8.- Optimización del diseño de una red de ferrocarril.

Se ha decidido empezar por la optimización del diseño de la red con el objetivo de crear una base sólida sobre la que poder trabajar. No se va a pretender realizar un problema matemático cerrado, sino simplemente trazar las directrices necesarias para su elaboración.

Un primer paso que hay que dar en este tipo de estudios es decidir cuál va a ser el horizonte temporal del diseño que se quiere realizar. Como ya se ha comentado anteriormente en este proyecto, el horizonte temporal de una línea de ferrocarril debe ser el menos de 20 años, ya que su elevado coste de infraestructura no permite hacer continuas modificaciones de la red. Es posible incluso, que la vigencia de dicha red sea superior a esos 20 años, con lo que se debe tener en cuenta futuras posibles necesidades de la línea.

El siguiente paso necesario para este proceso de optimización es decidir qué datos se van a considerar de la red. Esta es una parte en la que no tiene porqué conocerse todos sus aspectos desde el primer momento, ya que quizás no se disponga de toda la información necesaria. Esto hace que el proceso de optimización sea un proceso iterativo, hasta que todo el problema sea formulado correctamente.

A continuación, se decidirá cual es la función objetivo del problema. Ésta, va a venir dada por el objeto del problema, buscando maximizarla o minimizarla, en función de cómo estén formuladas las variables, y el método que se crea mejor para resolver el problema.

Por último, se decidirán cuales van a ser las restricciones del problema, que vendrán dadas por las exigencias que se le apliquen a dicho problema. A la hora de formularlas, hay que tener cuidado de no limitar posibles valores de las variables que pudieran ser beneficiosos para el objetivo del problema. Esto es importante en los valores límite de las restricciones, ya que a veces no se considera que la restricción pueda ser igual a un valor (sólo mayor o menor), con lo que se anulan posibilidades.

8.1.- Horizonte temporal.

Tal y como se ha comentado anteriormente, lo primero que se va a hacer es plantearse un horizonte temporal. En este caso concreto, como no se aplica a ningún caso real, no se va a plantear ningún horizonte concreto, pero éste ha de ser lo suficientemente largo como para no prever modificaciones en bastante tiempo.

8.2.- Notación.

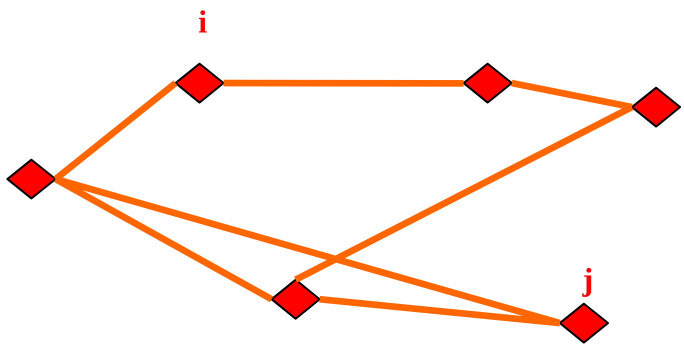
En segundo lugar, se va a explicar la notación que se va a utilizar en este apartado. Se van a considerar los puntos de partida o llegada como nodos, ya que se tratará de utilizar el esquema de una red de transporte. A las uniones entre los nodos se las va a denominar arcos.

8.3.- Variables.

A continuación se van a caracterizar las variables necesarias para la resolución del problema.

- Π_k: Es la demanda que origina el par origen-destino "k". Dicha demanda no depende de la ruta que se tome para llegar al destino deseado, sólo donde se inicia el viaje y dónde acaba. Ésta aparecerá en función de las restricciones que haya en el problema.

- X_{ij}^k: Es el flujo de personas que transcurren desde el nodo "i" al nodo "j", sin importar cual es su par origen "k".



¿Ruta de k_{ij}?

- Ω_{ij}: Es una variable binaria que expresa si el arco entre los nodos "i" y "j" se va a construir o no. Como es una variable binaria, su valor será "1" si se lleva a cabo la obra y se construye dicho arco, y "0" si no se construye.

- Q_{ij}: Es una variable que indica la capacidad de flujo de personas instalada en el arco "ij". Su valor es igual al número máximo de personas que puede circular por dicho arco, sin importar cual es la ruta "k" en la que se encuentran.

- P_{ij}: Es la probabilidad de que el arco "ij" sea utilizable. Ésta es una cantidad que hay que estimar en función de las posibles perturbaciones que se puedan dar, ya que hay que considerar de alguna manera los problemas que puedan ocurrir en dicho arco. La forma de calcular esta probabilidad es mediante el índice *porcentaje de servicios operados*, obtenido de experiencias previas.

- q_{ij}: Es la capacidad efectiva del arco "ij" una vez que ha sido afectado por las perturbaciones.

- τ_k: Es el tiempo previsto por la compañía que se debería tardar en hacer el trayecto "k" para que dicho viaje sea atractivo para los clientes.

- T_k: Es el tiempo de trayecto real que se tiene a la hora de recorrer todos los arcos que hayan sido necesarios en la ruta "k". Este tiempo variará en función de las perturbaciones que haya en dicho recorrido.

- t_{ij}: Es el tiempo de trayecto entre los nodos "ij".

- e_{ij}: Es el retraso medio en el que se incurre durante el recorrido del trayecto "ij". La forma de calcular este exceso de tiempo es mediante el índice *duración media del retraso*, obtenido de experiencias previas.

