ANEXO

ANEXO

A.1 LIBRERÍAS DE OPTIMIZACIÓN XA

Las librerías de optimización permiten resolver un problema de forma óptima, o bien de forma aproximada mediante condiciones de tiempo de parada. Éstas son cada día más útiles gracias a la mejora de las tecnologías (mayor capacidad de memoria, más velocidad de computación) y de los algoritmos estándar de resolución que las componen.
De entre las librerías de optimización más conocidas cabe citar:
CPLEX, XA, LINGO, GAMS, Solver.
El único esfuerzo que requieren para la ejecución consiste en la introducción del modelo, la cual se puede llevar a cabo mediante archivo de texto (Offline – Formato MPS, SPREADSHEET, etc.) o mediante vectores y matrices (Online).
En los dos próximos apartados se comentan las características más relevantes de las librerías XA, y se hace uso de un ejemplo para aportar claridad a la explicación.
Ejemplo: 25 trabajos; turno de 5 horas (300 min); 4 recursos; solapamiento medio: 2,77 trabajos; solapamiento máximo: 8 trabajos. Objetivo maximizar el peso total de trabajos realizados. Cualquier recurso puede hacer cualquier trabajo a igual coste. Cada trabajo lo realiza un solo recurso. w_i=(72,70,78,85,18,…).

A.1.1 CARACTERÍSTICAS DE XA

XA (Extended Application) es una evolución de LP83/MIP83, cuya facilidad recae en la formulación detallada.
La ejecución puede realizarse mediante archivo de texto (XA.EXE) o incluyendo la librería en otro programa (C, Visual Basic, FoxPro, etc.)
El número máximo de variables permitido depende de la versión y la licencia, poseyendo la versión general alrededor de 100.000 variables y 500.000 restricciones.

Comentaremos XA dividiéndola en tres secciones:

- Formato de Entrada.
- Pantalla de Ejecución.
- Fichero de Salida.

A.1.1.1 FORMATO DE ENTRADA

Cualquier editor o procesador de texto puede ser usado para introducir los datos de entrada para este modo, con tal que la salida sea compatible con EDLIN (editor con el que viene provisto el ordenador). Los informes de entrada son todos de formato libre. Aunque XA no tiene requisitos rígidos de espaciamiento, los archivos problemáticos son más fáciles de leer si las declaraciones son hechas con un espaciado consistente.
El formato de entrada XA para el archivo de texto deberá constar de las siguientes secciones en la disposición mostrada:

> Título: Descripción del Problema.
> Función Objetivo: Maximizar o minimizar los valores de los costes de todas las variables.
> Acotación de Variables: (opcional).
> Restricciones del Problema:

El Título encabeza cada problema, tiene un tamaño máximo de 128 caracteres y es necesario incluirlo.
El formato, para nuestro caso, sería el siguiente:
..TITLE
MODELO FSP

La Función Objetivo comienza su declaración en la línea siguiente al título. Declara el *Objetivo del Problema*, los *Coeficientes de Costes* y las *Variables de Decisión*. En *Objetivo del Problema* se define si el problema es de tipo MINIMIZE o MAXIMIZE, y qué es lo que se minimiza o maximiza. En *Coeficientes de Costes* y *Variables de Decisión* se declaran todas las variables del problema junto con sus coeficientes de costes. Aquellas

variables que no entran en la función objetivo pero serán utilizadas en otras secciones, como por ejemplo en las restricciones, deberán ser declaradas con coste nulo, para no tomarlas en cuenta de momento. Las variables se suponen por defecto continuas y mayores que cero. Si se quiere que una variables sea binaria, debe definirse entre [].
En nuestro caso, un fragmento sería el siguiente:
..OBJECTIVE MAXIMIZE
72[X11]+72[X12]+72[X13]+72[X14]+70[X21]+ 70[X22]+ 70[X23]+ 70[X24]+78[X31]+78[X32]+78[X33]+78[X34]+85[X41]+85[X42]+85[X43]+85[X44]+18[X51]+18[X52]+18[X53]+18[X54]+…

