

5. Análisis de vibraciones torsionales

5.1 Introducción

Normalmente los grupos electrógenos de Caterpillar vienen suministrados con su propio alternador de serie. Sin embargo, el 3612 es un motor normalmente utilizado en la propulsión de barcos y no existe para él en las diferentes opciones de configuración un alternador de serie. En este caso las directrices de Caterpillar fueron acoplarle una generatriz de marca externa y realizar un análisis de vibraciones torsionales para asegurar la fiabilidad del sistema, estableciendo unos valores admisibles de varios factores a medir.

5.2 Descripción teórica del problema

5.2.1. Introducción

Consideremos el caso sencillo representado en la figura 1, sabiendo que todo el conjunto gira según el eje E-E'. El elemento 1 representa el motor que genera un par variable (aunque en la práctica girará a 1000 rpm en régimen estacionario) al girar

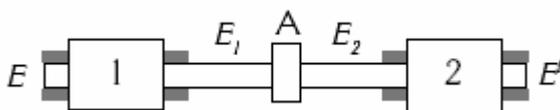


Figura 1

su eje E₁ con una velocidad angular Ω de valor:

$$M_m = A + B \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t) \quad (1)$$

El elemento 2 representa el generador, que consume un par determinado M_r , que supondremos constante, para que en el conjunto aparezca un par neto resultante variable con la posición del

conjunto caracterizada por el valor de $\Omega \cdot t$. Es evidente que, para que el conjunto se mantenga en régimen, ha de ocurrir que :

$$\int_0^{2\pi/\Omega} (A + B \cdot \text{sen}(\Omega t)) dt = M_r \cdot 2\pi \quad (2)$$

por lo tanto:

$$M_r = A \quad \text{mN} \quad (3)$$

Ambos elementos tienen sus ejes E_1 y E_2 conectados mediante el acoplamiento A; si la rigidez torsional de E_1 vale k_1 , la de E_2 es k_2 y la del acoplamiento A tiene por valor k_A , podemos sustituir la rigidez de E_1 , E_2 y A por K_1 siendo:

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_A} \quad (4)$$

(por tratarse de un sistema trabajando a torsión todas estas rigideces estarán medidas en mN/radián).

Por otro lado, suponemos que el rotor 1 (de momento de inercia I_1 Kg·m²) es indeformable igual que el rotor 2 (de momento de inercia I_2 Kg·m²) y que el conjunto E_1 , E_2 y A tiene un momento de inercia despreciable mientras que su rigidez vale K_1 mN/rad. Bajo estas hipótesis simplificadoras, el sistema de la figura 1 queda reducido a un sistema de dos grados de libertad:

- El ángulo φ_1 girado por el rotor de momento de inercia I_1 .
- El ángulo φ_2 girado por el rotor de momento de inercia I_2 .

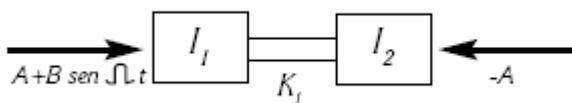


Figura 2

Sobre cada uno de estos rotores actúa respectivamente al par $A + B \cdot \text{sen}(\Omega t)$ y el par $-A$ como representamos en la figura 2. El problema que deseamos resolver persigue encontrar las vibraciones torsionales que aparecerán en este sistema y analizar su variación en función de los pares aplicados y de los valores de K_1 , I_1 e I_2 .

5.2.2 Solución clásica y solución mediante análisis modal.

Aplicando la segunda ley de Newton a cada uno de los dos momentos de inercia tendremos:

$$\begin{aligned} A + B \cdot \text{sen}(\Omega t) + K_1(\varphi_2 - \varphi_1) &= I_1 \ddot{\varphi}_1 \\ -A - K_1(\varphi_2 - \varphi_1) &= I_2 \ddot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

ecuaciones que podemos escribir de la forma:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + K_1 \varphi_1 - K_1 \varphi_2 &= A + B \cdot \text{sen}(\Omega t) \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - K_1 \varphi_1 + K_1 \varphi_2 &= -A \end{aligned} \quad (6)$$

o puestas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B \cdot \text{sen}(\Omega t) \\ -A \end{bmatrix} \quad (7)$$

vemos que para conocer la respuesta del sistema, es decir los valores de φ_1 y φ_2 , debemos resolver el sistema de ecuaciones representado por (5), (6) ó (7), sistema en el que las variables φ_1 y φ_2 a determinar aparecen interrelacionadas en ambas ecuaciones. Esto, en un caso tan sencillo como el que estamos considerando, no representa problema alguno; pero, si nos encontrásemos ante un sistema con un número N elevado de grados de libertad, aparecerían N ecuaciones con las N incógnitas a determinar acopladas entre sí que deberíamos resolver simultáneamente. Esta dificultad puede obviarse aprovechando la ortogonalidad de los modos naturales de vibración del sistema en estudio que nos permitirá, mediante un sencillo cambio de variables, encontrar N nuevas ecuaciones en las que figure

una sola incógnita en cada una de ellas. Encontrado el valor de cada una de estas N incógnitas y deshaciendo el cambio previo resultará ya elemental encontrar los valores de las N variables iniciales que determinan la respuesta del que pretendemos conocer el sistema. Para ello recurrimos al Análisis Modal.

