Capítulo 2

Modelado del convertidor

2.1. Descripción del circuito

Como ya hemos comentado, el circuito a estudiar se trata de un convertidor *boost* cuya función es la de transformar una tensión de entrada continua en otra de mayor valor, es decir, se trata de un elevador de tensión de continua.

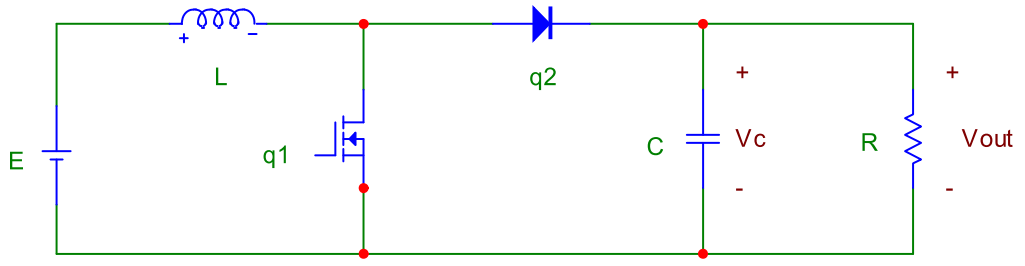

Figura 2.1: Circuito básico de un convertidor boost.

Entre los elementos que conforman el circuito tenemos un transistor MOSFET que actúa como un conmutador controlado, cuyo estado está representado por la variable q_1, y un diodo, cuyo estado está definido por la variable q_2. A dichas variables les asignamos un valor cero si los elementos a los que representan están en un estado de no conducción, y un valor unidad si están en estado de conducción. Son pues, a priori, cuatro las combinaciones distintas posibles.

Cuando tanto el transistor como el diodo están cortados la estructura correspondiente la denominamos estado de no conducción (NC) dado que en dicha situación la intensidad que circula por la bobina es nula. Por su

parte, la carga R se encuentra alimentada por el condensador C el cual se está descargando sobre la misma.

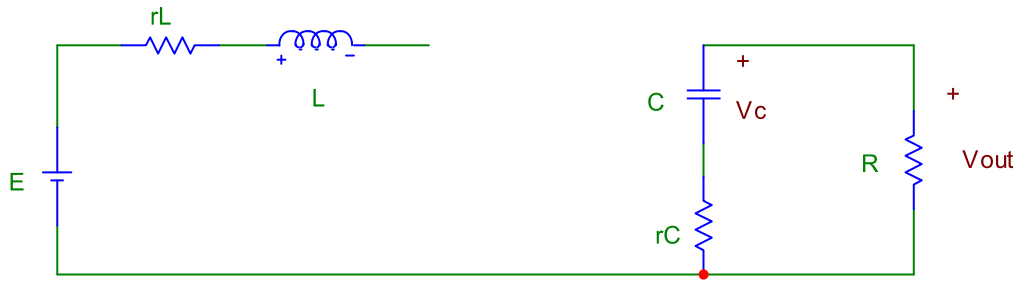

Figura 2.2: Estructura NC.

En el caso de que el transistor esté cerrado y el diodo abierto damos el nombre a la estructura de estado de carga (C) debido a que la bobina se encuentra almacenando energía de la fuente. Al igual que en el estado anterior el condensador se encuentra descargándose a través de la resistencia de carga.

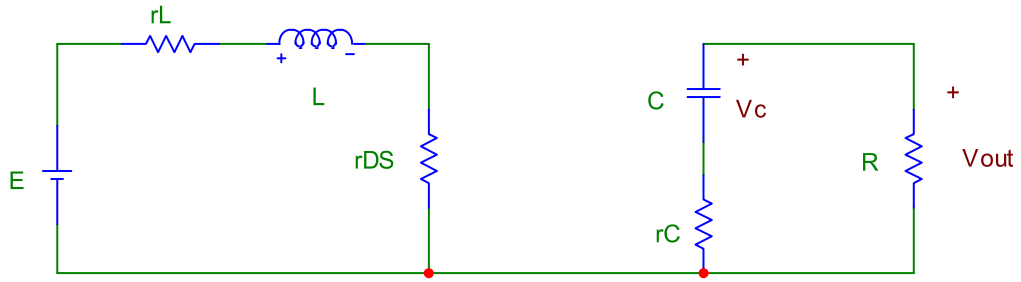

Figura 2.3: Estructura C.

Si el transistor se encuentra abierto y el diodo conduce decimos que el convertidor se encuentra en el estado de descarga (D) al estar cediendo la bobina su carga almacenada tanto al condensador como a la resistencia R.

La última de las combinaciones que en teoría podría darse, que es aquella en la que tanto el diodo como el transistor están conduciendo, no es viable. Esto es así porque cuando el transistor conduce, si despreciamos la resistencia parásita del transistor r_{DS}, la tensión en el anodo del diodo será nula y, por tanto, menor que en el cátodo si el condensador se encuentra con una tensión positiva, cosa que ocurrirá siempre, quedando el diodo polarizado inversamente.

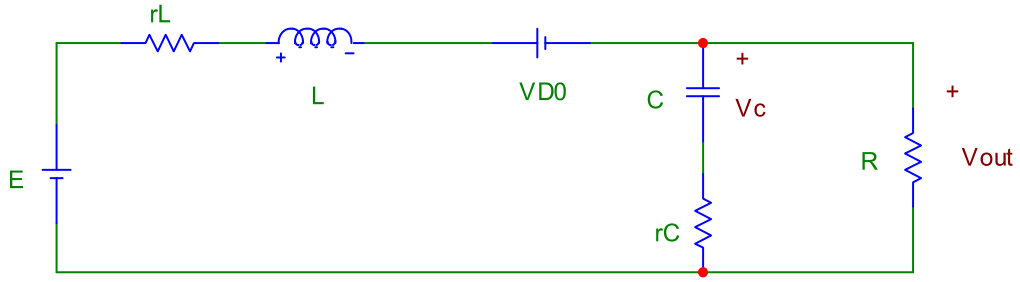

Figura 2.4: Estructura D.

q_1(MOSFET)	q_2(diodo)	Estructura
0	0	NC
0	1	D
1	0	C
1	1	No viable

Durante su funcionamiento el convertidor *boost,* bajo un control adecuado del transistor, cambiará de estado continuamente, de manera que toda la energía que el condensador cede a la carga en la estructura C (y en su caso en la NC) la recupere en la estructura D. A su vez, el tiempo de descarga del condensador debe ser pequeño para que no haya un cambio significativo en la tensión, pues el objetivo del circuito es mantener constante la tensión de salida. Por su parte, con la bobina debe suceder lo mismo, es decir, toda la energía que pierde en la estructura D, debe recuperarla en el C. Mientras el convertidor *boost* esté en este estado la intensidad que circula por la bobina aumentará al estar almacenando energía de la fuente. Por el contrario, cuando el convertidor se encuentre en la estructura D la intensidad por la bobina disminuirá al ceder energía al condensador y a la carga, siendo su caída de tensión negativa. Por tanto, el condensador quedará cargado a una tensión mayor que la de entrada. Se consigue entonces que la tensión a la salida del convertidor sea mayor que ésta.

El valor medio de la intensidad que circula por la bobina dependerá de la carga conectada, de tal manera que a mayor carga menor será la intensidad. Durante el tiempo que el convertidor permanece en la estructura D puede suceder que, para un determinado valor de la carga, dicha intensidad llegue a anularse, con lo que el diodo quedará cortado si el convertidor *boost* funciona como debe, es decir, si la tensión a la salida es mayor que a la entrada. Se alcanza entonces la estructura NC, de manera que i_L no puede llegar nunca a ser negativa. Cuando esto puede suceder, el convertidor trabaja en

el llamado modo de conducción discontinua (*discontinuous conduction mode*, que se suele abreviar por DCM), mientras que si la intensidad de la bobina no se anula nunca el convertidor se encuentra funcionando en el modo de conducción continua (*continuous conduction mode*, que se suele abreviar por CCM) y, en este caso, no se alcanza la estructura NC en ningún momento. El adjetivo discontinuo se usa aquí no en el sentido de función continua propio de las matemáticas, sino indicando solamente que la intensidad puede anularse.