En la sección Acotación de Variables, se presentan las restricciones que limitan el rango permitido de las variables de decisión. Estas cotas pueden ser también impuestas en la sección Restricciones del Problema. Este tipo de restricciones se describen en esta sección y el algoritmo eficiente de acotación es usado en la ejecución posterior de XA. Las reglas que gobiernan son las siguientes: es una sección opcional; cuando las cotas no se encuentran fijadas para una variable, ésta tomará un valor entre 0…∞; el valor de la parte derecha de una ecuación debe ser una constante; si las variables se encuentran explícitamente fijadas, pueden tomar cualquier valor dentro del rango de los números reales; a las variables enteras se les da automáticamente una cota superior.
En nuestro ejemplo las variables no se encuentran acotadas. Un ejemplo genérico es el siguiente:
..BOUNDS
X1>=10
X<=20>=2

Restricciones consta de 5 aspectos fundamentales. Por un lado, se recomienda *Poner Nombre a las Restricciones*, evitando que éste coincida con el nombre de variables, para evitar confusiones en los informes. Un nombre puede ser cualquier cadena de 1 a 8 caracteres terminado por :, que se escribe antes de las restricciones. Por otra parte, hay que *Especificar* el tipo de restricción, eligiendo entre <=,>=,=,FREE. En cuanto *Definir los Coeficientes Independientes*, se puede elegir entre positivo, negativo o

FREE. Cabe destacar que hay que *Definir la Restricción Completamente*, es decir que la definición de una restricción debe terminar antes de que comience la de la siguiente. Las holguras no necesitan ser definidas ya que el programa las genera automáticamente. El final de esta sección coincide con el final del archivo.

En nuestro ejemplo, un fragmento sería:

..CONSTRAINTS

1:X11+X12+X12+X14<=1

2:X21+X22+X23+X24<=1

3:X31+X32+X33+X34<=1

…

Como última consideración, cabe mencionar que: Las líneas en blanco se ignoran; los comentarios deben ir precedidos por *; no se distingue entre mayúsculas y minúsculas; los nombres no pueden cortarse al final de la línea; la longitud máxima de una línea es de 512 caracteres.

A.1.1.2 PANTALLA DE EJECUCIÓN

El programa es llamado mediante la línea de comandos:

C:\directorioXA\xa.exe *fichero_entrada* output *fichero_salida*

A.1.1.3 FICHERO DE SALIDA

Una vez ejecutado el programa, éste devuelve un archivo de salida que consta de 3 partes:

Información general de la resolución.

Valor de las variables.

Informe de las restricciones.

La Información general de la resolución es el informe donde se reflejan todas las características del programa así como las pertenecientes al problema que se ha solucionado.

Para el ejemplo en cuestión:

```
STATISTICS - FILE: entrada  TITLE: MODELO FSP          Mon Oct 25 17:55:22 2004
  xa VERSION 10.0 Intel Extended-DOS x86   USABLE MEMORY 7,541K BYTES
  VARIABLES 100  MAXIMUM 50,000
     0 LOWER, 0 FIXED, 0 UPPER, 0 FREE
  CONSTRAINTS 147   MAXIMUM 10,000
     0 GE, 0 EQ, 147 LE, 0 NULL/FREE, 0 RANGED.
  CAPACITY USED BY CATEGORY-
    0.2% VARIABLE,  1.5% CONSTRAINT, 859 NON-ZEROS, WORK 768,462
  MAXIMIZATION.
   O P T I M A L   S O L U T I O N ---> OBJECTIVE 4,848.50000
   SOLVE TIME 00:00:00  ITER 83  MEMORY USED   0.2%
```

Ordenado por líneas, contiene:

1. Nombre, título del problema, fecha y hora.
2. Versión de XA, cantidad de memoria que se está utilizando.
3. Definición del número de variables que intervienen.
4. Detalle del número de variables que poseen cota superior, valor exacto, cota inferior, valor cualquiera, enteras.
5. Especificación del número de restricciones del problema.
6. Detalle del número de restricciones de GE(<=), EQ(=), LE(>=), nul/free, ranged.
7. Título para la línea 8.
8. % de capacidad utilizado por categoría (variable, restricción, no nulas, trabajo).
9. Declaración del objetivo del problema.
10. Línea de estado. Valor de la solución óptima.
11. Línea de estado. Tiempo de iteración, número de iteraciones, memoria usada.