5.2.3 Frecuencias y modos naturales de vibración.

Para conocer la respuesta natural de nuestro sistema liberémoslo de las acciones exteriores que aplicábamos sobre él, por lo que las ecuaciones (6) quedarán reducidas a:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + K_1 \varphi_1 - K_1 \varphi_2 &= 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - K_1 \varphi_1 + K_1 \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

o, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

podemos escribirlas en forma condensada:

$$[M] \cdot [\ddot{\varphi}] + [K] \cdot [\varphi] = 0 \quad (10)$$

siendo:

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

la matriz de masas, que vemos resulta diagonal,

$$[\varphi] = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$$

es el vector columna de aceleraciones angulares,

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de rigideces, que vemos resulta simétrica respecto a la diagonal principal,

$$[\varphi] = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$$

es el vector columna giros de cada uno de los rotores.

Por relacionarse linealmente los valores de las derivadas de los ángulos girado por los rotores con estos ángulos, es elemental ver que la solución de las ecuaciones diferenciales anteriores será de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \phi_1 e^{\lambda t} \\ \varphi_2 &= \phi_2 e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (11)$$

que también podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (12)$$

o en forma condensada:

$$[\varphi] = [\phi] e^{\lambda t} \quad (13)$$

A partir de (11), (12) o (13) podemos expresar:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= \lambda^2 \phi_1 e^{\lambda t} \\ \ddot{\varphi}_2 &= \lambda^2 \phi_2 e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (14)$$

o,

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (15)$$

o,

$$[\ddot{\phi}] = \lambda^2 [\phi] e^{\lambda t} \quad (16)$$

Para encontrar los valores de λ , ϕ_1 y ϕ_2 que permitan encontrar los valores de φ_1 y φ_2 que satisfagan las ecuaciones de partida (8), (9) y (10), y operando a partir de ahora con las ecuaciones en forma matricial, sustituyamos (12) y (15) en (7) y obtendremos :

$$\left[\lambda^2 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} = 0 \quad (17)$$

y, como sabemos que la exponencial no se anula nunca, ha de ocurrir que:

$$\left[\lambda^2 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

Para evitar la solución trivial $\phi_1 = \phi_2 = 0$, que por (12) conllevaría a que $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, ha de ser nulo el determinante de los coeficientes de ϕ_1 y ϕ_2 , es decir :

$$\left| \lambda^2 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (19)$$

equivalente a :

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 I_1 + K_1 & -K_1 \\ -K_1 & \lambda^2 I_2 + K_1 \end{vmatrix} = 0$$

luego :

$$\lambda^4 I_1 I_2 + \lambda^2 (I_1 K_1 + I_2 K_1) = 0$$

y de aquí :

$$\lambda^2 (\lambda^2 I_1 I_2 + K_1 (I_1 + I_2)) = 0 \quad (20)$$

ecuación que permite encontrar los dos únicos valores de λ^2 que hacen posible que ϕ_1 y ϕ_2 tengan valores distintos de cero. Estos valores de λ en nuestro caso son :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= 0 \\ \lambda_2^2 &= \frac{K_1 (I_1 + I_2)}{I_1 I_2} \end{aligned} \quad (21), (22)$$

La ecuación (12), conocidos los valores de λ_1 y λ_2 , nos permite escribir :

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \end{bmatrix} I + \begin{bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \end{bmatrix} e^{\sqrt{\frac{K(I_1+I_2)}{I_1 I_2}} t} \quad (23)$$

Las ecuaciones (23) permiten encontrar ϕ_1 y ϕ_2 una vez que conozcamos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \end{bmatrix} &= [\phi_{1,1} \ \phi_{2,1}]^T \\ \text{y} \begin{bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \end{bmatrix} &= [\phi_{1,2} \ \phi_{2,2}]^T \end{aligned}$$

Conocer estos valores es inmediato aplicando la ecuación (18) para cada uno de los dos valores de λ .