Tenemos pues que en el modo CCM las únicas transiciones posibles son pasar de la estructura D a la C y viceversa, dado que son las únicas estructuras que se alcanzan. En el modo DCM la estructura NC se alcanza solamente si la bobina se descarga hasta alcanzar su intensidad un valor nulo, por lo que la única transición posible que permite llegar a dicha estructura es hacerlo desde la D, no habiendo otra posibilidad de cambio de estructura desde la misma. En el momento en que desde D no se alcance la estructura NC sino la C el modo de conducción sería el CCM y no el DCM Una vez alcanzada la estrutura NC hay dos posibilidades, que el transistor se cierre de nuevo antes de que el condensador se descargue hasta una tensión igual a la de entrada o no. En el primer caso, se pasará a la estructura C, y en el segundo, se llegaría a un instante en el que el diodo quedaría poralizado directamente, aquel en el que el condensador quede a una tensión menor que la de la entrada, y se alcanza la estructura D aunque en una situación en la que inicialmente el condensador sigue descargándose.

2.2. Ecuaciones de estado

Nuestro objetivo ahora es obtener un modelo matemático único que recoja todos los aspectos que hemos descrito hasta este momento. El resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas incógnitas son las variables de estado que se asumen continuas y que denotamos como i_L (corriente de la bobina) y v_C (tensión del condensador) y en el que aparecerá además la variable discreta q_1 correspondiente al estado del transistor, y otra variable discreta v que necesitaremos para poder incluir el modo DCM como ya veremos más adelante. A este tipo de modelos matemáticos, en el que se combinan variables continuas y discretas, se les conoce con el nombre de sistemas híbridos o sistemas de estructura variable (VSS, en inglés).

Vamos a comenzar obteniendo el modelo para el modo CCM, dado que a partir de él podemos obtener fácilmente el que recoja ambos modos de conducción. En este caso nunca pasamos por la estructura NC por lo que comenzamos trabajando por separado con las estructuras D ($q_1 = 0$) y C ($q_1 = 1$) aplicando las Leyes de Kirchoff para calcular las expresiones de las

ecuaciones diferenciales de i_L y v_C. Luego veremos como podemos recoger los dos sistemas de ecuaciones en uno solo en función de la variable discreta q_1.

Para la estructura D, si aplicamos las Leyes de Kirchoff sobre la malla de la izquierda y sobre el nodo donde se conecta el condensador, tenemos que

$$\begin{aligned} -E + v_{r_L} + v_L + V_{D_0} + v_{out} &= 0, \\ i_C &= i_L - i_{out}. \end{aligned}$$

donde E es la tensión de entrada, v_{r_L} la caída de tensión de la resistencia parásita de la bobina, v_L la caída de tensión en la bobina, V_{D_0} la tensión umbral del diodo, v_{out} la tensión de salida, i_C la intensidad por el condensador, i_L la intensidad por la bobina e i_{out} la intensidad a la salida.

Si tenemos en cuenta las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} v_L &= L\frac{di_L}{dt}, \\ v_{r_L} &= r_L i_L, \\ i_C &= C\frac{dv_C}{dt}, \\ i_{out} &= \frac{v_{out}}{R}, \end{aligned}$$

podemos llegar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} L\frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - V_{D_0} - v_{out}, \\ C\frac{dv_C}{dt} &= i_L - \frac{v_{out}}{R}. \end{aligned}$$

Como el valor de V_{D_0} es constante, sólo necesitamos obtener la tensión de salida v_{out} en función de i_L y v_C que son nuestras variables de estado. Para conseguirlo volvemos a aplicar las Leyes de Kirchoff, esta vez en la malla de la derecha. Así obtenemos

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{v_{out} - v_C}{r_C}, \\ v_{out} &= R(i_L - i_C), \end{aligned}$$

expresiones con las que operando podemos despejar la tensión de salida.

$$v_{out} = \frac{r_C R}{r_C + R} i_L + \frac{R}{r_C + R} v_C. \tag{2.1}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela a la estructura D resulta, pues, ser el siguiente.

$$\begin{aligned} L\frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - V_{D_0} - \frac{r_C R}{r_C + R} i_L - \frac{R}{r_C + R} v_C, \\ C\frac{dv_C}{dt} &= \frac{R}{r_C + R} i_L - \frac{1}{r_C + R} v_C. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Para la estructura C, siguiendo un procedimiento análogo, partimos de estas ecuaciones.

$$\begin{aligned} L\frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - r_{DS} i_L, \\ C\frac{dv_C}{dt} &= -i_{out}. \end{aligned}$$

La primera de ellas ya se encuentra escrita completamente en función de nuestras variables de estado. La segunda necesita que calculemos i_{out} en función de la tensión del condensador y la intensidad de la bobina. Para ello podemos usar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} i_{out} &= \frac{v_{out}}{R} = -\frac{v_{r_C}}{r_C}, \\ v_{out} &= v_C + v_{r_C}. \end{aligned}$$

Combinando ambas expresiones y operando obtenemos el valor buscado:

$$i_{out} = \frac{1}{R + r_C} v_C.$$

La estructura C tiene entonces como modelo el sistema de ecuaciones diferenciales mostrado a continuación.

$$\begin{aligned} L\frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - r_{DS} i_L, \\ C\frac{dv_C}{dt} &= -\frac{1}{R + r_C} v_C. \end{aligned}$$

Ahora es cuando debemos obtener un sistema de ecuaciones diferenciales único que recoja a los dos anteriores introduciendo la variable discreta q_1. Sabiendo que dicha variable es nula para la estructura D y la unidad para la estructura C, se puede comprobar facilmente que el siguiente modelo híbrido

cumple con los requisitos que estamos buscando.

$$\begin{aligned} L\frac{di_L}{dt} &= E - \left[r_L + q_1 r_{DS} + (1-q_1)\frac{r_C R}{r_C + R}\right] i_L \\ &\quad -(1-q_1)\left[V_{D_0} + \frac{R}{r_C + R} v_C\right], \\ C\frac{dv_C}{dt} &= (1-q_1)\frac{R}{r_c + R} i_L - \frac{1}{r_C + R} v_C. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A su vez, teniendo en cuenta el valor calculado (2.1) de v_{out} para la estructura D, y que para C

$$v_{out} = \frac{R}{r_C + R} v_C,$$

se llega también a una única expresión para la tensión de salida

$$v_{out} = \frac{r_C R}{r_C + R}(1-q_1) i_L + \frac{R}{r_C + R} v_C.$$

Con el fin de simplificar el modelo, es usual considerar que $V_{D_0} = 0$ y que la única resistencia parásita que no es despreciable es la de la inductancia r_L. De esta manera, la tensión de salida sería igual a la tensión del condensador, y el modelo queda

$$\begin{aligned} L\frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - (1-q_1) v_C, \\ C\frac{dv_C}{dt} &= -\frac{v_C}{R} + (1-q_1) i_L. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para facilitar el análisis del sistema obtenido lo mejor es proceder a su adimensionalización, lo cual se consigue introduciendo en (2.3) los parámetros

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}, \\ b &= \frac{r_L}{\sqrt{\frac{L}{C}}}. \end{aligned}$$

y realizando el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{E}\sqrt{\frac{L}{C}} i_L, \\ y &= \frac{v_C}{E}, \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{LC}} t. \end{aligned}$$

Por último usaremos como variable discreta $u = 1 - q_1$, que no es otra que la complementaria de la variable q_1.

El sistema adimensionalizado viene dado por estas ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - uy - bx \\ \dot{y} &= ux - ay \end{aligned} \tag{2.5}$$

En este modelo se tiene que $u \in \{0, 1\}$ y que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ al ser la intensidad de la bobina y la tensión en el condensador mayores que cero.

Ahora, para que el modelo pueda representar tanto el modo de conducción CCM como el DCM hay que tener en cuenta las ecuaciones correspondientes al estructura NC. En dicho estado, la intensidad de la bobina es siempre nula y además el condensador estará descargándose a través de la resistencia de carga R, por lo que la ecuación en y es la de una exponencial con una constante de tiempo igual a $-1/RC$. Teniendo en cuenta el cambio de variables anterior las ecuaciones correspondientes a esta estructura quedan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= -ay. \end{aligned}$$

Para incluir esta dinámica en el modelo obtenido para el modo CCM tenemos que recurrir a la introducción de una nueva variable discreta v, a la que asignamos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} v &= 0, \text{ si } (x = 0) \ \& \ (y > 1) \\ v &= 1, \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

De esta forma el modelo que recoge tanto al modo de funcionamiento CCM como el DCM resulta ser

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - uy - bx)v, \\ \dot{y} &= (ux)v - ay. \end{aligned}$$

En efecto, cuando $v = 0$ el sistema se reduce al correspondiente al modo NC y para $v = 1$ las ecuaciones que quedan son las obtenidas en primer lugar cuando sólo se tuvieron en cuenta las estructuras D y C.

