

Capítulo 1

Introducción

En este proyecto pretendemos poner de manifiesto la riqueza dinámica y la complejidad de comportamientos que pueden aparecer en un dispositivo aparentemente elemental como es un sencillo convertidor electrónico de tensión.

En el primer capítulo se introducen, por un lado, el modelado y control de convertidores electrónicos de potencia y, por otro lado, se repasan los conceptos relativos a la bifurcación de Hopf que necesitaremos en nuestro análisis posterior.

1.1. Convertidores electrónicos de potencia conmutados

La alimentación de los equipos electrónicos, dado que en su mayoría necesitan una tensión continua, es un problema que actualmente requiere seguir investigando en nuevas fuentes de alimentación y en el control de las mismas. Cuando la tensión que nos llega es alterna, como es el caso de la red eléctrica, lo que se suele hacer es utilizar un rectificador que nos convierta dicha tensión en continua, pero cuyo valor final no suele coincidir con las necesidades del circuito a alimentar. Lo mismo puede ocurrir cuando disponemos de una fuente de tensión continua.

Ante esta situación se hace necesario incluir una etapa intermedia entre la tensión de entrada que tenemos y el equipo electrónico al que queremos suministrar la energía. Una de las posibles soluciones a este problema es recurrir a los llamados convertidores electrónicos de potencia conmutados, más concretamente a aquellos que trabajan únicamente con corriente continua. Los hay de tres tipologías distintas: convertidores *buck*, que reducen el valor de la tensión, convertidores *boost*, que la elevan y en el cual centraremos

nuestro objeto de estudio, y convertidores *buck-boost*.

La ventaja que tiene el utilizar uno de estos convertidores frente a otras alternativas, como puede ser el emplear directamente un transformador de tensión, es que estos tipos de circuitos consiguen el objetivo que buscamos con una gran eficiencia y con un número reducido de componentes electrónicos, que resultan en un equipo de pequeño tamaño y reducido peso. Sin embargo, al ser, como su propio nombre indica, circuitos constituidos por elementos que conmutan durante su funcionamiento, la dinámica resultante y el control de la misma presentan una serie de problemas que necesitan ser estudiados.

Una de las estrategias típicas de control empleadas en este tipo de circuitos, según la bibliografía existente, es la modulación del ancho de pulso (*Pulse Modulation Width, PWM*). Otra posibilidad, introducida en los últimos años, es el uso de técnicas de control basadas en el control por modos deslizantes (*Sliding Mode Control, SMC*), que es la que en este proyecto se desarrollará y estudiará. Esta técnica se basa en introducir un plano de conmutación en el espacio de estados de manera que éste quede dividido en dos subespacios. En cada uno de ellos el sistema controlado presentará una dinámica distinta, por lo que cada vez que la trayectoria del sistema atraviese el plano de conmutación, se producirá una discontinuidad en el modelo del sistema.

1.2. Modelado de sistemas conmutados

Las fuentes electrónicas de potencia conmutadas son en esencia sistemas que presentan una dinámica no lineal. Para analizar y diseñar un sistema de control apropiado se necesita un modelo preciso que defina correctamente dicha dinámica. Existen diversos enfoques a la hora de definir dicho modelo como puede ser el empleo de modelos linealizados alrededor del punto de funcionamiento, de modelos no lineales promedio o los denominados modelos híbridos.

Los primeros sólo son válidos para pequeñas perturbaciones de la señal alrededor del punto de funcionamiento, mientras que los segundos promedian los efectos de la conmutación con respecto al periodo de conmutación y el conocimiento del comportamiento del circuito durante ese instante en el que el circuito conmuta se pierde. Además, en ninguno de estos dos tipos de modelos es posible recoger todos los posibles modos de conducción o de funcionamiento que va a presentar nuestro sistema. Por estas razones, en este proyecto la opción elegida es la de los modelos híbridos, que nos permitirán recoger en un solo sistema de ecuaciones diferenciales toda la dinámica del sistema. Estos modelos se caracterizan por la presencia simultánea de

variables continuas y discretas.

El modelo de nuestro sistema dinámico puede representarse mediante una función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ describiéndolo en la forma

$$\dot{x} = f(x, u),$$

donde

$$\begin{aligned} u(x) &= u^+(x), \text{ si } h(x) > 0, \\ u(x) &= u^-(x), \text{ si } h(x) < 0. \end{aligned}$$

La función escalar $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ determina una superficie $(n-1)$ -dimensional

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}.$$

Dicha superficie representa el lugar geométrico donde se produce la conmutación, también denominada superficie de deslizamiento, que divide al espacio de estado en dos regiones diferentes

$$\begin{aligned} \chi^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n : h > 0\}, \\ \chi^- &= \{x \in \mathbb{R}^n : h < 0\}, \end{aligned}$$

por lo que el sistema puede ser reescrito en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^+(x, u^+(x)), \text{ si } x \in \chi^+, \\ \dot{x} &= f^-(x, u^-(x)), \text{ si } x \in \chi^-. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En las ecuaciones (1.1) queda patente que el comportamiento dinámico del sistema está dictado por dos campos vectoriales distintos según la región del espacio de estados en la que nos encontremos. Como resultado, el sistema cambiará de estructura dependiendo del estado de las variables del sistema. Dicho cambio se producirá en los puntos de la superficie S donde el sistema se vuelve no derivable.

Sobre la superficie S existe una región, denominada dominio de deslizamiento, que se denotará por Ω que tiene la particularidad de que sobre ella ambos campos vectoriales están dirigidos hacia la superficie de deslizamiento empujando ambos en sentidos opuestos. Como consecuencia el sistema no podrá abandonar el plano y se queda deslizando sobre el mismo. En dicha región, se cumplirá que los productos escalares

$$\begin{aligned} \langle \nabla h(x), f^+(x, u^+(x)) \rangle &< 0, \\ \langle \nabla h(x), f^-(x, u^-(x)) \rangle &> 0, \end{aligned}$$

tendrán un signo opuesto, indicando que el campo apunta hacia el plano de deslizamiento por ambos lados.

1.3. Dinámica de deslizamiento. Clasificación de las bifurcaciones

En el dominio de deslizamiento Ω , al pertenecer a la superficie S , el campo vectorial f está indefinido, por lo que las ecuaciones (1.1) no describen la dinámica del sistema cuando se encuentra en modo de deslizamiento. Para determinar dicha dinámica existen varios procedimientos, como pueden ser el método de Continuación de Filippov, o el del Control Equivalente de Utkin, que es el que se va a seguir en este proyecto. Consiste en reemplazar la variable discontinua u del sistema híbrido que define nuestro sistema, por un control equivalente u_{eq} de manera que, para el campo resultante, se satisfaga la condición

$$\frac{d}{dt}[h(x(t))] = 0,$$

denominada condición de invarianza, cuando suponemos que la solución verifica la condición

$$h(x) = 0,$$

es decir, que nos encontramos en la superficie de deslizamiento.

