan validez al método desarrollado se realizan para una frecuencia de valor $\Omega = 0{,}0028579$ (cien veces menor que la empleada para las comparaciones de los apartados anteriores).

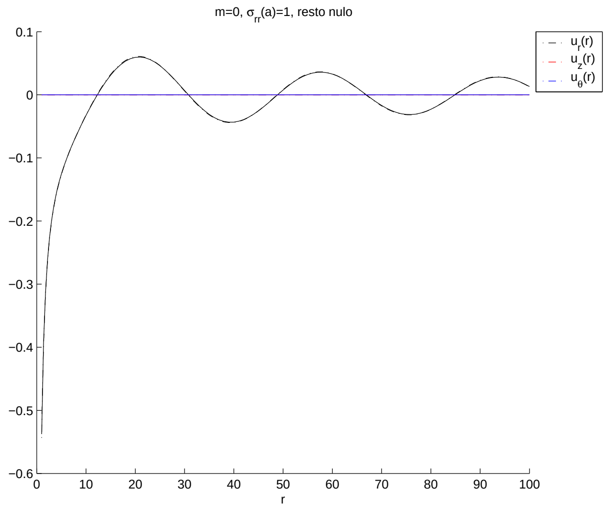


Figura 4.15. Campo de desplazamientos generado por una fuerza $f_r = 1$: comparación entre el MEF y la expresión analítica $[z = 0,\ \theta = 0]$. Caso de $m = 0$ y $\Omega = 0{,}28579$.

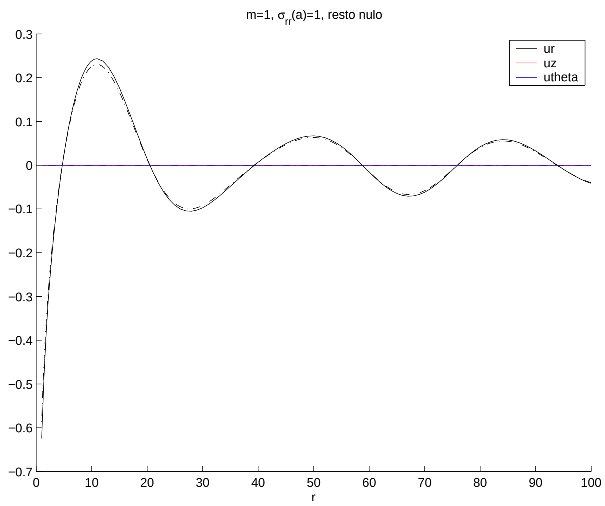


Figura 4.16. Campo de desplazamientos generado por una fuerza $f_r = 1$: comparación entre el MEF y la expresión analítica $[z = 0,\ \theta = 0]$. Caso de $m = 1$ y $\Omega = 0{,}28579$.

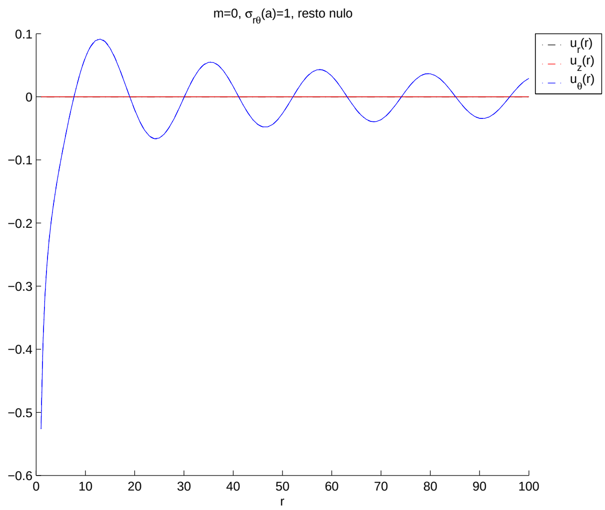


Figura 4.17. Campo de desplazamientos generado por una fuerza $f_\theta = 1$: comparación entre el MEF y la expresión analítica $[z = 0,\ \theta = 0]$. Caso de $m = 0$ y $\Omega = 0{,}28579$.

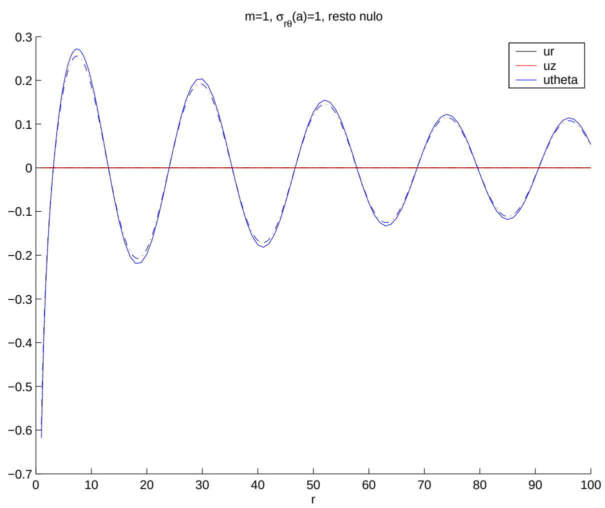


Figura 4.18. Campo de desplazamientos generado por una fuerza $f_\theta = 1$: comparación entre el MEF y la expresión analítica $[z = 0,\ \theta = 0]$. Caso de $m = 1$ y $\Omega = 0{,}28579$.

La razón de emplear una frecuencia aún menor se expone a continuación. En la teoría de placa delgada, las curvas de dispersión contienen 2 modos: uno real (con $k = \sqrt{\frac{\omega}{b}} = \chi$) y otro imaginario (con $k = i\sqrt{\frac{\omega}{b}} = i\chi$), que corresponden respectivamentes a los modos $A0$ y $A1$ de Lamb.

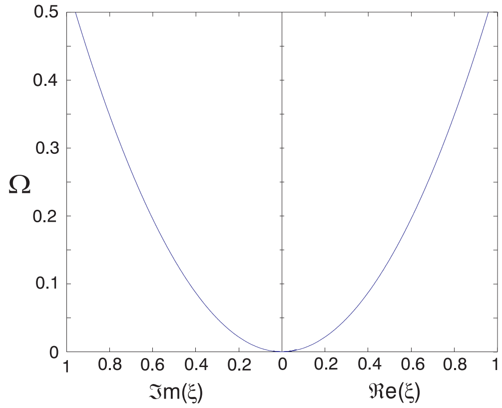


Figura 4.19. Espectro de frecuencia de ondas guiadas en una placa delgada ($\omega = \pm b|k|^2$).

Para obtener una buena aproximación de los resultados teóricos, es necesario reducir la frecuencia hasta que los números de onda de los modos $A0$ y $A1$ coincidan con los de la placa delgada, es decir, debe cumplirse:

$$|k_{A0}| \simeq |k_{A1}| = \sqrt{\frac{\omega}{b}} = \chi \tag{4.26}$$

$$k_{A1} \simeq ik_{A0} \tag{4.27}$$

Para conseguir ésto, ha sido necesario tomar un valor muy bajo de la frecuencia, $\Omega = 0{,}0028579$ (cien veces menor que la empleada para el caso de tensión plana). Para esta frecuencia los números de onda de los modos significativos aparecen recogidos en el Cuadro 4.4.

Modo	$\xi^{(j)}$
$S0$	0,0018
$A0$	0,0551
$SH0$	0,0029
$A1$	$-0{,}0550i$

Cuadro 4.4. Números de onda de los modos significativos para $\Omega = 0{,}0028579$.

Puede comprobarse que $|\xi_{A0}|$ y $|\xi_{A1}|$ prácticamente coinciden entre sí, y con el número de onda para la placa delgada:

$$\xi_{pd} = \chi \cdot h = \sqrt{\frac{\omega}{b}}\, h \;=\; 55{,}0569e{-}3 \tag{4.28}$$

El punto de trabajo para la frecuencia considerada en las comparaciones para el desplazamiento axial aparece representado en la Figura 4.20.

Por tanto, para el caso axisimétrico ($m = 0$), la comparación entre los resultados obtenidos analítica y numéricamente para el caso de generación de ondas desde una cavidad cilíndrica cuando se aplica un desplazamiento prescrito $u = [0, 0, 1]^T$, tomando un valor muy bajo de la frecuencia ($\Omega = 0{,}0028579$), se muestran en la Figura 4.21.

En la Figura 4.21 se observa cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenida por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados exactos (analíticos) en todo el rango de valores de r representado. Por tanto concluimos que para el caso $m = 0$ el método desarrollado en este proyecto proporciona resultados comparables con los de la teoría de flexión de placas delgadas.

Si consideramos un radio de agujero de valor $r = 10h$, la gráfica que se obtiene será la Figura 4.22

Por otro lado, para el caso no asiximétrico ($m \neq 0$) tomaremos de nuevo en las comparaciones el valor $m = 1$. Así, una vez obtenida la expresión analítica para el caso no axisimétrico de la deformada de una placa delgada sometida a un desplazamiento axial unitario en el borde de una cavidad cilíndrica (ec. (B.88)), podemos comparar gráficamente dicho resultado, para el caso de bajas frecuencias, con el obtenido numéricamente mediante el MEF para dicho desplazamiento. De nuevo se concluye que necesitamos reducir la frecuencia considerada respecto a los casos de desplazamiento prescrito radial y circunferencial ($\Omega = 0{,}0028579$), pero además vemos que es necesario aún realizar dos modificaciones más en el cálculo:

- el desplazamiento axial unitario prescrito en el agujero precisa considerar un cierto desplazamiento circunferencial que es lineal con z ($u_\theta \neq 0$). El cálculo del valor de dicho u_θ se recoge en el Apéndice B.

- para que los resultados numéricos y analíticos coincidan es necesario aumentar el radio de la cavidad cilíndrica a $r = 10h$ (diez veces mayor al considerado en los casos anteriores).

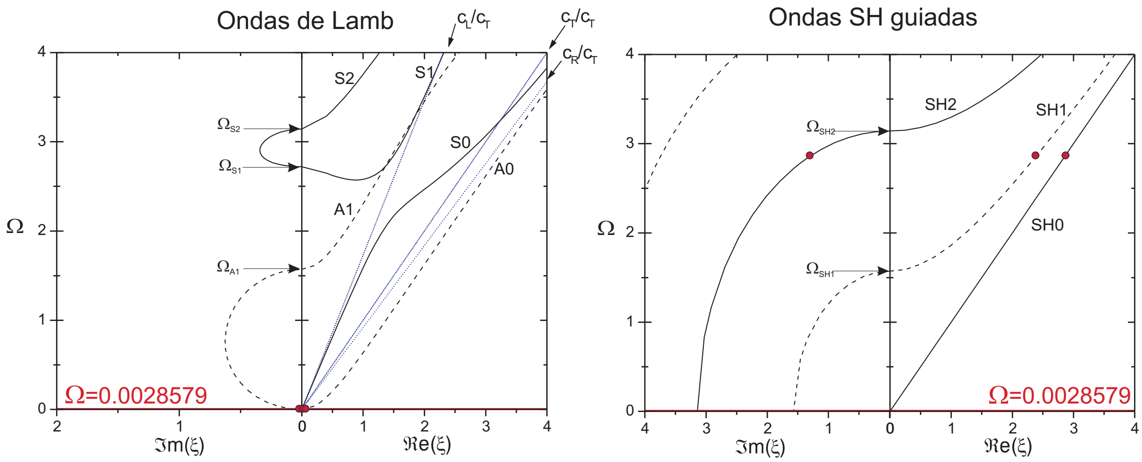


Figura 4.20. Punto de trabajo para $\Omega = 0{,}28579$.

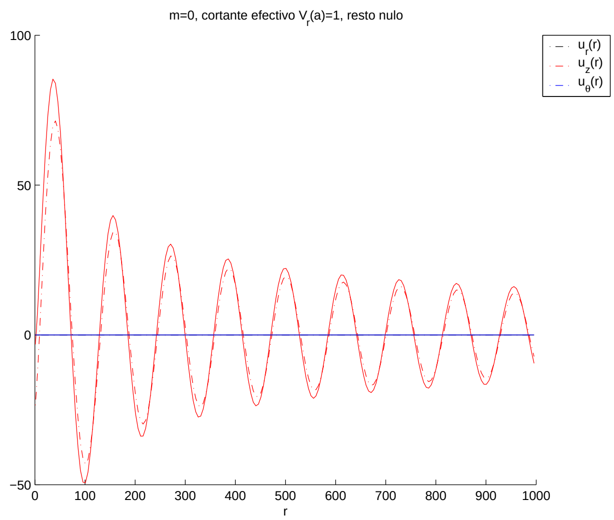


Figura 4.21. Campo de desplazamientos generado por un desplazamiento $u_z = 1$: comparación entre el MEF y la expresión analítica (placa delgada) $[z = 0,\ \theta = 0]$. Caso de $m = 0$ y $\Omega = 0{,}0028579$.

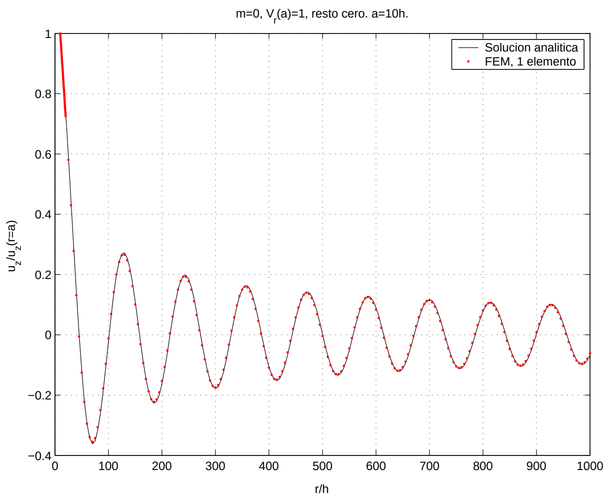


Figura 4.22. Campo de desplazamientos generado por un desplazamiento $u_z = 1$: comparación entre el MEF y la expresión analítica (placa delgada) $[z = 0,\ \theta = 0]$. Caso de $m = 0$, $r = 10h$ y $\Omega = 0{,}0028579$.

La explicación a esta nueva modificación de las condiciones de cálculo se expone a continuación. Para un agujero cilíndrico de radio $r = a = 1h$, como el que hasta ahora empleábamos en los apartados anteriores, se observa que la solución no cumple las hipótesis de Kirchhoff puesto que:

$$\left[\frac{du_r}{dr}\right]_{r=a} \neq 0 \tag{4.29}$$

a pesar de que se impone $u_z(r = a) = 0,\ \forall z$. En la Figura 4.24 se muestra la comparación entre los resultados analíticos y numéricos cuando se considera un agujero de radio $r = 1$, así como un detalle de los mismos en la zona del agujero.

Por lo tanto, cuando el radio es pequeño frente al espesor la deformación impuesa en el agujero provoca deformaciones por cortante no despreciables, luego la teoría de placas delgadas de Kirchhoff no es aplicable.

Así, para el caso no axisimétrico ($m = 1$), la comparación entre los resultados obtenidos analítica y numéricamente para el caso de generación de ondas desde una cavidad cilíndrica cuando se aplica un desplazamiento prescrito $u = [0, 1, u_\theta]^T$ (donde consideramos además un cierto desplazamiento circunferencial) y tomando una cavidad cilíndrica de radio $r = 10h$ y un valor de la frecuencia de $\Omega = 0{,}0028579$, se muestran en la Figura 4.24.