2.3. Control del convertidor por modos de deslizamiento

Una vez obtenido el modelo del sistema queremos diseñar una ley de control en modo de deslizamiento (*Sliding Mode Control*, abreviado en inglés

como SMC) que cumpla con los objetivos de regular la tensión de salida a un valor $y = y_d$ (donde y_d es el valor deseado para la tensión de salida) y que el sistema sea robusto frente a cambios en la carga, manteniéndose el valor de la tensión de salida constante, minimizándose además la respuesta transitoria.

2.3.1. Estrategias posibles de control

A primera vista parecería que un control de la tensión de salida es el adecuado para este tipo de circuitos en el que el objetivo es obtener un determinado valor de la misma. En este caso, la función que define la superficie de deslizamiento a considerar es

$$h(y) = y - y_{d.}$$

Si resolvemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} h(y) &= y - y_d = 0, \\ \frac{dh(y)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

la expresión del control equivalente que se obtiene es

$$u_{eq} = \frac{ay_d}{x}.$$

Sustituyéndo esta expresión junto con $y = y_d$ en el modelo del circuito, nos da como resultado la siguiente dinámica de deslizamiento

$$\dot{x} = 1 - \frac{ay_d^2}{x},$$

que resulta tener un único punto de equilibrio en $x = a(y_d)^2$. Este equilibrio resulta ser inestable puesto que en él

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{ay_d^2} > 0$$

La consecuencia inmediata es que adoptar esta estrategia de control provocaría la destrucción del circuito.

Para evitar este inconveniente se puede recurrir a una estrategia de control de la corriente del circuito. Siguiendo un proceso análogo al anterior definimos como función que determina la superficie de deslizamiento $h(x) = x - \bar{x}$,

donde $\bar{x}$ es el valor de la corriente en el punto de equilibrio.Si imponemos ahora

$$\begin{aligned} h(x) &= x - \bar{x} = 0, \\ \frac{dh(x)}{dt} &= \dot{x} = 0, \end{aligned}$$

llegamos a que

$$u_{eq} = \frac{1 - b\bar{x}}{x}.$$

Si asumimos $b = 0$, multiplicamos la primera de las ecuaciones de (2.5) por x y la segunda por y y sumamos los resultados, resulta ser $\bar{x} = a(y_d)^2$. La dinámica de deslizamiento en este caso es pues

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} = a(y_d)^2, \\ \dot{y} &= \frac{x}{y} - ay = \frac{a(y_d)^2}{y} - ay, \end{aligned}$$

que tiene un punto de equilibrio en $y = y_d$. Ahora este equilibrio ya resulta estable puesto que

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = -2a < 0$$

El problema de esta estrategia de control es que necesitamos conocer a priori el valor de la carga que vamos a alimentar con el convertidor para poder definir apropiadamente la superficie de deslizamiento, así como el valor de $\bar{x}$, cosa que no siempre ocurrirá. Además, posibles perturbaciones en la carga harían variar nuestro punto de equilibrio. Por ejemplo, si hemos diseñado el control para un valor determinado de a y la carga cambia de manera que el verdadero valor de dicho parámetro pasa a ser $\hat{a}$, la ecuación diferencial de y sería

$$\dot{y} = \frac{a(y_d)^2}{y} - \hat{a}y,$$

por lo que el punto de equilibrio quedaría desplazado,en particular su verdadero valor sería

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{a}{\hat{a}}} y_d.$$

Concluimos entonces que el sistema no tiene entonces la robustez requerida frente a perturbaciones en la resistencia de carga.

Para resolver este problema de falta de robustez añadimos un término integral a la función que define la superficie de deslizamiento. Así, definiendo la nueva variable $z = \int_0^t (y - y_d) d\tau$, emplearemos la función

$$h(x, z) = x - x_* + Kz,$$

para determinar la nueva estrategia de control, donde el valor de x_* quedará determinado una vez analizados los puntos de equilibrio que resultan de adoptar esta estrategia.

Al introducir la nueva variable z debemos ampliar el modelo del sistema con una nueva ecuación que se corresponde con su derivada, quedando como resultado el modelo tridimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - uy - bx)v, \\ \dot{y} &= uvx - ay, \\ \dot{z} &= y - y_d, \end{aligned} \tag{2.6}$$

con la ley de control

$$\begin{aligned} u &= 0, \text{ si } h(x,z) < 0, \\ u &= 1, \text{ si } h(x,z) > 0. \end{aligned}$$

Este sistema dinámino tridimensional de estructura variable constituye el objeto de estudio de este proyecto. Debemos hacer notar que pertenece a la clase de los llamados sistemas lineales a trozos (*piecewise linear systems.* PWS), que forman parte de la clase más amplia de sistemas no suaves (*non-smooth*), que están siendo estudiados intensamente en la actualidad.

2.3.2. Implementación física del control por modos de deslizamiento

Una vez que hemos llegado a la conclusión de que la estrategia de control idonea para el circuito que vamos a estudiar es aquella en la que hacemos un control en corriente con un término integral, pasamos a detallar la manera en la que dicha estrategia puede implementarse físicamente en el circuito. Seguiremos para tal fin las ideas expuestas en la tesis doctoral de Maria Isabel Arteaga Orozco [2].

En la figura 2.5 se presenta un diagrama de bloques en el que quedan recogidas las distintas partes que intervienen en el controlador. Se puede observar que las señales que se requieren para la generación de la superficie de deslizamiento se toman del propio circuito, acondicionándolas para que tengan un valor apropiado.

Acondicionamiento de las señales

La primera señal que debemos medir y adaptar su valor para poder construir posteriormente la superficie de deslizamiento será la corriente que circula

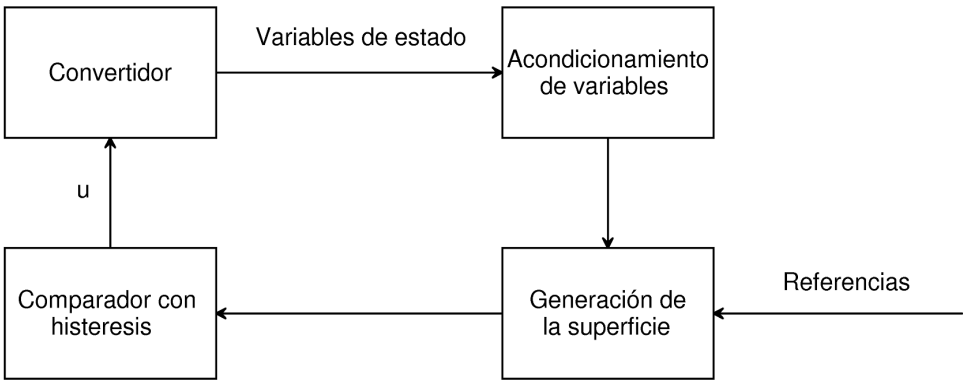

Figura 2.5: Diagrama de bloques del circuito correspondiente al controlador en modos deslizantes a implementar.

por la bobina. Para ello, colocamos en serie con la bobina una resistencia de valor muy pequeño R_S, por ejemplo de 0.025 ohmios, y amplificamos la caída de tensión que se produce en ella mediante el circuito integrado INA139, obteniéndose un valor proporcional a la corriente que pasa por la bobina.

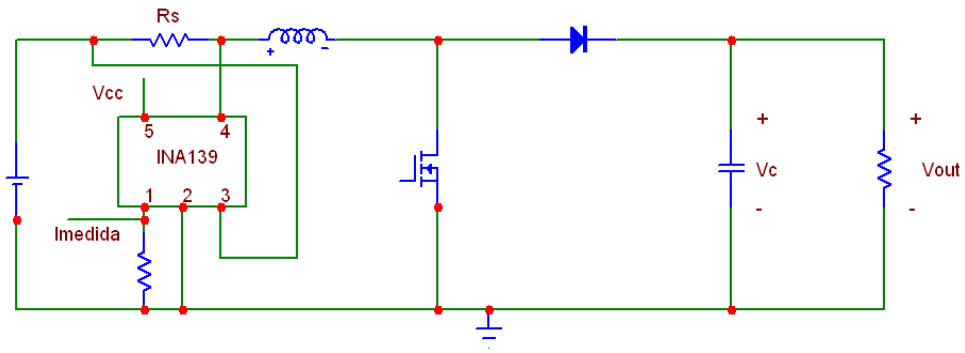

Figura 2.6: Acondicionamiento de la señal de la intensidad que circula por la bobina.

