

5 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO

DEL TAMAÑO DE GRANO MEDIO

5_1 INTRODUCCIÓN.

En numerosas aplicaciones de diferentes ámbitos es necesario el conocimiento del comportamiento que sigue el tamaño de grano.

En este apartado se pretende conocer la distribución del tamaño de los granos de una muestra genérica de un material estándar modelados mediante polígonos Voronoi así como su evolución en función de los aumentos aplicados, todo ello para distintas distribuciones de los puntos generadores o de siembra.

De esta manera se podrá generar una muestra del material que se desee con un tamaño de grano concreto y conocer de antemano el comportamiento que seguirá el mismo.

5_2 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DEL TAMAÑO DE GRANO MEDIO.

Con el código creado en Matlab y analizado detenidamente en el capítulo 4 se tomarán todos los datos experimentales necesarios para realizar el análisis completo del tamaño de grano medio. Los objetivos principales a alcanzar son los siguientes:

- Estudio de su comportamiento para el caso genérico: una distribución uniforme de los puntos de siembra.
- Evolución seguida a menor número de aumentos, o lo que es lo mismo, a mayor número de puntos generadores.

5.2.1 DISTRIBUCIÓN ESTADÍSTICA DEL TAMAÑO DE GRANO MEDIO.

En este apartado se abarcará el primero de los objetivos definidos en el punto anterior: el estudio del comportamiento del tamaño de grano medio para una distribución uniforme de los puntos de siembra. El hecho de que se le asigne a los puntos generadores una distribución uniforme se debe a que en la realidad los granos tienden a distribuirse de manera uniforme, y sólo en ciertos casos concretos existe la posibilidad de otra distribución: Poisson, Normal, etc.

Los resultados que se obtengan serán tanto más exactos cuanto mayor sea el número de datos experimentales tomados. En la realidad para un mismo número de puntos de siembra existen infinitas posibles muestras. Por lo tanto para llegar a un equilibrio entre el cálculo y la precisión se ha optado por tomar en cada caso diez diagramas diferentes y en cada uno de ellos cinco muestras distintas (cinco círculos aleatorios definidos en el código Matlab), dos muestras más de las recomendadas en la norma *ASTM E112-96*, para asegurar el resultado lo máximo posible.

Como ya se comentó en el capítulo 3 en el que se explicaba detalladamente el método que se aplicará a lo largo de todo el estudio, el método planimétrico (Jeffries), los aumentos que se apliquen sobre la muestra han de ser tales que dentro del círculo del método existan al menos 50 granos. Ésta será la condición que restrinja el número mínimo de puntos de siembra con el que se comenzará el estudio. Así pues para poder iniciarlo será necesario calcular dicho límite inferior. Éste se determina tomando el mismo

número de datos que el explicado anteriormente para el cálculo del tamaño de grano medio teniendo en cuenta que en este caso se trata del número de granos. Para ello se probará con un número bajo de puntos de siembra y se irá descendiendo el mismo hasta encontrar dicho límite.

El **cálculo del mínimo número de puntos de siembra** es el siguiente:

Empezando con 90 puntos de siembra se obtiene:

DATOS EXPERIMENTALES						
N	Nº de granos/ 5000 mm ²					μ
90	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	65.59
	65.50	62.00	61.50	67.50	67.00	
	64.00	62.00	62.00	68.00	66.50	
	64.50	63.50	62.00	68.00	68.00	
	65.50	62.50	63.50	67.50	66.50	
	66.50	62.00	63.00	68.50	66.50	
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>	
	67.00	67.00	67.00	65.50	64.00	
	68.00	67.00	67.00	63.50	64.00	
	68.00	67.50	66.50	65.50	64.50	
	68.00	67.50	66.50	65.50	63.00	
	69.00	68.50	67.00	64.50	64.00	

Ha salido una media de 65.59 granos/ 5000 mm², por lo que se sobrepasan con holgura los 50 granos mínimos exigidos dentro del círculo del método planimétrico. Así se podrá seguir disminuyendo el número de puntos de siembra con el que iniciar el estudio. Probando para N = 80 se obtiene:

DATOS EXPERIMENTALES						
N	N° de granos/ 5000 mm ²					μ
80	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	57.44
	59.00	60.00	56.50	53.50	59.50	
	59.00	61.00	58.00	53.50	58.00	
	60.00	61.50	56.50	53.00	58.00	
	59.00	59.00	57.00	53.50	58.00	
	59.50	59.00	58.00	53.00	59.50	
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>	
	57.00	60.50	54.00	55.00	58.00	
	56.00	60.50	54.50	55.50	57.50	
	57.50	60.00	54.50	57.00	58.00	
	56.50	60.00	56.50	57.00	58.00	
	57.50	61.00	54.50	55.00	58.00	

Todavía se está por encima de los 50 granos y observando la evolución de la media cabe esperar que para N = 70 todavía se sobrepase dicho límite. Analizándolo queda:

DATOS EXPERIMENTALES						
N	N° de granos/ 5000 mm ²					μ
70	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	50.28
	49.50	49.00	52.00	50.00	50.50	
	49.00	49.50	50.00	50.00	50.50	
	49.50	49.50	50.00	50.00	50.00	
	49.50	50.50	51.50	50.00	50.00	
	50.00	49.50	52.00	50.50	50.50	
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>	
	49.50	54.00	48.50	49.50	50.50	
	50.50	53.00	47.50	49.50	50.50	
	50.50	53.50	48.50	50.50	50.50	
	50.50	53.00	47.00	49.50	49.50	
	51.50	54.50	48.00	50.00	51.00	

Ahora ya sí que se está al límite. Se puede decir entonces que el número mínimo de puntos de siembra que dejan 50 granos en el interior del círculo del método planimétrico es 70. Se podría pensar que aunque la media

salga superior a los 50 granos requeridos existen simulaciones que están por debajo. En tal caso hay que tener en cuenta que lo obtenido en Matlab es una aproximación y que el resultado que se tomará como válido será aquel que resulte de la media de numerosas simulaciones, ya que entonces se estará considerando el comportamiento al que se tiende para el número de puntos de siembra en cuestión que es lo que realmente interesa.

Una vez determinado el mínimo número de puntos de siembra con el que el círculo del método planimétrico contiene al menos 50 granos se puede comenzar con el estudio de la distribución estadística del tamaño de grano medio.

Uno de los casos más complicados de entre todos los existentes es el de 90 puntos de siembra, ya que se ha comprobado que es el que presenta una de las distribuciones más enrevesadas. Por lo tanto se comenzará el análisis a partir de este caso y se extenderá posteriormente al resto:

N=90:

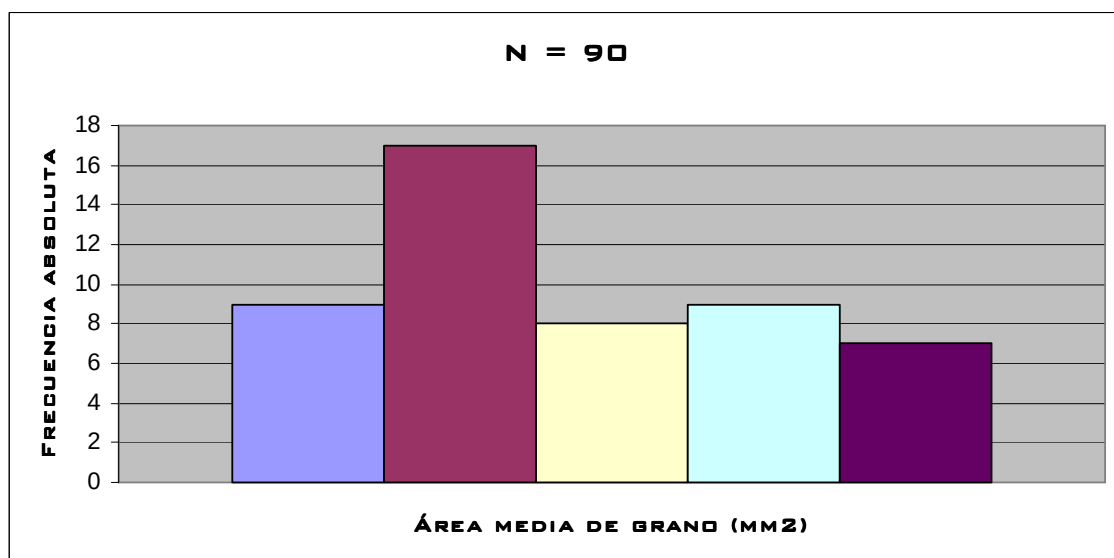
En primer lugar se toman los datos experimentales:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
90	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	76.315	2.545
	76.34	80.65	81.30	74.07	74.63		
	78.13	80.65	80.65	73.53	75.19		
	77.52	78.74	80.65	73.53	73.53		
	76.34	80	78.74	74.07	75.19		
	75.19	80.65	79.37	72.99	75.19		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	74.63	74.63	74.63	76.34	78.13		
	73.53	74.63	74.63	78.74	78.13		
	73.53	74.07	75.19	76.34	77.52		
	73.53	74.07	75.19	76.34	79.37		
	72.46	72.99	74.63	77.52	78.13		