En efecto, y dado que $e^{\lambda \cdot 0} = e^0 = 1$, de (23) obtenemos :

$$\begin{aligned} (\phi_1)_{t=0} = \phi_{10} &= \phi_{1,1} + \phi_{2,1} \\ (\phi_2)_{t=0} = \phi_{20} &= \phi_{1,2} + \phi_{2,2} \end{aligned} \quad (24), (25)$$

y sabiendo, además, que mediante la ecuación (18) encontramos para λ_1 una relación entre $\phi_{1,1}$ y $\phi_{2,1}$ y análogamente para λ_2 otra relación entre $\phi_{1,2}$ y $\phi_{2,2}$. Estas relaciones son los llamados modos de vibración natural y que podemos encontrar como hacemos a continuación.

Para obtener el primer modo nos basta sustituir en (18) λ por λ_1 obteniendo :

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \end{bmatrix} = 0$$

equivalente a :

$$\phi_{1,1} = \phi_{2,1} \quad (26)$$

Análogamente, si sustituimos en (18) λ^2 por el valor $\frac{K_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}$ obtendremos el segundo

modo que, en nuestro caso, será :

$$\begin{bmatrix} -K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} I_1 + K_1 & -K_1 \\ -K_1 & -K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} I_2 + K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \end{bmatrix} = 0$$

equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{I_1 + I_2}{I_2} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{I_1 + I_2}{I_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \end{bmatrix} = 0$$

de donde es elemental deducir que

$$\phi_{2,2} = -\frac{I_1}{I_2}\phi_{2,2} \quad (27)$$

Las ecuaciones (26) y (27) son los dos modos naturales de vibración del sistema que venimos considerando, correspondiendo cada uno a cada una de las frecuencias naturales del mismo. La matriz formada por los modos

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

es la llamada Matriz Modal del sistema.

Ya vemos como las ecuaciones (24), (25), (26), (27) permiten encontrar con total facilidad los valores de $\phi_{1,1}$, $\phi_{2,1}$, $\phi_{1,2}$ y $\phi_{2,2}$ como pretendíamos.

Es interesante, pretendiendo facilitar la interpretación física de cada modo de vibración, explicar como podríamos excitar en nuestro sistema cada uno de estos modos viendo que, al hacerlo correctamente, la frecuencia con que los rotores se moverían coincidiría con la frecuencia correspondiente al modo excitado. En nuestro caso las dos posibilidades serían :

- Para el primer modo ($\phi_{1,1} = \phi_{2,1}$), correspondiente a la primera frecuencia $\omega_1^* = \sqrt{\lambda_1} = 0$, los dos rotores giran exactamente el mismo ángulo por lo que no se deforma el eje de constante K_1 que los conecta y todo el conjunto se comportará como un sólido rígido, por lo tanto sin ninguna oscilación.

- Para el segundo modo ($\phi_{2,2} = -\frac{I_1}{I_2}\phi_{2,2}$), correspondiente a la segunda frecuencia

$\omega_2^* = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{K_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$ los dos rotores giran en sentido contrario ángulos inversamente

proporcionales a sus respectivos momentos de inercia. Por lo tanto, en este modo de vibración, el punto c (figura 3)

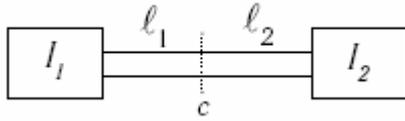


Figura 3

A distancias l_1 y l_2 respectivamente de I_1 e I_2 siendo :

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

quedará en reposo y podremos considerar el movimiento de I_1 como el del sistema de la figura 4 de un grado de libertad y el movimiento de I_2 como el del sistema de la figura 5, también de un grado de libertad.

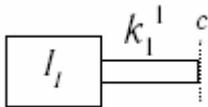


Figura 4

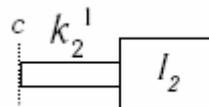


Figura 5

Es evidente que las frecuencias naturales de los sistemas de las figuras 4 y 5 serán, respectivamente :

$$\sqrt{\frac{k_{1,1}}{I_1}} \text{ y } \sqrt{\frac{k_{2,1}}{I_2}}$$

y vamos a demostrar como ambas partes son iguales y de valor

$$\sqrt{\frac{K_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$$

En efecto, sabemos que :

$$\frac{k_{1,1}}{k_{2,1}} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{I_1}{I_2} \quad (29)$$

por lo tanto :

$$\frac{k_{1,1}}{I_1} = \frac{k_{2,1}}{I_2} = \frac{k_{1,1} + k_{2,1}}{I_1 + I_2} \quad (30)$$

por otro lado, también sabemos que :

$$\frac{1}{k_{1,1}} + \frac{1}{k_{2,1}} = \frac{1}{K_1} = \frac{k_{1,1} + k_{2,1}}{k_{1,1}k_{2,1}} \quad (31)$$