La otra señal que debemos acondicionar es la tensión de salida del circuito, para así poder calcular el término de la superficie de deslizamiento correspondiente a la integral de la diferencia entre el valor deseado de la tensión de salida y el real. Para el valor deseado podemos usar como referencia el valor de la tensión de entrada, dado que sabemos que el primero será el segundo multiplicado por el factor correspondiente a la amplificación de tensión que queremos obtener. Por tanto, para acondicionar el valor de la tensión de sali-

da a la referencia del valor deseado debemos aplicarle la ganancia inversa que el convertidor boost aplica a la tensión de entrada. Para ello podemos usar un amplificador operacional configurado como amplificador inversor como el que podemos observar en la figura 2.7.

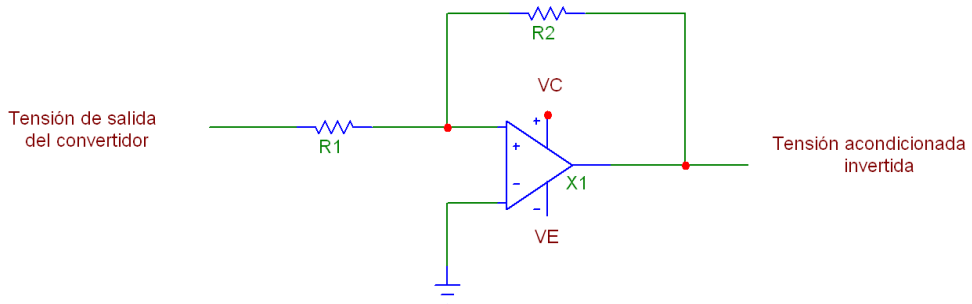

Figura 2.7: Acondicionamiento de la tensión de salida.

Sabiendo que la ganancia de este circuito vienen dada por la expresión

$$A_v = -\frac{R_2}{R_1},$$

debemos elegir los valores apropiados de las resistencias para obtener el valor $-1/y_d$.

El siguiente paso a realizar será obtener la diferencia entre los valores deseado y real de la tensión de salida, para lo cual emplearemos de nuevo un amplificador operacional configurado como circuito sumador de la manera que podemos observar en la figura 2.8.

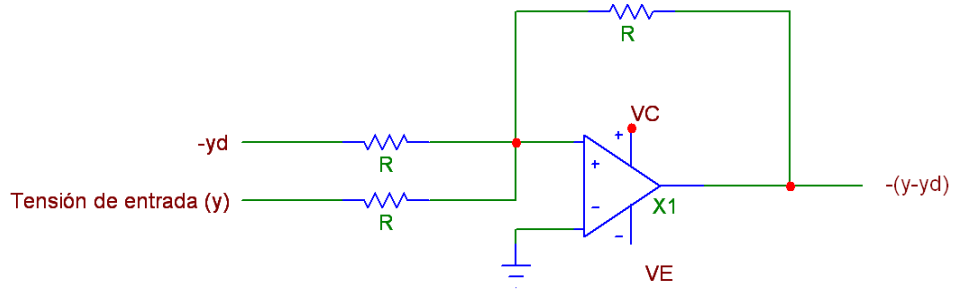

Figura 2.8: Diferencia de las tensiones de salida deseada y real.

Para terminar con la obtención del término integral se configura una vez más un amplificador operacional configurado como circuito integrador, el

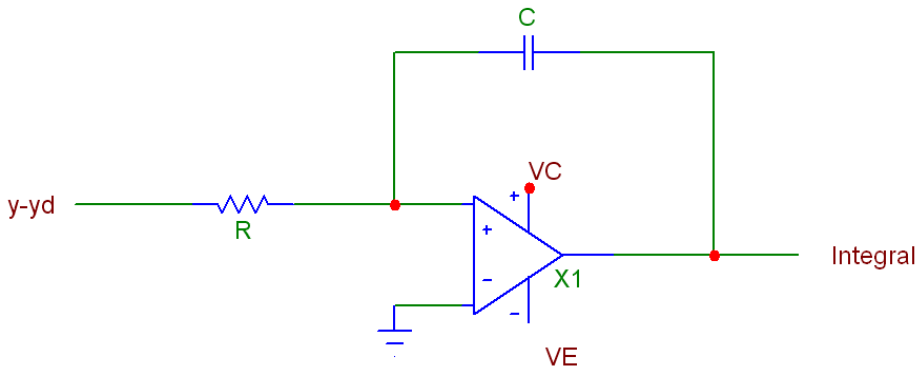

Figura 2.9: Obtención del término integral.

cual tiene una ganancia de $-1/RC$, por lo que habrá que elegir los valores de R y C adecuados para que la señal correspondiente al término integral de la superficie de deslizamiento esté correctamente acondicionada, teniendo en cuenta el valor del parámetro K que queremos implementar.

Referencia de intensidad

Para poder obtener la superficie de deslizamiento necesitamos una señal que haga el papel de referencia de intensidad correspondiente al termino de la intensidad en el punto de equilibrio que circula por la bobina. El circuito que provea dicha referencia debe caracterizarse por su estabilidad y por su bajo consumo. Para ello se toma la configuración de la figura 2.10.

Este circuito se trata de un estabilizador de tensión utilizado para obtenter referencias de tensión con bajo nivel de intensidad a la salida, donde el potenciometro R_3 se utiliza para ajustar correctamente el valor de I_{ref}. La tensión V_{dd} se puede obtener mediante el regulador LM7808 con la configuración de la figura 2.11.

El último paso antes de implementar el circuito que nos proporcionará la superficie de deslizamiento es restar la referencia de corriente I_{ref} y el término integral, utililizando un amplificador operacional configurado como circuito restador tal y como observamos en la figura 2.12, tomando $R_1 = R_2$ para no introducir ninguna ganancia.

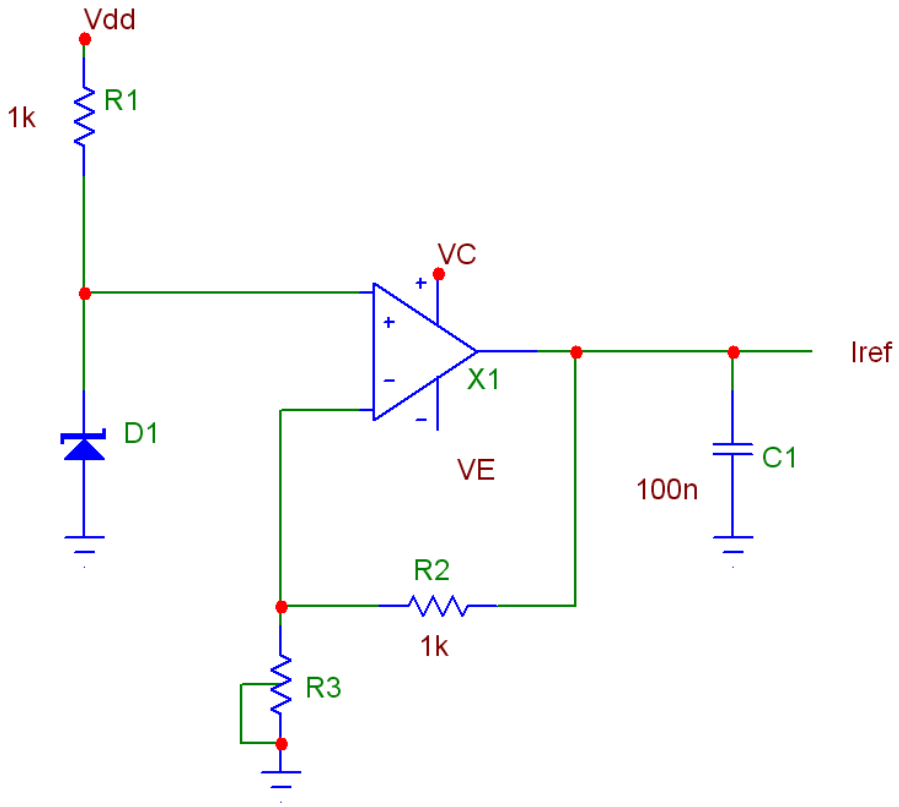

Figura 2.10: Referencia de intensidad.