- ϕ: Es una cota superior necesaria para la optimización de problemas en los que hay variables binarias. Ya se explicará su uso cuando se expongan las restricciones del problema. Su valor es muy grande, pudiendo considerarse un mínimo en función de los datos que haya del problema.

- C_{ij}: Es el costo de la obra civil de construir el tramo "ij".

- D_{ij}: Es el costo asociado a instalar una capacidad de flujo de personas "Q_{ij}" en el arco "ij".

- F_k: Es el costo asociado a la diferencia de tiempo entre el tiempo τ_k y T_k, ya que el hecho de no cumplir los horarios previstos implica un coste, ya sea por cuestiones de legislación, garantías que dé la compañía, o descontento de los pasajeros que buscarán otro medio de transporte que les sea más satisfactorio. Esta es la forma de cuantificar todos estos posibles problemas.

Haciendo una recopilación de todas las incógnitas, se tiene que el problema lo forman un total de 14 tipos de variables, con 3 posibles subíndices. Esto no implica nada en cuanto a la extensión del problema, ya que éste depende del número de nodos y arcos de que disponga la red.

8.4.- Restricciones.

Una vez que se han expuesto las variables que van a intervenir en el problema, se van a desarrollar las restricciones.

$$\sum_{j\in D(i)} X_{ij}^{\ k} - \sum_{j\in A(i)} X_{ji}^{\ k} = \begin{cases} \Pi_{\mathrm{k}} & \text{si i} = Origen(\mathrm{k}) \\ 0 & \text{si i} \neq \text{Origen}(\mathrm{k}), \text{Destino}(\mathrm{k}) \\ -\Pi_{\mathrm{k}} & \text{si i} = \text{Destino}(\mathrm{k}) \end{cases} ;\ \forall i, k \in N$$

Con esto se asegura que se cumple la ley de Kirchhoff en todos los nodos de la red.

$$\sum_k X_{ij}^{\ k} + \sum_k X_{ji}^{\ k} \leq q_{ij}, \forall i, j, k \in N$$

Con esta restricción, se limita la capacidad de personas que pueden transitar por los arcos

$$q_{ij} \leq Q_{ij} \cdot P_{ij}; \forall i, j \in N$$

Con esta restricción se pretende dar una referencia de la capacidad real que se tendrá en el arco, una vez que aparezcan perturbaciones.

$$\sum_k X_{ij}^{\ k} + \sum_k X_{ji}^{\ k} \leq \phi \cdot \Omega_{ij}, \forall i, j \in N$$

Con esta restricción se pretende averiguar si se va a construir el trazado que une los nodos "ij" o no.

$$\sum_i \sum_j \left(t_{ij}^{\ k} + e_{ij}^{\ k}\right) = T_k; \forall k \in N$$

Con esta restricción se pretende calcular el tiempo real de trayecto entre los nodos "ij", para cualquier par origen-destino "k".

Con estas restricciones, se puede asegurar el buen funcionamiento del sistema, y el cumplimiento de los servicios, incluso en el caso de que ocurran perturbaciones, ya que se han tenido en cuenta en el propio diseño de la red.

8.5.- Función objetivo.

Lo único que queda es decidir cual va a ser la función objetivo del problema. Como ocurre en toda empresa, lo primordial es que el trabajo resulte rentable, por lo que la función objetivo va a ir encaminada a minimizar los costes. En este caso se trata de minimizar el coste de la obra civil, el coste de aumentar la capacidad de pasajeros en un arco, y el coste que acarrearía los retrasos que haya respecto al horario previsto.

La función objetivo de este problema vendrá dada por:

$$\Longrightarrow \qquad Min \sum_i \sum_j \left(C_{ij} Y_{ij} + D_{ij} Q_{ij} \right) + \sum_k F_k \left(T_k - \tau_k \right)$$

8.6.- Problema completo.

A continuación se va a exponer el problema completo:

$$Min \sum_i \sum_j \left(C_{ij} Y_{ij} + D_{ij} Q_{ij} \right) + \sum_k C_k \left(T_k - \tau_k \right)$$

$$sa: \quad \sum_{j \in D(i)} X_{ij}{}^{k} - \sum_{j \in A(i)} X_{ji}{}^{k} = \begin{cases} \Pi_{\mathrm{k}} & \text{si i} = \mathrm{O}rigen(\mathrm{k}) \\ 0 & \text{si i} \neq \text{Origen}(\mathrm{k}), \text{Destino}(\mathrm{k}) \\ -\Pi_{\mathrm{k}} & \text{si i} = \text{Destino}(\mathrm{k}) \end{cases} ; \ \forall i, k \in N$$

$$\sum_k X_{ij}{}^{k} + \sum_k X_{ji}{}^{k} \leq q_{ij}, \forall i, j, k \in N$$

$$q_{ij} \leq Q_{ij} \cdot P_{ij}; \forall i, j \in N$$

$$\sum_k X_{ij}{}^{k} + \sum_k X_{ji}{}^{k} \leq \phi \cdot \Omega_{ij}, \forall i, j \in N$$

$$\sum_i \sum_j \left(t_{ij}{}^{k} + e_{ij}{}^{k} \right) = T_k; \forall k \in N$$

Π_{k}, X_{ij}, Q_{ij}, P_{ij}, qij, τ_{k}, T_{k}, t_{ij}, e_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, $F_{k} \geq 0$; Ω_{ij}=0,1; $\phi \equiv$ *Cota superior*.