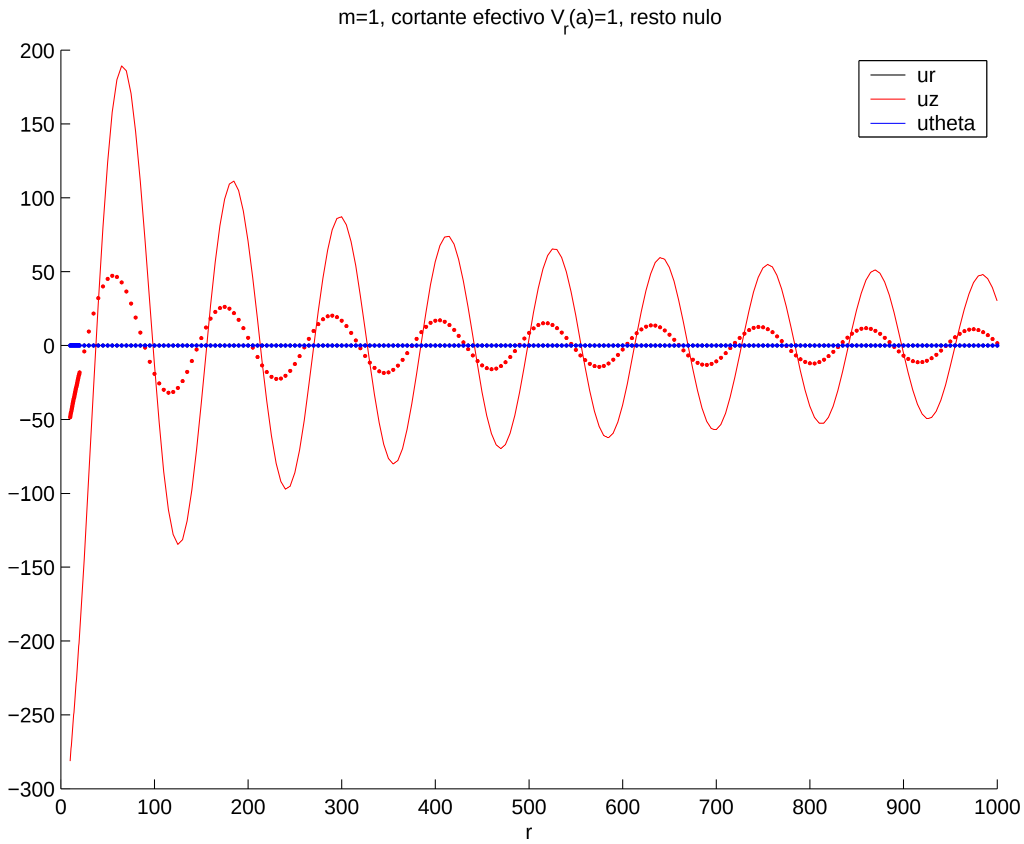
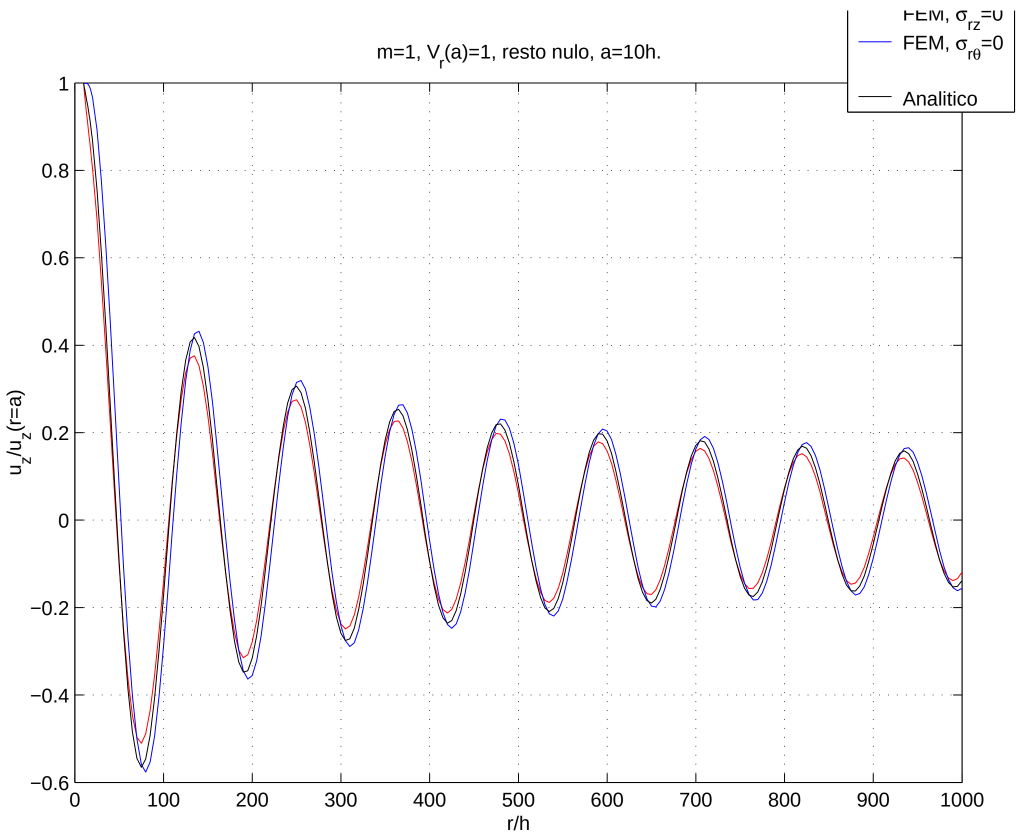


Figura 4.23. Campo de desplazamientos generado por un desplazamiento $u_z = 1$, con $r = 1h$: comparación entre el MEF y la expresión analítica (placa delgada) $[z = 0,\ \theta = 0]$. Caso de $m = 1$ y $\Omega = 0{,}0028579$.



En la figura anterior se muestra cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenida por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados exactos (analíticos) en todo el rango de valores de r representado (siendo también buena la aproximación realizada en las zonas cercanas al agujero de la placa).

Por tanto concluimos que, para el caso $m = 1$, el método desarrollado en este proyecto de resultados coincidentes con la teoría de flexión de placas delgadas para valores muy bajos de la frecuencia ($\Omega = 0{,}0028579$), aunque para ello ha sido necesario hacer algunas modificaciones en las condiciones de contorno para conseguir que las hipótesis de Kirchhoff se cumplieran en la placa elástica.

Capítulo 5

Difracción de Ondas Cilíndricas Guiadas

5.1. Introducción

En la presente sección se estudiará la respuesta que se produce en una placa elástica homogénea con un agujero cilíndrico pasante cuando a él le llega una onda plana incidente.

El problema a resolver es, por tanto, el siguiente: **??**

De donde obtenemos dos tipos de problemas a diferenciar, podemos tener el borde interior empotrado o bien el borede libre.

Como apoyo al estudio de estos problemas, en este capítulo se van a aplicar las técnicas numéricas desarrolladas previamente (Capítulo 3) para estudiar el problema de generación de ondas cilíndricas guiadas, además de lo que veremos en la siguiente sección referente a la onda incidente.

El campo de desplazamientos producido será calculado numéricamente para su posterior comparación con resultados analíticos extraidos de distintas fuentes bibliográficas.

5.2. Onda incidente

Si el origen de la onda está suficientemente lejos del agujero cilíndrico pasante que existe en la placa, es razonable admitir que los frentes de onda que llegan son planos, es decir, independientes de la coordenada y, y se propagan a través de la estructura en la forma de Rayleigh, Love u otro tipo de ondas planas.

Las componentes del movimiento pueden ser representadas por:

$$u_x = \widehat{u}_x e^{i(kx+\Omega t)} \tag{5.1}$$
$$u_y = \widehat{u}_y e^{i(kx+\Omega t)} \tag{5.2}$$
$$u_z = \widehat{u}_z e^{i(kx+\Omega t)} \tag{5.3}$$

donde Ω es la frecuencia, y k el número de onda de la onda considerada. Las amplitudes $\widehat{u}_x$, $\widehat{u}_y$, $\widehat{u}_z$ son generalmente complejas, teniendo así en cuenta posibles diferencias de fase, y además son también función de la profundidad z.

Una transformación de variables al sistema cilíndrico, dado por desplazamientos radiales, tangenciales y verticales, en un punto con coordenadas r, θ y z será:

$$u = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \tag{5.4}$$
$$v = -u_x \sin\theta + u_y \cos\theta \tag{5.5}$$
$$w = u_z \tag{5.6}$$

sustituyendo en ellas las ecuaciones (5.1) a (5.3), tenemos que:

$$u = (\widehat{u}_x \cos\theta + \widehat{u}_y \sin\theta)e^{i(kx+\Omega t)} \tag{5.7}$$
$$v = (-\widehat{u}_x \sin\theta + \widehat{u}_y \cos\theta)e^{i(kx+\Omega t)} \tag{5.8}$$
$$w = \widehat{u}_z e^{i(kx+\Omega t)} \tag{5.9}$$

Si hacemos un desarrollo en Serie de Fourier alrededor de $\theta = 0$:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty}[\widehat{u}_{ms}\cos(m\theta) + \widehat{u}_{ma}\sin(m\theta)] \tag{5.10}$$
$$v = \sum_{m=0}^{\infty}[\widehat{v}_{ms}\sin(m\theta) + \widehat{v}_{ma}\cos(m\theta)] \tag{5.11}$$
$$w = \sum_{m=0}^{\infty}[\widehat{w}_{ms}\cos(m\theta) + \widehat{w}_{ma}\sin(m\theta)] \tag{5.12}$$

Multiplicando por $\cos(m\theta)$, $\sin(m\theta)$ e integrando en un periodo omitiendo el factor $e^{i\Omega t}$, y definiendo $kx = kr\cos\theta$, $C_m = 1$ para $m \neq 0$ y $C_m = 1/2$ para $m = 0$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_{ms} &= \frac{C_m}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)(\widehat{u}_x\cos\theta+\widehat{u}_y\sin\theta)e^{ikr\cos\theta}d\theta && (5.13)\\
\widehat{u}_{ma} &= \frac{C_m}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(m\theta)(\widehat{u}_x\cos\theta+\widehat{u}_y\sin\theta)e^{ikr\cos\theta}d\theta && (5.14)\\
\widehat{v}_{ms} &= -\frac{C_m}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(m\theta)(-\widehat{u}_x\sin\theta+\widehat{u}_y\cos\theta)e^{ikr\cos\theta}d\theta && (5.15)\\
\widehat{v}_{ma} &= \frac{C_m}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)(-\widehat{u}_x\sin\theta+\widehat{u}_y\cos\theta)e^{ikr\cos\theta}d\theta && (5.16)\\
\widehat{w}_{ms} &= \frac{C_m}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)(\widehat{u}_z)e^{ikr\cos\theta}d\theta && (5.17)\\
\widehat{w}_{ma} &= \frac{C_m}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(m\theta)(\widehat{u}_z)e^{ikr\cos\theta}d\theta && (5.18)
\end{aligned}
$$

Usando las siguientes relaciones de transformación:

$$
\begin{aligned}
\cos(m\theta)\cos\theta &= \frac{1}{2}(\cos(m+1)\theta+\cos(m-1)\theta) && (5.19)\\
\sin(m\theta)\sin\theta &= \frac{1}{2}(\cos(m-1)\theta-\cos(m-1)\theta) && (5.20)\\
\sin(m\theta)\cos\theta &= \frac{1}{2}(\sin(m-1)\theta+\sin(m+1)\theta) && (5.21)\\
\cos(m\theta)\sin\theta &= \frac{1}{2}(\sin(m+1)\theta-\sin(m-1)\theta) && (5.22)
\end{aligned}
$$

y sabiendo que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)e^{iz\cos\theta}d\theta &= i^m J_m(z) && (5.23)\\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(m\theta)e^{iz\cos\theta}d\theta &= 0 && (5.24)\\
& && (5.25)
\end{aligned}
$$

donde $i = \sqrt(-1); z = complejo; J_m(z) = Funcionde Bessel$ obtenemos que las componentes simétricas y antisimétricas del desplazamiento serán:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_{ms} &= C_m i^{m-1}[J_{m-1}(kr)-J_{m+1}(kr)]\widehat{u}_x && (5.26)\\
\widehat{u}_{ma} &= C_m i^{m-1}[J_{m-1}(kr)+J_{m+1}(kr)]\widehat{u}_y && (5.27)\\
\widehat{v}_{ms} &= C_m i^{m-1}[J_{m-1}(kr)+J_{m+1}(kr)]\widehat{u}_x && (5.28)\\
\widehat{v}_{ma} &= C_m i^{m-1}[J_{m-1}(kr)-J_{m+1}(kr)]\widehat{u}_y && (5.29)\\
\widehat{w}_{ms} &= C_m 2i^m J_m(kr)\widehat{u}_z && (5.30)\\
\widehat{w}_{ms} &= 0 && (5.31)
\end{aligned}
$$

Usando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel, considerando $z = kr$:

$$\frac{dJ_m(z)}{dz} = \frac{1}{2}[J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)] \tag{5.32}$$

$$\frac{2mdJ_m(z)}{z} = J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) \tag{5.33}$$

$$\frac{dJ_m(kr)}{dr} = \frac{kdJ_m z}{dz} = \frac{k}{2}[J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)] \tag{5.34}$$

obtenemos que:

$$\widehat{u}_{ms} = 2C_m\widehat{u}_x\frac{i^{m-1}}{k}(\frac{dJ_m}{dr}) \tag{5.35}$$

$$\widehat{u}_{ma} = 2C_m\widehat{u}_y\frac{mi^{m-1}}{kr}J_m \tag{5.36}$$

$$\widehat{v}_{ms} = 2C_m\widehat{u}_x\frac{mi^{m-1}}{kr}J_m \tag{5.37}$$

$$\widehat{v}_{ma} = 2C_m\widehat{u}_y\frac{i^{m-1}}{k}(\frac{dJ_m}{dr}) \tag{5.38}$$

$$\widehat{w}_{ms} = 2C_m\widehat{u}_z i^m J_m \tag{5.39}$$

$$\widehat{w}_{ma} = 0 \tag{5.40}$$

Las ecuaciones (5.26) a (5.31) y las (5.35) a (5.40) describen el movimiento de un elemento en coordenadas r, θ, z.

5.3. Representación del problema de Difracción en 3D

A continuación, vamos a representar gráficamente los distintos modos de propagación que resultan al incidir una onda plana sobre la placa en estudio. Para ello vamos a hacer uso del MEF desarrollado en el Capítulo 3. Para los cálculos numéricos se ha empleado una placa de espesor $d = 2h = 2 \cdot 1$, con un agujero circular pasante de radio $r = a = h$, siendo la placa de un material elástico con las siguientes propiedades: densidad $\rho = 1$, coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}25$, velocidad de ondas longitudinales $c_L = \sqrt{3}\, mm/s$ y velocidad de ondas transversales $c_T = 1\, mm/s$.

En este proyecto se van a analizar los siguientes casos:

- Borde empotrado:

   - Onda S0 incidente
   - Onda A0 incidente
   - Onda SH0 incidente

- Borde libre:
   - Onda S0 incidente
   - Onda A0 incidente
   - Onda SH0 incidente

En todos los casos estudiados en este apartado, la frecuencia de cálculo será $\Omega = 2,8579$ y las ondas cilíndricas se propagarán hacia $r \rightarrow +\infty$ (para mostrar de forma clara la propagación de cada onda se ha representado sólo una placa semicircular, $\theta \in [0, \pi]$). Para el valor de frecuencia considerado existen 6 modos reales: $S0$, $S1$, $A0$, $A1$, $SH0$ y $SH1$, y para discretizar el espesor de la placa se han empleado tantos elementos cuadráticos como son necesarios según lo obtenido por el criterio de mallado.

5.3.1. Estructura Modal de Ondas Difractadas en una placa sometida a una Onda Plana Incidente

En este apartado se representarán las estructuras modales de los desplazamientos que se producirán en la placa para los distintos tipos de ondas incidentes.

Los resultados numéricos obtenidos para los casos borde empotrado y borde libre, tomando como valóres de cálculo $z = 0$ y $\theta = 0$ se recogen en los cuadros de los apartados siguientes, en los que se detallan los valores de los coeficientes de participación modal para cada uno de los casos considerados.

Caso borde empotrado

- Cuando sobre la placa en estudio incide una onda plana SH0, los modos que se generan en la placa son modos SH_i y S_i, con $i = 0, 1, 2, ...$

  La representación de la deformada de los modos SHi y Si, generada por la acción de la onda incidente SH0 se muestraen la figura 5.1

- Cuando sobre la placa en estudio incide una onda plana A0, los modos que se generan en la placa son modos SH_i y A_i, con $i = 0, 1, 2, ...$

  La representación de la deformada de los modos SHi y Ai, generada por la acción de la onda incidente A0 se muestraen la figura 5.2

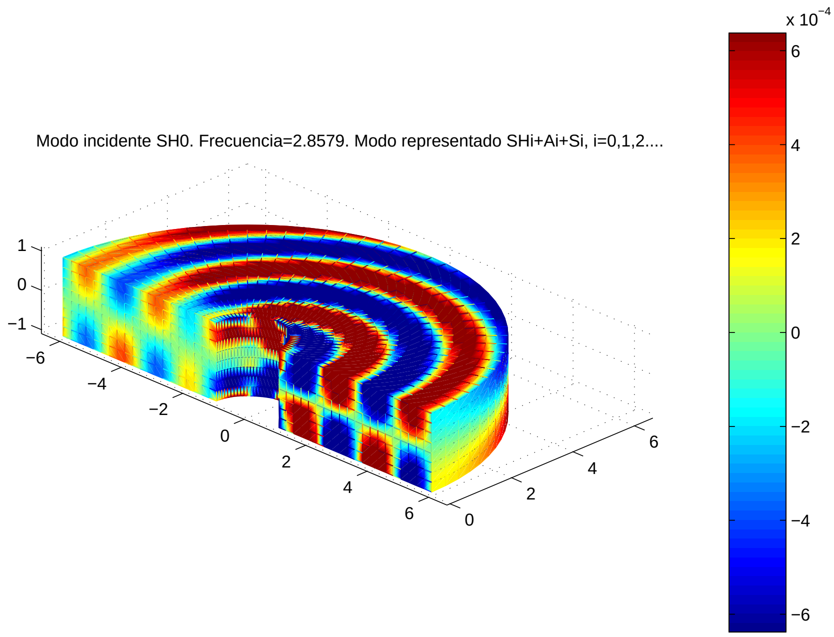


Figura 5.1. Onda generada por una onda incidente SH0.