Implementación de la superficie de deslizamiento

Para implementar la superficie de deslizamiento se utiliza un comparador con histéresis cuyas entradas serán la intensidad que hemos medido que circula por la bobina y la señal obtenida en la figura 2.12. La configuración del circuito correspondiente a este comparador es la de la figura 2.13. En el mismo, el potenciómetro se usa para ajustar el ciclo de histéresis. Por su parte, la señal de salida debe ser un valor apropiado para polarizar el transistor del convertidor.

2.4. Análisis de los equilibrios

Vamos a buscar ahora los posibles puntos de equilibrio natural de dicho sistema. Dependiendo del modo de conducción en el que esté funcionando el

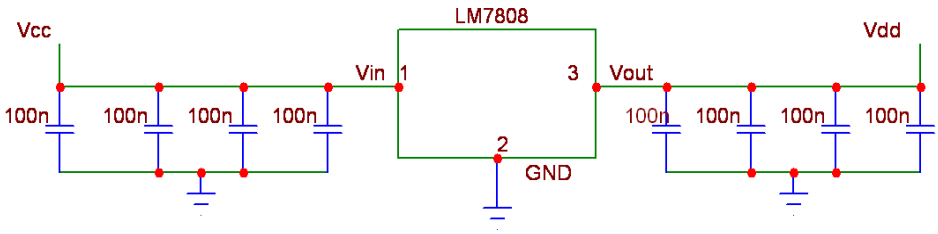

Figura 2.11: Tensión V_{dd} proporcionada por el integrado LM7808.

convertidor, nos podemos encontrar con que la condición $v = 1$ se verifique siempre (si estamos en el modo CCM), o bien que $v = 0$ en ciertos instantes (cuando se alcance la estructura NC) si trabajamos en el modo DCM. En este último caso, cuando v se anula, el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= -ay, \\ \dot{z} &= y - y_d, \end{aligned}$$

y no hay ningún punto de equilibrio, pues $y_d \neq 0$. Consideramos pues, a partir de ahora, que $v = 1$.

Según la ley de control se tiene que $u = 1$ si $h(x, y) > 0$. En dicho caso, las ecuaciones del sistema quedan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - y - bx, \\ \dot{y} &= x - ay, \\ \dot{z} &= y - y_d. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Igualando a cero las tres expresiones y despejando, se obtiene el siguiente posible punto de equilibrio

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a}{1+ab}, \\ \bar{y} &= \frac{1}{1+ab}, \\ \bar{z} &= \bar{z}. \end{aligned}$$

donde $\bar{z}$ es cualquier valor arbitrario y además se debe tener $\bar{y} = y_d$. Es claro que $\bar{y} < 1$ al ser a y b valores positivos y debido a que para el convertidor *boost*

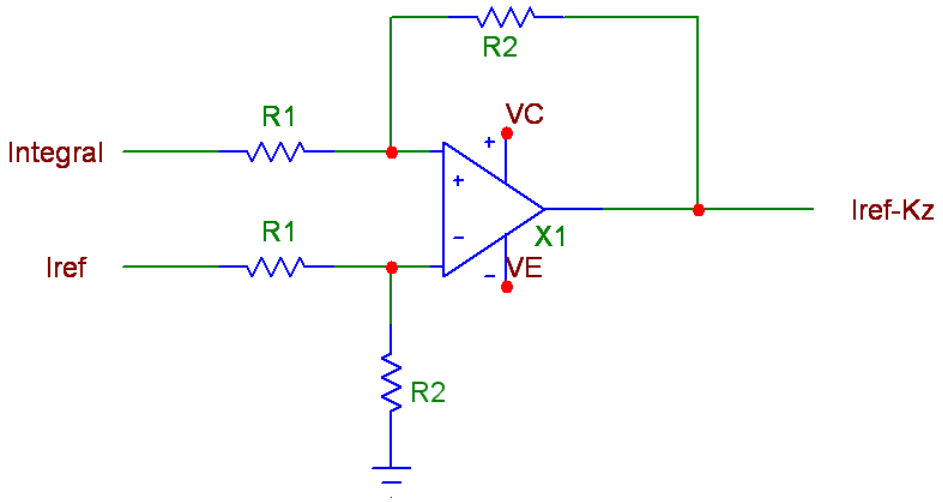

Figura 2.12: Circuito que resta la señal de referencia de intensidad y la señal del término integral.

siempre se tiene que $y_d > 1$,las condiciones anteriores no son compatibles y no aparece ningún equilibrio cuando $h(x, y) > 0$.

Nos queda entonces el caso $h(x, y) < 0$, en el que $u = 0$, y resulta el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - bx, \\ \dot{y} &= -ay, \\ \dot{z} &= y - y_d, \end{aligned}$$

que es claramente incompatible, pues en el posible punto de equilibrio se tiene que $\bar{y} = 0$, por lo que tampoco hay equilibrio.

Concluimos entonces que los únicos comportamientos en régimen permanente o estacionario serán debidos a la existencia de pseudo-equilibrios en la superficie de deslizamiento. Para comprobarlo hay que obtener primero la expresión de u_{eq} que sustituida en las ecuaciones de nuestro sistema determina la dinámica de deslizamiento del mismo. Para ello en primer lugar debe ocurrir que en los puntos con

$$h(x, z) = 0,$$

se satisfaga la condición de invarianza

$$\frac{dh(x, z)}{dt} = 0,$$

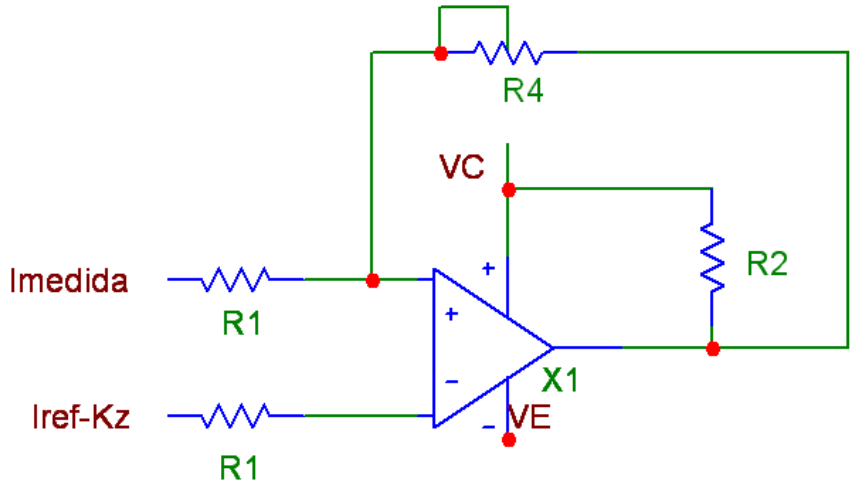

Figura 2.13: Comparador con histéresis utilizado para implementar el comparador con histeresis.

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} x - x_* + Kz &= 0, \\ 1 - uy - bx + K(y - y_d) &= 0. \end{aligned}$$

Operamos con dichas expresiones y se despeja el valor de u_{eq}, que resulta ser

$$u_{eq} = \frac{1 - bx + K(y - y_d)}{y} = \frac{1 - bx_* + K(y + bz - y_d)}{y}$$

Sustituyendo este valor en (2.6) con $v = 1$, la dinámica de deslizamiento queda, entonces, como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -K(y - y_d), \\ \dot{y} &= -ay + \frac{x}{y} - b\frac{x^2}{y} + K(y - y_d)\frac{x}{y}, \\ \dot{z} &= y - y_d. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Si igualamos a cero los miembros de la derecha obtenemos que en los posibles valores de equilibrio se debe cumplir

$$\bar{y} = y_d,$$

y para $\bar{x}$ se llega que debe verificar la condición

$$bx^2 - x + ay^2 = 0. \tag{2.9}$$

Si $b = 0$ el termino cuadrático desaparece, y

$$\bar{x} = ay^2.$$

y si elejimos $x_* = \bar{x}$ entonces $\bar{z}$ será nulo.

En el caso de que $b \neq 0$

$$\bar{x}_{\pm} = \frac{1}{2b} \pm \frac{\sqrt{1 - 4aby_d^2}}{2b}, \tag{2.10}$$

debiéndose cumplir que el radicando sea positivo, es decir, que

$$1 - 4aby_d^2 > 0.$$

El valor deseado para la tensión está también entonces acotado superiormente, quedando restringido al intervalo

$$1 < y_d < \sqrt{\frac{1}{4ab}}.$$

De nuevo, si elegimos $x^* = x_-$ se obtiene tras imponer $h(x, z) = 0$ que $\bar{z} = 0$.