Una vez obtenidos se procede a la organización de los mismos para la construcción de su correspondiente histograma. Para ello se toman intervalos de ancho de clase igual a 2 mm^2 , siendo el intervalo de valores:

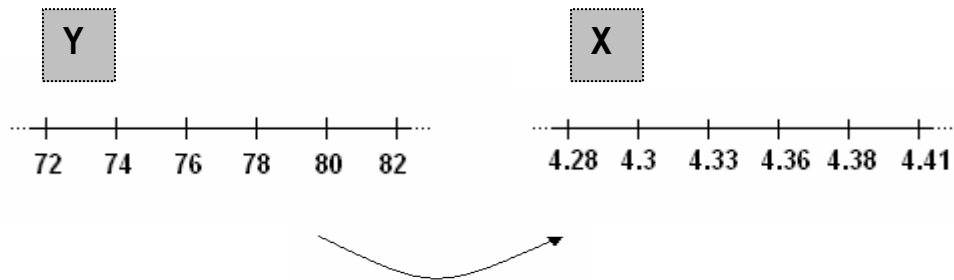
$$[72,82] \text{ mm}^2$$

Queda el siguiente histograma:



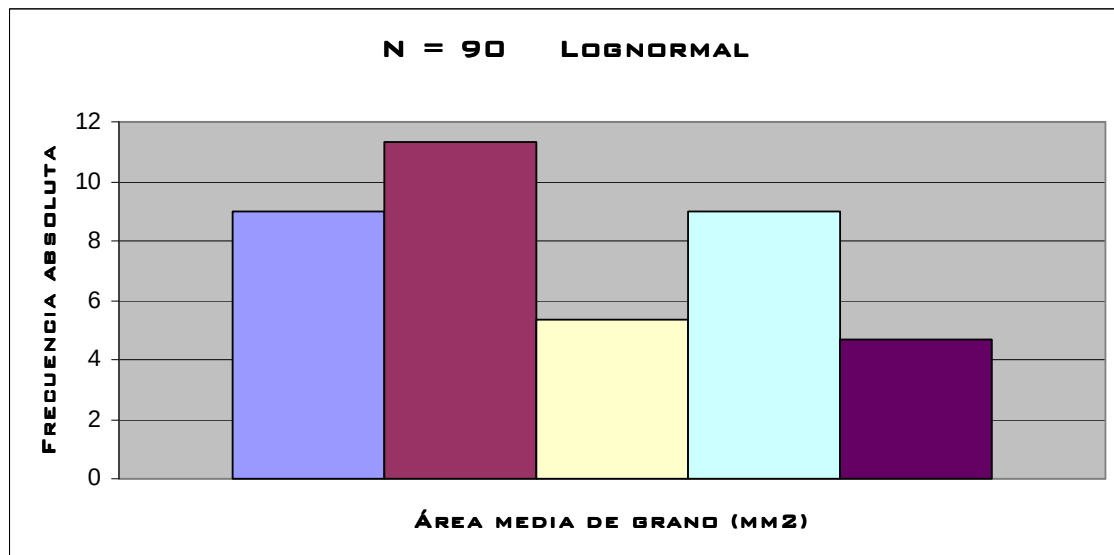
Se observa que los datos aparecen un poco desplazados hacia la izquierda, pero aún así es difícil conjeturar a primera vista acerca de su posible distribución. Se podría pensar, por la cola derecha del histograma, que se trata de una *distribución lognormal*. Así, atendiendo a las explicaciones proporcionadas en el libro '*Estadística para Ingenieros y Científicos*', de William Navidi, las muestras provenientes de poblaciones lognormales a menudo contienen datos atípicos en la cola derecha, es decir, contienen pocos valores que son más grandes que el resto de los datos.

Considerando la posibilidad de que se trate de una distribución lognormal se procede a transformar los datos sacando el logaritmo natural (por ejemplo) de cada valor del intervalo, quedando la siguiente transformación:



Transformando a la escala logarítmica: $X = \ln Y$

Ahora se procede a la obtención del nuevo histograma, quedando:



Si se tratase de una distribución lognormal al realizar la transformación a la escala logarítmica el histograma resultante debería aproximarse a una distribución normal. Pero comprobamos que más que acercarse se aleja de la misma, luego se descarta esta posibilidad.

Otra opción sería que se tratase de una *distribución Weibull* ya que al estar ésta definida por dos parámetros, α y β , se pueden construir numerosas distribuciones de la misma para que se ajusten a gran variedad de conjuntos de datos. Para comprobarlo es necesario realizar un contraste de hipótesis.

Atendiendo a la información proporcionada en el libro '*Estadística Aplicada*', de Julián de la Horra Navarro, se aplica un contraste χ^2 : el *Contraste de la bondad del ajuste (primer caso)*. En este contraste, a partir de una muestra aleatoria $(X_1, \dots, X_n)$ de una población X con distribución desconocida se pretende comprobar si es razonable admitir que la distribución de X viene dada por P (un determinado modelo de probabilidad); es decir, si los datos "se ajustan" bien a P . Por lo tanto se tiene:

H_0 : "El modelo de probabilidad de X es P ".

H_1 : "El modelo de probabilidad de X no es P ".

Para contrastar H_0 frente a H_1 se hace una partición (arbitraria) del espacio muestral de la población en k clases $A_1, \dots, A_k$. Después, para cada A_i ($i=1, \dots, k$) se consideran las siguientes frecuencias (absolutas):

O_i = "frecuencia observada en A_i " = "número de elementos de la muestra $(x_1, \dots, x_n)$ que se han situado en la clase A_i ".

e_i = "frecuencia esperada en la clase A_i si la hipótesis nula es cierta" = $n \cdot P(A_i)$.

El estadístico que se utilizará para llevar a cabo el contraste es:

$$\sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

El contraste que se aplica en este caso es el que sigue: *Se rechaza la hipótesis nula H_0 : "El modelo de probabilidad de X es P " (al nivel de significación α) si:*

$$\sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} > \chi^2_{k-1; \alpha}$$

A la hora de realizar este contraste hay que elegir un nivel de significación, α . El nivel elegido depende de lo serias que se consideren las

consecuencias de rechazar equivocadamente H_0 (o, lo que es igual, de aceptar equivocadamente H_1); cuanto más desastrosas se consideren las consecuencias de esta posible equivocación más pequeño se debería tomar el nivel de significación. En el caso que concierne a este proyecto se tomará un nivel de significación de 0.05, valor bastante generalizado y que asegura un resultado preciso y correcto.

Una vez definido el contraste que se va a utilizar, que es a su vez el más adecuado para el caso actual, se procede a su realización. En este caso se tiene:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n.P(A_i)$
72 -< 74	9	9
74 -< 76	17	26
76 -< 78	8	34
78 -< 80	9	43
80 -< 82	7	50

donde $P(A_i)$ se ha obtenido haciendo uso de la expresión adecuada para este caso incluida en el libro '*Weibull Analysis*', de Bryan Dodson. En él se indica que para aquellos casos en los que los datos se encuentren agrupados en intervalos, como éste, la estimación de la función de distribución acumulativa ($F(t)$) para cada uno de ellos se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\hat{F}(t) = \text{frecuencia_acumulada_hasta_}t / \text{tamaño_de_la_muestra}$$

Realizando el contraste queda:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 86.86 >> \chi_{4,0.05}^2 = 9.488 \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de probabilidad de la muestra no es Weibull}$$

Tampoco la distribución Weibull es la que más se ajusta a este conjunto de datos.

Observando nuevamente el histograma de los resultados experimentales se puede observar que existe una concentración de datos de manera más o menos centrada y una dispersión decreciente del resto, por lo que cabe pensar que la *distribución normal* podría ser candidata a definir el comportamiento del conjunto muestral. Para comprobarlo será necesario realizar un nuevo contraste, que es el que sigue:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n.P(A_i)$
72 -< 74	9	6.93
74 -< 76	17	13.405
76 -< 78	8	14.82
78 -< 80	9	8.895
80 -< 82	7	3.675

donde $P(A_i)$ se obtiene a partir de las probabilidades tabuladas para la función $N(0,1)$. Ahora:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 7.73 < \chi_{4,0.05}^2 = 9.488 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(76.315, 2.545^2)$

Tras el contraste se puede pues concluir que el conjunto obtenido de datos experimentales queda bien definido con una distribución normal.

Una vez analizado este caso se procede ya al estudio, según un orden creciente del número de puntos de siembra, de la distribución que siguen el resto de datos para intentar llegar a una conclusión.