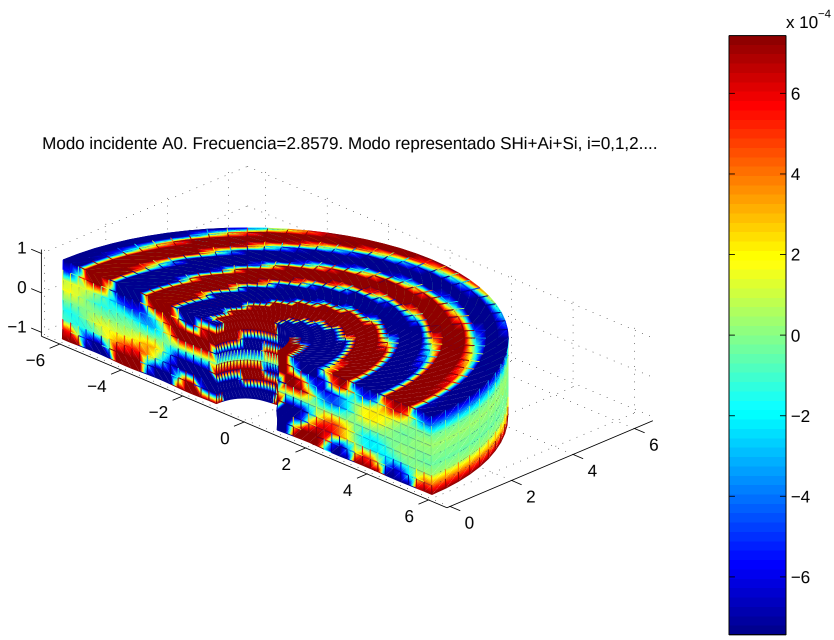


Figura 5.2. Onda generada por una onda incidente A0.

Modos	$Coeficientem$				
	0	1	2	3	4
$SH0$	0,2063	3,6796	0,3062	0,0033	0
$SH1$	0	0	0	0	0
$SH2$	0	0,1198	0,0489	0,0032	0,0001
$A0$	0	0	0	0	0
$A1$	0	0	0	0	0
$A2$	0	0	0	0	0
$S0$	0	1,6160	0,0819	0,0005	0
$S1$	0	0,6121	0,2345	0,0172	0,0005
$S2$	0	0,6288	0,2345	0,0172	0,0005

Cuadro 5.1. Coeficientes de participación $\alpha^{(j,m)}$ para el Caso Borde Empotrado, onda SH0 incidente ($z = h$, $\theta = 0$).

- Cuando sobre la placa en estudio incide una onda plana S0, los modos que se generan en la placa son modos SH_i y S_i, con $i = 0, 1, 2, ...$

  La representación de la deformada de los modos SHi y Si, generada por la acción de la onda incidente S0 se muestra en la figura 5.3

Caso borde libre

- Cuando sobre la placa en estudio incide una onda plana SH0, los modos que se generan en la placa son modos SH_i y S_i, con $i = 0, 1, 2, ...$

  La representación de la deformada de los modos SHi y Si, generada por la acción de la onda incidente SH0 sobre un borde libre se muestra en la figura 5.4

- Cuando sobre la placa en estudio incide una onda plana A0, los modos que se generan en la placa son modos SH_i y A_i, con $i = 0, 1, 2, ...$

  La representación de la deformada de los modos SHi y Ai, generada por la acción de la onda incidente A0 sobre borde libre se muestra en la figura 5.5

- Cuando sobre la placa en estudio incide una onda plana S0, los modos que se generan en la placa son modos SH_i y S_i, con $i = 0, 1, 2, ...$

  La representación de la deformada de los modos SHi y Si, generada por la acción de la onda incidente S0 sobre un borde libre se muestra en la figura 5.6

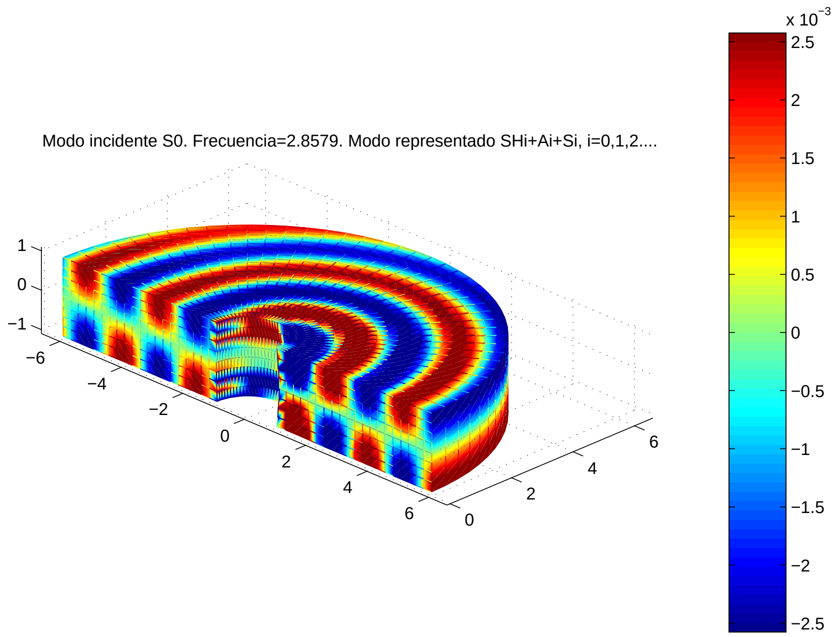


Figura 5.3. Onda generada por una onda incidente S0.

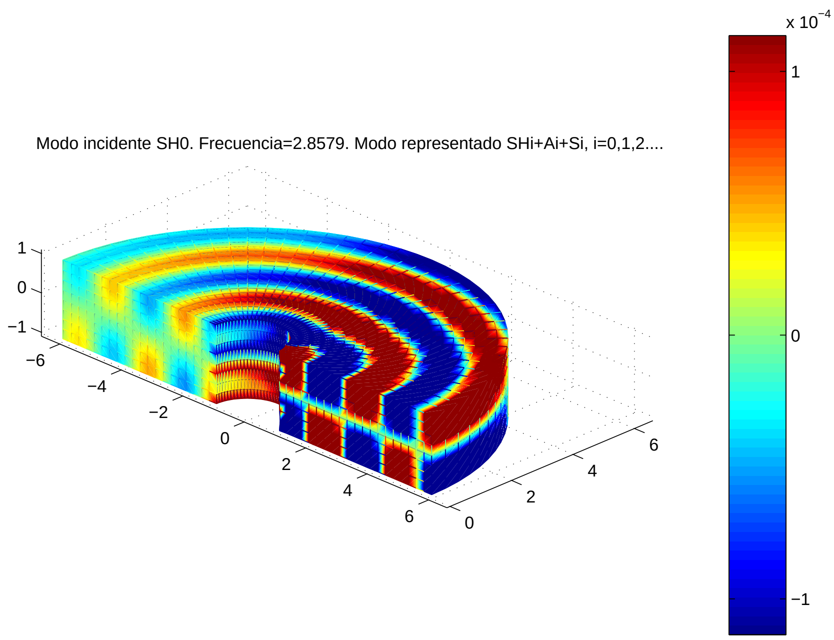


Figura 5.4. Onda generada por una onda incidente SH0.

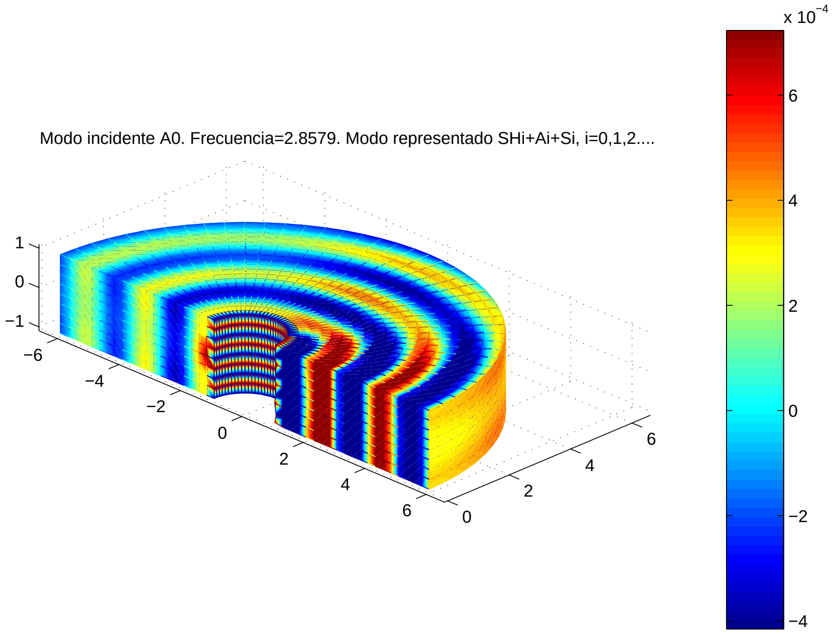


Figura 5.5. Onda generada por una onda incidente A0.

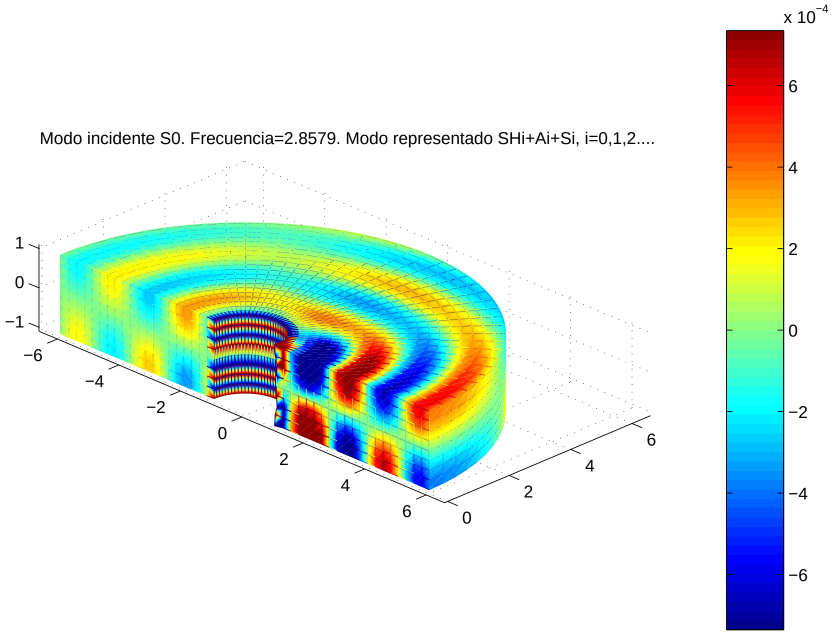


Figura 5.6. Onda generada por una onda incidente S0.

Modos	$Coeficientem$						
	0	1	2	3	4	5	6
$SH0$	0	0	0	0	0	0	0
$SH1$	0	3,0790	0,9598	0,0843	0,0031	0,0001	0
$SH2$	0	0	0	0	0	0	0
$A0$	1,8653	1,2407	0,1642	0,0060	0,0001	0	0
$A1$	2,5227	1,0177	0,1616	0,0048	0,0001	0	0
$A2$	138,2659	92,9878	54,1888	9,2533	0,7853	0,0407	0,0014
$S0$	0	0	0	0	0	0	0
$S1$	0	0	0	0	0	0	0
$S2$	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 5.2. Coeficientes de participación $\alpha^{(j,m)}$ para el Caso Borde Empotrado, onda A0 incidente ($z = h$, $\theta = 0$).

5.4. Comparación de resultados para el problema de difracción

Una vez obtenidos los resultados analíticos y numéricos del campo de desplazamientos para el caso de difracción de ondas en una placa con agujero pasante, vamos a comparar entre sí dichos resultados para cada uno de los casos estudiados en este capítulo.

Para las comparaciones consideraremos un valor de la frecuencia muy por debajo de la frecuencia de corte mas baja: $\Omega = 0{,}28579 << \Omega_{SH_1} = \frac{\pi}{2}$ (diez veces menor que la empleada para las representaciones de resultados en en apartado anterior). Para discretizar el espesor de la placa se ha usado un elemento cuadrático. Para el valor de la frecuencia considerado existen tres modos reales: $S0$, $A0$ y $SH0$, cuyos números de onda adimensionales $\xi^{(j)}$ están recogidos en el Cuadro 5.7.

Para valores bajos de frecuencia ($\omega \to 0$), ocurre que para radios lo suficientemente pequeños podemos realizar una comparación con el problema de generación. Como sabemos $\lambda = 2\pi/\xi$ y por lo tanto, para valores del radio pequeños ocurre que $D <<< \lambda$ por lo que la comparación resulta efectiva. En el caso de difracción sobre agujero con borde empotrado la comparación pertinente sería con el problema de generación caso de desplazmientos prescritos. Por su parte, el problema de difracción sobre borde libre lo compararemos con el de generación caso fuerzas prescritas.

Modos	*Coeficientem*				
	0	1	2	3	4
$SH0$	0	5,2595	0,2666	0,0018	0
$SH1$	0	0	0	0	0
$SH2$	0	0,1456	0,0363	0,0015	0
$A0$	0	0	0	0	0
$A1$	0	0	0	0	0
$A2$	0	0	0	0	0
$S0$	0,1324	2,3126	0,0713	0,0003	0
$S1$	0,6450	0,8331	0,2046	0,0092	0,0002
$S2$	0,6450	0,8421	0,2064	0,0092	0,0002

Cuadro 5.3. Coeficientes de participación $\alpha^{(j,m)}$ para el Caso Borde Empotrado, onda S0 incidente ($z = h$, $\theta = 0$).

5.4.1. Borde empotrado

Comparación onda SH0 incidente

Vamos a comparar de forma gráfica los campos de desplazamientos obtenidos numéricamente con los obtenidos por el problema de generación con desplazamientos prescritos $u_\theta = [0, 0, 1]$ para $m = 1$ y valores del radio $r = 1/20$. Representaremos el primero con líneas contínuas y el segundo con puntos, para el caso de difracción de ondas sobre una placa con un agujero cuando sobre ella incide una onda $SH0$. Dichas representaciones se han realizado considerando un valor bajo de la frecuencia ($\Omega = 0{,}28579$) y los resultados se muestran en la Figura 5.7

En la Figura 5.7 se muestra cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenida por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados del problema de generación en todo el rango de valores de r representado. A la vista de los resultados concluimos que, para la frecuencia considerada ($\Omega = 0{,}28579$), el método desarrollado en este proyecto proporciona resultados coincidentes con los teóricos.

Comparación onda A0 incidente

Vamos a comparar de forma gráfica los campos de desplazamientos obtenidos numéricamente con los obtenidos por el problema de generación con desplazamientos prescritos $u_z = [0, 1, 0]$ para $m = 0$ y valores del radio $r = 1/20$. Representaremos el primero con líneas contínuas y el segundo con puntos, para

Modos	*Coeficientem*							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$SH0$	0,7944	1,3029	0,5943	0,1057	0,0044	0,0001	0	0
$SH1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$SH2$	4,5187	7,6608	4,5043	2,1711	0,7505	0,1355	0,0146	0,0010
$A0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$A1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$A2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$S0$	0	0,6552	0,1622	0,0172	0,0004	0	0	0
$S1$	0	0,5956	2,5686	1,6905	0,4122	0,0509	0,0037	0,0002
$S2$	0	1,0569	1,8226	1,3857	0,3673	0,0473	0,0036	0,002

Cuadro 5.4. Coeficientes de participación $\alpha^{(j,m)}$ para el Caso Borde Libre, onda SH0 incidente ($z = h$, $\theta = 0$).

el caso de difracción de ondas sobre una placa con un agujero cuando sobre ella incide una onda $SH0$. Dichas representaciones se han realizado considerando un valor bajo de la frecuencia ($\Omega = 0{,}0028579$) y los resultados se muestran en la Figura 5.8

En la Figura 5.8 se muestra cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenida por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados del problema de generación en todo el rango de valores de r representado. A la vista de los resultados concluimos que, para la frecuencia considerada ($\Omega = 0{,}0028579$), el método desarrollado en este proyecto proporciona resultados coincidentes con los teóricos.