Se puede ver, pues, que cuando b no se anula existen dos puntos de equilibrio, mientras que cuando sí lo hace sólo existe uno. Para determinar su estabilidad proyectamos el sistema (2.7) sobre el plano (x, y) y calculamos la matriz jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ \frac{1}{y}[1 - 2bx + K(y - y_d)] & -a + \frac{1}{y^2}(-x + bx^2 + Kxy_d) \end{pmatrix},$$

que para los puntos de equilibrio queda

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ \frac{1}{\bar{y}}[1 - 2b\bar{x}] & -a + \frac{1}{\bar{y}^2}(-\bar{x} + b\bar{x}^2 + K\bar{x}\bar{y}) \end{pmatrix}.$$

Las condiciones de estabilidad se traducen en que el determinante de la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio debe ser positivo, y la traza debe ser negativa. Ambos están expresados por

$$\begin{aligned} d(J) &= \frac{K}{\bar{y}}(1 - 2b\bar{x}), \\ t(J) &= -a + \frac{1}{\bar{y}^2}(-\bar{x} + b\bar{x}^2 + K\bar{x}\bar{y}). \end{aligned}$$

De la condición para el determinante tenemos que sólo se tiene estabilidad si

$$K\frac{1-2b\bar{x}}{\bar{y}} > 0.$$

que se satisface trivialmente cuando $b = 0$ si $K > 0$.

Cuando $b > 0$, como $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son cantidades positivas, la condición se cumple si

$$\begin{aligned} K &> 0, \\ \bar{x} &< \frac{1}{2b}. \end{aligned}$$

La segunda expresión pone de manifiesto que, por ejemplo, el punto de equilibrio correspondiente a la solución con signo menos de (2.10) puede ser estable, ya que

$$\sqrt{1-4ab(y_d)^2} < 1,$$

al ser a y b cantidades positivas. Por esta misma razón, la solución con signo más siempre es inestable. La condición para la traza, por su parte, exige que

$$K < \frac{a\bar{y}^2 - b\bar{x}^2 + \bar{x}}{\bar{x}\bar{y}} = \frac{2a\bar{y}}{\bar{x}},$$

donde hempos usado (2.9).Uniendo todas las condiciones, la estabilidad de los puntos de equilibrio cuando $b = 0$ exige las desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &< K < \frac{a\bar{y}^2 - b\bar{x}^2 + \bar{x}}{\bar{x}\bar{y}} = \frac{2a\bar{y}}{\bar{x}}, \\ \bar{x} &< \frac{1}{2b}, \end{aligned}$$

mientras que para el caso $b = 0$ nos basta con la primera desigualdad.

Si sustituimos en cada caso los posibles valores de equilibrio, llegamos a las siguientes condiciones. Para el caso $b = 0$ nos queda

$$0 < K < \frac{2}{\bar{y}}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\bar{x} = a\bar{y}^2$. Para el caso $b \neq 0$, ya hemos indicado que sólo puede ser estable el equilibrio $\bar{x}_-$, que cumple siempre la segunda de las desigualdades, y para la primera se obtiene

$$0 < K < \frac{2a\bar{y}}{\bar{x}_-} = \frac{1+\sqrt{1-4ab\bar{y}^2}}{\bar{y}},$$

tras unas sencillas manipulaciones algebraicas.

Es importante hacer notar que si se violan estas condiciones, bien por cuestiones de diseño, bien por variaciones en la carga, hemos de esperar comportamientos indeseados. En particular, las condiciones $K\bar{y} = 2$ (cuando $b = 0$) y

$$K\bar{y} = 1 + \sqrt{1 - 4ab\bar{y}^2}, \tag{2.11}$$

cuando $b \neq 0$ deben estar asociadas a la aparición de bifurcaciones. Dejaremos constancia para futuras referencias que en el caso $b \neq 0$, la condición de bifurcación está asociada al valor

$$\bar{y} = \frac{2K}{K^2 + 4ab}, \tag{2.12}$$

que se obtiene sin más que resolver la ecuación (2.11).

2.5. Dominio de deslizamiento

Para obtener una visión global de la dinámica de nuestro modelo, en esta sección haremos explícitos los conceptos introducidos anteriormente relativos al dominio de deslizamiento. Dadas las ecuaciones del sistema, definimos los campos vectoriales

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x,y) &= \begin{bmatrix} 1 - bx - y \\ x - ay \\ y - y_d \end{bmatrix}, \\ f^{(2)}(x,y) &= \begin{bmatrix} 1 - bx \\ -ay \\ y - y_d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $f^{(1)}(x,y)$ se corresponde con las ecuaciones para $u = 1$ $(h > 0)$, y $f^{(2)}(x,y)$ para $u = 0$ $(h < 0)$.

De la expresión del plano de deslizamiento se tiene

$$\bigtriangledown h = (1, 0, K),$$

de manera que el dominio de deslizamiento será la región del plano $h = 0$ donde se cumplen las restricciones

$$\begin{aligned} \langle \bigtriangledown h, f^{(1)}(x,y) \rangle &< 0, \\ \langle \bigtriangledown h, f^{(2)}(x,y) \rangle &> 0, \end{aligned}$$

es decir, cuando ambos campos vectoriales empujen hacia el plano. Entonces, las órbitas del sistema no abandonan el plano de deslizamiento permaneciendo en él deslizándose sobre el mismo.

En nuestro caso, las restricciones a las que se llegan son

$$\begin{aligned} 1 - bx - y + K(y - y_d) &< 0, \\ 1 - bx + K(y - y_d) &> 0. \end{aligned}$$

Si despejamos y, finalmente se obtiene

$$y < \frac{b}{K-1}x + \frac{Ky_d - 1}{K-1}, \tag{2.13}$$

$$y > \frac{b}{K}x + \frac{Ky_d - 1}{K}. \tag{2.14}$$

Al observar los denominadores de (2.13) se puede ver que hay que distinguir tres casos distintos según sea el valor de K.

Aparte, es importante comprobar si los puntos de equilibrio pertenecen o no al dominio de deslizamiento. Para poder analizarlo facilmente necesitamos determinar el lugar geométrico definido por los posibles puntos de equilibrio del sistema, el cual podemos obtener a partir de la expresión

$$bx^2 + ay^2 - x = 0,$$

que ya vimos anteriormente que se verifica en el equilibrio. Si operamos con ella, se llega a que el lugar geometrico que buscamos es

$$\frac{(x - \frac{1}{2b})^2}{\frac{1}{4b^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4ab}} = 1,$$

que se trata de una elipse centrada en $x = 1/2b, y = 0$ y de semiejes de longitud $1/2b$ paralelo al eje x y $1/(2\sqrt{ab})$ paralelo al eje y.

A modo de ejemplo, vamos a representar graficamente el dominio de deslizamiento del sistema resultante para el circuito constituido por los siguientes elementos

$$\begin{aligned} L &= 2mH, \\ r_L &= 1{,}5, \\ C &= 10\mu F, \\ R &= 50\Omega, \end{aligned}$$

que presenta los siguientes valores adimensionales

$$\begin{aligned} a &= 0{,}2828, \\ b &= 0{,}1061. \end{aligned}$$

Si a este circuito le pedimos que aumente la tensión tal que resulte una $y_d = 1{,}33$, los valores de equilibrio de la intensidad de la bobina son

$$\begin{aligned} x_- &= 0{,}53, \\ x_+ &= 8{,}90, \end{aligned}$$

con un valor crítico de la ganancia

$$K_c = 1{,}42.$$

2.5.1. Caso $K > 1$

Para valores de K mayores que la unidad los denominadores de (2.13) son positivos, así como los numeradores de los términos independientes de ambas restricciones, al ser también $y_d > 1$. Por otro lado, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{Ky_d - 1}{K - 1} &> \frac{Ky_d - 1}{K}, \\ \frac{b}{K - 1} &> \frac{b}{K}. \end{aligned}$$

Vemos entonces que, si proyectamos sobre el plano (x, y), la frontera del dominio de deslizamiento queda definida por dos rectas cuyos cortes con el eje y se producen en el semieje positivo. Además, la recta que delimita superiormente la región, que es

$$y = \frac{b}{K - 1}x + \frac{Ky_d - 1}{K - 1},$$

tiene una pendiente mayor que la recta que define el límite inferior,

$$y = \frac{b}{K}x + \frac{Ky_d - 1}{K},$$

por lo que el corte de ambas no se producirá en el semiplano positivo, que es nuestra región permitida.