De (30) y de (31) se deduce directamente que

$$k_{1,1} + k_{2,1} = k_{1,1} \frac{I_1 + I_2}{I_1} = k_{2,1} \frac{I_1 + I_2}{I_2} = \frac{k_{1,1} \cdot k_{2,1}}{K_1} \quad (32)$$

y de (32) ya es inmediato deducir que:

$$k_{1,1} = K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \quad (33), (34)$$

$$k_{2,1} = K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1}$$

por lo tanto, las frecuencias naturales de los sistemas de un grado de libertad de las figuras 4 y 5 serán, como habíamos preconizado, ambas iguales y de valor

$$\sqrt{\frac{K_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$$

5.2.4 Ortogonalidad de los modos naturales de vibración

Los modos naturales de vibración, $[\phi_{1,1} \ \phi_{2,1}]^T$ y $[\phi_{1,2} \ \phi_{2,2}]^T$ en nuestro caso, tienen la propiedad de ser ortogonales tanto respecto a la matriz de masas

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

como respecto a la matriz de rigideces que, en el caso elemental que venimos considerando, vale

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}$$

Para demostrar esta ortogonalidad consideremos un caso genérico para el que:

- $[M]$ sea la matriz de masas
- $[K]$ sea la matriz de rigideces
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ los valores de λ que cumplan (19)
- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ los N modos naturales de vibración.

Por (18) es evidente que, en este caso general, podemos escribir :

$$\lambda_i^2 [M] \cdot [\phi_i] = -[K] \cdot [\phi_i] \quad (35)$$

$$\lambda_j^2 [M] \cdot [\phi_j] = -[K] \cdot [\phi_j] \quad (36)$$

si ahora premultiplicamos (35) por $[\phi_j]^T$ y (36) por $[\phi_i]^T$ tendremos :

$$\lambda_i^2 [\phi_j]^T \cdot [M] \cdot [\phi_i] = -[\phi_j]^T \cdot [K] \cdot [\phi_i] \quad (37)$$

$$\lambda_j^2 [\phi_i]^T \cdot [M] \cdot [\phi_j] = -[\phi_i]^T \cdot [K] \cdot [\phi_j] \quad (38)$$

si transponemos ambos miembros de la ecuación (37) y dado que tanto $[M]$ como $[K]$ son simétricas obtendremos :

$$\lambda_i^2 [\phi_i]^T \cdot [M] [\phi_j] = -[\phi_i]^T \cdot [K] [\phi_j] \quad (39)$$

restando a (39) la ecuación (38) vemos que:

$$(\lambda_i^2 - \lambda_j^2) [\phi_i]^T \cdot [M] [\phi_j] = 0 \quad (40)$$

y como:

$$\lambda_i \neq \lambda_j$$

necesariamente ha de ocurrir que:

$$[\phi_i]^T \cdot [M] [\phi_j] = 0 \quad (41)$$

De (41) vemos como el modo correspondiente a la frecuencia i es ortogonal respecto a la matriz de masas con el modo natural correspondiente a la frecuencia j . De (38) deducimos como también ocurre que:

$$[\phi_i]^T \cdot [K] [\phi_j] = 0 \quad (42)$$

luego también los modos son ortogonales respecto a la matriz de rigideces.

Podemos constatar como en nuestro caso "(si hacemos $\phi_{1,1} = \phi_{1,2} = 1$):

$$[1 \quad 1] \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} = [I_1 \quad I_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} = [I_1 - I_2] = 0$$

y análogamente:

$$[1 \quad 1] \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} = [K_1 - K_1 \quad -K_1 + K_1] \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} = 0$$

Si en el proceso anterior hiciésemos $i=j$ la ecuación (40) se convertiría en

$$(\lambda_i^2 - \lambda_i^2) [\phi_i]^T \cdot [M] [\phi_i] = 0 \quad (43)$$

pero como

$$\lambda_i^2 - \lambda_i^2 = 0$$

no tiene por qué cumplirse que

$$[\phi_i]^T \cdot [M] [\phi_i] = 0 \quad (44)$$

sea nulo. Tampoco ocurrirá que:

$$[\phi_i]^T \cdot [K] [\phi_i] = 0 \quad (45)$$

A las expresiones (44) y (45) se las conoce como Masa i -ésima Generalizada y como Rigidez i -ésima Generalizada, respectivamente. En el caso sencillo que venimos estudiando ocurre que:

- La primera masa modal generalizada es: $I_1 + I_2$
- La segunda masa modal generalizada es: $I_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2}$
- La primera rigidez modal generalizada es: 0
- La segunda rigidez modal generalizada es: $K_1 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_2} \right)^2$

Nótese como:

$$\sqrt{\frac{0}{I_1 + I_2}} = 0 = \omega_1$$

y como:

$$\sqrt{\frac{K_1 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_2} \right)^2}{I_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2}}} = \sqrt{\frac{K_1 (I_1 + I_2)}{I_1 I_2}} = \omega_2$$

valores que coinciden con las frecuencias naturales de cada uno de los dos modos naturales de vibración de nuestro problema.