Comparación onda S0 incidente

Vamos a comparar de forma gráfica los campos de desplazamientos obtenidos numéricamente con los obtenidos por el problema de generación con desplazamientos prescritos $u_r = [1, 0, 0]$ para $m = 1$ y valores del radio $r = 1/20$. Representaremos el primero con líneas contínuas y el segundo con puntos, para el caso de difracción de ondas sobre una placa con un agujero cuando sobre ella incide una onda $SH0$. Dichas representaciones se han realizado considerando un valor bajo de la frecuencia ($\Omega = 0{,}28579$) y los resultados se muestran en la Figura 5.9

En la Figura 5.9 se muestra cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenida por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados del

Modos	$Coeficientem$							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$SH0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$SH1$	0	0,9623	1,7159	0,4182	0,0552	0,0045	0,0002	0
$SH2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$A0$	0,0444	0,5162	0,2418	0,0288	0,0014	0	0	0
$A1$	0,2018	0,6069	0,0542	0,0061	0,0006	0	0	0
$A2$	153,2044	522,5771	902,2647	376,1952	83,7661	12,0336	1,2258	0,0940
$S0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$S1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$S2$	0	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 5.5. Coeficientes de participación $\alpha^{(j,m)}$ para el Caso Borde Libre, onda A0 incidente ($z = h$, $\theta = 0$).

problema de generación en todo el rango de valores de r representado. A la vista de los resultados concluimos que, para la frecuencia considerada ($\Omega = 0{,}28579$), el método desarrollado en este proyecto proporciona resultados coincidentes con los teóricos.

Para este modo en cuestión realizaremos además una segunda comparación. Vamos a comparar de forma gráfica los campos de desplazamientos obtenidos analítica y numéricamente, representando el primero con líneas contínuas y el segundo con puntos, para los casos de difración sobre una placa cuando sobre ella incide una onda plana $S0$. Dichas representaciones se han realizado considerando un valor bajo de la frecuencia ($\Omega = 0{,}28579$) y para distintos valores del radio del agujero. Los resultados se muestran en la Figura 5.10

En dicha figura se muestra cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenida por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados exactos (analíticos) en todo el rango de valores de r representado. A la vista de los resultados concluimos que el método desarrollado en este proyecto proporciona resultados coincidentes con los teóricos.

5.4.2. Borde libre

Comparación onda S0 incidente

Vamos a comparar de forma gráfica los campos de desplazamientos obtenidos analítica y numéricamente, para los casos de difración sobre una placa con agujero libre cuando sobre ella incide una onda plana $S0$. Dichas representaciones se han realizado considerando un valor bajo de la frecuencia ($\Omega = 0{,}28579$).

Modos	$Coeficientem$							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$SH0$	0	5,7164	1,7604	0,1490	0,0058	0,0001	0	0
$SH1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$SH2$	0	4,8444	4,1994	3,5544	1,1800	0,2039	0,0214	0,0015
$A0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$A1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$A2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$S0$	0,7399	2,2979	0,4559	0,0244	0,0006	0	0	0
$S1$	3,8373	16,7693	7,8737	1,7503	0,3973	0,0557	0,0044	0,0002
$S2$	3,6801	15,5717	8,4229	2,3326	0,4869	0,0620	0,0047	0,0002

Cuadro 5.6. Coeficientes de participación $\alpha^{(j,m)}$ para el Caso Borde Libre, onda S0 incidente ($z = h$, $\theta = 0$).

Modo	$\xi^{(j)}$
$S0$	0,1751
$A0$	0,6002
$SH0$	0,2858

Cuadro 5.7. Números de onda de los modos significativos para $\Omega = 0{,}28579$.

Los resultados se muestran en la Figura 5.11

Si erealizamos la misma comparación para distintos valores del radio obtenemos los resultados que se muestran en la Figura 5.12

En dicha figura se muestra cómo la aproximación del campo de desplazamientos obtenida por EF (resultados numéricos) coincide con los resultados exactos (analíticos) en todo el rango de valores de r representado. A la vista de los resultados concluimos que el método desarrollado en este proyecto proporciona resultados coincidentes con los teóricos.

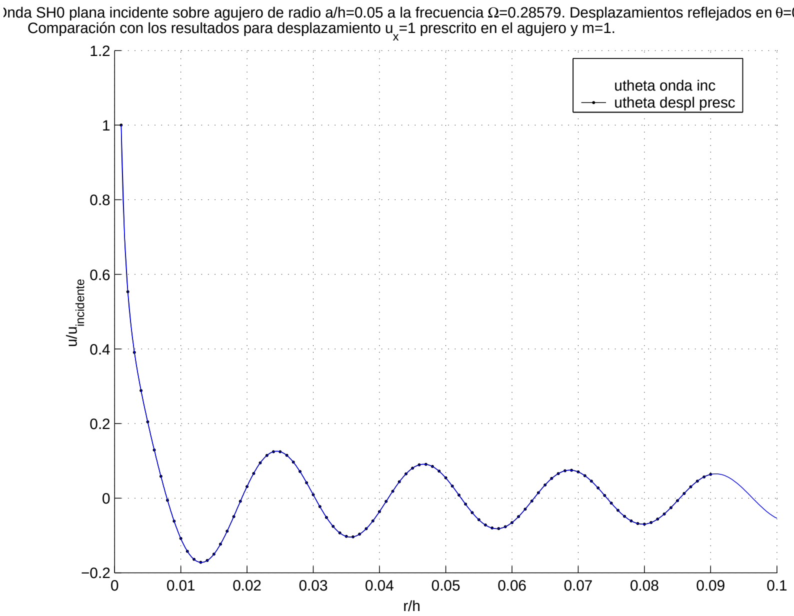


Figura 5.7. Campo de desplazamientos generado por una onda SH0 incidente sobre una placa con borde empotrado: Comparación entre el MEF y los resultados obtenidos para el problema de generación caso de desplazamientos $u_\theta = 1$, $m = 1$, $\omega = 0{,}28579$

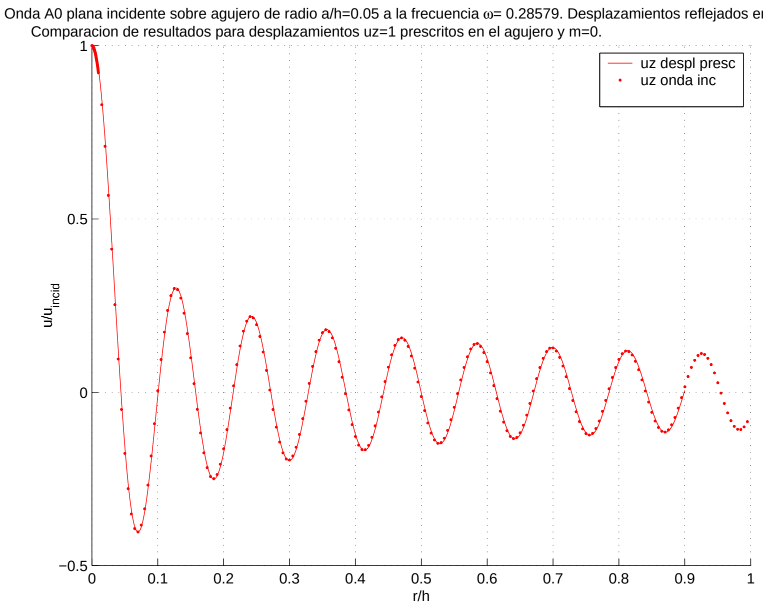


Figura 5.8. Campo de desplazamientos generado por una onda A0 incidente sobre una placa con borde empotrado: Comparación entre el MEF y los resultados obtenidos para el problema de generación caso de desplazamientos $u_z = 1$, $m = 0$, $\omega = 0{,}0028579$

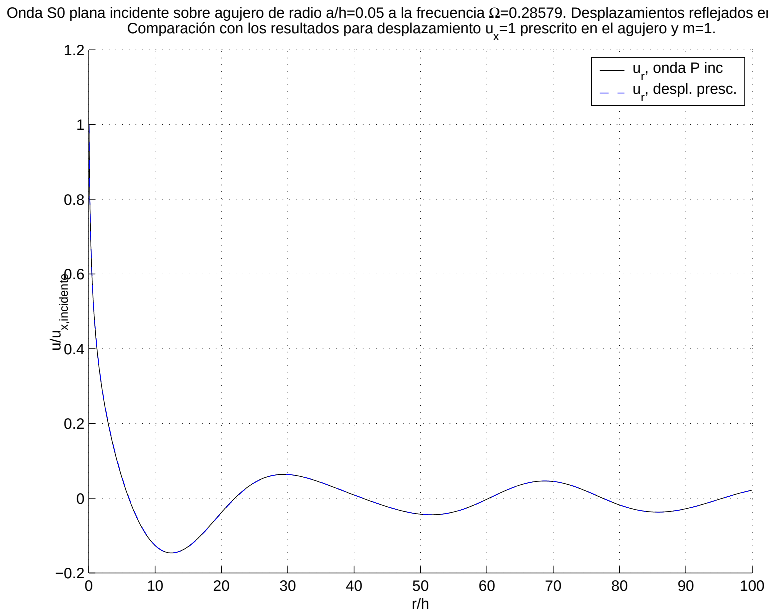


Figura 5.9. Campo de desplazamientos generado por una onda S0 incidente sobre una placa con borde empotrado: Comparación entre el MEF y los resultados obtenidos para el problema de generación caso de desplazamientos $u_r = 1$, $m = 1$, $\omega = 0{,}28579$

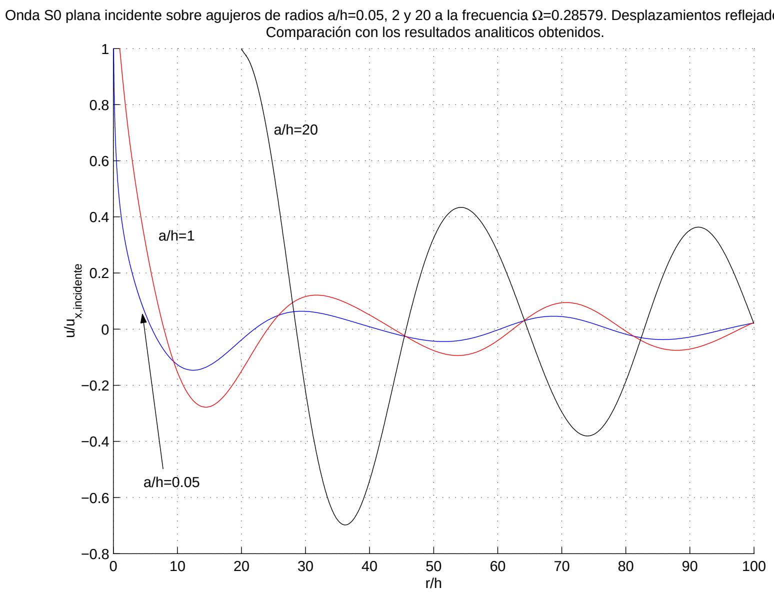


Figura 5.10. Campo de desplazamientos generado por una onda S0 incidente sobre una placa con borde empotrado: Comparación entre el MEF y los resultados analíticos.

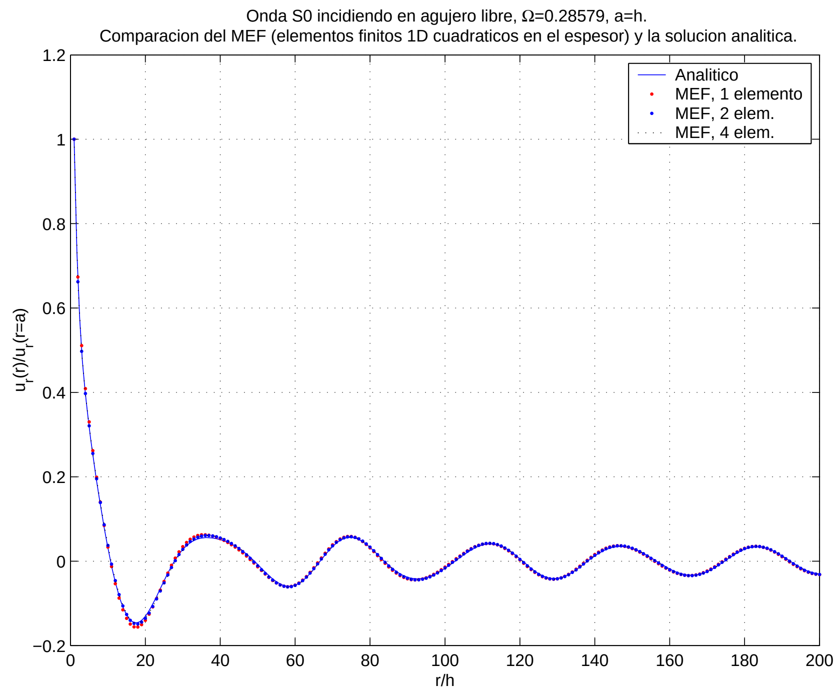


Figura 5.11. Campo de desplazamientos generado por una onda S0 incidente sobre una placa con borde libre: Comparación entre el MEF y los resultados analíticos.

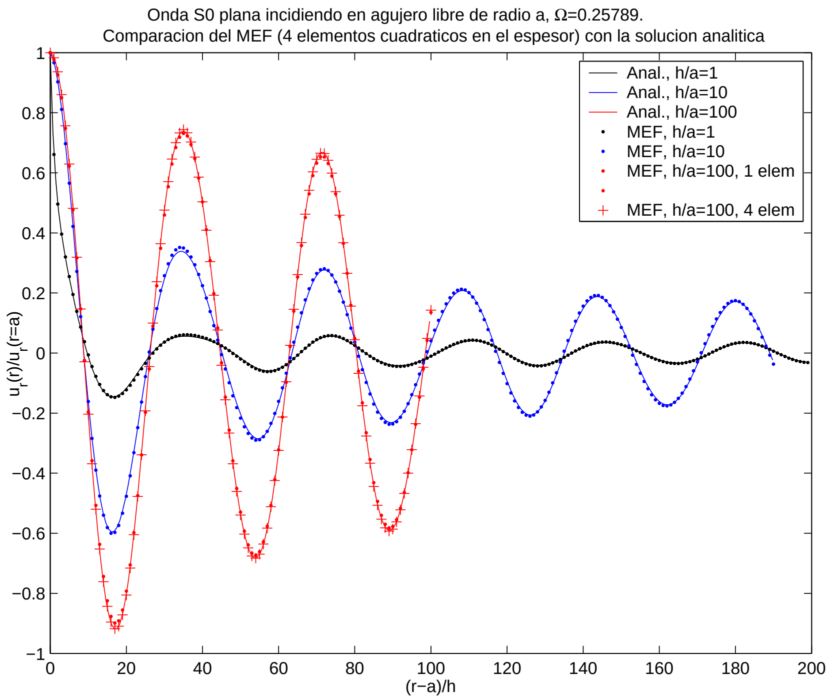


Figura 5.12. Campo de desplazamientos generado por una onda S0 incidente sobre una placa con borde libre para distintos valores del radio: Comparación entre el MEF y los resultados analíticos.

Capítulo 6

Conclusiones y desarrollos futuros

6.1. Introducción

A lo largo se este proyecto se ha abordado el estudio numérico de la generación de ondas guiadas en placas y su difracción sobre una placa con un agujero desde la perspectiva del Método de los Elementos Finitos.

En el Capítulo 2 se ha descrito la teoría de la propagación libre de ondas guiadas armónicas, con frente de onda plano y cilíndrico, en placas homogéneas de materiales isótropos elásticos y con espesor constante. Partiendo del planteamiento matemático general de la Elastodinámica tridimensional se han aplicado las condiciones particulares de la propagación de las ondas guiadas armónicas para obtener dos problemas bidimensionales (antiplano y de deformación plana), a cada uno de los cuales está asociado a un tipo particular de ondas (*SH* guiadas y de *Lamb*, respectivamente). Tan sólo el primero de ellos se puede resolver completamente de forma analítica, debido a la simplicidad de las ecuaciones resultantes. La presentación detallada de dicha solución ha permitido introducir los rasgos característicos esenciales de la propagación de ondas guiadas, entre los que cabe destacar su carácter dispersivo y multimodal (resultado de la ecuación característica no lineal que gobierna el problema, cuya solución para cada frecuencia proporciona un número infinito de raíces), los modos reales y evanescentes (para cada frecuencia sólo existe un número finito de modos que se propagan; los demás tienen una amplitud que decae con la distancia), las frecuencias de corte (el número de modos reales crece con la frecuencia; la frecuencia de corte marca la transición de modo evanescente a real), las curvas de dispersión, la velocidad de grupo (o de propagación de la energía) y la estructura de los modos. En el caso de ondas de *Lamb* se han descrito dos rasgos adicionales que no se presentan en el caso antiplano: la dispersión anómala y las ondas “backward” (cuya energía viaja en sentido opuesto a su fase).