La dinámica del modo de deslizamiento viene dada entonces por el sistema equivalente

$$\dot{x} = f(x, u_{eq}(x)) = f_{eq}(x).$$

Una vez obtenida esta dinámica, contamos con una definición del campo vectorial para todos los puntos del espacio de estados. Podemos ahora definir distintos tipos de puntos de equilibrio en función de que éstos se encuentren dentro de la superficie de deslizamiento o no. A los primeros se les llamará puntos de equilibrio de deslizamiento o puntos de pseudo-equilibrio y, a los segundos, puntos de equilibrio naturales o propiamente dichos. Para obtenerlos hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_{eq}(x) &= 0, \\ h(x) &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

para el caso del equilibrio de deslizamiento, y

$$\begin{aligned} f^+(x) &= 0, \\ f^-(x) &= 0, \end{aligned}$$

para los posibles equilibrios naturales.

A su vez, para cada tipo de equilibrio podemos distinguir entre puntos reales y puntos virtuales de equilibrio. Aquí el adjetivo virtual indica que, en

su caso, el punto puede organizar la dinámica de una determinada región del espacio de estados, sin ser un auténtico valor de equilibrio, por encontrarse fuera de dicha región. Así, para los equilibrios naturales tenemos que los puntos reales de equilibrio son los que cumplen

$$\begin{aligned} f^+(x) &= 0, \text{ con } x \in \chi^+, \\ f^-(x) &= 0, \text{ con } x \in \chi^-, \end{aligned}$$

mientras que los puntos de equilibrio virtual son aquellos en que

$$\begin{aligned} f^+(x) &= 0, \text{ con } x \in \chi^-, \\ f^-(x) &= 0, \text{ con } x \in \chi^+. \end{aligned}$$

Por su parte, para los puntos de equilibrio de deslizamiento, los puntos reales son aquellos que cumpliendo (1.2) pertenecen al dominio de deslizamiento Ω , y los virtuales son aquellos que no pertenecen a Ω .

Con todas estas definiciones, podemos hacer una clasificación del tipo de bifurcaciones que pueden presentarse en este tipo de sistemas. Así podemos distinguir tres tipos diferentes:

Tipo I. Bifurcaciones que implican el colapso o cambio de la estabilidad de los puntos de equilibrio (punto de silla, Hopf, etc.)

Tipo II. Bifurcaciones relacionadas con el cambio de carácter real/virtual de los puntos de equilibrio.

Tipo III. Desaparición o aparición de un dominio de deslizamiento.

El objetivo de este proyecto será llevar a cabo el análisis de la bifurcación de Hopf que se produce en el convertidor *boost* como consecuencia de variar la ganancia de control cuando se utiliza una estrategia de modos deslizantes, obteniendo su caracterización y las implicaciones que tiene desde el punto de vista del diseño y del comportamiento que presentará el circuito. Hemos de indicar, tal y como se hace referencia en [5] que los otros dos tipos de bifurcaciones también pueden presentarse en este tipo de circuitos.

1.4. La Bifurcación de Hopf

El comportamiento dinámico de muchos procesos físicos o de la ingeniería de sistemas viene modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales. En general estas ecuaciones son no lineales y, además, dependen de ciertos parámetros que representan los posibles valores de las magnitudes que fijan

el caso concreto de proceso o el control del sistema. La elección de los valores concretos de los parámetros del sistema determina los posibles estados de equilibrio del mismo y su modo de respuesta dinámica ante las pequeñas perturbaciones de cada uno de esos estados. Al evolucionar con continuidad los valores de los parámetros, los posibles estados de equilibrio van cambiando, de manera que pueden surgir algunos nuevos equilibrios o desaparecer otros o simplemente cambiar sus propiedades.

En términos generales, el análisis del carácter de un punto de equilibrio de un sistema dinámico —es decir la discusión de si es o no estable— se remite a la investigación de la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema linealizado. Básicamente el signo de la parte real de los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema linealizado es quien fija la estabilidad, que se garantiza cuando todos los valores propios tienen parte real negativa. En sistemas dinámicos dependientes de parámetros, el modelo linealizado también cambiará al modificarse los valores de dichos parámetros, de manera que el carácter de los correspondientes puntos de equilibrio puede resultar alterado. Los cambios cualitativos del carácter de un determinado punto de equilibrio son el resultado de lo que se denomina una bifurcación. Las posibilidades de bifurcación son muy variadas, y aquí nos limitaremos a apuntar las dos que se producen genéricamente en sistemas dependientes de un sólo parámetro.

En sistemas con un sólo parámetro la pérdida de estabilidad se produce genéricamente mediante dos posibles mecanismos netamente diferenciados. En el primero de ellos, un valor propio real inicialmente negativo evoluciona con el cambio de los valores del parámetro hacia el semiplano real positivo. Puede demostrarse que, también genéricamente, en este caso se pierde la estabilidad por la confluencia del punto de equilibrio estable (nodo) con otro inestable (silla). Este fenómeno se denomina por esta razón bifurcación silla-nodo, y no será aquí objeto de más comentarios. La segunda posibilidad aparece cuando la estabilidad se pierde como consecuencia de que un par de valores propios complejos conjugados atraviesan el eje imaginario con lo que el punto de equilibrio se vuelve inestable. En este caso, genéricamente se produce lo que se denomina una bifurcación de Hopf.

La característica esencial de este tipo de bifurcación es que, para valores del parámetro cercanos al valor de bifurcación, se produce la aparición de un ciclo límite del sistema en las cercanías del estado de equilibrio. Existen dos posibilidades diferentes, de propiedades y consecuencias prácticas muy distintas. En primer lugar el ciclo límite (que será inestable) puede coexistir con el punto de equilibrio estable, antes de que el parámetro alcance el valor de bifurcación. En este caso la bifurcación de Hopf se denomina subcrítica, y supone en la práctica una limitación del dominio de atracción del

punto de equilibrio. Como segunda posibilidad, el ciclo límite puede surgir una vez que se ha traspasado el valor de bifurcación. En este caso se habla de una bifurcación supercrítica, en la que el ciclo límite es estable. En este supuesto el ciclo constituye un atractor que mitiga la inestabilidad del punto de equilibrio.

La teoría de la bifurcación de Hopf es relativamente complicada. Vamos a intentar presentar, de manera simplificada pero completa, una derivación fundamentalmente heurística de las ideas y fórmulas esenciales que surgen en esta teoría.