5.2.5. Análisis modal

Si en la ecuación (7), representativa del movimiento en nuestros dos rotores, sustituimos φ_1 y φ_2 por:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

o, puesto en forma condensada, hacemos el cambio de variable :

$$[\varphi] = [\phi] \cdot [q] \quad (47)$$

en que :

· $[\varphi]$ es el vector columna de los giros de I_1 e I_2

· $[\phi]$ es la matriz modal como la definimos en (28)

· $[q]$ es un vector columna de dos nuevas variables funciones del tiempo

Tendremos en forma matricial que :

$$[M][\phi][\ddot{q}] + [K][\phi][q] = [P] \quad (48)$$

Si llamamos

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B \operatorname{sen} \Omega t \\ -A \end{bmatrix} \quad (49)$$

y si premultiplicamos ahora ambos miembros de (48) por la traspuesta de la matriz modal tendremos :

$$[\phi]^T [M][\phi][\ddot{q}] + [\phi]^T [K][\phi][q] = [\phi]^T [P] \quad (50)$$

La ecuación (50) en nuestro caso sería :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A + B \operatorname{sen} \Omega t \\ -A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

y, operando, esta última expresión se convierte en:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & 0 \\ 0 & I_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_1 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_2} \right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \operatorname{sen} \Omega t \\ A + B \operatorname{sen} \Omega t + \frac{I_1}{I_2} A \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} B \operatorname{sen} \Omega t \\ A \frac{I_1 + I_2}{I_2} + B \operatorname{sen} \Omega t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

en donde vemos como todas las matrices del primer miembro son diagonales como tenía que ocurrir recordando la ortogonalidad de los modos naturales de vibración. Por ser diagonales las matrices del primer miembro las dos ecuaciones del sistema (52) se convierten en dos ecuaciones con las variables q_1 y q_2 completamente desacopladas con lo que el sistema de dos grados de libertad inicial queda configurado como dos sistemas cada uno de un grado de libertad (q_1 y q_2).

Estos dos sistemas serán :

$$\cdot (I_1 + I_2)\ddot{q}_1 = B \operatorname{sen} \Omega t \quad (53)$$

sistema que podemos representar como hacemos en la figura 6.



Figura 6

$$\cdot I_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \ddot{q}_2 + K_1 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_2} \right)^2 q_2 = A \frac{I_1 + I_2}{I_2} + B \operatorname{sen} \Omega t \quad (54)$$

equivalente a:

$$I_1 \ddot{q}_2 + K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} q_2 = A + \frac{B I_2}{I_1 + I_2} + B \operatorname{sen} \Omega t \quad (55)$$

sistema que podemos representar según la figura 7.

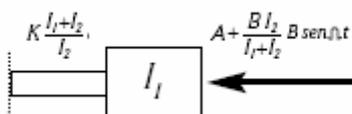


Figura 7

Los valores de q_1 y q_2 , en régimen permanente, solución de estos sistemas serán :

$$q_1 = \frac{B}{(I_1 + I_2)\Omega^2} \text{sen}\Omega t \quad (55)$$

$$q_2 = \frac{AI_2}{K_1(I_1 + I_2)} + \frac{\frac{BI_2}{I_1 + I_2}}{K_1 \frac{I_1}{I_1 + I_2} - I_1\Omega^2} \text{sen}\Omega t \quad (56)$$

por lo tanto, los ángulos φ_1 y φ_2 girados por cada uno de los dos rotores, podremos ya encontrarlos recordando que

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{I_1}{I_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\varphi_1 = q_1 + q_2 = \frac{B}{(I_1 + I_2)\Omega^2} + \frac{AI_2}{K_1(I_1 + I_2)} + \frac{B}{K_1 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_2} \right)^2 - I_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \Omega^2} \text{sen}\Omega t \quad (57)$$

$$\varphi_2 = q_1 - \frac{I_1}{I_2} q_2 = \frac{B}{(I_1 + I_2)\Omega^2} - \frac{AI_1}{K_1(I_1 + I_2)} - \frac{I_1}{I_2} \frac{B}{K_1 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_2} \right)^2 - I_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \Omega^2} \text{sen}\Omega t \quad (58)$$