En el Capítulo 3 se ha presentado una formulación semi-analítica de Elementos Finitos capaz de reproducir la propagación libre de ondas guiadas en placas homogéneas de materiales isótropos y elásticos lineales. Partiendo de la discretización de la sección transversal de la placa en elementos isoparamétricos pero conservando la variación armónica analítica en el resto de variables, se ha transformado la ecuación característica no lineal analítica en un problema de autovalores lineal, que constituye una ecuación característica aproximada para la que se dispone de algoritmos de solución muy robustos.

La respuesta dinámica de la placa semi-infinita frente a acciones en el borde se ha obtenido expresando la solución de desplazamientos y tensiones en su interior como una combinación lineal de los modos de propagación semi-analíticos de la placa infinita, donde sólo se han incluido aquellos modos que cumplen la condición de radiación. Esta condición implica que los modos reales deben extraer energía del borde, es decir, su velocidad de grupo debe alejarse del borde, y los modos evanescentes deben decrecer en amplitud con la distancia al borde. Se ha tenido en cuenta que las ondas “backward” deben incluirse de forma que su fase viaje hacia el borde, puesto que su energía fluye en sentido opuesto.

En el Capítulo 4 se ha llevado a cabo el estudio de una serie de problemas de generación de ondas cilíndricas guiadas mediante la formulación semi-analítica de Elementos Finitos. Para ello se han aplicado distintos tipos de fuerzas prescritas en el borde interior de una cavidad cilíndrica. Con objeto de validar y comprobar la técnica desarrollada se han comprobado los resultados numéricos, para valores bajos de frecuencia, con otros de los que se dispone de solución analítica previa.

En el Capítulo 5 se ha llevado a cabo el estudio de una serie de problemas de difracción de ondas cilíndricas guiadas mediante la formulación semi-analítica de Elementos Finitos. Ello lo conseguimos mediante la aplicación de una onda plana incidiendo sobre la placa. Consideramos dos casos: borde empotrado o borde libre.

6.2. Conclusiones

En este proyecto se ha desarrollado una formulación semi-analítica de Elementos Finitos en el dominio de la frecuencia para estudiar la generación y difracción de ondas cilíndricas guiadas tridimensionales en placas homogéneas, isótropas y elastico lineales al aplicar un campo de desplazamientos prescrito en el borde interior de un agujero pasante.

Se ha realizado una comprobación exhaustiva de la formulación planteada mediante la comparación con los resultados de generación de ondas en placas elásticas disponibles en la literatura, los cuales fueron obtenidos por otros autores mediante la aplicación de diversas técnicas de solución. Los resultados obtenidos muestran la gran capacidad y precisión del método, destacándose los siguientes aspectos:

- La obtención del campo de desplazamientos de una onda generada desde un agujero cilíndrico coincide completamente con la solución analítica de dicho problema para valores bajos de frecuencia.
- Para el caso de la aplicación de un desplazamiento axial uniforme, el método desarrollado representa muy fielmente para bajas frecuencias el comportamiento de la deformada de una placa delgada con desplazamiento vertical impuesto.
- Existe una gran similitud entre los resultados obtenidos y los existentes en la literatura, siendo el tiempo empleado para la resolución del problema (una vez realizada la programación) de unos pocos segundos. Esto permite realizar amplios barridos de frecuencia y variaciones del tipo de desplazamiento impuesto con el fin de encontrar un modo adecuado para cada caso experimental.
- El método desarrollado permite conocer las influencias que se producen en la onda generada al cambiar los valores de las coordenadas del campo de fuerzas prescrito.

6.3. Desarrollos futuros

Las posibilidades de desarrollo de la formulación presentada en este proyecto son variadas, algunas de las cuales se describen a continuación.

Las propagación de ondas en materiales laminados, es decir, que no estan formados por el mismo material en todo el espesor, podría ser estudiada con esta técnica sin más que aplicar la formulación a cada elemento por separado y realizar el montaje de las matrices globales a partir de cada una de las distintas matrices elementales. También se puede aplicar la técnica a placas con cambios bruscos de espesor dividiendo el dominio completo en subdominios de espesor constante y aplicando posteriormente equilibrio y compatibilidad entre cada uno de los subdominios.

Desarrollar la aplicación de esta técnica junto con la utilización de los Elementos de Contorno para resolver problemas de identificación y caracterización de grietas y defectos mediante uso de ondas cilíndricas guiadas.

Una de las líneas de trabajo consistiría en estudiar la interacción de ondas cilíndricas guiadas con obstáculos tridimensionales, cuyo conocimiento sería de utilidad en el desarrollo de aplicaciones de inspección de aviones (p. ej. detección y caracterización de grietas que crecen radialmente a partir de los taladros de remachado) y tuberías (p. ej. detección de defectos en una tubería mediante ondas guiadas propagándose en dirección circunferencial, tales como las que se generan en algunos vehículos automáticos de inspección interior), entre otras. Estos problemas podrían abordarse mediante una técnica híbrida de EC-EF, donde el entorno del defecto se estudiaría con el MEC tridimensional y el resto de la placa sería sustituída por un contorno absorbente. Este último se obtendría de aplicar una superposición modal en una sección cilíndrica, $r = cte$, incluyendo únicamente los modos que cumplan la condición de radiación.

En este proyecto no se ha abordado la solución del problema de identificación de defectos o caracterización de materiales, que constituye el objetivo último de los END. La técnica planteada en este proyecto proporciona información para el conocimiento de la propagación de ondas cilíndricas guiadas, su interacción, su generación y su difracción. Por tanto una línea de trabajo a explorar sería la solución del problema de identificación, localización y caracterización de defectos a través del tipo de ondas estudiado en este proyecto.

Apéndice A

Soluciones Generales de la Ecuación de Ondas

En el Capítulo 2, para la obtención de la solución analítica del campo de desplazamientos empleamos los resultados establecidos por Achenbach [2], en los cuales se expresaba mediante ecuaciones la forma general de la propagación de una onda en coordenadas cilíndricas. Posteriormente este resultado se generalizó para una variación circunferencial cualquiera empleando los resultados obtenidos por Zhao [10]. Sin embargo, en el Capítulo 3, para la obtención de la solución numérica del campo de desplazamientos hemos empleado el desarrollo realizado por Kausel [6] a partir de la solución general obtenida por Sezawa [9].

Puede resultar llamativo que hayan sido seguidos dos caminos distintos para la obtención de una misma solución. No obstante, vamos a demostrar que ambos procedimientos nos proporcionan las mismas expresiones para el campo de desplazamientos producido por la propagación de una onda guiada con frente de onda cilíndrico en una placa. Con ello pretendemos validar el desarrollo realizado, y por tanto verificar que ambos caminos son equivalentes para la obtención de dicha solución (tanto el analítico como el numérico).

En primer lugar vamos a obtener la solución general de la ecuación modal de ondas utilizada por Kausel (ec. (3.105)), solución que fue obtenida por Sezawa (ecs. (3.91) a (3.93)). Posteriormente, relacionaremos las ecuaciones generalizadas de la solución de Achenbach (desarrolladas por Zhao) con las de Sezawa para encontrar los parámetros que permiten afirmar que ambas expresiones son equivalentes.

A.1. Obtención de las Soluciones de Sezawa

Como vimos en el Capítulo 2, la propagación de ondas en un material elástico lineal e isótropo está gobernada por las ecuaciones de Navier (ec. (2.1)). Para obtener la solución a dichas ecuaciones empleamos la descomposición de Helmholtz (ec. (2.2)), según la cual el campo de desplazamientos es solución de las ecuaciones de Navier si los potenciales satisfacen las respectivas ecuaciones de ondas (expresadas por las ecs. (2.74) a (2.77)), donde se observa que existe un acoplamiento entre los potenciales ψ_r y ψ_z. Además es necesario añadir una restricción adicional que habitualmente es expresada mediante la ec. (2.79), aunque no es la única válida.

Para obtener el potencial escalar φ resolvemos la ec. (2.74) suponiendo una solución en variables separadas de la forma:

$$\varphi(r,z,\theta,t) = R(r)\,\Theta(\theta)\,Z(z)\,e^{(i\omega t)} \tag{A.1}$$

Si desarrollamos en la ec. (2.74) el término laplaciano, obtenemos:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c_L^2}\varphi \tag{A.2}$$

Si sustituimos la solución propuesta (ec. (A.1)), dividimos entre φ y simplificamos los términos comunes, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)}\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c_L^2} \tag{A.3}$$

Tomando las siguientes ecuaciones diferenciales para $Z(z)$ y $\Theta(\theta)$:

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k^2 \tag{A.4}$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = -m^2 \tag{A.5}$$

la ec. (A.3) queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2\right)R(r) - \frac{m^2}{r^2}R(r) = 0 \tag{A.6}$$

cuya solución se obtiene empleando funciones de Bessel. Por tanto, la solución general de la ec. (A.3) resulta, empleando notación exponencial:

$$\varphi(r,z,\theta,t) = \left(A_r H_m^{(1)}(pr) + B_r H_m^{(2)}(pr)\right)e^{im\theta}e^{ikz}e^{i\omega t} \tag{A.7}$$

o bien en términos de senos y cosenos:

$$\varphi(r,z,\theta,t) \;=\; \Big(A_r H_m^{(1)}(pr) + B_r H_m^{(2)}(pr)\Big)\left\{\begin{array}{c}\cos(m\theta)\\ \mathrm{sen}(m\theta)\end{array}\right\} e^{ikz} e^{i\omega t} \quad (A.8)$$

siendo en ambas:

$$p^2 \;=\; \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad (A.9)$$

Para obtener el potencial vectorial ψ_z, resolvemos la ec. (2.75) suponiendo una solución en variables separadas de la forma:

$$\psi_z(r,z,\theta,t) \;=\; R(r)\,\Theta(\theta)\,Z(z)\,e^{(i\omega t)} \quad (A.10)$$

Dado que el potencial ψ_z satisface una ecuación de ondas similar a la de φ, podemos deducir, mediante un procedimiento análogo al anterior, que la solución a la ec. (2.75) vendrá dada por la siguiente expresión, empleando notación exponencial:

$$\psi_z(r,z,\theta,t) \;=\; i\Big(A'_r H_m^{(1)}(qr) + B'_r H_m^{(2)}(qr)\Big) e^{im\theta} e^{ikz} e^{i\omega t} \quad (A.11)$$

o bien en términos de senos y cosenos:

$$\psi_z(r,z,\theta,t) \;=\; i\Big(A'_r H_m^{(1)}(qr) + B'_r H_m^{(2)}(qr)\Big)\left\{\begin{array}{c}-\mathrm{sen}(m\theta)\\ \cos(m\theta)\end{array}\right\} e^{ikz} e^{i\omega t} \quad (A.12)$$

siendo en ambas:

$$q^2 \;=\; \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (A.13)$$

Para obtener los potenciales vectoriales ψ_r y ψ_θ, resolveremos las ecs. (2.76) y (2.77). Observando dichas expresiones, que muestran la existencia de un acoplamiento entre ambos potenciales, puede deducirse que una dependencia con respecto al $\mathrm{sen}(m\theta)$ en ψ_r implica una dependencia con respecto al $cos(m\theta)$ en ψ_θ y viceversa. Por tanto, podemos considerar como soluciones de ambas ecuaciones las siguientes expresiones:

$$\psi_r(r,z,\theta,t) \;=\; \Psi_r(r)\,e^{i(kz+\omega t)}\left\{\begin{array}{c}-\mathrm{sen}(m\theta)\\ \cos(m\theta)\end{array}\right\} = i\Psi_r(r)\,e^{i(kz+\omega t)}\,e^{im\theta} \quad (A.14)$$

$$\psi_\theta(r,z,\theta,t) \;=\; \Psi_\theta(r)\,e^{i(kz+\omega t)}\left\{\begin{array}{c}\cos(m\theta)\\ \mathrm{sen}(m\theta)\end{array}\right\} = \Psi_\theta(r)\,e^{i(kz+\omega t)}\,e^{im\theta} \quad (A.15)$$

Para obtener una relación entre las funciones $\Psi_r(r)$ y $\Psi_\theta(r)$ vamos a sustituir las ecs. (A.14) y (A.15) en sus respectivas ecuaciones de onda (ecs. (2.76) y (2.77)):

$$\left[\frac{d^2\Psi_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_r}{dr} - k^2\Psi_r - \frac{m^2}{r^2}\Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} + \frac{\omega^2}{c_T^2} - \frac{2m}{r^2}\Psi_\theta\right] ie^{im\theta} = 0 \quad \text{(A.16)}$$

$$\left[\frac{d^2\Psi_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_\theta}{dr} - k^2\Psi_\theta - \frac{m^2}{r^2}\Psi_\theta - \frac{\Psi_\theta}{r^2} + \frac{\omega^2}{c_T^2} - \frac{2m}{r^2}\Psi_r\right] e^{im\theta} = 0 \quad \text{(A.17)}$$

Operando sobre las expresiones anteriores obtenemos:

$$\frac{d^2\Psi_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_r}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2\right)\Psi_r - \frac{m^2+1}{r^2}\Psi_r - \frac{2m}{r^2}\Psi_\theta = 0 \quad \text{(A.18)}$$

$$\frac{d^2\Psi_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_\theta}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2\right)\Psi_\theta - \frac{m^2+1}{r^2}\Psi_\theta - \frac{2m}{r^2}\Psi_r = 0 \quad \text{(A.19)}$$

Sumando las ecs. (A.18) y (A.19) e introduciendo la variable:

$$\Psi_{r+\theta} = \Psi_r + \Psi_\theta \quad \text{(A.20)}$$

obtenemos:

$$\frac{d^2\Psi_{r+\theta}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_{r+\theta}}{dr} + q^2\Psi_{r+\theta} - \frac{(m+1)^2}{r^2}\Psi_{r+\theta} = 0 \quad \text{(A.21)}$$

De nuevo nos encontramos ante una ecuación diferencial que se resuelve empleando funciones de Bessel. Por tanto, la solución a la ec. (A.20) es de la forma:

$$\Psi_{r+\theta}(r) = 2A_{r+\theta}H^{(1)}_{m+1}(qr) + 2B_{r+\theta}H^{(2)}_{m+1}(qr) \quad \text{(A.22)}$$

donde q viene dada por la ec. (A.13).

Si ahora restamos las ecs. (A.18) y (A.19) e introducimos la variable:

$$\Psi_{r-\theta} = \Psi_r - \Psi_\theta \quad \text{(A.23)}$$

obtenemos:

$$\frac{d^2\Psi_{r-\theta}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_{r-\theta}}{dr} + q^2\Psi_{r-\theta} - \frac{(m-1)^2}{r^2}\Psi_{r-\theta} = 0 \quad \text{(A.24)}$$

Análogamente, nos encontramos ante una ecuación diferencial que se resuelve empleando funciones de Bessel. Por tanto, la solución a la ec. (A.23) es de la forma:

$$\Psi_{r-\theta}(r) = 2A_{r-\theta}H^{(1)}_{m-1}(qr) + 2B_{r-\theta}H^{(2)}_{m-1}(qr) \quad \text{(A.25)}$$

Despejando de las ecs. (A.20) y (A.23) las funciones $\Psi_r(r)$ y $\Psi_\theta(r)$, obtenemos:

$$\Psi_r(r) = \frac{\Psi_{r+\theta}(r) + \Psi_{r-\theta}(r)}{2} \tag{A.26}$$

$$\Psi_\theta(r) = \frac{\Psi_{r+\theta}(r) - \Psi_{r-\theta}(r)}{2} \tag{A.27}$$

Si a continuación realizamos la siguiente suposición:

$$\Psi_r(r) = \Psi_\theta(r) \tag{A.28}$$

entonces $\Psi_{r-\theta} = 0$, con lo que obtenemos:

$$\Psi_r = \Psi_\theta = \frac{\Psi_{r+\theta}}{2} = A_{r+\theta} H^{(1)}_{m+1}(qr) + B_{r+\theta} H^{(2)}_{m+1}(qr) \tag{A.29}$$

y por tanto los potenciales vectoriales ψ_r y ψ_θ vendrán dados por las siguientes expresiones (ecs. (A.14) y (A.15)):

$$\psi_r(r,z,\theta,t) = i\Big(A_{r+\theta} H^{(1)}_{m+1}(qr) + B_{r+\theta} H^{(2)}_{m+1}(qr)\Big)\, e^{i(kz+\omega t)}\, e^{im\theta} \tag{A.30}$$

$$\psi_\theta(r,z,\theta,t) = \Big(A_{r+\theta} H^{(1)}_{m+1}(qr) + B_{r+\theta} H^{(2)}_{m+1}(qr)\Big)\, e^{i(kz+\omega t)}\, e^{im\theta} \tag{A.31}$$

Es importante señalar que si hubiésemos empleado la suposición:

$$\Psi_r(r) = -\Psi_\theta(r) \tag{A.32}$$

hubiéramos llegado a una solución alternativa similar a la proporcionada por la ec. (A.29):

$$\Psi_{r+\theta} = 0 \Rightarrow \Psi_r = -\Psi_\theta = \frac{\Psi_{r-\theta}}{2} = A_{r+-\theta} H^{(1)}_{m-1}(qr) + B_{r-\theta} H^{(2)}_{m-1}(qr) \tag{A.33}$$

con lo que obtendríamos una expresión para los potenciales ψ_r y ψ_θ análoga a la ecs. (A.30) y (A.31).