Para comprobar si los puntos de equilibrio pertenecen o no al dominio de deslizamiento, dado que

$$y_d < \frac{Ky_d - 1}{K - 1},$$

tendremos que sustituir el valor $y = y_d$ en la recta que define el límite inferior y ver qué valor de x se despeja. Si lo hacemos, se obtiene

$$x = \frac{1}{b},$$

que se trata de uno de los puntos de corte de la elipse de los puntos de equilibrio con el eje x. Esto quiere decir que ambos puntos de equilibrio, tanto el inestable como el estable, caen dentro de la región de deslizamiento.

Para dejar más claro todo lo expuesto hasta aquí, representamos gráficamente el dominio de deslizamiento para un valor de $K = 1{,}5$ y los valores de los parámetros que tomamos anteriormente para nuestro sistema.

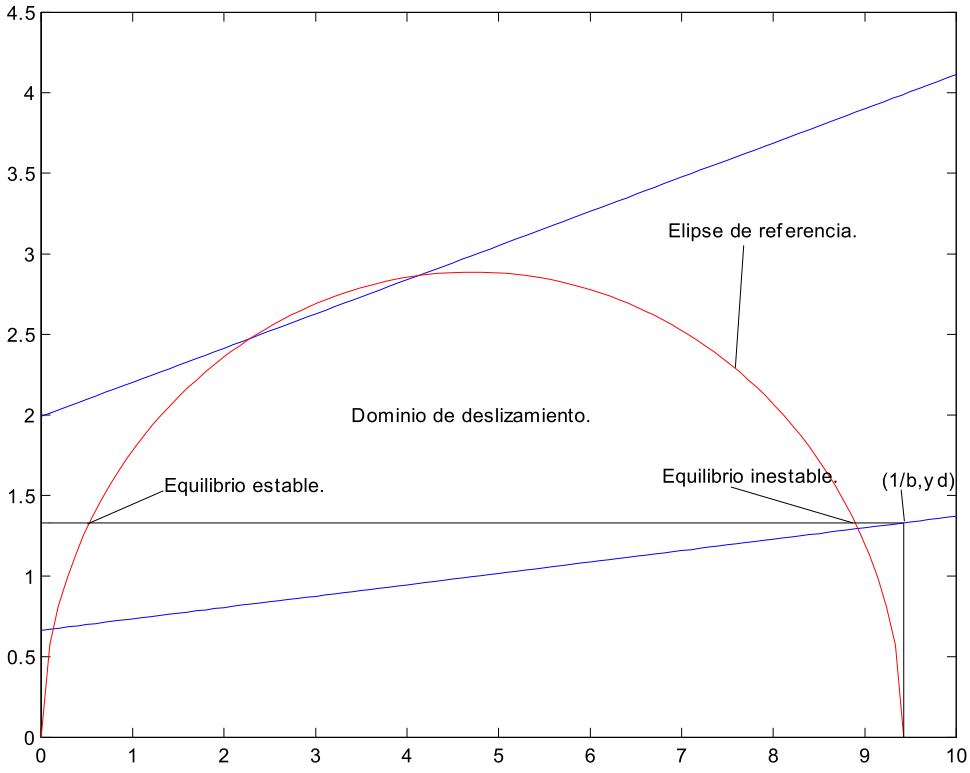

Figura 2.14: Dominio de deslizamiento para $K = 1{,}5$.

2.5.2. Caso $K = 1$

Cuando K es exactamente la unidad, las restricciones (2.13) y (2.14) quedan tranformadas en

$$\begin{aligned} 0 &< bx + y_d - 1, \\ y &> bx + y_d - 1. \end{aligned}$$

La primera de las restricciones se cumple siempre al ser $y_d > 1$ y tanto b como x ser cantidades positivas. La segunda define una recta que delimita

inferiormente el dominio de deslizamiento. Si en ella hacemos $y = y_d$, de nuevo obtenemos que $x = 1/b$, por lo que los puntos de equilibrio están dentro del dominio de deslizamiento.

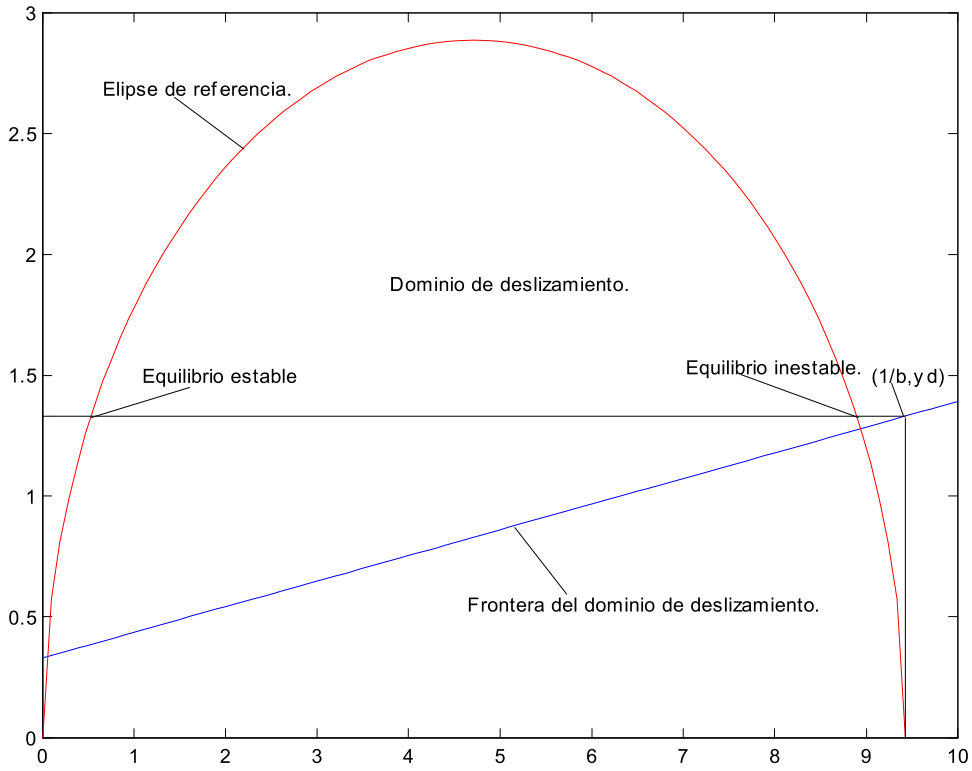

Figura 2.15: Dominio de deslizamiento para $K = 1$.

2.5.3. Caso $K < 1$

Si K resulta ser una cantidad menor que la unidad en primer lugar vemos que el signo de la desigualdad (2.13) cambia de sentido, dado que al despejar y habremos tenido que multiplicar por la cantidad negativa $K - 1$. Por este motiva, resulta que ahora, la pareja de restricciones que definen el dominio de deslizamiento es

$$y > \frac{b}{K-1}x + \frac{Ky_d - 1}{K-1}, \tag{2.15}$$

$$y > \frac{b}{K}x + \frac{Ky_d - 1}{K}. \tag{2.16}$$

Por su parte, el numerador del término independiente de ambas expresiones cambia ahora de signo para un valor de $K = 1/y_d$. Hay entonces que distinguir entre otros tres subcasos.

Caso $K > 1/y_d$

La expresión $Ky_d - 1$ es positiva en este caso, y el término independiente de la restricción (2.15) negativo, así como la pendiente de la recta que define. Por tanto, ésta se encontrará en la parte negativa del eje y cumpliéndose entoncés dicha restricción para todo valor de y positivo.

Para la restricción (2.16) tenemos que define una recta que delimita inferiormente la región de deslizamiento. Haciendo $y = y_d$ en dicha recta, una vez más resulta que $x = 1/b$, y los puntos de equilibrio estarán en la región de deslizamiento.