La deformación a torsión del eje evidentemente será:

$$\begin{aligned}
 T = \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{A}{K_1} + \left(1 + \frac{I_1}{I_2}\right) \cdot \frac{B}{K_1 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_2}\right)^2 - I_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \Omega^2} \text{sen}\Omega t = \\
 &= \frac{A}{K_1} + \frac{I_1 + I_2}{I_2} \cdot \frac{B}{K_1 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_2}\right)^2 - \frac{I_1}{I_2} (I_1 + I_2) \Omega^2} \text{sen}\Omega t = \\
 &= \frac{A}{K_1} + \frac{B}{K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} - I_1 \Omega^2} \text{sen}\Omega t
 \end{aligned} \tag{59}$$

La interpretación física de cada uno de los términos en la ecuación (59) es elemental:

El término $\frac{A}{K_1}$ es la deformación torsional elástica debido al par constante que, generado en el motor y consumido en la máquina, mantiene el sistema en régimen.

El término

$$\frac{B}{K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} - I_1 \Omega^2} \text{sen}\Omega t$$

es la deformación variable en el eje como consecuencia del par variable que se transmite a través del mismo, deformación cuya amplitud sería nula si K_1 valiera infinito y sería finita si

$$\Omega^2 = \frac{K_1 (I_1 + I_2)}{I_1 I_2} \quad (\text{por estar en resonancia con } \omega_2).$$

Por otro lado, el par variable transmitido por el eje sería :

$$P = \frac{K_1 B}{K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} - I_1 \Omega^2} \text{sen}\Omega t \tag{60}$$

De la expresión (60) deducimos que :

· Este par para $K = \infty$, valdría

$$Par_{K=\infty} = \frac{BI_2}{I_1 + I_2} \text{sen}\Omega t \quad (61)$$

Como podemos deducir aplicando al sistema en estudio las ecuaciones de la mecánica del Sólido Rígido :

· Sería infinita la amplitud del par para

$$\Omega = \sqrt{\frac{K_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$$

· Si $\Omega' = \sqrt{2}\omega_2$, es decir si

$$\Omega' = \sqrt{2\frac{K_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$$

el par tendría por expresión :

$$\begin{aligned} Par &= \frac{K_1 B}{K_1 \frac{I_1 + I_2}{I_2} - I_1 \frac{2K_1(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}} \text{sen}\Omega t = -\frac{BI_2}{I_1 + I_2} \text{sen}\Omega t = \\ &= \frac{BI_2}{I_1 + I_2} \text{sen}(\Omega t - \pi) \end{aligned} \quad (62)$$

En este caso el módulo del par coincide en valor con el transmitido para $K = \infty$ pero está decalado 180°.

5.2.6. Conclusiones

Hemos visto como un sistema de 2 grados de libertad lo hemos resuelto, gracias al análisis modal, mediante el estudio de dos sistemas totalmente desacoplados de un grado de libertad cada uno. En el caso de que deseásemos estudiar un sistema general con N grados de libertad el proceso sería exactamente el mismo apareciendo los siguientes cambios :

- 1) Las matrices $[M]$ y $[K]$, diagonal la primera y simétrica la segunda, tendrían N filas y N columnas.
- 2) Aparecerían N frecuencias naturales y N modos naturales de vibración. Estos seguirían siendo ortogonales respecto a la matriz de masas y respecto a la matriz de rigideces.
- 3) La matriz modal $[\phi]$ definida por los N modos naturales, tendría N columnas y cada una constaría de N elementos.
- 4) El número de masas generalizadas sería N y análogamente sería N el número de rigideces generalizadas.
- 5) El problema quedaría reducido, al hacer el cambio de variables $[\phi][\phi][q]$, a resolver N ecuaciones de las que deduciríamos en cada una de ellas el valor q_i correspondiente y encontraríamos los valores correspondientes de las variables a determinar $[\phi]$, mediante la transformación

$$[\phi] = [\phi][q]$$

Siendo :

$[\phi]$ el vector columna a encontrar.