N=70:

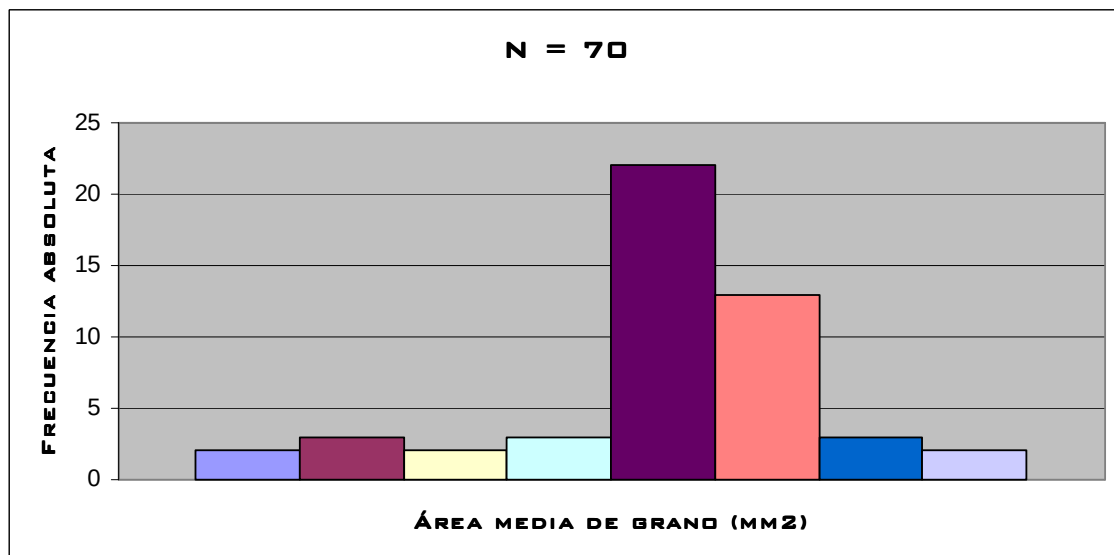
Los datos experimentales son los siguientes:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
70	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	99.526	2.876
	101.01	102.04	96.15	100.00	99.01		
	102.04	101.01	100.00	100.00	99.01		
	101.01	101.01	100.00	100.00	100.00		
	101.01	99.01	97.09	100.00	100.00		
	100.00	101.01	96.15	99.01	99.01		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	101.01	92.59	103.09	101.01	99.01		
	99.01	94.34	105.26	101.01	99.01		
	99.01	93.46	103.09	99.01	99.01		
	99.01	94.34	106.38	101.01	101.01		
	97.09	91.74	104.17	100.00	98.04		

A continuación se procede a la organización de los mismos para la construcción de su correspondiente histograma. Para ello se toman intervalos de ancho de clase igual a 2 mm^2 , que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[91,107] \text{ mm}^2$$

Queda:



Para $N=90$ se obtuvo que la distribución seguida por la muestra experimental era normal. En principio, observando el histograma de este caso, no se encuentra similitud alguna con ninguna distribución concreta. Así comenzaremos probando por la distribución normal para intentar conseguir la unificación de los resultados de cada uno de los estudios. Realizando el contraste definido anteriormente queda:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n.P(A_i)$
91 -< 93	2	0.505
93 -< 95	3	2.33
95 -< 97	2	6.56
97 -< 99	3	11.96
99 -< 101	22	13.32
101 -< 103	13	9.595
103 -< 105	3	4.22
105 -< 107	2	1.2

$$\sum_{i=1}^8 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 22.25 > \chi_{7,0.05}^2 = 14.067 \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra no es

Normal

El conjunto de datos no sigue una distribución normal, por lo que habrá que probar con otra. No presenta ninguna característica que haga pensar que se trata de una distribución lognormal, por lo que la descartamos ya desde el principio. Por otro lado cabría nuevamente la posibilidad de que se tratase de una distribución Weibull, por la versatilidad de la misma. Haciendo entonces nuevamente el contraste para esta otra opción queda:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n.P(A_i)$
91 -< 93	2	2
93 -< 95	3	5
95 -< 97	2	7
97 -< 99	3	10
99 -< 101	22	32
101 -< 103	13	45
103 -< 105	3	48
105 -< 107	2	50

$$\sum_{i=1}^8 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 123.42 > \chi^2_{7,0.05} = 14.067 \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra no es

Weibull

Tampoco se ajusta a ésta.

Ya se comentó al comienzo de este caso que la distribución mostraba pocas similitudes con cualquier distribución estadística y además con una de las más versátiles, la Weibull, tampoco presenta ninguna relación. Los datos aparecen en esta ocasión excesivamente concentrados en el centro, por lo que se puede considerar un caso atípico. Así pues se reservará su análisis completo para el final, una vez se hayan estudiado el resto de conjuntos muestrales.

N=80:

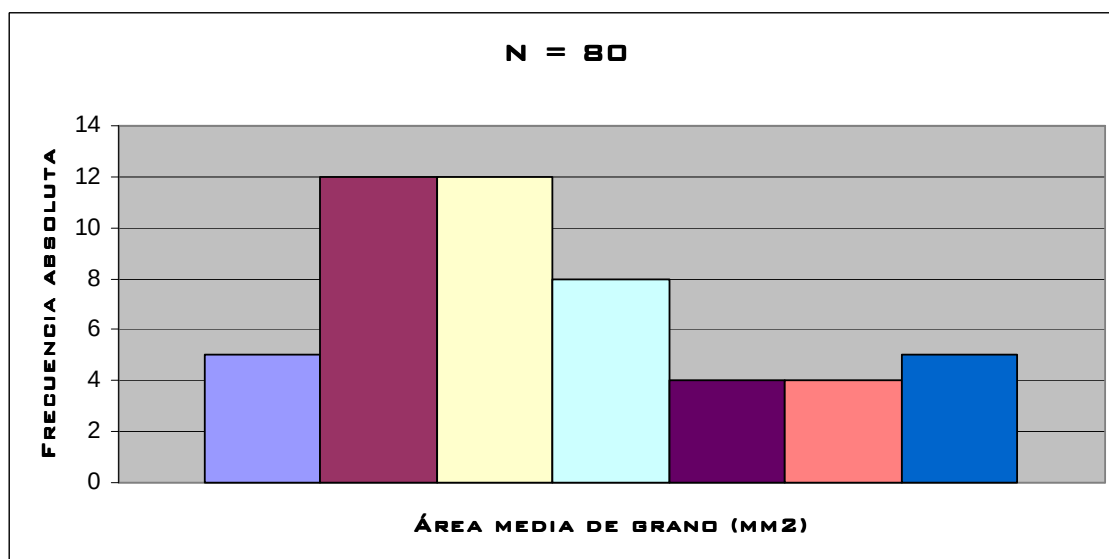
Los datos experimentales son los siguientes:

DATOS EXPERIMENTALES						
N	Área media de grano (mm ²)					μ σ_{n-1}
80	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	87.188 3.553
	84.75	83.33	88.50	93.46	84.03	
	84.75	81.97	86.21	93.46	86.21	
	83.33	81.30	88.50	94.34	86.21	
	84.75	84.75	87.72	93.46	86.21	
	84.03	84.75	86.21	94.34	84.03	
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>	
	87.72	82.64	92.59	90.91	86.21	
	89.29	82.64	91.74	90.09	86.96	
	86.96	83.33	91.74	87.72	86.21	
	88.50	83.33	88.50	87.72	86.21	
	86.96	81.97	91.74	90.91	86.21	

A continuación se procede a la organización de los mismos para la construcción de su correspondiente histograma. Para ello se toman intervalos de ancho de clase igual a 2 mm², que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[81,95] \text{ mm}^2$$

Queda:



Puesto que el único resultado concluyente se ha obtenido para 90 puntos de siembra con la distribución normal probaremos también en este caso para dicha distribución con la que se pueden encontrar ciertas similitudes al observar el histograma resultante. Realizando el contraste queda:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n.P(A_i)$
81 -< 83	5	3.905
83 -< 85	12	7.43
85 -< 87	12	10.625
87 -< 89	8	10.745
89 -< 91	4	8.135
91 -< 93	4	4.59
93 -< 95	5	1.83

$$\sum_{i=1}^7 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 11.666 < \chi^2_{6,0.05} = 12.592 \Rightarrow$$
 No se rechaza H_0 , luego el modelo de probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(87.188, 3.553^2)$

En este caso la distribución normal es nuevamente la que mejor ajusta al conjunto de datos.

N = 100:

Los datos experimentales son los siguientes:

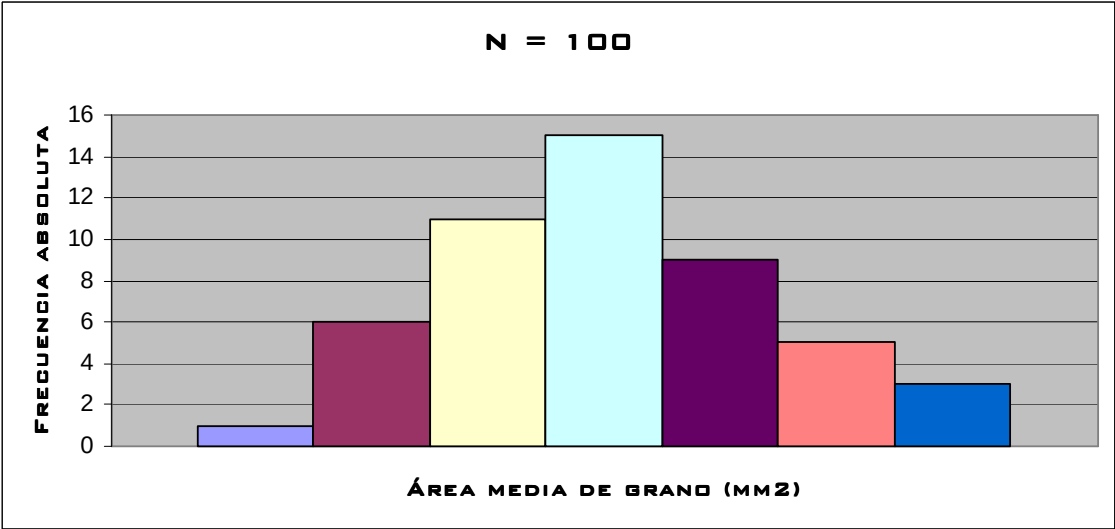
DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
100	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	69.53	2.128
	69.93	70.92	68.49	69.93	71.94		
	69.93	69.93	67.57	69.93	72.46		
	69.93	70.92	66.67	68.97	71.94		
	70.42	69.93	68.03	69.44	70.92		
	69.44	69.44	67.57	68.49	71.43		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	64.52	70.92	74.07	68.03	71.94		
	66.23	68.97	73.53	66.67	70.92		
	65.79	70.92	73.53	68.03	68.49		
	66.23	69.93	70.92	67.11	69.44		
	66.67	68.97	72.99	68.49	68.49		