El Valor de las variables del problema da el nivel de actividad de las variables de decisión, el valor de la función objetivo y los costes reducidos. Para el ejemplo en cuestión, se presenta una parte del archivo de salida:

```
File: entrada                                          Mon Oct 25 17:55:22 2007 Page 1
SOLUTION (Maximized): 4,848.00000  MODELO DFSP
----------------------------------------------------------------------------------
| Variable |  Activity   |     Cost     | Variable |  Activity   |     Cost     |
----------------------------------------------------------------------------------
I      X12        0.00000     341.00000 I      X13        1.00000     341.00000 |
|           REDUCED COST        0.00000 |           REDUCED COST        0.00000 |
----------------------------------------------------------------------------------
I      X22        1.00000     376.00000 I      X23        0.00000     376.00000 |
|           REDUCED COST        0.00000 |           REDUCED COST        0.00000 |
----------------------------------------------------------------------------------
I      X32        0.00000     308.00000 |      X33        0.00000     308.00000 |
|           REDUCED COST        0.00000 |           REDUCED COST        0.00000 |
----------------------------------------------------------------------------------
I      X42        0.00000      14.00000 I      X43        1.00000      14.00000 |
|           REDUCED COST        0.00000 |           REDUCED COST        0.00000 |
----------------------------------------------------------------------------------
I      X51        0.00000     203.00000 I      X52        1.00000     203.00000 |
|           REDUCED COST        0.00000 |           REDUCED COST        0.00000 |
----------------------------------------------------------------------------------
```

Ordenado por líneas, contiene:

1. Nombre del archivo con la formulación del problema, fecha, hora y número de página.
2. Objetivo del problema, valor del óptimo y título.
3. Figuran dos columnas, cada una de las cuales da título a la información contenida más abajo. En primer lugar, el nombre de la variables, luego la actividad y por último el coste.
4. (Primera columna): La variables X12 tiene un valor de actividad de 0 (es decir, el trabajo 1 NO es realizado por el recurso 2), un coste de 341 y un precio reducido de 0. La I indica que es una variable básica, mientras que una U indicaría que se trata de una cota superior.

El Informe de las Restricciones contiene la actividad de las restricciones basado en la actividad de las variables de decisión, reflejando las holguras de las variables del problema.

A.2 PROBLEMAS DE FLUJO A COSTE MÍNIMO

A.2.1 INTRODUCCIÓN

En un problema de flujo a coste mínimo, se parte de un grafo dirigido G=(X,A) en el que cada arco (x,y) tiene un coste por unidad de flujo w(x,y) y posiblemente restricciones inferiores o superiores al valor del flujo que lo recorre. Cada nodo x tiene un suministro/demanda b(x). Si b(x)>0, b(x) representa el suministro en el nodo x; si b(x) <0, -b(x) representa la demanda en el nodo x. Si b(x)=0, e nodo es un nodo de paso. Un flujo admisible en la red es aquel cuyo flujo f(x,y) en el arco (x,y) satisface toda las restricciones, y en el cual se conserva el flujo en todos los nodos. Nótese que la conservación del flujo significa que el flujo que entra en un nodo debe ser igual al que sale de éste (el suministro en un nodo es considerado como flujo externo entrante, y la demanda como flujo saliente). El objetivo es encontrar un flujo admisible que minimice el coste total, $\sum f(x,y).w(x,y)$, donde el sumatorio afecta a todos los arcos de la red.