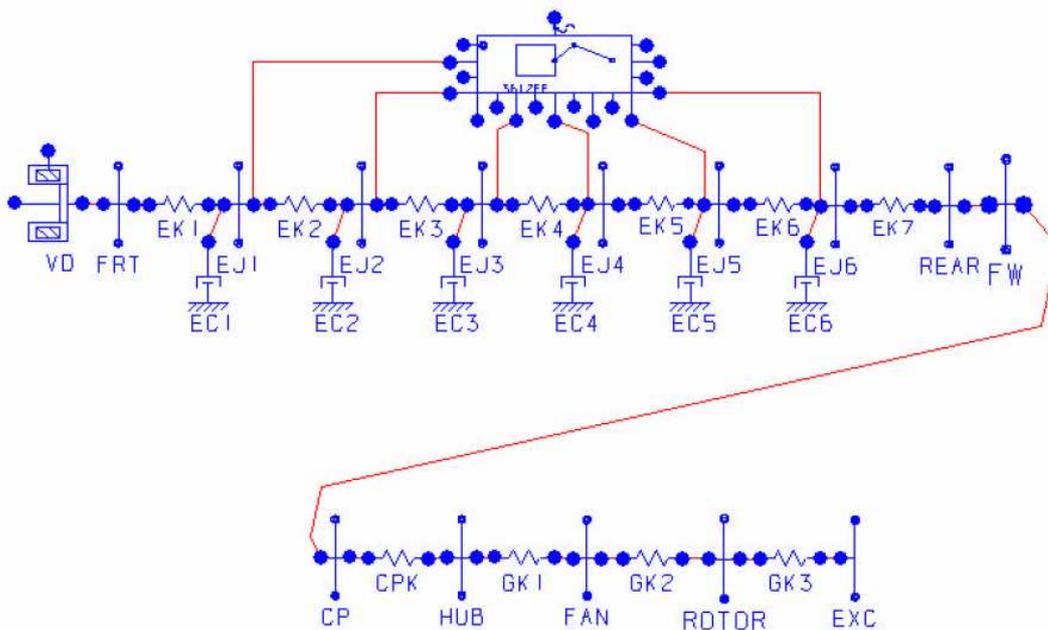
$[\phi]$ la matriz modal ya definida en el proceso.

$[q]$ el vector columna calculado en (5).

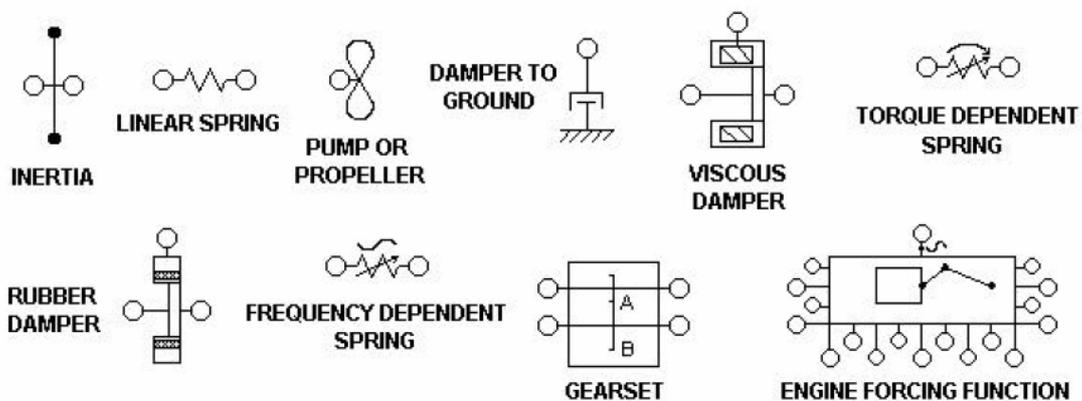
5.3 Problema en estudio

5.3.1 Modelo

Siempre bajo las directrices marcadas por Caterpillar planteamos el siguiente modelo, para cada una de las partes que integran la totalidad del sistema :



donde :



Los valores de las inercias de cada una de las masas son :

Caterpillar Inc.

Mass-Elastic Data

Damper Parameters

Damper Type	Housing Inertia Nms ²	Ring Inertia Nms ²	Effective Stiffness MNm/rad	Damping Nms/rad
Viscous	12.26	29.20	2.85	7000

MASS-ELASTIC DATA

MASS ID	MASS NAME	INERTIA (N*m*sec ²)	SPRING ID	STIFFNESS (MN*m/rad)	DIAMETER (mm)
VD		2.686E+01		0.000E+00	0.000E+00
FRT		5.645E+00	EK1	6.780E+01	2.160E+02
EJ1		1.700E+01	EK2	4.011E+01	2.160E+02
EJ2		1.632E+01	EK3	4.011E+01	2.160E+02
EJ3		1.632E+01	EK4	4.011E+01	2.160E+02
EJ4		1.632E+01	EK5	4.011E+01	2.160E+02
EJ5		1.632E+01	EK6	4.011E+01	2.160E+02
EJ6		1.700E+01	EK7	6.780E+01	2.160E+02
REAR		5.826E+00		0.000E+00	0.000E+00
FW		7.490E+01		0.000E+00	0.000E+00
CP		5.900E+01	CPK	1.600E+00	0.000E+00
HUB		2.030E+01	GK1	6.580E+01	2.000E+02
FAN		4.600E+01	GK2	4.309E+01	2.100E+02
ROTOR		4.287E+02	GK3	9.390E+01	2.600E+02
EXC		5.750E+00		0.000E+00	0.000E+00

