

Capítulo 3

Análisis de la bifurcación

3.1. Introducción

Una vez que hemos establecido cual es la estrategia de control a seguir, obtenido las ecuaciones matemáticas que modelan el circuito controlado y extraído de ellas toda la información correspondiente en cuanto a las condiciones que se deben cumplir para que se pueda alcanzar un equilibrio estable, es el momento de comenzar a analizar cuál va ser el comportamiento del circuito frente a variaciones del parámetro K .

En concreto, hemos hecho notar que cuando se cumpla la relación (2.12) se producirá un fenómeno bifurcativo cuya primera consecuencia es la pérdida de estabilidad del pseudo-equilibrio para valores de K mayores al valor crítico. Comenzaremos pues caracterizando el tipo de bifurcación que nos encontramos para dicho valor de K .

En primer lugar, teniendo en cuenta que dicha bifurcación se producirá cuando el sistema se encuentre en modo deslizante, es decir, sobre la superficie del plano de deslizamiento, para llevar a cabo el estudio de la bifurcación podemos considerar las ecuaciones obtenidas para la dinámica de deslizamiento (2.8). Además, podemos proyectar las ecuaciones sobre el plano (x, y) , lo que en la práctica nos lleva a tomar únicamente las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -K(y - y_d), \\ \dot{y} &= -ay + \frac{x}{y} - b\frac{x^2}{y} + K(y - y_d)\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

En la segunda de las ecuaciones anteriores vemos que hay términos que tienen el denominador igual a la variable y . Para simplificar y obtener un sistema polinomial, podemos trabajar con el sistema equivalente que resulta de multiplicar el segundo miembro de ambas ecuaciones por dicha variable,

lo cual es admisible siempre que $y > 0$, y equivale a hacer el cambio

$$\frac{d}{d\tau} = y \frac{d}{dt},$$

o lo que es lo mismo

$$\tau = yt.$$

El resultado es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -Ky(y - y_d), \\ \dot{y} &= -ay^2 + x - bx^2 + K(y - y_d)x.\end{aligned}$$

El comportamiento de estas dos ecuaciones es el mismo que el de las anteriores con la salvedad de que hemos incluido un equilibrio artificial en el origen como consecuencia del cambio de variable realizado. En cualquier caso insistimos en que nos interesa sólo la región con $y > 0$. El siguiente paso es precisamente hacer una traslación para llevar nuestro equilibrio real al origen, lo cual se consigue realizando el cambio de variable

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - \bar{x}_-, \\ \tilde{y} &= y - y_d.\end{aligned}$$

y nuestras ecuaciones serán de interés para $\tilde{y} > -y_d$.

Si tenemos en cuenta que en el equilibrio se cumple (2.9), el sistema de ecuaciones, tras una serie de sencillas manipulaciones, finalmente queda

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= -K\tilde{y}(\tilde{y} + y_d), \\ \dot{\tilde{y}} &= (1 - 2b\bar{x})\tilde{x} + (K\bar{x} - 2ay_d)\tilde{y} + K\tilde{x}\tilde{y} - b\tilde{x}^2 - a\tilde{y}^2,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde se ha obviado el símbolo de las variables $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, así como el subíndice de $\bar{x}_-$, dado que a partir de ahora consideraremos siempre únicamente el punto de pseudo-equilibrio de los dos existentes con posibilidades de ser estable.

3.2. Caracterización de la bifurcación

Estamos ya en condiciones de poder aplicar el procedimiento detallado en el primer capítulo de este proyecto para caracterizar el tipo de bifurcación asociado al valor crítico K_c del parámetro K . En primer lugar, calculamos la matriz jacobiana en el punto de equilibrio y comprobaremos que los autovalores de la misma son un par de complejos conjugados, lo que nos indicara que posiblemente nos encontramos ante una bifurcación de Hopf.