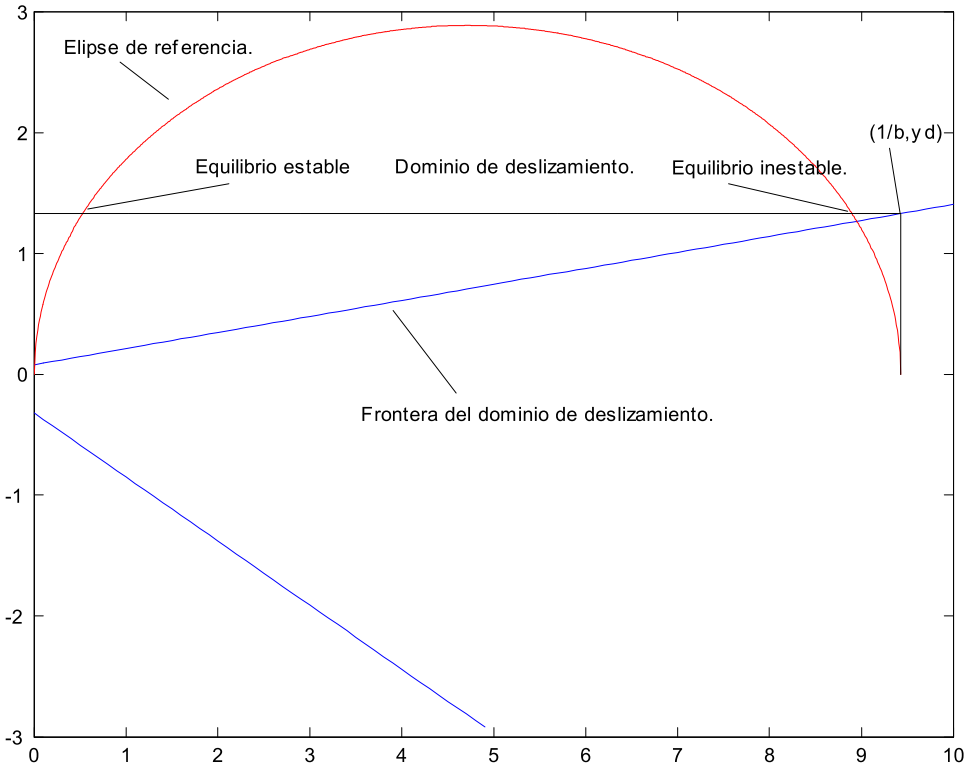

Figura 2.16: Dominio de deslizamiento para $K = 0{,}8$.

Caso $K = 1/y_d$

Los términos independientes de ambas restricciones serán ahora nulos, cortándose las rectas que definen en el origen, una con pendiente negativa, la (2.15), y otra con pendiente positiva, la (2.16).

Se trata pues este caso de uno análogo al anterior pero con la recta frontera partiendo del origen.

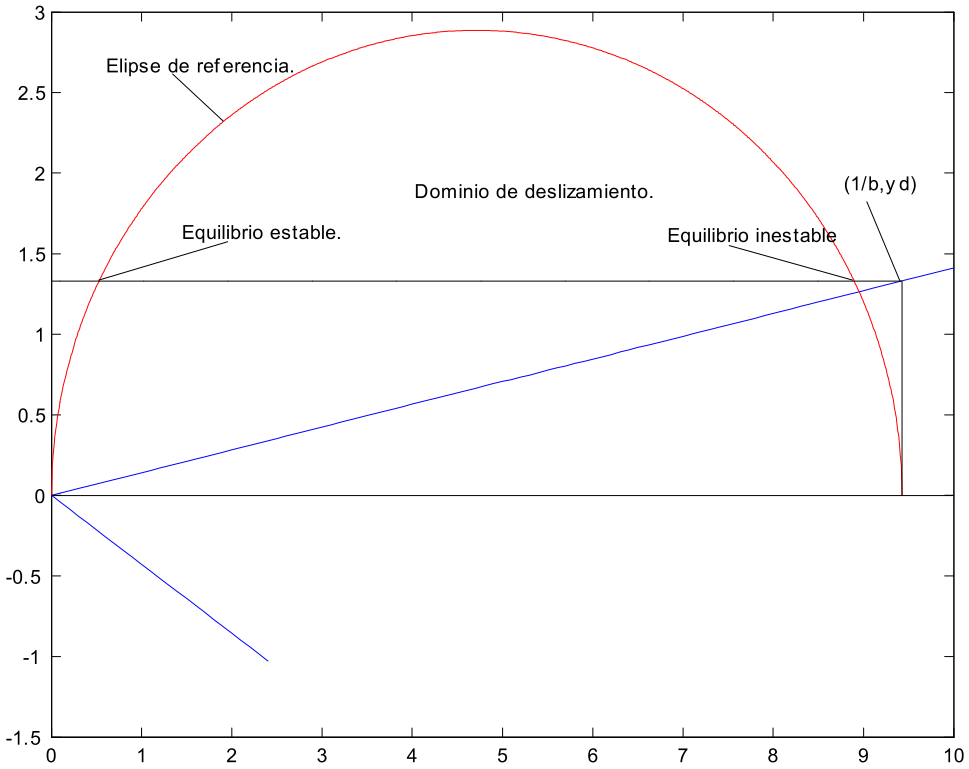

Figura 2.17: Dominio de deslizamiento para $K = 1/y_d = 0{,}7519$.

Caso $\mathbf{K < 1/y_d}$

En este último caso, el signo de los términos independientes se invierte, es decir, ahora la recta definida por (2.15) corta al eje y en su parte positiva siendo su pendiente negativa, y la recta definida por (2.16) en su zona negativa siendo su pendiente positiva. Ambas rectas se cortarán entonces en un punto que, en principio, podría pertenecer al semiplano positivo. Si hacemos

$$\frac{b}{K-1}x + \frac{Ky_d - 1}{K-1} = \frac{b}{K}x + \frac{Ky_d - 1}{K},$$

despejando se tiene que

$$x = \frac{1 - Ky_d}{b}.$$

Si sustituimos dicho valor de x en las expresiones de las rectas vemos que en ambas se llega a que $y = 0$, por lo que el punto de corte se encuentra justo en el eje x.

La región de deslizamiento está pues limitada inferiormente por la restricción (2.15) para un valor de x inferior al obtenido, y por la restricción (2.16) para un valor de x superior.

Para terminar este apartado, teniendo en cuenta que el punto de corte de la recta definida por (2.15) con el eje y es menor que el valor de y_d, para saber si los puntos de equilibrio están el el dominio de deslizamiento hay que sustituir $y = y_d$ en la recta definida por (2.16), obteniéndose el mismo resultado que para todos los casos anteriores.

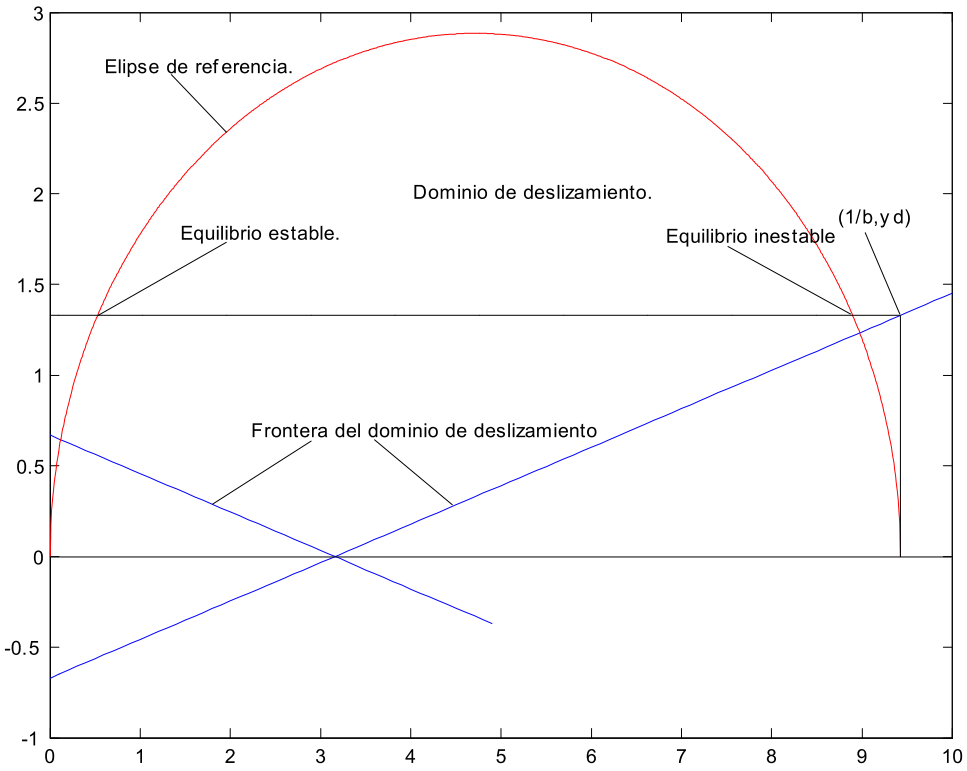

Figura 2.18: Dominio de deslizamiento para $K = 0{,}5$.