System Damping

Component ID	Damping Nms/rad
EC1 – EC6	531 each

5.3.2 Límites admisibles

Los valores límites marcados por Caterpillar son :

System Data

Engine model 3612 rated at 3700 bkW, 1000 rpm operating speed

Engine Damper: Caterpillar Part No. 7W0127

Engine Flywheel: Caterpillar Part No. 9Y6182

Flywheel Ring: Caterpillar Part No. 9Y1851

Coupling: Caterpillar Part No. 1470076

Generator: Leroy Somer LSA56 L7/6p - MT, Dwg. No. P1 256 0826

Recommended Limits

Torsional vibration limits are as follows:

Amplitude at front of engine crankshaft:	+/- 1.00 degrees for 0.5 and 1.0 orders
	+/- 0.25 degrees for 1.5 order
	+/- 0.15 degrees for orders above 1.5
Stress in engine crankshaft:	+/- 21.0 MPa for individual orders
Stress in generator shaft:	+/- 34.5 MPa for individual orders

5.3.3 Conclusiones

Se observa en la siguiente tabla que ninguna de las masas que componen el sistema supera los valores máximos admisibles establecidos por Caterpillar :

Single Order Results		Order	Predicted	Permissible Limit
FRT	Absolute Amplitude (deg)	0.5	0.016	1.00
	Absolute Amplitude (deg)	1.0	0.033	1.00
	Absolute Amplitude (deg)	1.5	0.095	0.25
	Absolute Amplitude (deg)	3.0	0.009	0.15
	Absolute Amplitude (deg)	4.5	0.107	0.15
	Absolute Amplitude (deg)	6.0	0.043	0.15
EK5	Vibratory Stress (MPa)	0.5	1.62	21.0
	Vibratory Stress (MPa)	1.0	12.99	21.0
	Vibratory Stress (MPa)	1.5	12.97	21.0
	Vibratory Stress (MPa)	3.0	2.07	21.0
	Vibratory Stress (MPa)	4.5	10.94	21.0
	Vibratory Stress (MPa)	6.0	3.21	21.0
GK1	Vibratory Stress (MPa)	0.5	0.06	34.5
	Vibratory Stress (MPa)	1.0	0.75	34.5
	Vibratory Stress (MPa)	1.5	1.52	34.5
	Vibratory Stress (MPa)	3.0	0.59	34.5
	Vibratory Stress (MPa)	4.5	1.00	34.5
	Vibratory Stress (MPa)	6.0	0.17	34.5
	Vibratory Stress (MPa)	7.5	0.30	34.5
	Vibratory Stress (MPa)	8.0	0.45	34.5

Combined Order Results		Predicted	Permissible Limit
VD	Power Absorbed (kW/m ²)	4.0	5.7
CPK	Maximum Torque (Nm)	41522	134000
	Vibratory Torque (Nm)	5471	25200
	Nominal Torque (Nm)	35332	63000
	Power Loss (kW)	0.15	1.06

Single Order Misfire Results		Order	Predicted	Permissible Limit
FRT	Absolute Amplitude (deg)	0.5	0.081	1.00
	Absolute Amplitude (deg)	1.0	0.510	1.00
EK5	Vibratory Stress (MPa)	0.5	4.21	21.0
	Vibratory Stress (MPa)	1.0	16.50	21.0
GK1	Vibratory Stress (MPa)	0.5	3.79	34.5
	Vibratory Stress (MPa)	1.0	11.72	34.5

Combined Order Misfire Results		Predicted	Permissible Limit
VD	Power Absorbed (kW/m ²)	4.0	5.7
CPK	Maximum Torque (Nm)	61179	134000
	Vibratory Torque (Nm)	24186	25200
	Nominal Torque (Nm)	35332	63000
	Power Loss (kW)	2.02	1.06

Engine misfire may cause significant torsional vibration in the coupling, as indicated by high vibratory torque and power loss levels. This vibration would cause the coupling rubber elements to warm, changing their elastic properties. See warm coupling results beginning on page 25 for a more accurate representation of engine misfire behavior.

Aunque los resultados de la simulación fueron satisfactorios, mi estancia en la empresa concluyó antes de la implantación final del proyecto, con lo que no se puede ofrecer una comparación con los resultados de las pruebas in situ. De todos modos, tanto el rigor científico perseguido a lo largo de todo el trabajo como los valores de los resultados arrojados por el mismo, deberían dejar un margen suficientemente amplio como para no encontrarse con ningún problema en la realidad .