A.2.2 EJEMPLOS

Numerosos problemas prácticos pueden ser modelados como problemas de flujo a coste mínimo. A continuación se comentan brevemente algunos de ellos:

- Distribución: Se dispone de almacenes (nodos de suministro) que deben enviar unas cantidades a los puntos de venta al público (nodo de demanda). Los costes son proporcionales a las distancias entre nodos y a la cantidad enviada.
- Determinación de Servicios: Se ejemplificará con hospitales, aunque también es de aplicación para estaciones de bomberos y otros servicios a la comunidad. Se dispone de un número de hospitales desde los cuales parten ambulancias, y que operan independientemente. La región se divide en áreas, y cada área será un nodo de suministro, siendo los hospitales los nodos de demanda.
- Distribución de Gas Natural: Se incluyen las fuentes como puntos de suministro de distribuidores o productores, las capacidades de las tuberías como restricciones de los arcos, y los consumidores como

puntos de demanda. Aparece aquí el concepto de *ganancia*, que representa las pérdidas en los arcos, y que hace que el flujo ya no se conserve.

A.2.3 MODELO

Un problema de flujo a coste mínimo definido en un grafo dirigido G=(X,A) puede formularse en programación lineal según:

$$Min \sum_{(x,y)\epsilon A} w(x,y).f(x,y) \tag{A.1}$$

$$\sum_{y} f(x,y) - \sum_{y} f(y,x) = b(x) \;\; \forall x\epsilon X \tag{A.2}$$

$$l(x,y) \leq f(x,y) \leq u(x,y) \;\; \forall (x,y)\epsilon A \tag{A.3}$$

A.2.4 LIBRERÍAS RELAX IV

La solución al problema de flujo a coste mínimo puede hacerse mediante diversos algoritmos. Para probar la viabilidad de la resolución usando teoría de grafos para el escenario I, se genera un ejecutable que usa las librerías RELAX IV de Bersekas et al[1], descargables desde Frangioni[2].

A.2.4.1 FORMATO DE ENTRADA

El formato de entrada, para un problema con *a* arcos y *n* nodos, es el siguiente (en esta disposición):

Nº DE NODOS		*Nº DE ARCOS*	
NODO ORIGEN DEL ARCO i	*NODO DESTINO DEL ARCO i*	*CAPACIDAD DEL ARCO i*	*PESO DEL ARCO i*
NODO ORIGEN	*NODO*	*CAPACIDAD*	*PESO DEL ARCO*

[1] En Bertsekas et a, 1988.
[2] En Frangioni, A, 2001.

DEL ARCO i+1	*DESTINO DEL ARCO i+1*	*DEL ARCO i+1*	*i+1*
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
NODO ORIGEN DEL ARCO a	*NODO DESTINO DEL ARCO a*	*CAPACIDAD DEL ARCO a*	*PESO DEL ARCO a*

FLUJO NODO j (+ SI ES OFERTADO, - SI ES DEMANDADO)

FLUJO NODO j+1 (+ SI ES OFERTAD, - SI ES DEMANDADO)

.
.
.

Flujo nodo n (+ SI ES OFERTADO, - SI ES DEMANDADO)

A.2.4.2 FORMATO DE SALIDA

En el mismo orden en el que figuran los *a* arcos en el archivo de entrada, figurarán en el archivo de salida. El formato sería:

COSTE TOTAL

FLUJO POR EL ARCO i
FLUJO POR EL ARCO i+1
.
.
.
FLUJO POR EL ARCO a

A.3 BATERÍAS Y GENERACIÓN DEL MODELO

A.3.1 INTRODUCCIÓN

Para el capítulo 4, Programación de Trabajos Fijos con Máquinas Uniformes, se generan problemas aleatorios con un número de trabajos (*n*) entre 20 y

70, incrementados de a 10 unidades. Se usan 2, 3 y 5 máquinas (*m*). Para m=2 se escogen dos combinaciones de factores de velocidad, (1,2) y (1,3). Al observarse que para los factores de velocidad (1,2) los problemas son más difíciles de resolver, se usan los factores (1,2,3) para m=3 y (1,2,3,4,5) para m=5, es decir las instancias más complicadas.