A continuación se procede a la organización de los mismos para la construcción de su correspondiente histograma. Para ello se toman intervalos

de ancho de clase igual a 1.5 mm^2 , que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[64,74.5] \text{ mm}^2$$

Queda:



En este caso se observa ya un gran parecido con una distribución normal. Realizando el contraste queda:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n.P(A_i)$
64 -< 65.5	1	1.235
65.5 -< 67	6	4.38
67 -< 68.5	11	9.93
68.5 -< 70	15	13.575
70 -< 71.5	9	11.835
71.5 -< 73	5	6.23
73 -< 74.5	3	2.1

$$\sum_{i=1}^7 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 2.216 < \chi_{6,0.05}^2 = 12.592 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(69.53, 2.128^2)$

Nuevamente, como era de esperar dada su aproximación gráfica, la distribución normal es la que mejor define el comportamiento estadístico del conjunto de resultados experimentales.

N = 110:

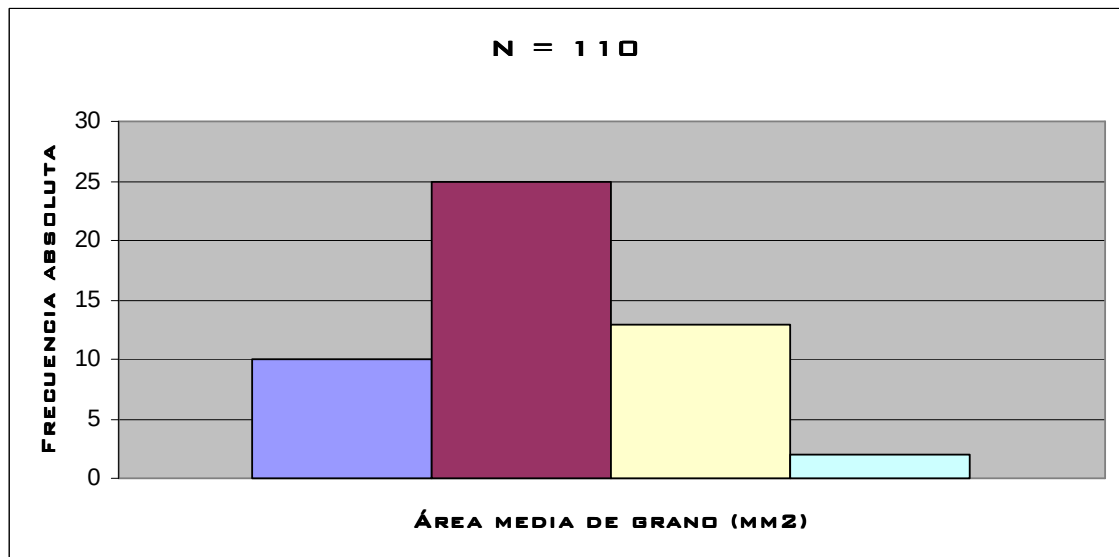
Los datos experimentales son los siguientes:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
110	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	61.29	1.513
	60.61	61.35	63.29	59.88	59.52		
	64.10	61.73	62.11	58.48	61.73		
	62.50	61.35	61.73	60.24	59.52		
	63.69	60.24	63.29	60.98	59.52		
	64.52	60.24	63.29	60.98	59.17		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	59.88	60.98	60.98	60.24	63.29		
	60.61	60.61	61.73	60.24	63.29		
	58.82	60.61	61.73	60.24	62.89		
	59.52	60.98	62.11	62.89	63.69		
	58.82	60.98	61.73	60.61	62.89		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 2 mm^2 , que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[58,66] \text{ mm}^2$$

Queda:



Nuevamente se observa un gran parecido con una distribución normal. Realizando el contraste queda:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n \cdot P(A_i)$
58 -< 60	10	9.135
60 -< 62	25	24.155
62 -< 64	13	14.125
64 -< 66	2	1.79

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 0.226 < \chi_{3,0.05}^2 = 7.815 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de probabilidad de la muestra es Normal con distribución: } N(61.29, 1.513^2)$$

La distribución normal vuelve a ser la que mejor define el comportamiento de los datos obtenidos a través de las simulaciones.

N = 120:

Los datos experimentales son:

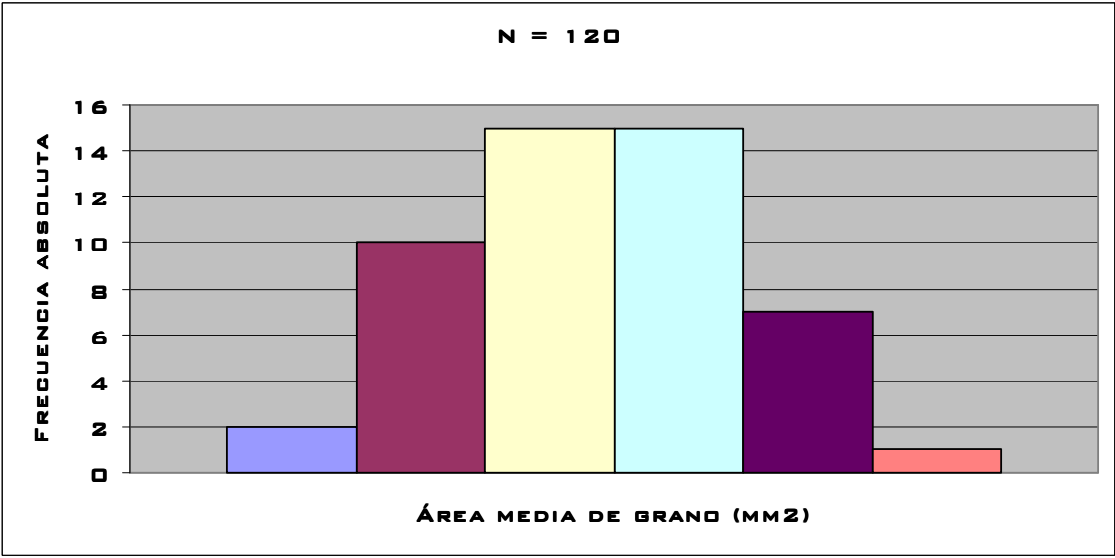
DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
120	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	56.2	1.58
	57.80	53.76	58.48	56.50	55.87		
	56.18	54.05	57.47	56.50	56.18		
	55.87	54.64	58.14	57.14	55.56		
	55.87	52.91	58.48	56.18	55.25		
	57.47	53.19	57.14	56.50	55.25		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	54.05	57.14	58.14	54.64	56.50		
	54.35	56.50	58.14	55.87	56.18		
	54.05	56.18	60.24	54.64	57.14		
	55.25	56.50	59.17	55.25	55.87		
	54.64	56.82	58.48	54.95	57.14		

Estos datos se organizan como en el resto de los casos en intervalos para obtener su correspondiente histograma. En esta ocasión se toman

intervalos de 1.5 mm^2 de ancho de clase ya que éste es con el que se obtiene el gráfico mejor distribuido, siendo dicho intervalo de valores:

$$[52,61] \text{ mm}^2$$

Queda entonces el siguiente histograma:



Nuevamente se observa una clara tendencia al comportamiento de una distribución normal. Haciendo el contraste correspondiente para la misma queda:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n.P(A_i)$
52 -< 53.5	2	1.985
53.5 -< 55	10	9
55 -< 56.5	15	17.585
56.5 -< 58	15	14.88
58 -< 59.5	7	5.44
59.5 -< 61	1	0.855

$$\sum_{i=1}^6 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 0.964 < \chi^2_{5,0.05} = 11.070 \Rightarrow$$
 No se rechaza H_0 , luego el modelo de probabilidad de la muestra es Normal con distribución: $N(56.2, 1.58^2)$

Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

N = 130:

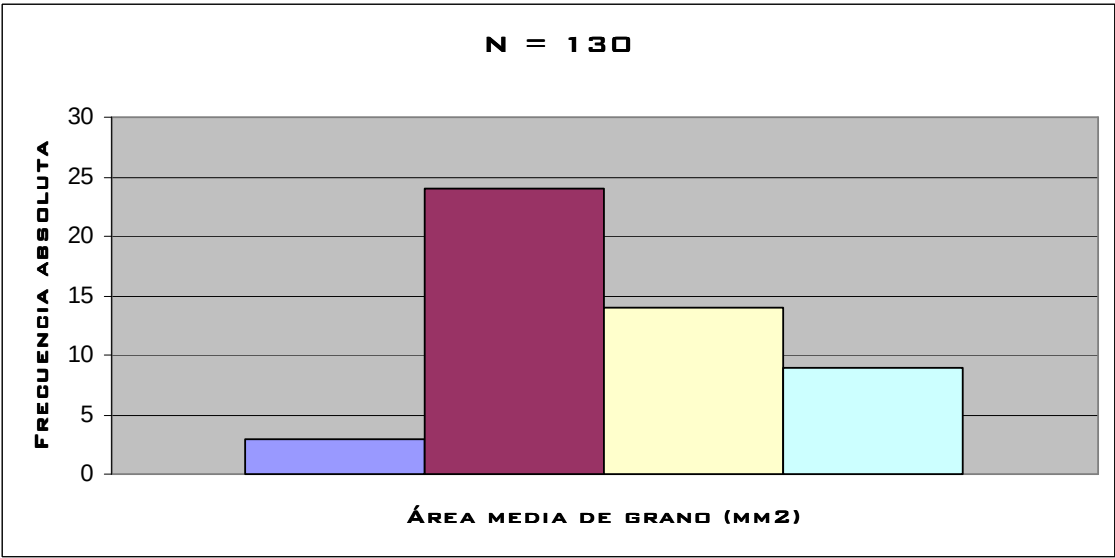
Los datos experimentales son:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
130	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	52.18	1.381
	53.19	54.05	53.19	51.28	49.75		
	52.36	53.48	53.19	51.02	50.00		
	53.48	54.35	54.64	51.28	50.51		
	53.48	53.48	53.19	51.55	50.25		
	52.08	54.35	53.19	51.55	50.51		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	51.81	51.81	54.05	51.81	50.76		
	51.81	51.55	53.76	51.02	50.51		
	51.81	52.08	54.64	50.51	50.51		
	52.08	51.81	54.05	51.02	51.28		
	52.08	51.55	54.64	51.02	51.55		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 1.5 mm^2 , que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[49,55] \text{ mm}^2$$

Queda:



Hasta ahora la distribución que ha regido prácticamente todos los casos es la normal. Como este histograma no presenta una evolución clara se probará nuevamente con la misma por ser la mayoritaria:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n.P(A_i)$
49 -< 50.5	3	5.025
50.5 -< 52	24	16.855
52 -< 53.5	14	19.16
53.5 -< 55	9	7.39

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 5.585 < \chi_{3,0.05}^2 = 7.815 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(52.18, 1.381^2)$

Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

N = 140:

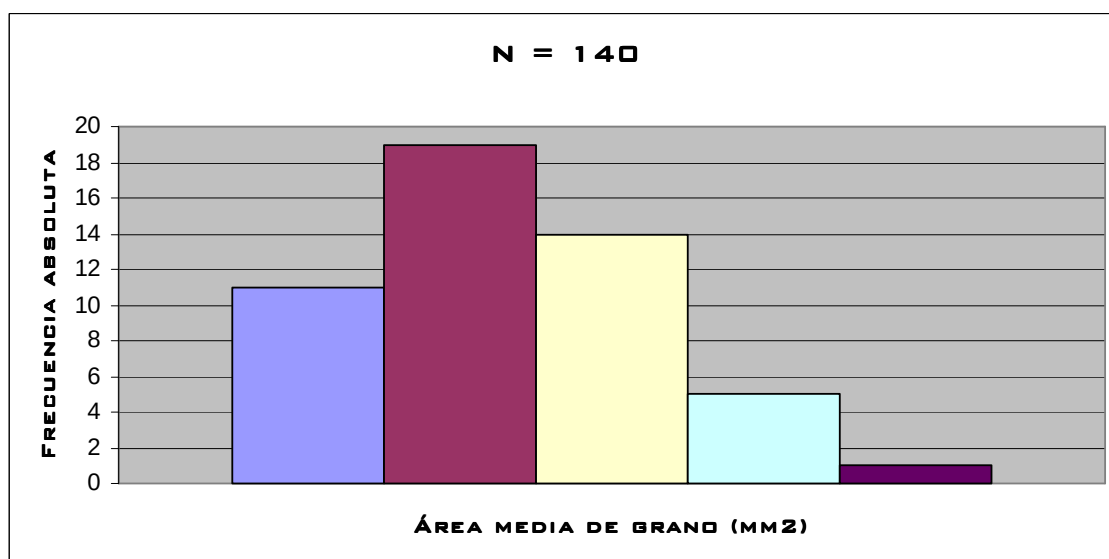
Los datos experimentales son:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
140	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	48.63	1.283
	49.26	47.17	49.26	48.54	50.51		
	48.54	46.30	49.50	48.31	48.78		
	48.78	46.73	49.75	48.78	50.76		
	48.78	47.62	49.50	47.39	52.08		
	49.26	47.39	49.02	48.08	49.75		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	46.51	48.31	50.25	49.02	49.02		
	46.95	48.08	50.25	48.08	48.54		
	46.51	48.54	50.51	47.39	49.26		
	46.73	47.85	50.51	48.08	49.02		
	46.73	48.54	50.51	48.54	47.85		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 1.5 mm², que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

[46,53.5] mm²

Queda:



Se observa una cierta concentración en el centro de algunos de los resultados y una distribución más o menos repartida. Cabría entonces pensar nuevamente en la posibilidad de que se trate de una distribución normal. Realizando el contraste correspondiente:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n \cdot P(A_i)$
46 -< 47.5	11	8.46
47.5 -< 49	19	21.235
49 -< 50.5	14	15.69
50.5 -< 52	5	3.39
52 -< 53.5	1	0.21

$$\sum_{i=1}^5 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 4.916 < \chi_{4,0.05}^2 = 9.488 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(48.63, 1.283^2)$

Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

N = 150:

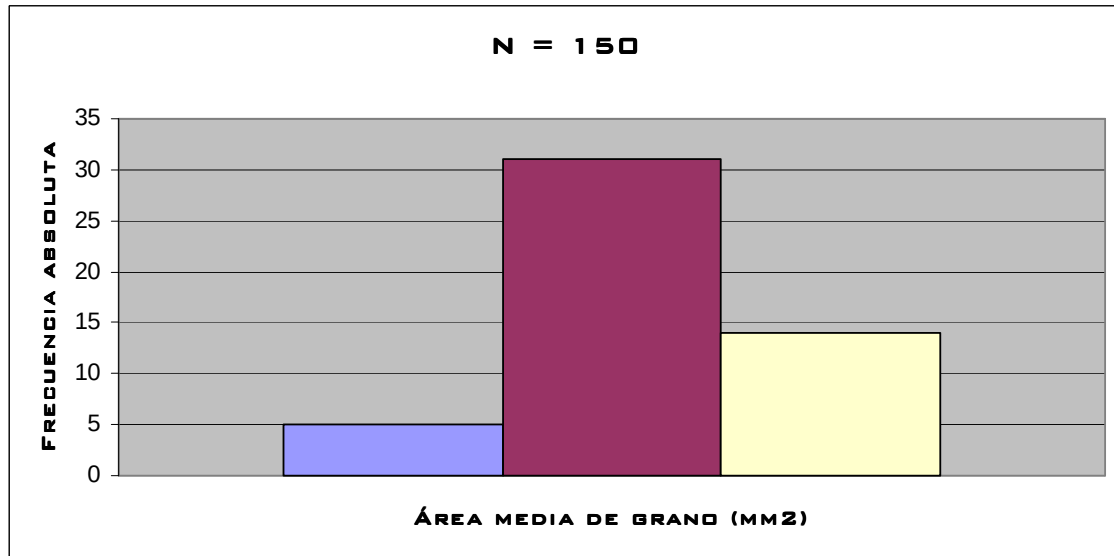
Los datos experimentales son:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
150	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	45.45	0.966
	45.45	43.48	45.25	45.87	44.84		
	45.25	43.10	45.25	46.08	45.25		
	45.05	42.92	45.25	46.30	46.73		
	45.66	43.48	45.25	46.51	46.73		
	45.25	43.10	45.45	46.95	45.66		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	46.30	45.45	45.45	45.87	44.44		
	45.87	46.51	45.25	45.87	44.44		
	45.87	45.87	46.30	46.30	45.25		
	45.87	46.95	45.45	46.30	44.84		
	46.30	45.45	45.25	46.08	44.64		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 2 mm², que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

[42,48] mm²

Queda:



Nuevamente se observa una concentración en el centro de algunos de los resultados y una distribución más o menos repartida. Cabría entonces pensar nuevamente en la posibilidad de que se trate de una distribución normal. Realizando el contraste correspondiente:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n \cdot P(A_i)$
42 -< 44	5	3.33
44 -< 46	31	32.445
46 -< 48	14	14.01

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 0.902 < \chi_{2,0.05}^2 = 5.991 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(45.45, 0.966^2)$

Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

N = 160:

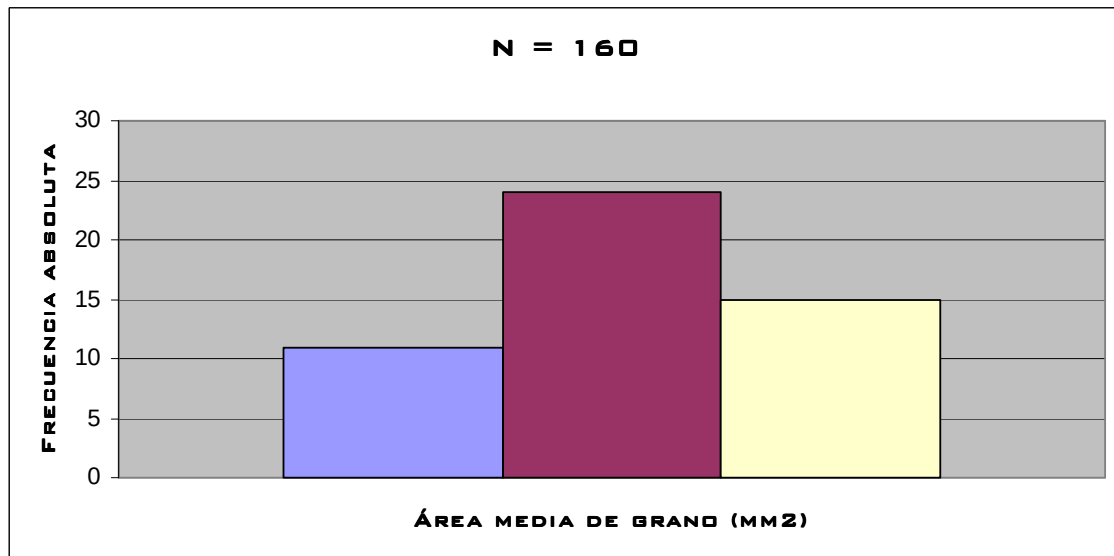
Los datos experimentales son:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
160	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	42.24	0.932
	42.92	41.84	41.67	41.32	43.10		
	43.29	42.02	41.67	41.67	42.92		
	43.48	41.67	41.15	41.32	43.29		
	43.10	41.67	41.49	41.67	42.74		
	43.48	42.55	41.84	41.84	44.05		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	40.00	41.84	43.10	43.29	42.02		
	40.98	41.49	43.67	43.10	42.02		
	40.82	41.67	43.29	43.29	42.19		
	40.65	41.49	42.92	42.37	43.10		
	40.49	42.19	43.29	42.74	42.37		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 1.5 mm², que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[40,44.5] \text{ mm}^2$$

Queda:



Nuevamente se observa una concentración en el centro de algunos de los resultados y una distribución más o menos repartida. Cabría entonces pensar nuevamente en la posibilidad de que se trate de una distribución normal. Realizando el contraste correspondiente:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n \cdot P(A_i)$
40 -< 41.5	11	10.33
41.5 -< 43	24	28.955
43 -< 44.5	15	9.915

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 3.499 < \chi_{2,0.05}^2 = 5.991 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(42.24, 0.932^2)$

Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

N = 170:

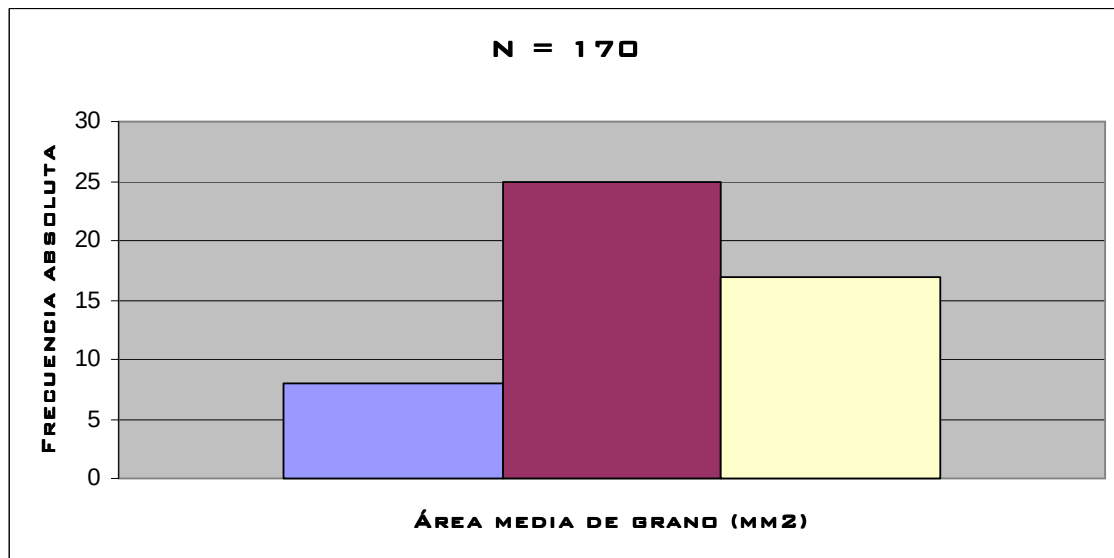
Los datos experimentales son:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
170	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	39.584	0.913
	40.32	39.84	40.49	39.53	37.59		
	40.16	39.06	39.37	39.68	37.59		
	39.84	39.84	39.68	39.84	37.59		
	40.00	40.32	40.32	39.68	37.88		
	39.53	40.00	39.22	39.68	37.45		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	38.02	39.53	40.65	39.68	40.00		
	38.76	39.22	40.49	40.16	40.16		
	38.76	40.16	41.15	40.49	40.16		
	38.46	39.53	40.16	40.32	40.00		
	38.02	39.68	40.65	40.00	40.49		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 1.5 mm², que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[37,41.5] \text{ mm}^2$$

Queda:



Como en los últimos casos se vuelve a observar una concentración en el centro de algunos de los resultados y una distribución más o menos repartida. Cabría entonces pensar nuevamente en la posibilidad de que se trate de una distribución normal. Realizando el contraste correspondiente:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n \cdot P(A_i)$
37 -< 38.5	8	5.735
38.5 -< 40	25	28.01
40 -< 41.5	17	15.245

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 1.42 < \chi^2_{2,0.05} = 5.991 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(39.584, 0.913^2)$

Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

N = 180:

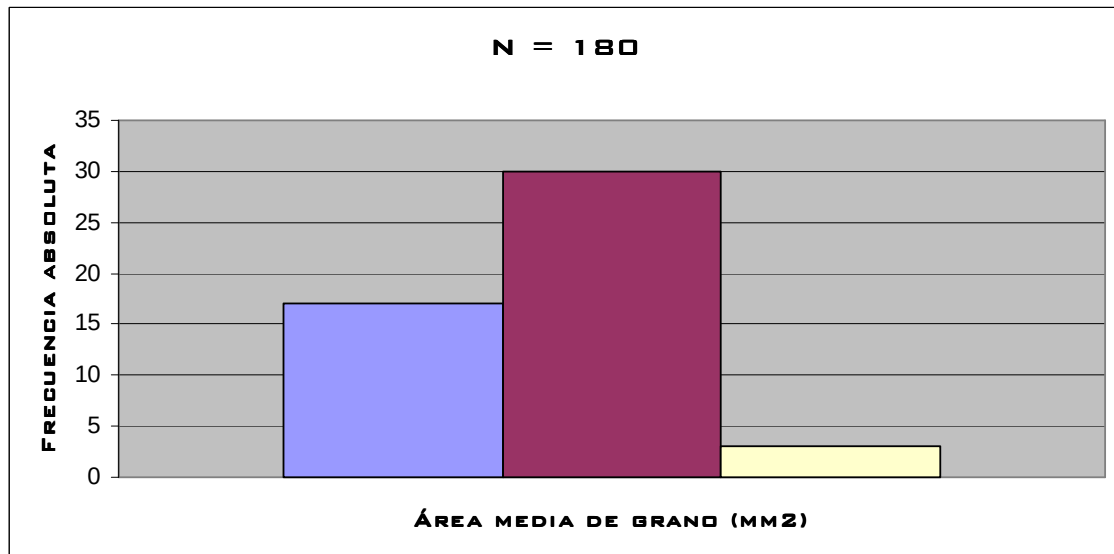
Los datos experimentales son:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
180	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	36.82	0.756
	36.50	36.90	36.50	36.36	36.36		
	36.90	37.17	35.46	36.90	35.71		
	36.90	37.45	35.71	36.36	35.46		
	36.63	37.17	36.90	37.04	35.97		
	37.45	37.31	35.71	36.76	36.50		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	35.84	37.31	37.31	38.02	37.17		
	35.71	37.04	37.17	38.17	37.45		
	35.34	37.31	37.59	37.74	37.59		
	35.46	37.31	37.17	37.45	37.31		
	35.71	37.74	37.04	38.02	37.04		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 1.5 mm², que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[35,39.5] \text{ mm}^2$$

Queda:



Nuevamente se observa una concentración en el centro de algunos de los resultados y una distribución más o menos repartida. Cabría entonces pensar nuevamente en la posibilidad de que se trate de una distribución normal. Realizando el contraste correspondiente:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n \cdot P(A_i)$
35-36.5	17	16.46
36.5-38	30	30.17
38-39.5	3	2.96

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 0.019 < \chi^2_{2,0.05} = 5.991 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(36.82, 0.756^2)$

Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

N = 190:

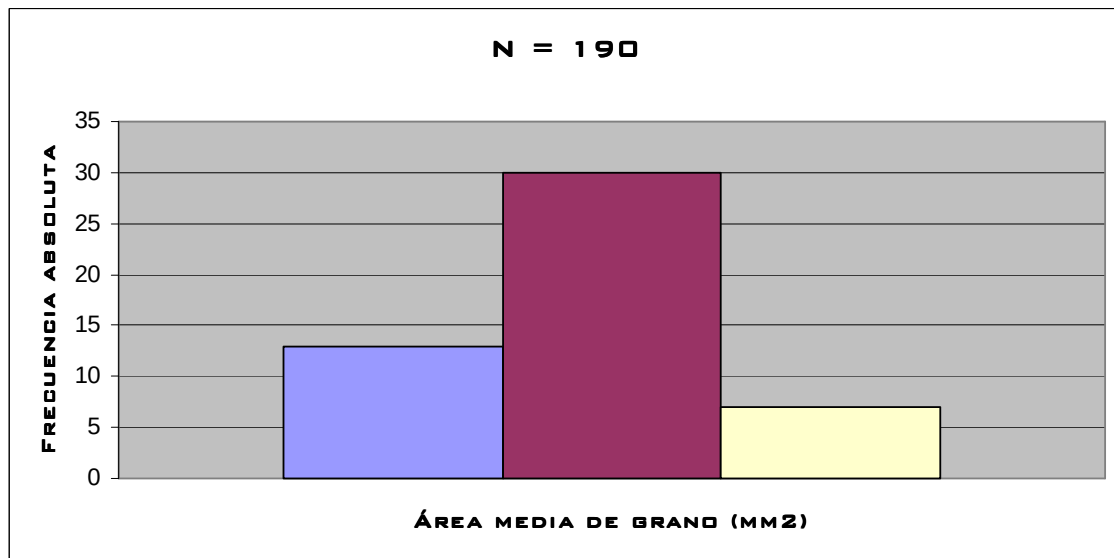
Los datos experimentales son:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm ²)					μ	σ _{n-1}
190	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	35.253	0.733
	35.34	34.01	35.46	35.84	36.36		
	35.46	33.78	35.21	35.59	36.36		
	35.46	33.78	35.59	35.59	36.10		
	35.46	34.13	35.71	35.71	35.84		
	35.09	34.36	35.46	35.34	35.84		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	35.34	36.36	35.59	34.48	34.13		
	35.59	35.97	35.09	34.36	34.13		
	35.46	36.23	35.46	34.97	34.25		
	35.46	36.23	35.71	34.72	34.36		
	35.97	36.10	35.09	34.48	34.25		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 1.5 mm², que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[33,37.5] \text{ mm}^2$$

Queda:



Nuevamente se observa una concentración en el centro de algunos de los resultados y una distribución más o menos repartida. Cabría entonces pensar nuevamente en la posibilidad de que se trate de una distribución normal. Realizando el contraste correspondiente:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A _i)	Frecuencia observada en A _i (O _i)	e _i = n.P(A _i)
33-< 34.5	13	7.52
34.5 -< 36	30	34.73
36 -< 37.5	7	7.64

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 4.69 < \chi_{2,0.05}^2 = 5.991 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(35.253, 0.733^2)$

Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

N=200:

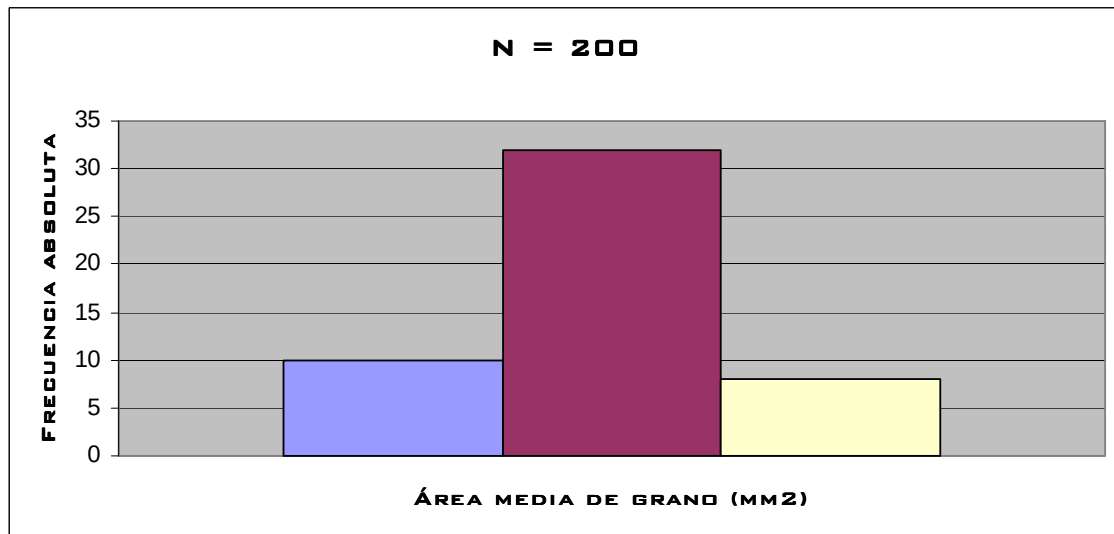
Los datos experimentales son:

DATOS EXPERIMENTALES							
N	Área media de grano (mm²)					μ	σ _{n-1}
200	<u>1ª muestra:</u>	<u>2ª muestra:</u>	<u>3ª muestra:</u>	<u>4ª muestra:</u>	<u>5ª muestra:</u>	33.17	0.831
	34.48	33.00	32.05	32.79	33.11		
	33.90	33.11	32.05	33.00	33.67		
	34.01	33.33	31.95	32.89	33.44		
	33.67	33.22	32.15	33.00	33.22		
	34.36	33.11	31.65	33.11	33.33		
	<u>6ª muestra:</u>	<u>7ª muestra:</u>	<u>8ª muestra:</u>	<u>9ª muestra:</u>	<u>10ª muestra:</u>		
	31.65	33.22	33.44	33.56	34.48		
	31.95	33.00	33.22	33.78	33.78		
	31.35	33.00	33.33	34.01	34.36		
	31.45	33.44	33.22	34.13	33.90		
	31.55	33.90	33.33	33.90	34.13		

Organizándolos para la construcción de su correspondiente histograma se toman intervalos de ancho de clase igual a 1.5 mm², que es con el que se obtiene un histograma mejor distribuido, siendo el intervalo de valores:

$$[31,35.5] \text{ mm}^2$$

Queda:



Nuevamente se observa una concentración en el centro de algunos de los resultados y una distribución más o menos repartida. Cabría entonces pensar nuevamente en la posibilidad de que se trate de una distribución normal. Realizando el contraste correspondiente:

CONTRASTE DE HIPÓTESIS		
Clases (A_i)	Frecuencia observada en A_i (O_i)	$e_i = n \cdot P(A_i)$
31-< 32.5	10	10.225
32.5 -< 34	32	31.615
34 -< 35.5	8	7.805

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = 0.015 < \chi_{2,0.05}^2 = 5.991 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0, \text{ luego el modelo de}$$

probabilidad de la muestra es Normal

con distribución: $N(33.17, 0.831^2)$

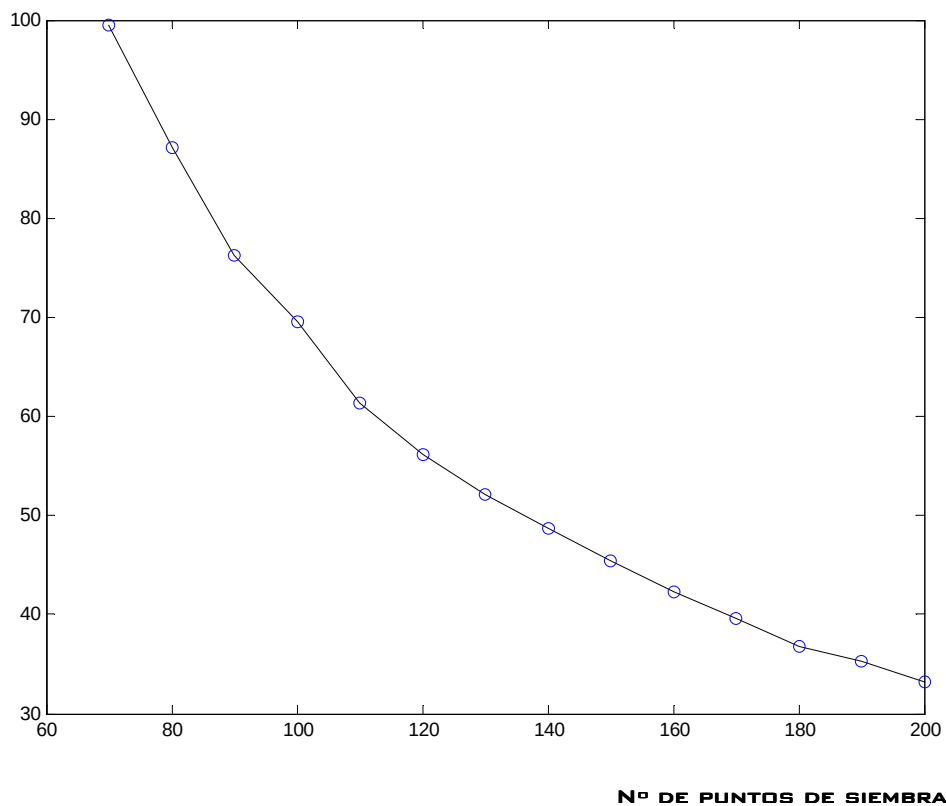
Vuelve a ser la distribución normal la que rige el comportamiento de la muestra.