La siguiente sección presenta en detalle un ejemplo elemental de sistema bidimensional en el que aparece una bifurcación de Hopf. El objetivo es familiarizar al lector con las ideas fundamentales y las diferentes propiedades de los dos tipos de bifurcación. Este ejemplo es importante porque el estudio del caso general se reduce en cierto modo a él, que actúa así de modelo canónico o paradigmático de la bifurcación de Hopf. Se desarrolla la reducción de un sistema plano a la denominada forma normal de Poincaré, con la que se puede tratar el caso de un sistema plano general, que se remite en esencia al ejemplo introductorio estudiado. Seguimos en estas secciones las ideas que ya fueron presentadas en el proyecto fin de carrera de P. Noguero [1]

1.4.1. Ejemplo canónico de la bifurcación de Hopf

Vamos a estudiar en detalle un ejemplo de sistema diferencial plano dependiente de un parámetro que presenta una bifurcación de Hopf. Consideremos el sistema dinámico bidimensional

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= g(x, y) = \omega_0 x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde la prima indica derivada respecto al tiempo, se supone que a , b y ω_0 son tres valores reales fijos y que μ es un parámetro real. Se supone además que $\omega_0 > 0$.

Para buscar los puntos de equilibrio que presenta este sistema, igualamos a cero las ecuaciones de nuestro sistema bidimensional (1.3), obteniendo un punto de equilibrio en el origen del plano. Para estudiar la estabilidad de este punto de equilibrio, debemos hallar los autovalores de este sistema. Por lo tanto, calculamos su matriz jacobiana.

$$\begin{aligned}
J(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mu + 3ax^2 + ay^2 - 2bxy & -\omega_0 + 2axy - bx^2 - 3by^2 \\ \omega_0 + 3bx^2 + by^2 + 2ayx & \mu + abxy + ax^2 + 3ay^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Si particularizamos esta matriz para el punto de equilibrio, se obtiene

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \mu & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu \end{bmatrix},$$

y ahora ya podemos calcular los autovalores, resolviendo la ecuación

$$\begin{vmatrix} \mu - \lambda & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Enseguida vemos que los valores propios son el par de números complejos conjugados $\mu \pm i\omega_0$, de manera que puede asegurarse que el origen es un punto de equilibrio estable si el parámetro μ es negativo, e inestable si el parámetro μ es positivo. Obviamente, el valor $\mu = 0$ corresponde a una situación de bifurcación. La estabilidad del origen en este caso se estudiará posteriormente.

Vamos a comprobar que además de este punto de equilibrio el sistema presenta, para determinados valores del parámetro μ , un ciclo límite, que de hecho es un círculo centrado en el origen. Introduciendo la función compleja

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{1.4}$$

es inmediato escribir que

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= x - iy, \\
|z|^2 &= z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Esta variable satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} = \\
&= \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) + i [\omega_0 x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2)] = \\
&= \mu(x + ib) + i\omega_0(x + iy) + (x^2 + y^2) [(ax - by) + i(bx + ay)],
\end{aligned}$$

y por lo tanto podemos reescribir el sistema (1.3) en la forma

$$\dot{z} = \mu z + i\omega_0 z + (a + bi)z |z|^2.$$

Hemos comprobado así que el sistema se puede escribir, fácilmente, de la siguiente manera

$$z'(t) = (\mu + i\omega_0) z + (a + ib) z |z|^2. \quad (1.5)$$

Si usamos la forma polar

$$z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}, \quad (1.6)$$

se tiene que

$$z'(t) = \rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)e^{i\theta(t)}i\theta'(t). \quad (1.7)$$

Sustituimos ahora la ecuación (1.6) en la ecuación (1.5) y obtenemos

$$z'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t)e^{i\theta(t)} + (a + ib)\rho(t)^3e^{i\theta(t)}, \quad (1.8)$$

y si igualamos las ecuaciones (1.7) y la (1.8) llegamos a que

$$\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)e^{i\theta(t)}i\theta'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t)e^{i\theta(t)} + (a + ib)\rho(t)^3e^{i\theta(t)},$$

$$\rho'(t) + \rho(t)i\theta'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t)e^{i\theta(t)} + (a + ib)\rho(t)^3.$$

Si identificamos por separado la parte real y la imaginaria, resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \mu\rho + a\rho^3 \quad (\text{evolución del radio polar}), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_0 + b\rho^2 \quad (\text{evolución del ángulo polar}). \end{aligned}$$

La primera ecuación (que evidentemente sólo tendrá sentido para $\rho > 0$) no depende del ángulo polar, por lo tanto está desacoplada y puede estudiarse por separado.

Para encontrar los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial del radio polar, debemos igualar dicha ecuación a cero. De esta manera llegamos a

$$\mu\rho + a\rho^3 = 0 \quad \iff \quad \rho(\mu + a\rho^2) = 0,$$

y obtenemos claramente un punto de equilibrio en $\rho = 0$ para cualquier valor de μ , que se corresponde con el punto de equilibrio existente en el origen del

sistema original. Además, la ecuación presenta en ciertos casos un segundo punto de equilibrio, que viene dada por la solución positiva de la ecuación

$$\mu + a\rho^2 = 0 ,$$

en el supuesto de que esta ecuación tenga raíces positivas. Al despejar, esta solución viene dada por

$$\rho(\mu) = \sqrt{-\frac{\mu}{a}},$$

y existe como solución real cuando el radicando es positivo, es decir, cuando el producto $a\mu$ es negativo.

La existencia de este punto de equilibrio $\rho(\mu)$ para el radio polar supone que en el sistema original existe un círculo estacionario centrado en el origen, cuyo radio es este valor de equilibrio $\rho(\mu)$. Esta órbita del sistema plano será estable o inestable según que el punto de equilibrio de la ecuación diferencial del radio polar sea estable o inestable. Para analizar la estabilidad del ciclo límite de radio $\rho(\mu)$, bastará analizar el signo de la derivada, que viene dada por

$$\frac{d}{d\rho} (\mu\rho + a\rho^3) \Big|_{\rho=\sqrt{-\frac{\mu}{a}}} = \mu + 3a\left(-\frac{\mu}{a}\right) = -2\mu.$$

Se obtiene así que el punto de equilibrio, y por tanto el ciclo límite asociado, es estable cuando $\mu > 0$ e inestable cuando $\mu < 0$.

Las figuras 1.1 a 1.4 representan los diagramas de bifurcación en función del signo de la constante a . El caso $a > 0$ corresponde a una bifurcación subcrítica (el ciclo límite existe sólo si $\mu < 0$ y es inestable) y el caso $a < 0$ a una supercrítica (ahora el ciclo límite existe cuando $\mu > 0$ y es estable). Si representamos el ciclo límite en el espacio (x, y, μ) para cada valor del parámetro μ , obtenemos la familia de ciclos límite que forman una superficie parabólica, como podemos apreciar en las figuras 1.1 y 1.3. Esta misma representación la podemos hacer sobre el plano (ρ, μ) , obteniendo para valores de $a > 0$ la figura 1.2, donde la línea de círculos en blanco representa la variación con μ del radio de la órbita inestable en la bifurcación subcrítica, y para valores de $a < 0$ la figura 1.4, donde la línea de círculos negros representa la variación con μ del radio del ciclo límite estable en la bifurcación supercrítica.

Las ecuaciones diferenciales del sistema en coordenadas polares se pueden integrar con relativa facilidad, obteniéndose con ello las soluciones del sistema explícitamente. Para simplificar la exposición supondremos que $b = 0$ y $\omega_0 = 1$, lo que supone prácticamente que $\theta = t$. El caso general se trata de modo idéntico.