En cuanto a los pesos (w_i) y la duración de los trabajos (p_i), se estudian las cuatro combinaciones siguientes:

Caso 1: w_i € [1, 10]; d_i € [5, 10]

Caso 2: w_i € [1, 10]; d_i € [5, 20]

Caso 3: w_i € [1, 50]; d_i € [5, 10]

Caso 4: w_i € [1, 50]; d_i € [5, 20]

Para cada combinación posible, según lo especificado, se genera aleatoriamente una serie de 10 problemas. Al analizar las soluciones, se realiza el promedio de los resultados de cada uno de los diez problemas equivalentes, para obtener soluciones más fiables que de estudiar un solo problema aleatorio de cada clase.

La nomenclatura utilizada para identificar los problemas es la siguiente:

File_l_n_p_s

l: Caso al que pertenece el problema (1,2,3, 4).

n: número de trabajos a realizar (20, 30, 40, 50, 60, 70).

p: Cantidad de máquinas y sus velocidades.

1: 2 máquinas, una a velocidad 1 y otra a velocidad 2.

2: 2 máquinas, una a velocidad 1 y otra a velocidad 3.

3: 3 máquinas, a velocidades 1,2,3.

4: 5 máquinas, a velocidades 1,2,3,4,5.

s: número de problema dentro de los 10 problemas idénticos generados aleatoriamente (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

A.3.2 EJEMPLO

El primer problema generado aleatoriamente de esta batería es el archivo *File_1_20_1_0.txt.* Los datos para el problema, presentados en dicho archivo tal y como se muestran a continuación, son los siguientes:

```
20
8 16 8 10
31 36 5 1
31 36 5 10
32 40 8 5
34 42 8 7
38 43 5 9
39 46 7 3
54 61 7 2
89 95 6 6
92 99 7 8
106 114 8 1
131 136 5 2
131 138 7 7
138 148 10 2
138 145 7 9
138 143 5 6
140 146 6 10
147 157 10 2
148 156 8 1
151 160 9 6
1,2
```

Partiendo de *Ejemplo1_20_1_0.txt* se crea el modelo con Visual Basic.