Los resultados anteriores nos permiten calcular los potenciales de la descomposición de Helmholtz (ecs. (A.7), (A.11), (A.30) y (A.31)) y se puede comprobar que, tanto con la suposición $\Psi_r = \Psi_\theta$ como con $\Psi_r = -\Psi_\theta$, se verifica siempre la cuarta condición (ec. (2.79)). Con ello se demuestra que esa última condición no es la única que puede emplearse para la obtención del campo de desplazamientos.

Si en adelante consideramos sólo propagación de ondas hacia $r \to +\infty$, las ecs. (A.7), (A.11), (A.30) y (A.31) quedan de la siguiente manera:

$$\varphi = A_\varphi H_m^{(2)}(pr)\, e^{i(kz+\omega t)}\, e^{im\theta} \tag{A.34}$$
$$\psi_z = iA_{\psi_z} H_m^{(2)}(qr)\, e^{i(kz+\omega t)}\, e^{im\theta} \tag{A.35}$$
$$\psi_r = iA_{\psi_r} H_{m+1}^{(2)}(qr)\, e^{i(kz+\omega t)}\, e^{im\theta} \tag{A.36}$$
$$\psi_\theta = A_{\psi_\theta} H_{m+1}^{(2)}(qr)\, e^{i(kz+\omega t)}\, e^{im\theta} \tag{A.37}$$

Vamos a transformar las expresiones anteriores para obtener las soluciones proporcionadas por Sezawa. Para ello realizaremos los siguiente cambios:

- Tomemos las expresiones de p y q (ecs. (A.9) y (A.13)) y despejemos el número de onda k:

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c_L^2} - p^2} \tag{A.38}$$

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c_T^2} - q^2} \tag{A.39}$$

  si definimos los siguientes parámetros:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{c_L^2}, \qquad \beta = \frac{\omega^2}{c_T^2} \tag{A.40}$$

  podemos operar sobre las expresiones anteriores y obtener:

$$ik = \pm\sqrt{p^2 - \alpha^2} \Rightarrow d = -ik = \pm\sqrt{p^2 - \alpha^2} \tag{A.41}$$
$$ik = \pm\sqrt{q^2 - \beta^2} \Rightarrow s = -ik = \pm\sqrt{q^2 - \beta^2} \tag{A.42}$$

- Usar la siguiente relación entre la función de Hankel y su derivada [7]:

$$H_{m+1}^{(n)}(Z) = -\frac{dH_m^{(n)}(Z)}{dZ} + \frac{m}{Z} H_m^{(n)}(Z) \tag{A.43}$$

  donde en nuestro caso $Z = pr$ o $Z = qr$.

Según las modificaciones anteriores las ecs. (A.34) a (A.37) quedan expresadas en la forma siguiente:

$$\varphi = A_\varphi H_m^{(2)}(pr)\, e^{-dz+i\omega t}\, e^{im\theta} \tag{A.44}$$
$$\psi_z = iA_{\psi_z} H_m^{(2)}(qr)\, e^{-sz+i\omega t}\, e^{im\theta} \tag{A.45}$$
$$\psi_r = iA_{\psi_r}\Big[-\frac{1}{q}\frac{dH_m^{(2)}(qr)}{dr} + \frac{m}{qr}H_m^{(2)}(qr)\Big]\, e^{-sz+i\omega t}\, e^{im\theta} \tag{A.46}$$
$$\psi_\theta = A_{\psi_\theta}\Big[-\frac{1}{q}\frac{dH_m^{(2)}(qr)}{dr} + \frac{m}{qr}H_m^{(2)}(qr)\Big]\, e^{-sz+i\omega t}\, e^{im\theta} \tag{A.47}$$

Con dichas ecuaciones podemos calcular la expresión de los desplazamientos al sustituir los potenciales en la ec. (2.2). Así, teniendo en cuenta que al cumplirse $\Psi_r = \Psi_\theta$ se verifica que $A_{\psi_r} = A_{\psi_\theta}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} u_r &= \Big[A_\varphi \frac{\partial}{\partial r}[H_m^{(2)}(pr)]\, e^{-dz} + \Big(A_{\psi_r}\frac{s}{q} - A_{\psi_z}\Big)\frac{m}{r}H_m^{(2)}(qr)\, e^{-sz} - \\ &\quad A_{\psi_r}\frac{s}{q}\frac{\partial}{\partial r}[H_m^{(2)}(qr)]\, e^{-sz}\Big]\, e^{i\omega t}\, e^{im\theta} \qquad (A.48) \\ u_z &= \Big[-A_\varphi d\, H_m^{(2)}(pr)\, e^{-dz} + A_{\psi_r} q H_m^{(2)}(qr)\, e^{-sz}\Big]\, e^{i\omega t}\, e^{im\theta} \qquad (A.49) \\ u_\theta &= i\Big[A_\varphi \frac{m}{r}H_m^{(2)}(pr)\, e^{-dz} + \Big(A_{\psi_r}\frac{s}{q} - A_{\psi_z}\Big)\frac{\partial}{\partial r}[H_m^{(2)}(qr)]\, e^{-sz} - \\ &\quad A_{\psi_r}\frac{sm}{qr}H_m^{(2)}(qr)\, e^{-sz}\Big]\, e^{i\omega t}\, e^{im\theta} \qquad (A.50) \end{aligned}$$

Si sobre las expresiones anteriores del campo de desplazamientos, realizamos los siguientes cambios de notación:

$$A_\varphi = pA, \qquad A_{\psi_r}\frac{s}{q} - A_{\psi_z} = B, \qquad A_{\psi_r}\frac{1}{q} = C \qquad (A.51)$$

y consideramos una onda propagándose con un número de onda k en dirección radial, como resultado del campo de desplazamientos obtenemos:

$$\begin{aligned} \underline{u}_r &= \Big[kA\frac{\partial}{\partial r}\big[H_m^{(2)}(kr)\big]\, e^{-dz+i\omega t} + B\frac{m}{r}H_m^{(2)}(kr)\, e^{-sz+i\omega t} \\ &\quad - Cs\frac{\partial}{\partial r}\big[H_m^{(2)}(kr)\big]\, e^{-sz+i\omega t}\Big]\, e^{im\theta} \qquad (A.52) \\ \underline{u}_z &= \Big[-kdAH_m^{(2)}(kr)\, e^{-dz+i\omega t} + Ck^2H_m^{(2)}(kr)\, e^{-sz+i\omega t}\Big]\, e^{im\theta} \qquad (A.53) \\ \underline{u}_\theta &= \Big[kA\frac{m}{r}H_m^{(2)}(kr)\, e^{-dz+i\omega t} + B\frac{\partial}{\partial r}\big[H_m^{(2)}(kr)\big]\, e^{-sz+i\omega t} \\ &\quad - Cs\frac{m}{r}H_m^{(2)}(kr)\, e^{-sz+i\omega t}\Big]\, ie^{im\theta} \qquad (A.54) \end{aligned}$$

y a dichas expresiones se las conoce como Soluciones de Sezawa, que coinciden con las expresadas en la ecs. (3.91) a (3.93).

A.2. Comparación entre las soluciones de Sezawa y Achenbach-Zhao

Como sabemos las expresiones obtenidas por Achenbach para el campo de desplazamientos de una onda que se propaga en una placa fue generalizada por Zhao para cualquier valor de la variación circunferencial (es decir, pasamos de $e^{i\theta}$ a $e^{im\theta}$). Para verificar que dichas expresiones son análogas a las obtenidas por Sezawa vamos a realizar una serie de transformaciones en las soluciones de Achenbach-Zhao. Consideraremos la propagación hacia $r \to +\infty$ de una onda cilíndrica con número de onda k en una placa homogénea e isótropa.

Si analizamos el caso de una onda SH, Achenbach establece como expresión general de la estructura de los desplazamientos las siguienes ecuaciones:

$$u_r^{(SH)} = \frac{1}{kr}\widehat{U}(z)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\, e^{i\omega t} \tag{A.55}$$

$$u_z^{(SH)} = 0 \tag{A.56}$$

$$u_\theta^{(SH)} = -\frac{1}{k}\widehat{U}(z)\frac{\partial\psi}{\partial r}\, e^{i\omega t} \tag{A.57}$$

No obstante, Zhao generaliza dichas expresiones al proponer una solución para ψ de la forma:

$$\psi(r,\theta) = \Psi(r)\, e^{im\theta} = H_m^{(2)}(kr)\, e^{im\theta} \tag{A.58}$$

entonces las expresiones para el campo de desplazamientos de la onda SH pasan a ser expresadas como:

$$u_r^{(SH)} = \frac{im}{kr}\widehat{U}(z)H_m^{(2)}(kr)\, e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.59}$$

$$u_z^{(SH)} = 0 \tag{A.60}$$

$$u_\theta^{(SH)} = -\frac{1}{k}\widehat{U}(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right] e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.61}$$

donde la función $\widehat{U}(z)$ depende de si expresamos la componente simétrica ($\widehat{U}_S(z)$) o antisimétrica ($\widehat{U}_A(z)$) del campo de desplazamientos. Estas funciones vienen definidas por las ecs. (2.97) y (2.98).

Si expresamos matricialmente las ecs. (2.97) y (2.98) obtenemos:

$$\widehat{U}(z) = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(qz) \\ \mathrm{sen}(qz) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_u \begin{bmatrix} e^{iqz} \\ e^{-iqz} \end{bmatrix} \tag{A.62}$$

donde, como puede observarse, se ha utilizado alternativamente una notación exponencial. Para simplificar la notación sólo nos quedaremos con el término e^{iqz}.

Por tanto las ecuaciones que definen la propagación de una onda SH (ecs. (A.59) a (A.61)) pueden expresarse de la siguiente manera:

$$u_r^{(SH)} = \frac{im}{kr}\mathbf{A}_u\, H_m^{(2)}(kr)\, e^{iqz}e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.63}$$

$$u_z^{(SH)} = 0 \tag{A.64}$$

$$u_\theta^{(SH)} = -\frac{1}{k}\mathbf{A}_u\, \frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right] e^{iqz}e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.65}$$

De forma análoga al caso de ondas SH, podemos obtener las correspondientes expresiones generales para la propagación de una onda de Lamb en la placa considerada. Las expresiones proporcionadas por Achenbach para el campo de desplazamientos de una onda de Lamb, propagándose con número de onda k, son las siguientes:

$$u_r^{(Lamb)} = \frac{1}{k}\widehat{V}(z)\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, e^{i\omega t} \tag{A.66}$$

$$u_z^{(Lamb)} = \widehat{W}(z)\varphi\, e^{i\omega t} \tag{A.67}$$

$$u_\theta^{(Lamb)} = \frac{1}{kr}\widehat{V}(z)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\, e^{i\omega t} \tag{A.68}$$

De nuevo, Zhao generaliza dichas expresiones al proponer una solución para φ de la forma:

$$\varphi(r,\theta) = \Phi(r)\, e^{im\theta} = H_m^{(2)}(kr)\, e^{im\theta} \tag{A.69}$$

entonces las expresiones para el campo de desplazamientos de la onda de Lamb pasan ser de la forma:

$$u_r^{(Lamb)} = \frac{1}{k}\widehat{V}(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right] e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.70}$$

$$u_z^{(Lamb)} = \widehat{W}(z)H_m^{(2)}(kr)\, e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.71}$$

$$u_\theta^{(Lamb)} = \frac{im}{kr}\widehat{V}(z)H_m^{(2)}(kr)\, e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.72}$$

donde las funciones $\widehat{V}(z)$ y $\widehat{W}(z)$ dependen de si expresamos la componente simétrica ($\widehat{V}_S(z), \widehat{W}_S(z)$) o antisimétrica ($\widehat{V}_A(z), \widehat{W}_A(z)$) del campo de desplazamientos. Estas funciones vienen definidas por las ecs. (2.118) a (2.121). Si sustituimos en dichas ecuaciones el valor de los distintos parámetros que en ellas aparecen (ecs. (2.122) a (2.129)) obtenemos el siguiente resultado:

$$\widehat{V}_S(z) = 2\cos(qh)\cos(pz) - \frac{k^2-q^2}{k^2}\cos(ph)\cos(qz) \tag{A.73}$$

$$\widehat{V}_A(z) = 2\mathrm{sen}(qh)\mathrm{sen}(pz) - \frac{k^2-q^2}{k^2}\mathrm{sen}(ph)\mathrm{sen}(qz) \tag{A.74}$$

$$\widehat{W}_S(z) = -2\frac{p}{k}\cos(qh)\mathrm{sen}(pz) - \frac{k^2-q^2}{qk}\cos(ph)\mathrm{sen}(qz) \tag{A.75}$$

$$\widehat{W}_A(z) = 2\frac{p}{k}\mathrm{sen}(qh)\cos(pz) + \frac{k^2-q^2}{qk}\mathrm{sen}(ph)\cos(qz) \tag{A.76}$$

Si expresamos matricialmente las ecs. (A.73) y (A.74) obtenemos:

$$\begin{aligned}\widehat{V}(z) &= 2\begin{bmatrix}\cos(qh) & 0\\ 0 & \mathrm{sen}(qh)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(pz)\\ \mathrm{sen}(pz)\end{bmatrix}\\ &\quad-\left(\frac{k^2-q^2}{k^2}\right)\begin{bmatrix}\cos(ph) & 0\\ 0 & \mathrm{sen}(ph)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(qz)\\ \mathrm{sen}(qz)\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{A}_v\begin{bmatrix}e^{ipz}\\ e^{-ipz}\end{bmatrix} - \frac{1}{k}\mathbf{B}_v\begin{bmatrix}e^{iqz}\\ e^{-iqz}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.77}$$

y procediendo de forma análoga con las ecs. (A.75) y (A.76) obtenemos:

$$\begin{aligned}\widehat{W}(z) &= 2\frac{p}{k}\begin{bmatrix}\cos(qh) & 0\\ 0 & \mathrm{sen}(qh)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathrm{sen}(pz)\\ \cos(pz)\end{bmatrix}\\ &\quad+\left(\frac{k^2-q^2}{qk}\right)\begin{bmatrix}\cos(ph) & 0\\ 0 & \mathrm{sen}(ph)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathrm{sen}(qz)\\ \cos(qz)\end{bmatrix}\\ &= \frac{p}{k}\mathbf{A}_v\, i\begin{bmatrix}e^{ipz}\\ e^{-ipz}\end{bmatrix} + \frac{1}{q}\mathbf{B}_v\, i\begin{bmatrix}e^{iqz}\\ e^{-iqz}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.78}$$

Por tanto las ecuaciones que definen la propagación de una onda de Lamb (ecs. (A.70) a (A.72)) pueden expresarse de la siguiente manera:

$$u_r^{(Lamb)} = \left(\frac{1}{k}\mathbf{A}_v\, e^{ipz} - \frac{1}{k^2}\mathbf{B}_v\, e^{iqz}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.79}$$

$$u_z^{(Lamb)} = i\left(\frac{p}{k}\mathbf{A}_v\, e^{ipz} + \frac{1}{q}\mathbf{B}_v\, e^{iqz}\right)H_m^{(2)}(kr)\, e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.80}$$

$$u_\theta^{(Lamb)} = i\left(\frac{m}{kr}\mathbf{A}_v\, e^{ipz} - \frac{m}{k^2 r}\mathbf{B}_v\, e^{iqz}\right)H_m^{(2)}(kr)\, e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.81}$$

Una vez obtenidas por separado las expresiones generales para la propagación de ondas SH y Lamb, procedemos a aplicar el principio de superposición para obtener la expresión del campo de desplazamientos total (basándonos en la suposición realizada por Achenbach [2]). Por tanto la solución completa tendrá la forma:

$$u_r = u_r^{(SH)} + u_r^{(Lamb)} \tag{A.82}$$
$$u_z = u_z^{(SH)} + u_z^{(Lamb)} \tag{A.83}$$
$$u_\theta = u_\theta^{(SH)} + u_\theta^{(Lamb)} \tag{A.84}$$

es decir, sustituyendo las respectivas funciones por sus correspondientes expresiones:

$$u_r = \left[\frac{im}{kr}\mathbf{A}_u\, H_m^{(2)}(kr)\, e^{iqz} + \left(\frac{1}{k}\mathbf{A}_v\, e^{ipz} - \frac{1}{k^2}\mathbf{B}_v\, e^{iqz}\right)\frac{\partial}{\partial r}\big[H_m^{(2)}(kr)\big]\right] e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.85}$$

$$u_z = i\left(\frac{p}{k}\mathbf{A}_v\, e^{ipz} + \frac{1}{q}\mathbf{B}_v\, e^{iqz}\right) H_m^{(2)}(kr)\, e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.86}$$

$$u_\theta = \left[-\frac{1}{k}\mathbf{A}_u\,\frac{\partial}{\partial r}\big[H_m^{(2)}(kr)\big]\, e^{iqz} + i\left(\frac{m}{kr}\mathbf{A}_v\, e^{ipz} - \frac{m}{k^2 r}\mathbf{B}_v\, e^{iqz}\right) H_m^{(2)}(kr)\right] e^{im\theta}e^{i\omega t} \tag{A.87}$$

A continuación vamos a determinar las transformaciones que se deben realizar con el fin de demostrar que las expresiones de las ecs. (A.85), (A.86) y (A.87) (Achenbach-Zhao) son equivalentes a las expresiones de las ecs. (A.52), (A.53) y (A.54) (Sezawa), respectivamente.