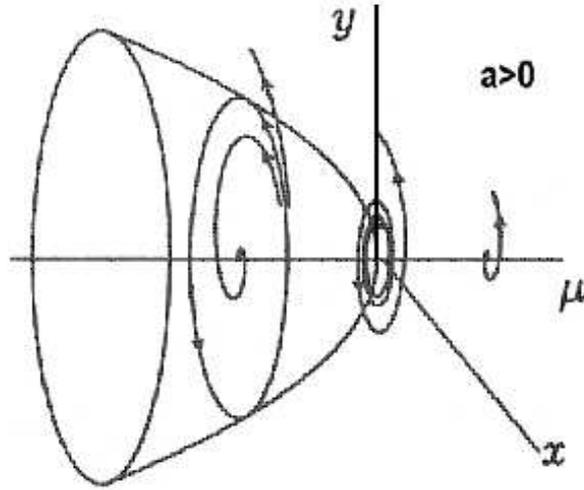


Figura 1.1: Bifurcación de Hopf subcrítica en el espacio (x, y, μ) .

Si la condición inicial es $\rho(0) = \rho_0 > 0$, separando variables e integrando se tiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \int_0^t dt.$$

Para realizar el cálculo, obtenemos la descomposición del integrando del primer miembro en fracciones simples, lo que conduce a la igualdad

$$\frac{1}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{a\rho}{\mu + a\rho^2} \right).$$

Si utilizamos esta expresión, se tiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left[\log \rho - \frac{1}{2} \log |\mu + a\rho^2| \right]_{\rho_0}^{\rho} = \frac{1}{\mu} \left[\log \frac{\rho}{|\mu + a\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho_0}^{\rho}$$

y obtenemos entonces

$$\frac{1}{\mu} \left[\log \frac{\rho}{|\mu + a\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho_0}^{\rho} = t,$$

de donde se deduce que la dependencia de ρ y t viene establecida por la ecuación

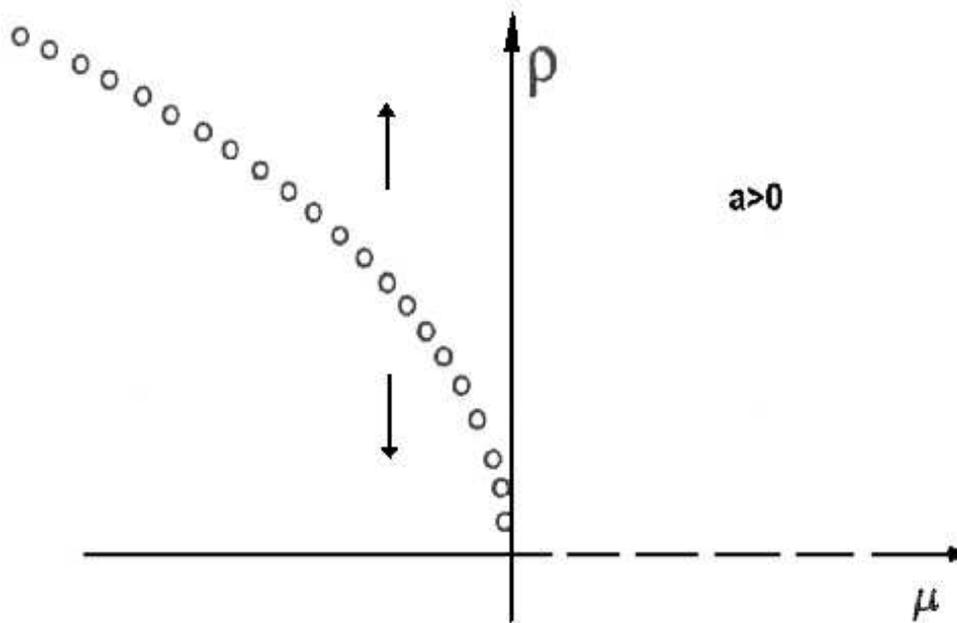


Figura 1.2: Diagrama de una bifurcación de Hopf subcrítica

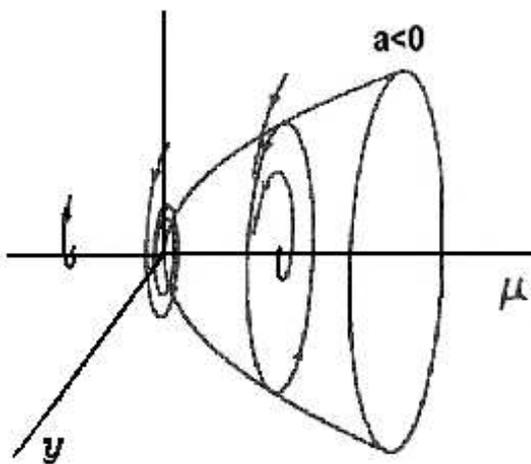


Figura 1.3: Bifurcación de Hopf supercrítica en el espacio (x, y, μ)

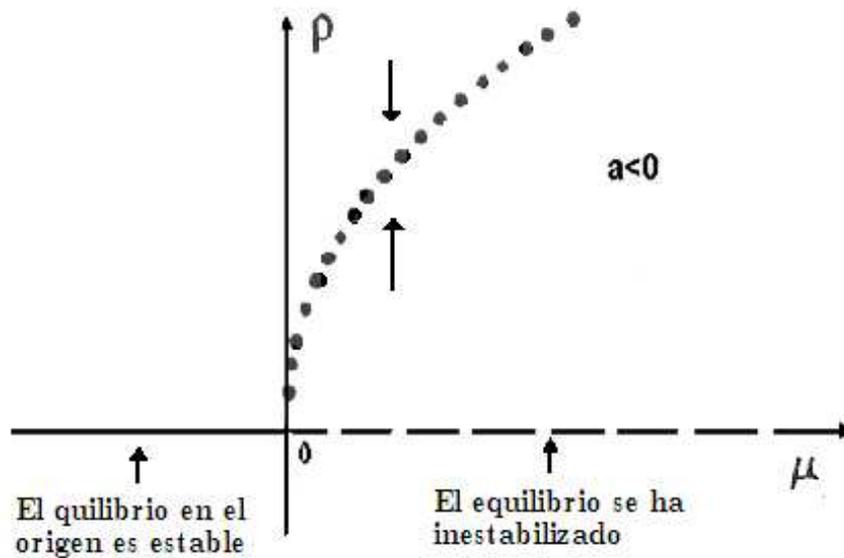


Figura 1.4: Diagrama de una bifurcación supercrítica de Hopf

$$\frac{\rho^2}{|\mu + a\rho^2|} = \frac{\rho_0^2}{|\mu + a\rho_0^2|} e^{2\mu t}.$$

Para analizar las soluciones, es conveniente distinguir dos casos, determinados por el signo del producto $a\mu$.