5.2.2 EVOLUCIÓN DEL TAMAÑO DE GRANO MEDIO FRENTE AL NÚMERO DE PUNTOS DE SIEMBRA.

Otro de los aspectos importantes a tener en cuenta y que aporta gran información es conocer cómo evoluciona el tamaño de grano medio de las muestras genéricas según se van modificando los aumentos con los que ésta es estudiada, o lo que es lo mismo, según se aumenta o disminuye el número de puntos de siembra. Así, se podrá tener una relación directa entre los aumentos a los que se encuentra la muestra concreta que se desee estudiar y el tamaño medio de grano, de forma que se podrá saber de antemano dicho tamaño sin necesidad de aplicar ningún método de obtención.

Esta evolución ha sido obtenida calculando la relación numérica, a través de una función, existente entre ambos conceptos. Para ello se ha utilizado el programa numérico Matlab, de manera que a través de un sencillo programa incluido en el *Anexo II* se obtiene una representación gráfica en la que se observa claramente el comportamiento del tamaño de grano medio frente al número de puntos generadores. Así en dicho programa a partir de los nodos (N° de puntos de siembra, tamaño de grano medio (μ)) cuyos valores son los calculados en el apartado anterior se consigue una aproximación bastante exacta de dicha evolución, que es la que se muestra a continuación:

TAMAÑO DE GRANO MEDIO (μ)



TAMAÑO DE GRANO MEDIO FRENTE A NÚMERO DE PUNTOS DE SIEMBRA

Los círculos de la representación gráfica son los nodos mencionados anteriormente y la gráfica en negro es la interpolación calculada por Matlab que plasma la relación existente entre el tamaño de grano medio y el número de puntos de siembra.

Para conocer el grado de aproximación de la estimación realizada del tamaño de grano medio para cada caso de número de puntos generadores es imprescindible definir el intervalo de confianza. Esto es debido a que se ha tomado como valor representativo la media de la muestra experimental, y los 50 datos de la misma pueden tener una dispersión más o menos significativa ya calculada con σ_{n-1} . Así pues, obtener el intervalo de confianza equivale a

conocer la amplitud del rango de valores que puede tomar el tamaño de grano medio para cada número de puntos de siembra, de forma que cuanto más estrecho sea significará que el resultado es mucho más preciso y la gráfica en ese punto se aproxima bastante al resultado real.

Para el caso de una muestra aleatoria grande ($n > 30$), como el que se está estudiando, el libro ya citado *‘Estadística para ingenieros y científicos’* de William Navidi indica lo siguiente:

‘Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria grande ($n > 30$) de una población con media μ y desviación estándar σ , por lo que $\bar{X}$ es aproximadamente normal. Entonces un intervalo de confianza $100(1-\alpha) \%$ para μ es:

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$$

donde $\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$. Cuando el valor de σ es desconocido, se puede sustituir por la desviación estándar muestral σ_{n-1} .’

Un intervalo de confianza bastante aceptable es el del 95%. Así, para este caso su expresión quedaría:

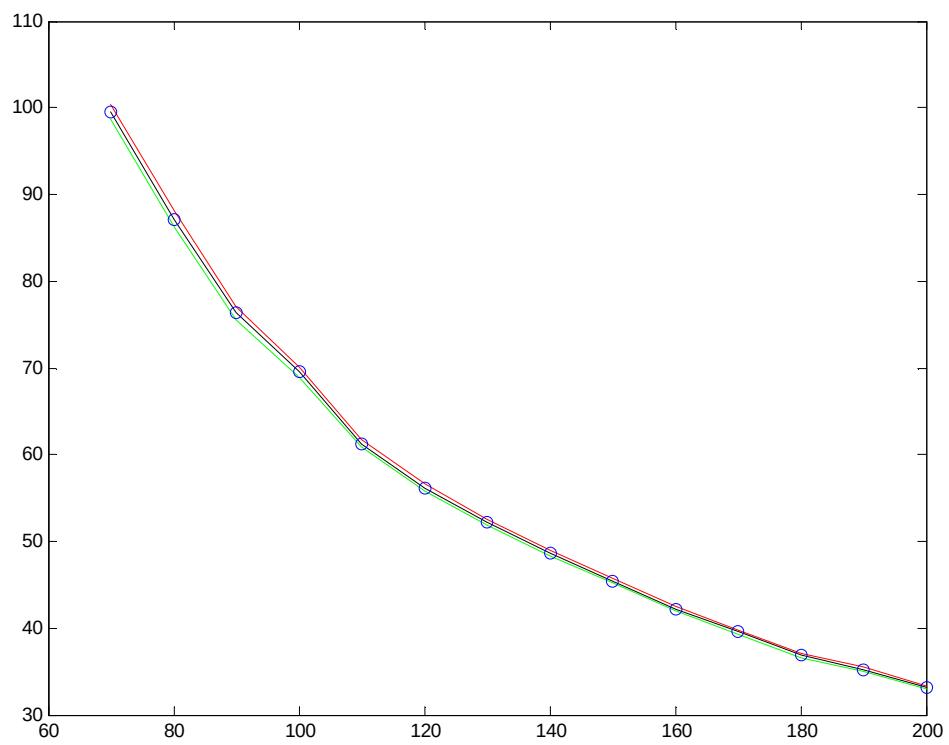
$$IC_{95\%} = \bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Calculándolo para cada uno de los casos:

INTERVALOS DE CONFIANZA	
Nº de puntos de siembra	Intervalo de confianza
70	99.526 ± 0.8
80	87.188 ± 0.98
90	76.315 ± 0.71
100	69.53 ± 0.59
110	61.29 ± 0.42
120	56.2 ± 0.44
130	52.18 ± 0.38
140	48.63 ± 0.35
150	45.45 ± 0.27
160	42.24 ± 0.26
170	39.584 ± 0.25
180	36.82 ± 0.21
190	35.253 ± 0.20
200	33.17 ± 0.23

Una vez obtenidos todos los intervalos de confianza se observa que son bastante precisos, en ningún caso se sobrepasa la unidad de distancia con respecto a la media. Además se comprueba que a medida que aumenta el número de puntos de siembra el ancho del intervalo disminuye considerablemente, lo que quiere decir que cada vez se obtienen resultados más exactos. Esto se puede observar con claridad en la gráfica siguiente, incluida también en el *Anexo II*:

TAMAÑO DE GRANO MEDIO (μ)



Nº DE PUNTOS DE SIEMBRA

INTERVALOS DE CONFIANZA

donde el límite superior del intervalo de confianza aparece en rojo y el inferior en verde.

5.3 CONCLUSIONES.

Tras el minucioso estudio realizado se puede concluir lo siguiente:

1. Para una distribución uniforme de los puntos de siembra el tamaño de grano medio evoluciona según una distribución normal.

En esta generalización es cierto que se está obviando el hecho de que para 70 puntos de siembra no se llegó a ningún resultado concluyente. Sin embargo hay que tener en cuenta dos aspectos importantes:

- Por un lado, se trata de un estudio experimental a base de simulaciones en Matlab. Así cabe la posibilidad de que entre los numerosos casos analizados exista alguno en el que los datos muestrales no favorezcan el estudio y tomen, regidos por el azar propio de este tipo de investigaciones, valores que realmente estén fuera de su propio rango. El hecho de que sólo uno de los catorce casos estudiados dé un resultado erróneo permite generalizar la conclusión obtenida para los otros trece.
- Por el otro lado analizando los intervalos de confianza del apartado anterior se observa, como ya se comentó, que a medida que aumenta el número de puntos de siembra el ancho de dicho intervalo disminuye, es decir, los datos experimentales cada vez están menos dispersos y el resultado será más preciso. Para $N = 70$ se tiene uno de los intervalos más anchos, por lo que cabe esperar poca precisión.

2. El tamaño de grano medio de una muestra genérica disminuye conforme aumenta el número de puntos generadores de la misma, o lo que es lo mismo, según disminuyen los aumentos con los que ésta es observada. De esta forma seremos capaces de crear una muestra del tamaño de grano medio que se desee o bien conocerlo de antemano sabiendo tan sólo los aumentos aplicados haciendo uso de la relación obtenida en el apartado 5.2.2.

Tras todo el estudio realizado se ha llegado a una conclusión muy interesante que abrirá camino a otros estudios y facilitará la investigación de otros.