Para ello, vamos a realizar los siguientes cambios de variable:

$$ip = -d \tag{A.88}$$
$$iq = -s \tag{A.89}$$

Sabiendo que $i = -\frac{1}{i}$, sacando factor común el coeficiente imaginario i de la ecuación del desplazamiento según la coordenada circunferencial θ y aplicando los cambios anteriores, las ecs. (A.85) a (A.87) quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_r &= \Bigg[\frac{1}{k}\mathbf{A}_v\,\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]e^{-dz+i\omega t} \\ &\quad + \left(\frac{mi}{kr}\mathbf{A}_u\,H_m^{(2)}(kr)-\frac{1}{k^2}\mathbf{B}_v\,\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]\right)e^{-sz+i\omega t}\Bigg]\,e^{im\theta} \qquad \text{(A.90)} \\ u_z &= \left(-\frac{d}{k}\mathbf{A}_v\,H_m^{(2)}(kr)\,e^{-dz+i\omega t}+\frac{1}{s}\mathbf{B}_v\,H_m^{(2)}(kr)\,e^{-sz+i\omega t}\right)e^{im\theta} \qquad \text{(A.91)} \\ u_\theta &= \Bigg[\frac{m}{kr}\mathbf{A}_v\,H_m^{(2)}(kr)\,e^{-dz+i\omega t} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{ki}\mathbf{A}_u\,\frac{\partial}{\partial r}\left[H_m^{(2)}(kr)\right]-\frac{m}{k^2 r}\mathbf{B}_v\,H_m^{(2)}(kr)\right)e^{-sz+i\omega t}\Bigg]\,ie^{im\theta} \qquad \text{(A.92)} \end{aligned}$$

Las ecs. (A.90) a (A.92) son equivalentes a las obtenidas por Sezawa sin nada más que realizar unos determinados cambios en la denominación de los coeficientes de las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_u &= -ikB \qquad \text{(A.93)} \\ \mathbf{A}_v &= k^2 A \qquad \text{(A.94)} \\ \mathbf{B}_v &= -iqk^2 C = sk^2 C \qquad \text{(A.95)} \end{aligned}$$

Con dichos cambios se obtendrá la solución proporcionada por Sezawa, por lo que se demuestra que ambos grupos de ecuaciones (Achenbach y Sezawa) son equivalentes al sólo diferenciarse en el valor de las constantes de integración (ya que el número de onda k es fijo para la propagación de la onda considerada). Con esto se demuestra que los resultados obtenidos analíticamente y los que posteriormente serán obtenidos mediante la aplicación del MEF están basados en los mismos principios teóricos y por tanto las ecuaciones que los definen son únicas y equivalentes.

Apéndice B

Generación de Ondas Guiadas desde un Agujero Cilíndrico: Solución Analítica para $\omega \to 0$

B.1. Introducción

Para bajas frecuencias, el comportamiento asintótico de las ondas guiadas en placas coincide con el de ondas en condiciones de tensión plana y con el de ondas de flexión en placas según la teoría clásica de placas delgadas de Kirchhoff [1, 4].

Los problemas de generación de ondas desde una cavidad cilíndrica a partir de la aplicación de un desplazamiento prescrito, en las situaciones de tensión plana y deformación de placas delgadas, admiten soluciones analíticas que serán obtenidas en este apéndice.

B.2. Problema de Deformación Plana

Vamos a obtener las expresiones analíticas del campo de desplazamientos generado desde una cavidad cilíndrica en un espacio homogéneo, elástico e isótropo en condiciones de deformación plana, cuando en la misma se encuentra aplicado un determinado desplazamiento prescrito. Nuestro estudio se centrará en tres casos concretos, clasificados según sea el desplazamiento impuesto en el agujero:

- Desplazamiento radial uniforme: $u_r = 1$, $u_z = 0$, $u_\theta = 0$ $(\forall z, \forall\theta)$.
- Desplazamiento circunferencial uniforme: $u_r = 0$, $u_z = 0$, $u_\theta = 1$ $(\forall z, \forall\theta)$.

Para la obtención de la solución analítica del campo de desplazamientos nos basaremos en los desarrollos realizados por Graff [4] y, posteriormente, aplicaremos a los resultados obtenidos las condiciones de contorno en desplazamientos correspondientes a cada uno de los casos considerados.

Los dos casos de estudio serán calculados bajo las siguientes suposiciones:

- Problema armónico en el tiempo. La dependencia temporal vendrá expresada en la forma $e^{i\omega t}$.
- Variación armónica con la coordenada θ. Estudiaremos dos casos principales: Caso Axisimétrico ($m = 0$) y Caso No Axisimétrico($m \neq 0$), siendo m el parámetro del desarrollo en serie de Fourier para los desplazamientos (ecs. (3.4) a (3.6)).
- Condiciones de deformación plana ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$).

En nuestro desarrollo partiremos de la ecuación general del campo de desplazamientos para el movimiento de una onda en la placa. Dicha ecuación viene dada por la descomposición de Helmholtz, que será solución de la ecuación de Navier, y viene expresada en términos de los potenciales ϕ (escalar) y $\underline{\psi}$ (vectorial) de la siguiente manera:

$$\underline{u} = \underline{\nabla}\varphi + \underline{\nabla} \wedge \underline{\psi} \tag{B.1}$$

Además, los potenciales φ y $\underline{\psi}$ deben cumplir las ecuaciones de onda, expresadas en coordenadas cilíndricas según las ecs. (2.74) a (2.77).

B.2.1. Caso Axisimétrico ($m = 0$)

Si en las ecuaciones de onda que deben verificar los potenciales de la descomposición de Helmholtz, consideramos la suposición de deformación plana ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) y tomamos $m = 0$ (que conlleva la suposición de desplazamientos axisimétricos: $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$), obtendremos para campo de desplazamientos las siguientes expresiones:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \tag{B.2}$$

$$u_z = \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi_\theta \tag{B.3}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi_z}{\partial r} \tag{B.4}$$

Suponiendo un problema armónico en el tiempo ($e^{i\omega t}$), las ecuaciones de onda quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c_L^2}\varphi = 0 \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - \frac{1}{r^2}\right)\psi_r = 0 \tag{B.6}$$

$$\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c_T^2}\psi_z = 0 \tag{B.7}$$

$$\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - \frac{1}{r^2}\right)\psi_\theta = 0 \tag{B.8}$$

Se observa que las ecuaciones diferenciales para las distintas componentes de los potenciales están desacopladas. Además, cada potencial contribuye a una única componente del campo de desplazamientos (salvo ψ_r, que no contribuye a ningún potencial y por tanto no produce ningún desplazamiento).

Si definimos los siguientes parámetros:

$$\alpha = \frac{\omega}{c_L} \tag{B.9}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_T} \tag{B.10}$$

las soluciones a las ecs. (B.5) a (B.8) vienen dadas por:

$$\phi = A_\varphi H_0^{(1)}(\alpha r) + B_\varphi H_0^{(2)}(\alpha r) \tag{B.11}$$

$$\psi_r = A_r H_1^{(1)}(\beta r) + B_r H_1^{(2)}(\beta r) \tag{B.12}$$

$$\psi_z = A_z H_0^{(1)}(\beta r) + B_r H_0^{(2)}(\beta r) \tag{B.13}$$

$$\psi_\theta = A_\theta H_1^{(1)}(\beta r) + B_\theta H_1^{(2)}(\beta r) \tag{B.14}$$

De las soluciones anteriores, sólo consideramos aquellas que representan ondas alejándose del agujero (propagación hacia $r \to +\infty$). Como hemos empleado una dependencia temporal de la forma $e^{i\omega t}$, dichas ondas vienen dadas por $H_m^{(2)}(\alpha r)$ y $H_m^{(2)}(\beta r)$. Por tanto:

$$\varphi = B_\varphi H_0^{(2)}(\alpha r) \tag{B.15}$$

$$\psi_r = B_r H_1^{(2)}(\beta r) \tag{B.16}$$

$$\psi_z = B_r H_1^{(2)}(\beta r) \tag{B.17}$$

$$\psi_\theta = B_\theta H_1^{(2)}(\beta r) \tag{B.18}$$

y sustituyendo las ecs. (B.15) a (B.18) en las ecs. (B.2) a (B.4), obtenemos el campo de desplazamientos en función de las funciones de Hankel como:

$$
\begin{aligned}
u_r &= B_\varphi \frac{d}{dr}\left[H_0^{(2)}(\alpha r)\right] = B_\varphi\, \alpha\, H'^{(2)}_0(\alpha r) && \text{(B.19)}\\
u_z &= B_\theta \left[\frac{d}{dr}\left[H_1^{(2)}(\beta r)\right] + \frac{H_1^{(2)}(\beta r)}{r}\right] = B_\theta \left[\beta\, H'^{(2)}_1(\beta r) + \frac{H_1^{(2)}(\beta r)}{r}\right] && \text{(B.20)}\\
u_\theta &= -B_z \frac{d}{dr}\left[H_0^{(2)}(\beta r)\right] = -B_z\, \beta\, H'^{(2)}_0(\beta r) && \text{(B.21)}
\end{aligned}
$$

donde se ha empleado la siguiente notación:

$$
H'_m(Z) = \frac{d}{dZ}\Big[H_m(Z)\Big] \tag{B.22}
$$

Teniendo en cuenta la siguiente relación entre la función de Hankel y su derivada [7]:

$$
H'_m(Z) = H_{m-1}(Z) - \frac{m}{Z} H_m(Z) \tag{B.23}
$$

que particularizada para $m = 0, 1$ queda:

$$
\begin{aligned}
H'^{(2)}_0(Z) = H_{-1}^{(2)}(Z) = -H_1^{(2)}(Z) && \text{(B.24)}\\
H'^{(2)}_1(Z) = H_0^{(2)}(Z) - \frac{1}{Z} H_1^{(2)}(Z) && \text{(B.25)}
\end{aligned}
$$

Al ser $Z = \alpha r$, el campo de desplazamientos para el caso axisimétrico (ecs. (B.19) a (B.21)) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
u_r &= -B_\varphi\, \alpha\, H_1^{(2)}(\alpha r) && \text{(B.26)}\\
u_z &= B_\theta\, \beta\, H_0^{(2)}(\beta r) && \text{(B.27)}\\
u_\theta &= B_z\, \beta\, H_1^{(2)}(\beta r) && \text{(B.28)}
\end{aligned}
$$

Para calcular las constantes B_ϕ, B_z y B_θ aplicaremos las condiciones de contorno correspondientes a cada subproblema (casos de desplazamiento prescrito). Definiremos el radio del agujero como $r = a$.

Desplazamiento Radial: $u_r(a) = 1$, $u_z(a) = 0$, $u_\theta(a) = 0$

Sustituyendo las condiciones de contorno en las ecs. (B.26) a (B.28), obtenemos el valor de las constantes como:

$$
\begin{aligned}
B_\varphi &= \frac{-1}{\alpha\, H_1^{(2)}(\alpha a)} && \text{(B.29)}\\
B_\theta &= B_z = 0 && \text{(B.30)}
\end{aligned}
$$

y sustituyendo dichas constantes en las expresiones correspondientes de los desplazamientos (ecs. (B.26) a (B.28)), obtenemos las soluciones analíticas del campo de desplazamientos para el caso axisimétrico ($m = 0$) del problema de generación desde un agujero cilíndrico sometido en su borde a un desplazamiento radial unidad:

$$u_r = \frac{H_1^{(2)}(\alpha r)}{H_1^{(2)}(\alpha a)} \tag{B.31}$$

$$u_z = 0 \tag{B.32}$$

$$u_\theta = 0 \tag{B.33}$$

Desplazamiento Circunferencial: $u_r(a) = 0$, $u_z(a) = 0$, $u_\theta(a) = 1$

Sustituyendo las condiciones de contorno en las ecs. (B.26) a (B.28), obtenemos el valor de las constantes como:

$$B_z = \frac{1}{\beta\, H_1^{(2)}(\beta a)} \tag{B.34}$$

$$B_\varphi = B_\theta = 0 \tag{B.35}$$

y sustituyendo dichas constantes en las expresiones correspondientes de los desplazamientos (ecs. (B.26) a (B.28)), obtenemos las soluciones analíticas del campo de desplazamientos para el caso axisimétrico ($m = 0$) del problema de generación desde un agujero cilíndrico sometido en su borde a un desplazamiento circunferencial unidad:

$$u_r = 0 \tag{B.36}$$

$$u_z = 0 \tag{B.37}$$

$$u_\theta = \frac{H_1^{(2)}(\beta r)}{H_1^{(2)}(\beta a)} \tag{B.38}$$

B.2.2. Caso No Axisimétrico ($m \neq 0$)

En este caso los potenciales que son solución de las correspondientes ecuaciones de ondas producen un campo de desplazamientos cuya expresión no es más que la solución obtenida por Sezawa, ecs. (3.91) a (3.93), particularizadas para el caso $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ (lo que implica tomar $s = d = 0$ en dichas ecuaciones). De nuevo, sólo consideramos ondas alejándose del agujero (propagación hacia $r \rightarrow +\infty$) y, como hemos empleado una dependencia temporal de la forma $e^{i\omega t}$, las soluciones vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$u_r = \left[A \frac{d}{dr} \left[H_m^{(2)}(\alpha r) \right] - B \frac{m}{r} H_m^{(2)}(\beta r) \right] e^{im\theta} \, e^{i\omega t} \tag{B.39}$$

$$u_z = C \, \beta \, H_m^{(2)}(\beta r) \, e^{im\theta} \, e^{i\omega t} \tag{B.40}$$

$$u_\theta = \left[A \frac{m}{r} H_m^{(2)}(\alpha r) - B \frac{d}{dr} \left[H_m^{(2)}(\beta r) \right] \right] i e^{im\theta} \, e^{i\omega t} \tag{B.41}$$

donde los parámetros α y β vienen dados por las ecs. (B.9) y (B.10), respectivamente. En comparación con el caso axisimétrico, se observa que las componentes de los potenciales intervienen en más de una componente de los desplazamientos (salvo ψ_r y ψ_θ que siguen interviniendo únicamente en u_z).

Para calcular las constantes A, B y C aplicaremos las condiciones de contorno correspondientes a cada subproblema (casos de desplazamiento prescrito). Definiremos el radio del agujero como $r = a$.

Desplazamiento Radial: $u_r(a) = 1$, $u_z(a) = 0$, $u_\theta(a) = 0$

Sustituyendo las condiciones de contorno en las ecs. (B.26) a (B.28) y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, obtenemos el valor de las constantes como:

$$A = -\frac{1}{\Lambda_1} \frac{d}{dr} \left[H_m^{(2)}(\beta a) \right] \tag{B.42}$$

$$B = -\frac{1}{\Lambda_1} \frac{m}{a} H_m^{(2)}(\alpha a) \tag{B.43}$$

$$C = 0 \tag{B.44}$$

y sustituyendo dichas constantes en las expresiones correspondientes de los desplazamientos (ecs. (B.39) a (B.41)), obtenemos las soluciones analíticas del campo de desplazamientos para el caso no axisimétrico ($m \neq 0$) del problema de generación desde un agujero cilíndrico sometido en su borde a un desplazamiento radial unidad.

Desplazamiento Circunferencial: $u_r(a) = 0$, $u_z(a) = 0$, $u_\theta(a) = 1$

Sustituyendo las condiciones de contorno en las ecs. (B.26) a (B.28) y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, obtenemos el valor de las constantes como:

$$A = \frac{1}{\Lambda_1}\frac{m}{a}H_m^{(2)}(\beta a) \tag{B.45}$$

$$B = \frac{1}{\Lambda_1}\frac{d}{dr}\big[H_m^{(2)}(\alpha a)\big] \tag{B.46}$$

$$C = 0 \tag{B.47}$$

y sustituyendo dichas constantes en las expresiones correspondientes de los desplazamientos (ecs. (B.39) a (B.41)), obtenemos las soluciones analíticas del campo de desplazamientos para el caso no axisimétrico ($m \neq 0$) del problema de generación desde un agujero cilíndrico sometido en su borde a un desplazamiento circunferencial unidad.