Con el modelo presentado por Bekki et al[3], la función objetivo y restricciones del problema serían las siguientes:

```
+ 8 [X101]
 + 8 [X102]
 + 1 [X111]
 + 1 [X112]
 + 2 [X121]
 + 2 [X122]
 + 7 [X131]
 + 7 [X132]
 + 2 [X141]
 + 2 [X142]
 + 9 [X151]
 + 9 [X152]
 + 6 [X161]
 + 6 [X162]
 + 10 [X171]
+ 10 [X172]
 + 2 [X181]
 + 2 [X182]
+ 1 [X191]
+ 1 [X192]
 + 6 [X201]
 + 6 [X202]

..CONSTRAINTS
1: X11 +  X12 <=1
2: X21 +  X22 <=1
3: X31 +  X32 <=1
4: X41 +  X42 <=1
5: X51 +  X52 <=1
6: X61 +  X62 <=1
7: X71 +  X72 <=1
8: X81 +  X82 <=1
9: X91 +  X92 <=1
10: X101 +  X102 <=1
11: X111 +  X112 <=1
12: X121 +  X122 <=1
13: X131 +  X132 <=1
14: X141 +  X142 <=1
15: X151 +  X152 <=1
16: X161 +  X162 <=1
17: X171 +  X172 <=1
18: X181 +  X182 <=1
19: X191 +  X192 <=1
20: X201 +  X202 <=1
21: X21 +  X31 <=1
22: X22 +  X12 <=1
23: X22 +  X32 <=1
24: X31 +  X21 <=1
25: X32 +  X12 <=1
26:  X32 +  X22 <=127:
X41 +  X21 <=1
28: X41 +  X31 <=1
29: X42 +  X22 <=1
30: X42 +  X32 <=1
31: X51 +  X21 <=1
32: X51 +  X31 <=1
33: X51 +  X41 <=1
34: X52 +  X22 <=1
35: X52 +  X32 <=1
36: X52 +  X42 <=1
37: X61 +  X41 <=1
38: X61 +  X51 <=1
39: X62 +  X22 <=1
40: X62 +  X32 <=1
41: X62 +  X42 <=1
42: X62 +  X52 <=1
43: X71 +  X41 <=1
44: X71 +  X51 <=1
45: X71 +  X61 <=1
46: X72 +  X22 <=1
47: X72 +  X32 <=1
48: X72 +  X42 <=1
49: X72 +  X52 <=1
50: X72 +  X62 <=1
51: X82 +  X22 <=1
52: X82 +  X32 <=1
53: X82 +  X42 <=1
54: X82 +  X52 <=1
55: X82 +  X62 <=1
56: X82 +  X72 <=1
57: X92 +  X72 <=1
58: X92 +  X82 <=1
59: X101 +  X91 <=1
60: X102 +  X82 <=1
61: X102 +  X92 <=1
62: X112 +  X82 <=1
63: X112 +  X92 <=1
64: X112 +  X102 <=1
65: X121 +  X131 <=1
66: X122 +  X92 <=1
67: X122 +  X102 <=1
87: X152 +  X102 <=1
88: X152 +  X112 <=1
89: X152 +  X122 <=1
90: X152 +  X132 <=1
91: X152 +  X142 <=1
92: X152 +  X162 <=1
93: X161 +  X141 <=1
94: X161 +  X151 <=1
95: X162 +  X92 <=1
96: X162 +  X102 <=1
97: X162 +  X112 <=1
117: X182 +  X122 <=1
118: X182 +  X132 <=1
119: X182 +  X142 <=1
120: X182 +  X152 <=1
121: X182 +  X162 <=1
122: X182 +  X172 <=1
123: X191 +  X181 <=1
124: X192 +  X92 <=1
125: X192 +  X102 <=1
126: X192 +  X112 <=1
127: X192 +  X122 <=1
```

[3] En Bekki, Ö.B. et al, 2007.

68: X122 + X112 <=1
69: X122 + X132 <=1
70: X131 + X121 <=1
71: X132 + X92 <=1
72: X132 + X102 <=1
73: X132 + X112 <=1
74: X132 + X122 <=1
75: X141 + X151 <=1
76: X141 + X161 <=1
77: X142 + X92 <=1
78: X142 + X102 <=1
80: X142 + X122 <=1
79: X142 + X112 <=1
81: X142 + X132 <=1
82: X142 + X152 <=1
83: X142 + X162 <=1
84: X151 + X141 <=1
85: X151 + X161 <=1
86: X152 + X92 <=1
98: X162 + X122 <=1
99: X162 + X132 <=1
100: X162 + X142 <=1
101: X162 + X152 <=1
102: X171 + X141 <=1
103: X171 + X151 <=1
104: X171 + X161 <=1
105: X172 + X92 <=1
106: X172 + X102 <=1
107: X172 + X112 <=1
108: X172 + X122 <=1
109: X172 + X132 <=1
110: X172 + X142 <=1
111: X172 + X152 <=1
112: X172 + X162 <=1
113: X181 + X141 <=1
114: X182 + X92 <=1
115: X182 + X102 <=1
116: X182 + X112 <=1
128: X192 + X132 <=1
129: X192 + X142 <=1
130: X192 + X152 <=1
131: X192 + X162 <=1
132: X192 + X172 <=1
133: X192 + X182 <=1
134: X201 + X181 <=1
135: X201 + X191 <=1
136: X202 + X92 <=1
137: X202 + X102 <=1
138: X202 + X112 <=1
139: X202 + X122 <=1
140: X202 + X132 <=1
141: X202 + X142 <=1
142: X202 + X152 <=1
143: X202 + X162 <=1
144: X202 + X172 <=1
145: X202 + X182 <=1
146: X202 + X192 <=1