Caso 1 $a\mu > 0$

En este caso el signo de μ coincide con el de a y, como ya hemos comentado anteriormente, no existe ciclo límite. Haciendo $\frac{\mu}{a} = r^2$, la relación entre ρ y t se puede escribir claramente como

$$\frac{\rho^2}{\mu + a\rho^2} = \frac{\rho_0^2}{\mu + a\rho_0^2} e^{2\mu t},$$

despejando ρ se deduce la expresión de su dependencia explícita de t , que es como sigue

$$\rho = \frac{\rho_0 e^{\mu t}}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (1 - e^{2\mu t})}}.$$

Las soluciones presentan entonces un comportamiento radicalmente diferente según que el parámetro μ sea negativo o positivo.

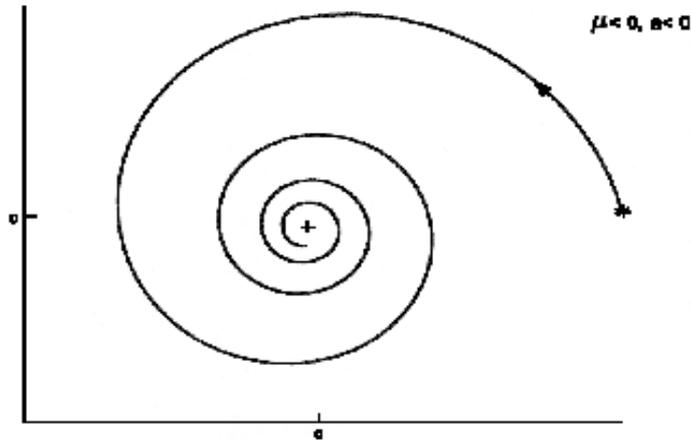


Figura 1.5: Origen estable. No hay ciclo límite

En el primer caso, es decir, si $\mu < 0$, es claro que el radicando del denominador es siempre positivo, por lo que la solución está definida en todo el intervalo $[0, +\infty)$. Además, se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0,$$

es decir, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable cuyo dominio de atracción es todo el plano. La figura 1.5 presenta el aspecto de una trayectoria en este caso.

En cambio, cuando $\mu > 0$ el radicando sólo tiene sentido en el intervalo $[0, t_\infty]$, siendo

$$t_\infty = \frac{1}{2\mu} \log \left(1 + \frac{r^2}{\rho_0^2} \right),$$

y además se tiene

$$\lim_{t \rightarrow t_\infty} \rho = \infty,$$

por lo tanto la solución se hace no acotada en un tiempo finito. Esta situación indica que el origen es un punto de equilibrio inestable. La figura 1.6 representa una trayectoria típica del sistema en este supuesto.

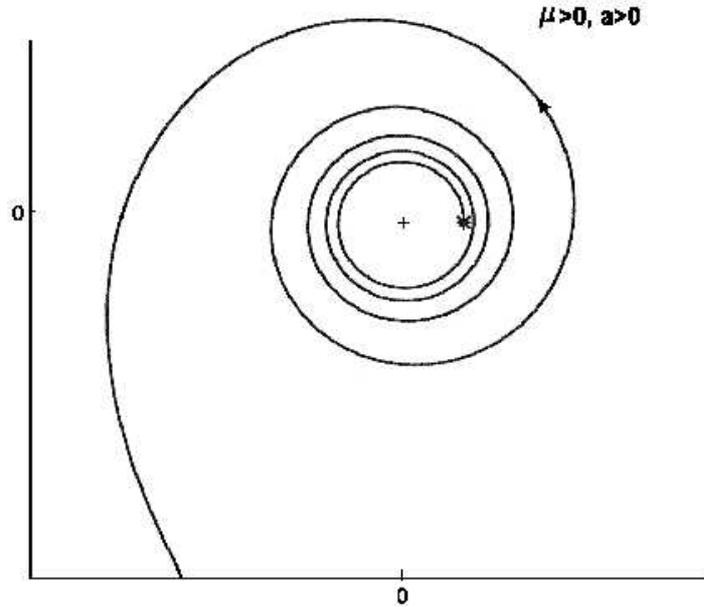


Figura 1.6: Origen inestable. No existe ciclo límite

Caso 2 $a\mu < 0$

En este supuesto, los signos de μ y a son diferentes y, como antes apuntamos, existe un ciclo límite. Poniendo $\frac{\mu}{a} = -r^2$, el ciclo límite es un círculo centrado en el origen de radio r . La relación entre ρ y t se escribe en la forma

$$\frac{\rho^2}{|\rho^2 - r^2|} = \frac{\rho_0^2}{|\rho_0^2 - r^2|} e^{2\mu t}.$$

Dado que la ecuación presenta un punto de equilibrio en $\rho = r$, es claro que si $\rho_0 > r$ se cumplirá que $\rho > r$ para todo $t > 0$. Alternativamente, si $\rho_0 < r$ también será $\rho < r$ para todo $t > 0$. Con esta observación, se deduce que la anterior relación entre ρ y t se puede escribir en la forma

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - r^2} = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - r^2} e^{2\mu t},$$

puesto que las diferencias $\rho^2 - r^2$, y $\rho_0^2 - r^2$ tienen en todo caso el mismo signo. Despejando en esa ecuación el valor de ρ , se obtiene la fórmula

$$\rho = \frac{\rho_0 e^{\mu t}}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (e^{2\mu t} - 1)}}.$$

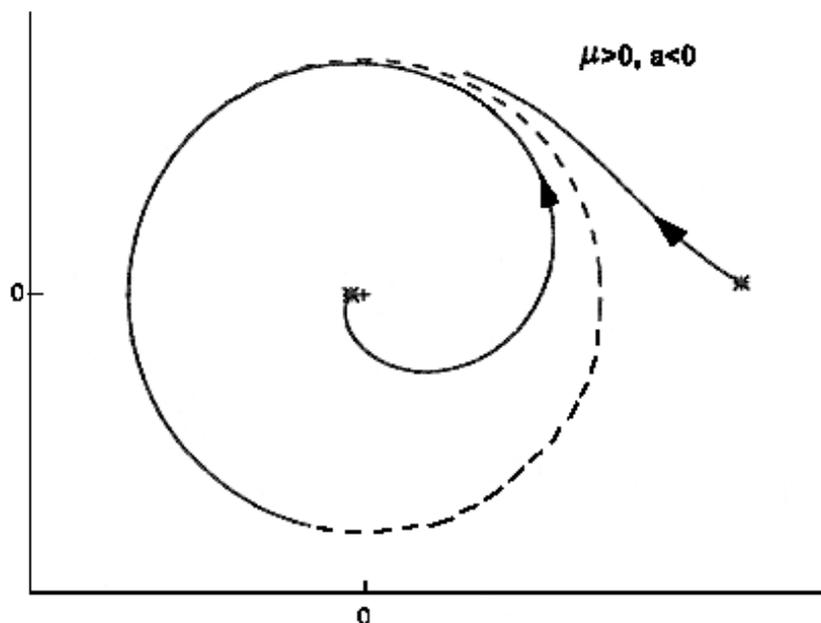


Figura 1.7: Origen inestable. Existe ciclo límite estable.