En todas las expresiones de las constantes anteriores, el parámetro Λ_1 no es más que el determinante del sistema de ecuaciones obtenido al imponer las condiciones de contorno en desplazamientos en el borde del agujero:

$$\Lambda_1 = -\frac{d}{dr}\big[H_m^{(2)}(\alpha a)\big]\,\frac{d}{dr}\big[H_m^{(2)}(\beta a)\big] + \frac{m^2}{a^2}H_m^{(2)}(\alpha a)\,H_m^{(2)}(\beta a) \tag{B.48}$$

Para evaluar numéricamente dichas expresiones, utilizaremos las siguientes relaciones entre la función de Hankel y sus derivadas [7]:

$$\frac{d}{dr}\big[H_m(\alpha r)\big] = \frac{\alpha}{2}\Big[H_{m-1}(\alpha r) - H_{m+1}(\alpha r)\Big] \tag{B.49}$$

$$\frac{d}{dr}\big[H_m(\beta r)\big] = \frac{\beta}{2}\Big[H_{m-1}(\beta r) - H_{m+1}(\beta r)\Big] \tag{B.50}$$

B.3. Problema de Tensión Plana

Las expresiones que hemos obtenido para el campo de desplazamientos en los casos axisimétrico y no axisimétrico partieron de la suposición de *Deformación Plana*. Nuestro objetivo es comparar los resultados obtenidos mediante la aplicación del MEF con los correspondientes resultados analíticos del problema de propagación de ondas cilíndricas en placas, para el caso de su generación desde una cavidad cilíndrica. Esta comparación nos permitirá verificar la validez del desarrollo en EF realizado en el Capítulo 3, comparación que realizaremos considerando valores bajos de frecuencia ω.

Para dichos valores de frecuencia, el problema en 3D de propagación de ondas generadas desde una cavidad cilíndrica se asemeja un problema de *Tensión Plana* para los desplazamientos u_r y u_θ considerados. Por ello es necesario trasformar, a un problema de tensión plana, las soluciones del campo de desplazamientos para los casos axisimétrico y no axisimétrico (ya que actualmente están formuladas en deformación plana).

B.3.1. Relación entre Tensión Plana y Deformación Plana

Para obtener la relación entre los problemas de tensión plana y de deformación plana recurrimos a la Teoría de la Elasticidad. A través de ésta vamos a formular ambos problemas con el fin de relacionar los parámetros de las ecuaciones que los definen.

De forma general, la ley de comportamiento (relación tensión-deformación) y la ecuación de compatibilidad (relación deformación-desplazamiento) en coordenadas cartesiadnas vienen formuladas, respectivamente, por las siguientes ecuaciones en notación compacta:

$$\tau_{ij} = \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij} \tag{B.51}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\big(u_{i,j} + u_{j,i}\big) \tag{B.52}$$

donde i y j son índices de valor $1, 2, 3$.

Deformación plana

Las hipótesis de este problema son:

$$u_3 = 0 \tag{B.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \tag{B.54}$$

Si particularizamos la ecuación general de compatibilidad (ec. (B.52)) con dichas hipótesis, obtenemos:

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} = 0 \tag{B.55}$$

$$\varepsilon_{3i} = \frac{1}{2}\big(u_{3,i} + u_{i,3}\big) = 0 \Rightarrow \tau_{3i} = 0 \tag{B.56}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = u_{1,1} + u_{2,2} = u_{\gamma,\gamma} \qquad (\gamma = 1, 2) \tag{B.57}$$

Por tanto, la expresión de la ley de comportamiento (ec. (B.51)) para el problema de deformación plana queda:

$$\tau_{\alpha\beta} = \lambda\,u_{\gamma,\gamma}\,\delta_{\alpha\beta} + \mu\big(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\big) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{B.58}$$

$$\tau_{33} = \lambda\,u_{\gamma,\gamma} \tag{B.59}$$

Tensión plana

Las hipótesis de este problema son:

$$\tau_{33} = \tau_{23} = \tau_{13} = 0 \tag{B.60}$$
$$u_3 \neq 0 \tag{B.61}$$

Si particularizamos la ley de comportamiento (ec. (B.51)) con dichas hipótesis, obtenemos las siguientes expresiones para los desplazamientos:

$$\tau_{13} = \mu \left(u_{1,3} + u_{3,1}\right) = 0 \Rightarrow u_{1,3} = -u_{3,1} \tag{B.62}$$
$$\tau_{23} = \mu \left(u_{2,3} + u_{3,2}\right) = 0 \Rightarrow u_{2,3} = -u_{3,2} \tag{B.63}$$
$$\tau_{33} = \lambda \left(u_{\gamma,\gamma} + u_{3,3}\right) + 2\mu\, u_{3,3} = 0 \Rightarrow u_{3,3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} u_{\gamma,\gamma} \tag{B.64}$$

Por tanto, la expresión de la ecuación general de compatibilidad (ec. (B.52)) para el problema de deformación plana queda:

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{\gamma\gamma} + \varepsilon_{33} = u_{\gamma,\gamma} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} u_{\gamma,\gamma} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\gamma,\gamma} \quad (\gamma = 1, 2) \tag{B.65}$$

Si ahora sustituimos la expresión anterior en la ley general de comportamiento (ec. (B.51)) obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{\alpha\beta} + 2\mu\, \varepsilon_{\alpha\beta} = \lambda \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu\big(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\big) = \\ &= \lambda^* u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu^* \big(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\big) \end{aligned} \tag{B.66}$$

Si comparamos la ec. (B.58) con la ec. (B.66), que corresponden a la formulación en deformación plana y en tensión plana respectivamente, se observa que ambas tienen la misma forma y que el único cambio se produce en el parámetro λ dichas ecuaciones. De esta forma si denotamos las constantes de Lamé para el problema de deformación plana como λ y μ, y las correspondientes al problema de tensión plana como λ^* y μ^*, la relación entre ellas viene dada por las siguientes expresiones:

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \tag{B.67}$$
$$\mu^* = \mu \tag{B.68}$$

La solución para los problemas de tensión plana se puede obtener a partir de la solución para los problemas de deformación plana simplemente utilizando unas constantes de Lamé equivalentes: λ^* y μ^*.

B.3.2. Soluciones al problema de generación en Tensión Plana

Una vez obtenida la relación entre las constantes de los problemas de tensión plana y deformación plana, vamos a aplicar dichas modificaciones a las soluciones obtenidas para los distintos casos de generación de ondas en la placa que hemos estudiado.

En primer lugar debemos definir unas nuevas velocidades de propagación de ondas, ya que como sabemos dependen de las constantes λ y μ consideradas (ec. (2.6)). Estas nuevas velocidades las denotaremos como c_L^* para la velocidad de propagación de la ondas longitudinales y c_T^* para la velocidad de propagación de las ondas transversales. Por tanto, teniendo en cuenta las ecs. (B.67) y (B.68), las nuevas velocidades de propagación de ondas en tensión plana serán:

$$c_L^* = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}} = c_L \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{\kappa^2 - 1} \tag{B.69}$$

$$c_T^* = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}} = c_T \tag{B.70}$$

donde hemos definido un nuevo parámetro que relaciona las velocidades de propagación en deformación plana:

$$\kappa = \frac{c_L}{c_T} \tag{B.71}$$

Con el fin de obtener las soluciones al problema de generación (casos axisimétrico y no axisimétrico) para cada uno de los desplazamientos prescritos considerados (radial y circunferencial), debemos definir unos nuevos parámetros α^* y β^* para adaptar las ecuaciones obtenidas anteriormente con la hipótesis de deformación plana al actual problema de tensión plana (que será el que aproximaremos con los resultados numéricos de EF). Según las ecs. (B.9) y (B.10), dichos parámetros son:

$$\alpha^* = \frac{\omega^2}{{c_L^*}^2} = \frac{\omega^2}{c_L^2}\frac{\kappa^2}{2\sqrt{\kappa^2-1}} = \alpha\frac{\kappa^2}{2\sqrt{\kappa^2-1}} \tag{B.72}$$

$$\beta^* = \frac{\omega^2}{{c_T^*}^2} = \frac{\omega^2}{c_T^2} = \beta \tag{B.73}$$

Por tanto, las ecuaciones que expresan la solución al problema de generación en tensión plana se obtienen sustituyendo las ecs. (B.72) y (B.73) en las correspondientes expresiones para cada uno de los casos y subcasos estudiados.

B.4. Problema de Flexión de Placa Delgada

Para el caso de bajas frecuencias, el problema de generación de ondas en la placa mediante la aplicación de un desplazamiento axial (cuya condición de contorno es $u_z(r = a) = 1$) puede asimilarse al cálculo de la deformada de una placa delgada sometida a flexión.

La ecuación diferencial de la deformada de una placa delgada sometida a flexión viene dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 u_z + \frac{\rho d}{D} \ddot{u}_z = \frac{p_z}{D} \tag{B.74}$$

donde u_z es la deformada vertical (flecha), p_z es la carga por unidad de superficie actuando sobre la placa en dirección z y D es la rigidez a flexión de la placa, cuya expresión es:

$$D = \frac{E\, I}{1 - \nu^2} = \frac{E\, d^3}{12(1 - \nu^2)} \tag{B.75}$$

siendo I la inercia de la placa delgada.

La ec. (B.74) corrresponde al problema dinámico, por lo que para el problema armónico, cuya dependencia temporal viene expresada por $e^{i\omega t}$, la ecuación será:

$$\nabla^2 \nabla^2 u_z - \omega^2 \frac{\rho d}{D} u_z = \frac{p_z}{D} \tag{B.76}$$

En nuestro caso, la placa tiene sus superficies libres de tensiones luego $p_z = 0$, y si además denotamos como:

$$\chi = \sqrt{\frac{\omega}{b}}, \qquad b^2 = \frac{D}{\rho d} \tag{B.77}$$

entonces la ecuación diferencial del problema armónico queda de la siguiente forma:

$$\nabla^2 \nabla^2 u_z - \chi^4 u_z = 0 \tag{B.78}$$

Para obtener la solución a la ecuación diferencial anterior, teniendo en cuenta que en una placa delgada la deformada u_z es constante en el espesor (y por tanto es independiente de la coordenada vertical z), emplearemos una separación de variables del tipo:

$$u_z(r, \theta, t) = R(r) \left[\begin{array}{c} \cos(m\theta) \\ \mathrm{sen}\,(m\theta) \end{array} \right] e^{i\omega t} = R(r)\, e^{im\theta}\, e^{i\omega t} \tag{B.79}$$

Caso Axisimétrico $(m = 0)$

Para el caso axisimétrico ($\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$), la solución a la ecuación diferencial de la deformada de una placa delgada (ec. (B.78)) teniendo en cuenta que la dependencia temporal es de la forma $e^{i\omega t}$, para el caso de ondas en un dominio infinito propagándose hacia $r \to +\infty$, viene dada por la siguiente expresión:

$$u_z = \left[A\, H_0^{(2)}(\chi r) + B\, K_0(\chi r)\right] e^{i\omega t} \tag{B.80}$$

donde $K_0(\chi r)$ es una de las funciones de Bessel modificadas (funciones de Bessel con argumento imaginario). De forma general, la función $K_\nu(Z)$ es solución de la ecuación modificada de Bessel, que tiene la siguiente expresión:

$$Z^2 \frac{d^2 y}{dZ^2} + Z \frac{dy}{dZ} - \left(Z^2 + \nu^2\right) y = 0 \tag{B.81}$$

Las constantes A y B se calculan aplicando las condiciones de contorno en el borde $r = a$ (donde se aplica el desplazamiento axial prescrito unitario), que son:

$$u_z(r = a) = 1, \qquad u_r(r = a) = 0 \tag{B.82}$$

De acuerdo con la teoría de placa delgada de Kirchhoff:

$$u_r(r, z) = u_r(r, 0) - z \frac{\partial u_z}{\partial r}(r) \tag{B.83}$$

luego la condición de contorno $u_r(r = a) = 0$ es equivalente a:

$$\frac{du_z}{dr}(r = a) = 0 \tag{B.84}$$

Dichas condiciones de contorno corresponde a las de un borde empotrado. Como resultado de las anteriores condiciones, las constantes resultan:

$$A = -\frac{K_1(\chi a)}{\Lambda_2} \tag{B.85}$$

$$B = \frac{H_1^{(2)}(\chi a)}{\Lambda_2} \tag{B.86}$$

donde:

$$\Lambda_2 = -H_0^{(2)}(\chi a)\, K_1(\chi a) + K_0(\chi a)\, H_1^{(2)}(\chi a) \tag{B.87}$$

Caso No Axisimétrico ($m = 1$)

Para el caso no axisimétrico, la solución a la ecuación diferencial de la deformada de una placa delgada (ec. (B.78)) teniendo en cuenta que la dependencia temporal es de la forma $e^{i\omega t}$, para el caso de ondas en un dominio infinito propagándose hacia $r \to +\infty$, viene dada por la siguiente expresión:

$$u_z = \left[A\, H_m^{(2)}(\chi r) + B\, K_m(\chi r) \right] e^{im\theta}\, e^{i\omega t} \tag{B.88}$$

donde $K_m(\chi r)$ es una de las funciones de Bessel modificadas (funciones de Bessel con argumento imaginario).

Las constantes A y B se calculan aplicando las condiciones de contorno en el borde $r = a$ (donde se aplica el desplazamiento axial prescrito unitario), que en principio serían las siguientes:

$$u_z(r = a) = 1 \cdot \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \operatorname{sen}(m\theta) \end{bmatrix}, \qquad \frac{du_z}{dr}(r = a) = 0 \tag{B.89}$$

Como sabemos, el desplazamiento prescrito que imponemos en la cavidad cilíndrica es un desplazamiento axial unitario, siendo nulos los desplazamientos para el resto de las coordenadas ($u = [0, 1, 0]^T$). No obstante, para placas delgadas la condición $u_\theta = 0$ en el borde ($\forall z$) sólo es compatible con un valor $u_z = 0$, dado que según la teoría de placas delgadas de Kirchhoff:

$$u_\theta(r, z) = u_\theta(r, 0) - \frac{z}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}(r) \tag{B.90}$$

por lo que si queremos imponer un desplazamiento de valor $u_z = \cos(m\theta)$ en el borde, habrá que aplicar un cierto desplazamiento circunferencial, cuyo valor es:

$$u_\theta(r = a, z, \theta) = \frac{z\, m}{a} \operatorname{sen}(m\theta) \tag{B.91}$$

Con estas nuevas condiciones las constantes resultan:

$$A = \frac{K'_m(\chi a)}{\Lambda_2} \tag{B.92}$$

$$B = -\frac{H'^{(2)}_m(\chi a)}{\Lambda_2} \tag{B.93}$$

donde:

$$\Lambda_2 = H_m^{(2)}(\chi a)\, K'_m(\chi a) - H'^{(2)}_m(\chi a)\, K_m(\chi a) \tag{B.94}$$

Para evaluar numéricamente dichas expresiones, utilizaremos las siguientes relaciones entre la función de Hankel y sus derivadas [7]:

$$H'_m(Z) = \frac{1}{2}\Big[H_{m-1}(Z) - H_{m+1}(Z)\Big] \tag{B.95}$$

$$K'_m(Z) = -\frac{1}{2}\Big[K_{m-1}(Z) + K_{m+1}(Z)\Big] \tag{B.96}$$

Bibliografía

[1] J. D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids.* North-Holland, New York, 1973.

[2] J.D. Achenbach and Y. Xu. Wave motion in an isotropic elastic layer generated by a time-hamonic point load of arbitrary direction. *Journal of the Acoustical Society of America*, 106(1):83 – 90, July 1999.

[3] J.M. Galán. *Estudio numérico de la propagación de ondas elásticas en placas y de su interacción con defectos.* PhD thesis, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, Junio 2003.

[4] K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids.* Dover, New York, 1975.

[5] D. Hebrero. Estudio numérico de la propagación y generación de ondas elásticas cilíndricas guiadas en placas. Master's thesis, Departamento de Ingeniería del Diseño, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, Diciembre 2005.

[6] E. Kausel. Forced vibrations of circular foundations on layered media. Technical Report R74-11, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, January 1974.

[7] N.Ñ. Lebedev. *Special functions and their applications.* Dover, New York, 1972.

[8] N. López. Incidencia oblícua de ondas elásticas guiadas en el borde de una placa semi-infinita. Master's thesis, Departamento de Ingeniería del Diseño, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, Febrero 2005.

[9] K. Sezawa. Further studies on rayleigh waves having some azimutal distribution. *Bulletin of the Earthquake Research Institute of Tokyo*, 6:1–18, 1929.

[10] X. Zhao and J.L. Rose. Three-dimensional defect in a plate boundary element modeling for guided wave scattering. *Key Engineering Materials*, 270-273:453–460, 2004.