Con el modelo propuesto en este proyecto, la función objetivo y restricciones serían las siguientes:

```
..TITLE
  MODELO FSP
*Función objetivo Maximizar Pesos
..OBJECTIVE MAXIMIZE
10 [X11]
 + 10 [X12]
 + 1 [X21]
 + 1 [X22]
 + 10 [X31]
 + 10 [X32]
 + 5 [X41]
 + 5 [X42]
 + 7 [X51]
 + 7 [X52]
 + 9 [X61]
 + 9 [X62]
 + 3 [X71]
 + 3 [X72]
 + 2 [X81]
 + 2 [X82]
 + 6 [X91]
 + 6 [X92]
 + 8 [X101]
 + 8 [X102]
 + 1 [X111]
 + 1 [X112]
 + 2 [X121]
 + 2 [X122]
 + 7 [X131]
 + 7 [X132]
 + 2 [X141]
+ 2 [X142]
 + 9 [X151]
+ 9 [X152]
+ 6 [X161]
 + 6 [X162]
 + 10 [X171]
 + 10 [X172]
 + 2 [X181]
 + 2 [X182]
 + 1 [X191]
 + 1 [X192]
+ 6 [X201]
 + 6 [X202]

..CONSTRAINTS
1: X11 +  X12 <=1
2: X21 +  X22 <=1
3: X31 +  X32 <=1
4: X41 +  X42 <=1
5: X51 +  X52 <=1
6: X61 +  X62 <=1
7: X71 +  X72 <=1
8: X81 +  X82 <=1
9: X91 +  X92 <=1
10: X101 +  X102 <=1
11: X111 +  X112 <=1
12: X121 +  X122 <=1
13: X131 +  X132 <=1
14: X141 +  X142 <=1
15: X151 +  X152 <=1
16: X161 +  X162 <=1
17: X171 +  X172 <=1
18: X181 +  X182 <=1
19: X191 +  X192 <=1
20: X201 +  X202 <=1


23: X21 +  X31 <=1
24: X12 +  X22 +  X32 <=1
25: X21 +  X31 +  X41 <=1
26: X22 +  X32 +  X42 <=1
27: X21 +  X31 +  X41 +  X51 <=1
28: X22 +  X32 +  X42 +  X52 <=1
29: X41 +  X51 +  X61 <=1
30: X22 +  X32 +  X42 +  X52 +  X62 <=1
31: X41 +  X51 +  X61 +  X71 <=1
32: X22 +  X32 +  X42 +  X52 +  X62 +  X72 <=1
34: X22 +  X32 +  X42 +  X52 +  X62 +  X72 +  X82 <=1
36: X72 +  X82 +  X92 <=1
37: X91 +  X101 <=1
38: X82 +  X92 +  X102 <=1
40: X82 +  X92 +  X102 +  X112 <=1
41: X121 +  X131 <=1
42: X92 +  X102 +  X112 +  X122 +  X132 <=1
```

43: X141 + X151 + X161 <=1
44: X92 + X102 + X112 + X122 + X132 + X142 + X152 + X162 <=1
45: X141 + X151 + X161 + X171 <=1
46: X92 + X102 + X112 + X122 + X132 + X142 + X152 + X162 + X172 <=1
47: X141 + X181 <=1
48: X92 + X102 + X112 + X122 + X132 + X142 + X152 + X162 + X172 + X182 <=1
49: X181 + X191 <=1
50: X92 + X102 + X112 + X122 + X132 + X142 + X152 + X162 + X172 + X182 + X192 <=1
51: X181 + X191 + X201 <=1
52: X92 + X102 + X112 + X122 + X132 + X142 + X152 + X162 + X172 + X182 + X192 + X202 <=1

En ambos casos, la función objetivo es la misma. La diferencia recae en las restricciones utilizada. Para resolver un mismo problema, Bekki utiliza 146 restricciones, mientras que el modelo adaptado 52. Esta disminución en el número de restricciones se debe a que en el modelo de partida el solapamiento se evita utilizando restricciones dos a dos, mientras que en el modelo adaptado, todas las tares solapadas se incluyen en una misma restricción.