De nuevo, el comportamiento de la solución es diferente según que el valor del parámetro μ sea positivo o negativo.

Si $\mu > 0$, es claro que el radicando del denominador es siempre positivo, cualquiera que sea el valor de $\rho \neq r$; además, es fácil comprobar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = r.$$

En el sistema original, esto viene a decir que el origen del sistema es un punto de equilibrio inestable, el cual se encuentra rodeado por una órbita cerrada aislada (ciclo límite), que es única y estable. El ciclo límite es un círculo de radio $\rho(\mu) = r$ cuyo dominio de atracción es todo el plano, salvo el origen que es un punto de equilibrio inestable. Todas las órbitas que empiezan fuera o dentro del ciclo límite, excluyendo el origen, tienden a este ciclo cuando $t \rightarrow \infty$. Este cambio de comportamiento al inestabilizarse el origen y llegar a una oscilación autosostenida es el típico en una bifurcación de Hopf supercrítica. La figura 1.5 presenta un par de trayectorias del sistema, una que comienza dentro del ciclo límite y la otra en su exterior.

En el supuesto de que $\mu < 0$ es necesario distinguir los dos casos $\rho_0 < r$ y $\rho_0 > r$, es decir, que el punto inicial esté situado dentro o fuera del ciclo límite. Si $\rho_0 > r$, es claro que el radicando del denominador siempre toma

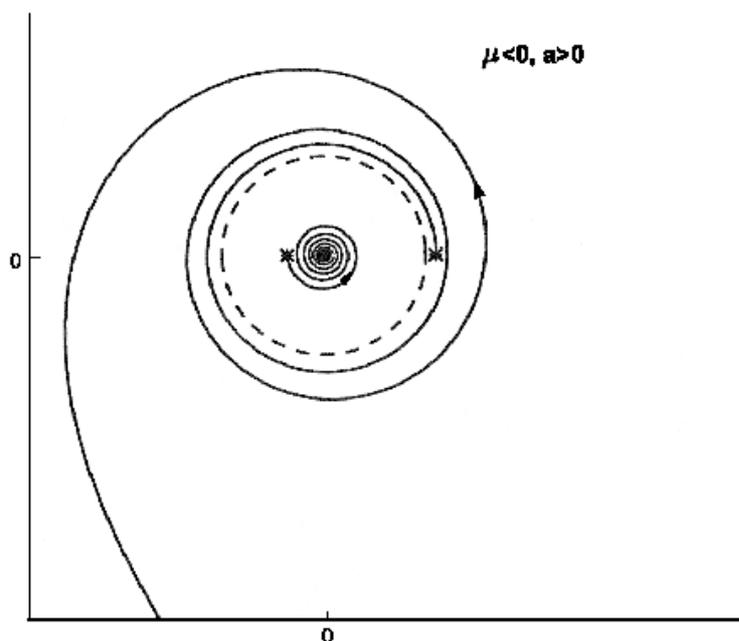


Figura 1.8: Origen estable. Existe ciclo límite inestable

valores positivos, con lo que la solución existe para todo $t > 0$ y además se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0.$$

En cambio si $\rho_0 > r$ la solución sólo existe mientras

$$t \leq \frac{1}{2\mu} \log \left(1 - \frac{r^2}{\rho_0^2} \right).$$

Además se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = +\infty.$$

Esta situación se corresponde con el hecho de que el origen es un punto de equilibrio estable cuyo dominio de atracción es el círculo centrado en el mismo de radio r , y que este círculo es un ciclo límite inestable. La figura 1.8 adjunta representa dos soluciones de este caso.

1.4.2. La forma normal de Poincaré.

Para esta sección seguiremos el desarrollo que aparece en el Capítulo 3 de [3]. Consideremos el sistema dinámico bidimensional

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{f}(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= \tilde{g}(x, y, \mu)\end{aligned}\tag{1.9}$$

del que suponemos que el origen del plano es un punto de equilibrio para todo μ . En el caso de que no fuese así, sino que nuestro punto de equilibrio fuese un punto genérico $P \equiv (x_0(\mu), y_0(\mu))$, trasladaríamos dicho punto al origen del plano para hacer más sencillos los cálculos posteriores. Para realizar esta traslación realizaríamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x - x_0(\mu) \longrightarrow x = \hat{x} + x_0(\mu) \longrightarrow \dot{x} = \hat{x}', \\ \hat{y} &= y - y_0(\mu) \longrightarrow y = \hat{y} + y_0(\mu) \longrightarrow \dot{y} = \hat{y}'.\end{aligned}$$

Si sustituimos este cambio en el sistema original, obtendríamos

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= \tilde{f}_\mu(\hat{x}, \hat{y}, \mu) \\ \hat{y}' &= \tilde{g}_\mu(\hat{x}, \hat{y}, \mu),\end{aligned}$$

cumpléndose que en este sistema el origen del plano es un punto de equilibrio.

Volvamos a nuestro sistema (1.9) del que suponemos que el origen del plano es un punto de equilibrio. Aceptemos además que la matriz jacobiana del sistema en el origen, es decir, la matriz

$$J(0, 0, \mu) := \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0, 0, \mu) & \tilde{f}_y(0, 0, \mu) \\ \tilde{g}_x(0, 0, \mu) & \tilde{g}_y(0, 0, \mu) \end{bmatrix},$$

admite como valores propios un par de números complejos conjugados $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, con

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= 0, \\ \alpha'(0) &\neq 0, \\ \omega(0) &= \omega_0 > 0.\end{aligned}$$

En este caso, mediante un simple cambio lineal de variables, la parte lineal del sistema se puede reducir a la forma canónica real de Jordan, es decir,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + f_1(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + f_2(x, y, \mu),\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde las funciones f_1 y f_2 recogen los términos de orden superior al primero. Podemos reescribir dicho sistema en la forma

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(x, \mu), \quad (1.11)$$

con $A(\mu)x$ la parte lineal del sistema y $F(x, \mu)$ la parte no lineal.

Si introducimos la variable compleja z , veremos ahora que el sistema puede ser expresado para valores de $|\alpha|$ suficientemente pequeños como

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + g(z, \bar{z}, \mu), \quad (1.12)$$

donde $g = O(|z|^2)$ es una función suave de (z, \bar{z}, μ) . Así, llamemos $q(\mu) \in \mathbb{C}^2$ a un autovector de $A(\mu)$ correspondiente al autovalor $\lambda(\mu)$

$$A(\mu)q(\mu) = \lambda(\mu)q(\mu),$$

y $p(\mu) \in \mathbb{C}^2$ a un autovector de la matriz traspuesta $A^T(\mu)$ correspondiente al autovalor $\bar{\lambda}(\mu)$

$$A^T(\mu)p(\mu) = \bar{\lambda}(\mu)p(\mu).$$

Dichos autovectores siempre se pueden escoger tal que queden normalizados, es decir, que

$$\langle p(\mu), q(\mu) \rangle = 1,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto escalar estandar en \mathbb{C}^2

$$\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2.$$

Entonces, cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado de manera unívoca para valores pequeños de μ como

$$x = zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu),$$

donde z viene dado por la expresión

$$z = \langle p(\mu), x \rangle. \quad (1.13)$$

En efecto, para verificar la expresión (1.13) nos basta con demostrar que el producto escalar $\langle p(\mu), \bar{q}(\mu) \rangle = 0$.

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, q \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle,$$

y, por lo tanto,

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda}) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Ahora bien, como $\lambda \neq \bar{\lambda}$, ya que para todo valor suficientemente pequeño de $|\mu|$ tenemos que $\omega(\mu) > 0$, entonces la única posibilidad es que $\langle p(\mu), \bar{q}(\mu) \rangle = 0$.

La variable z , usando (1.11) y (1.13), cumplirá la ecuación

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle,$$

de manera que, si definimos

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle,$$

llegamos a (1.12) como se afirmó anteriormente.

El desarrollo en serie de Taylor de la función $g(z, \bar{z}, \mu)$ puede escribirse en la forma

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\mu) z^k \bar{z}^l,$$

donde

$$g_{kl}(\mu) = \left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle \right|_{z=0},$$

para $k+l \geq 2$, donde $k, l = 0, 1, \dots$

Supuesto que $\mu = 0$, la función $F(x, \mu)$ de (1.11) está representada por

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

donde $B(x, y)$ y $C(x, y, u)$ representan funciones vectoriales multilineales simétricas de $x, y, u \in \mathbb{R}^2$. Dichas funciones vienen dadas por las expresiones

$$B(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \left[\frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right]_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2,$$

$$C(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \left[\frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \right]_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2.$$

Entonces,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

donde $q = q(0)$, $p = p(0)$, por lo que los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor g_{kl} , con $k+l = 2$, de los términos cuadráticos de $g(z, \bar{z}, 0)$ pueden ser expresados por

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle,$$

$$g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

De manera similar podemos obtener que

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle.$$

La ecuación (1.12) se puede escribir entonces

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^{-l} + O(|z|^4),$$

donde $\lambda = \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, y $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$. Ahora, es posible probar la existencia de un cambio no lineal de variable de la forma

$$z = w + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{k+l=n} d_{kl} w \bar{w}^l \right] = w + T.O.S.$$

que reduce la ecuación anterior a la expresión

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 |w|^2 w + O(|w|^4).$$

Para comprender la mecánica de esta transformación, consideremos el cambio de variable inverso, que se puede escribir también en la forma

$$w = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{k+l=n} \delta_{kl} z^k \bar{z}^l \right],$$

sin más que invertir el desarrollo anterior. Derivando en ambos miembros de esta expresión, se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dz}{dt} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{k+l=n} \delta_{kl} \left(k z^{k-1} \bar{z}^l \frac{dz}{dt} + l z^k \bar{z}^{l-1} \frac{d\bar{z}}{dt} \right) \right].$$

Utilizando ahora la ecuación diferencial (1.12), se puede escribir que

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \lambda z + g(z, \bar{z}) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{k+l=n} \delta_{kl} \left(\lambda n z^k \bar{z}^{-l} + k z^{k-1} \bar{z}^l g(z, \bar{z}) + l z^k \bar{z}^{l-1} \overline{g(z, \bar{z})} \right) \right], \end{aligned}$$

y si sustituimos $g(z, \bar{z}, \mu)$ por su desarrollo en serie y ordenamos en potencias crecientes de z y \bar{z} , se deduce que

$$\dot{w} = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} \delta'_{kl} z^k \bar{z}^l.$$

Cambiamos ahora z y \bar{z} por su expresión en términos de w y \bar{w} y reordenemos de nuevo. De esta forma se consigue expresar la derivada de w en términos de las potencias de la propia w y su conjugada mediante un desarrollo de la forma

$$\dot{w} = \lambda w + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{k+l=n} \gamma_{kl} w^k \bar{w}^l \right].$$

Si desarrollamos ahora los cálculos pertinentes, y elegimos convenientemente los coeficientes d_{ij} que actúan a modo de parámetros del cambio de variables, se puede comprobar que se consigue que se anulen varios de los primeros coeficientes γ_{kl} ; concretamente, se puede obtener que

$$\begin{aligned} \gamma_{20} &= 0, & \gamma_{11} &= 0, & \gamma_{02} &= 0, \\ \gamma_{30} &= 0, & \gamma_{12} &= 0, & \gamma_{03} &= 0. \end{aligned}$$

De este modo, poniendo $c_1 = \gamma_{21}$, la ecuación se puede reducir a

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \sum_{n=4}^{\infty} \left[\sum_{k+l=n} \gamma_{kl} w^k \bar{w}^l \right],$$

que es de la forma antes indicada.

Si aceptamos la existencia de ese cambio de variable, es posible deducir con relativa facilidad la expresión del coeficiente c_1 en términos de los coeficientes g_{kl} del desarrollo de la función $g(z, \bar{z}, \mu)$. Para simplificar, si representamos el cambio de variable en la forma

$$z = w + \phi(w, \bar{w}),$$

y derivamos ambos miembros de esta expresión, resulta la igualdad

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dw}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{dw}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{w}} \frac{d\bar{w}}{dt}.$$

Al sustituir las derivadas de z y w por sus expresiones y emplear el cambio de variable realizado, la última ecuación se escribe en la forma

$$\begin{aligned} & \lambda [w + \phi(w, \bar{w})] + g \left(w + \phi(w, \bar{w}), \bar{w} + \overline{\phi(w, \bar{w})} \right) \\ &= \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4) + \phi_w(w, \bar{w}) [\lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4)] + \\ & \quad + \phi_{\bar{w}}(w, \bar{w}) [\bar{\lambda} \bar{w} + \bar{c}_1 \bar{w}^2 w + O(|w|^4)] = \\ &= \lambda w + \lambda w \phi_w(w, \bar{w}) + \bar{\lambda} \bar{w} \phi_{\bar{w}}(w, \bar{w}) + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4). \end{aligned}$$

La identificación de los términos de primer grado de ambos miembros conduce a la igualdad trivial $\lambda w = \lambda w$. Igualando las respectivas sumas de los términos de segundo grado, se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} & \lambda(d_{20}w^2 + d_{11}w\bar{w} + d_{02}\bar{w}^2) + (g_{20}w^2 + g_{11}w\bar{w} + g_{02}\bar{w}^2) = \\ & = \lambda w(2d_{20}w + d_{11}\bar{w}) + \bar{\lambda}\bar{w}(d_{11}w + 2d_{02}\bar{w}). \end{aligned}$$

Identificando coeficientes de monomios del mismo grado resultan las expresiones

$$d_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad d_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad d_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}.$$

Procediendo de un modo semejante con los términos de tercer grado, se obtiene la identidad

$$\begin{aligned} & \lambda(d_{30}w^3 + d_{21}w^2\bar{w} + d_{12}w\bar{w}^2 + d_{03}\bar{w}^3) + 2g_{20}w(d_{20}w^2 + d_{11}w\bar{w} + d_{02}\bar{w}^2) \\ & + g_{11} [w(\bar{d}_{20}\bar{w}^2 + \bar{d}_{11}w\bar{w} + \bar{d}_{02}w^2) + \bar{w}(d_{20}w^2 + d_{11}w\bar{w} + d_{02}\bar{w}^2)] + \\ & + 2g_{20}\bar{w}(\bar{d}_{20}\bar{w}^2 + \bar{d}_{11}w\bar{w} + \bar{d}_{02}w^2) + g_{30}w^3 + g_{21}w^2\bar{w} + g_{12}w\bar{w}^2 + g_{03}\bar{w}^3 \\ & = c_1w^2\bar{w} + \lambda w(3d_{30}w^2 + 2d_{21}w\bar{w} + d_{12}\bar{w}^2) + \\ & + \bar{\lambda}\bar{w}(d_{21}w^2 + 2d_{12}w\bar{w} + 3d_{03}\bar{w}^2). \end{aligned}$$

Identificando los términos de $w^2\bar{w}$ en los dos miembros de esta igualdad, se obtiene que

$$\gamma = 2g_{20}d_{11} + g_{11}(\bar{d}_{11} + d_{20}) + 2g_{20}\bar{d}_{02} + g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})d_{21}.$$

Obsérvese que en la expresión de este coeficiente c_1 interviene el coeficiente d_{21} del cambio de variable, que –no estando sometido a restricción alguna por el resto de las identificaciones de coeficientes– se puede elegir arbitrariamente. La elección más sencilla es $d_{21} = 0$, con la que se obtiene

$$c_1 = 2g_{20}d_{11} + g_{11}(\bar{d}_{11} + d_{20}) + 2g_{02}\bar{d}_{02} + g_{21}.$$

Sustituyendo las expresiones de los coeficientes d_{20} , d_{11} y d_{02} , antes obtenidas, resulta

$$c_1 = \frac{2\lambda + \bar{\lambda}}{|\lambda|^2} g_{20}g_{11} + \frac{1}{\lambda} |g_{11}|^2 + \frac{2}{2\lambda - \bar{\lambda}} |g_{02}|^2 + g_{21}$$

En particular, que es el caso de interés para la bifurcación de Hopf, si $\lambda = i\omega_0$ resulta la expresión

$$c_1 = \frac{1}{i\omega_0} \left[|g_{11}|^2 + \frac{2}{3} |g_{02}|^2 - g_{20}g_{11} \right] + g_{21}.$$

1.4.3. Caracterización de la bifurcación de Hopf en sistemas bidimensionales

Veremos ahora que con la información anterior ya tenemos todos los elementos para saber si la bifurcación es subcrítica o supercrítica, es decir, para caracterizar el tipo de bifurcación de Hopf con la que nos encontramos.

Consideremos la ecuación

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\mu) + i\omega(\mu))w + c_1(\mu)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

donde $\alpha(0) = 0$, y $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Supongamos que $\alpha'(0) \neq 0$ y $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$, entonces la ecuación puede ser transformada en la forma

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

donde u es una nueva coordenada compleja, y θ, β son el nuevo tiempo y el nuevo parámetro respectivamente, y $s = \text{sign}(\text{Re}(c_1(0))) = \pm 1$.

Para conseguir dicha transformación, en primer lugar se realiza un escalado lineal de tiempo

$$\tau = \omega(\mu)t.$$

Al ser $\omega(\alpha) > 0$ para $|\alpha|$ suficientemente pequeño la dirección del tiempo se conserva. Entonces, nos queda

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + k_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

donde

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}, \\ k_1(\beta) &= \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}. \end{aligned}$$

La segunda transformación consiste en un cambio de variable temporal no lineal en la forma $\theta = \theta(\tau, \beta)$, de manera que

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\tau,$$

con $e_1(\beta) = \text{Im}(d_1(\beta))$. El resultado de aplicar dicho cambio de variable temporal es

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

donde $l_1(\beta) = \operatorname{Re}(k_1(\beta)) - \beta e_1(\beta)$ es real, y

$$l_1(0) = \frac{\operatorname{Re}(c_1(0))}{\omega(0)}. \quad (1.14)$$

Por último, se realiza el cambio lineal de variable compleja

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

que es posible dado que $\operatorname{Re}(c_1(0)) \neq 0$ y, por lo tanto, $l_1(0) \neq 0$. La ecuación queda entonces

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} u |u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su |u|^2 + O(|u|^4),$$

con $s = \operatorname{sign}(l_1(0)) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(c_1(0)))$, y donde a la función escalar $l_1(0)$ se la denomina primer coeficiente de Lyapunov. Este coeficiente, a la vista del siguiente resultado, permite completar el análisis.

Teorema (Cfr. Theorem 3.3, p. 98 de [3]). *Supongamos que el sistema de ecuaciones diferenciales bi-dimensional*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

tiene, para el punto de equilibrio en $x = 0$ y para valores de $|\mu|$ suficientemente pequeños, los autovalores

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

donde $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Si se cumple que

$$\begin{aligned} l_1(0) &\neq 0, \text{ donde } l_1 \text{ es el primer coeficiente de Liapunov,} \\ \alpha'(0) &\neq 0, \text{ (condición de transversalidad),} \end{aligned}$$

entonces el sistema puede ser expresado, mediante un cambio de variables, como

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4). \quad (1.15)$$

donde el signo $+$ ó $-$. coincide con el signo de $l_1(0)$.

Además, en la expresión (1.15) los términos de orden 4 pueden despreciarse cuando nos movemos cerca del origen.

Llegados a este punto ya poseemos todas las herramientas para caracterizar una bifurcación de Hopf, puesto que (1.15) es ya equivalente a la forma canónica (1.3), donde $\mu = \beta$, $\omega_0 = 1$, $a = \pm 1$ (dependiendo del signo de $l_1(0)$) y $b = 0$. En primer lugar se calcularía la forma normal de Poincaré, para luego, una vez comprobado que se cumple la condición de transversalidad, calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de la función $g(z, \bar{z}, \mu)$ necesarios para obtener el coeficiente $c_1(0)$. Éste nos servirá para determinar el signo del primer coeficiente de Lyapunov $l_1(0)$ empleando la expresión (1.14), el cual nos determinará el carácter de la bifurcación.

En definitiva, si $l_1(0)$ es positivo, nos encontraremos con una bifurcación de Hopf subcrítica, apareciendo un ciclo límite inestable para valores del parámetro en los que el punto de equilibrio es inestable. Si es negativo, la bifurcación de Hopf es supercrítica, presentando un ciclo límite estable para valores del parámetro que inestabilizan el punto de equilibrio.