El jacobiano del sistema diferencial (3.1) es

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -K(2y + y_d) \\ -2bx + Ky + 1 - 2b\bar{x} & K\bar{x} - 2ay_d + Kx - 2ay \end{bmatrix} =,$$

que en el origen (punto de equilibrio) queda

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -Ky_d \\ 1 - 2b\bar{x} & K\bar{x} - 2ay_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Ky_d \\ 1 - 2b\bar{x} & \bar{x}(K - K_c) \end{bmatrix}.$$

Dicha matriz tiene como ecuación característica

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & -Ky_d \\ 1 - 2b\bar{x} & K\bar{x} - 2ay_d - \lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(\bar{x}(K - K_c) - \lambda) + Ky_d(1 - 2b\bar{x}) = \\ &= \lambda^2 + \bar{x}(K_c - K)\lambda + Ky_d(1 - 2b\bar{x}) = 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\bar{x}(K - K_c) \pm \sqrt{\bar{x}(K - K_c)^2 - 4Ky_d(1 - 2b\bar{x})}}{2} = \\ &= \frac{\bar{x}(K - K_c)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{x}(K - K_c)}{2}\right)^2 - Ky_d(1 - 2b\bar{x})}. \end{aligned}$$

Si para simplificar introducimos la notación

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\bar{x}(K - K_c)}{2}, \\ \beta &= \sqrt{Ky_d(1 - 2b\bar{x})}, \end{aligned}$$

resulta

$$\lambda = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \beta^2}.$$

Si damos a K el valor crítico donde se produce la bifurcación, es evidente que el valor de μ se anula, mientras que el valor de β^2 obviamente es positivo. Se tiene entonces que

$$\lambda = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu) = \mu \pm i\sqrt{\beta^2 - \mu^2},$$

y nos encontramos con una posible bifurcación de Hopf cuyo carácter debemos determinar ahora.

Procederemos entonces a pasar el sistema a la forma canónica de Jordan. Para ello, primero calculamos el autovector de uno de los autovalores de la

matriz jacobiana, por ejemplo el de $\lambda_1 = \mu + i\omega(\mu)$, para lo cual resolvemos el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{bmatrix} -\mu - i\omega(\mu) & -\delta \\ 1 - 2b\bar{x} & \mu - i\omega(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde $\delta = Ky_d$.

Quedándonos con la primera ecuación y haciendo $v_1 = 1$ nos queda

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\mu - i\omega(\mu)}{\delta} \end{bmatrix}.$$

A partir de dicho autovector se obtiene la matriz de cambio de base que nos transforma el sistema a su forma canonica como sigue

$$\begin{aligned} v &= p_1 - ip_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\mu}{\delta} \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega(\mu)}{\delta} \end{bmatrix}, \\ P &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\mu}{\delta} & \frac{\omega(\mu)}{\delta} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz inversa de P es

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\omega(\mu)} & \frac{\delta}{\omega(\mu)} \end{bmatrix}.$$

Realizando entonces el cambio de variable

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \frac{\mu}{\omega(\mu)}X + \frac{\delta}{\omega(\mu)}Y \end{bmatrix},$$

las ecuaciones del sistema quedan

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = P^{-1}J(0,0)P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} f(X,Y) \\ g(X,Y) \end{bmatrix} = A_\mu \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \end{bmatrix},$$

donde $A(\mu)$ es la matriz de la parte lineal y las funciones $f(X,Y)$ y $g(X,Y)$ recogen la parte no lineal de las ecuaciones (3.1) una vez que hemos sustituido en las originales los siguientes valores

$$\begin{aligned} x^2 &= X^2, \\ xy &= -\frac{\mu}{\delta}X^2 + \frac{\omega(\mu)}{\delta}XY, \\ y^2 &= \frac{\mu^2}{\delta^2}X^2 + \frac{\omega(\mu)^2}{\delta^2}Y^2 - \frac{2\mu\omega(\mu)}{\delta^2}XY, \end{aligned}$$

resultantes de aplicar el cambio de variables anterior a los términos cuadráticos. Se obtiene que

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= -\frac{\mu^2}{\delta y_d} X^2 - \frac{\omega(\mu)^2}{\delta y_d} Y^2 + \frac{2\mu\omega(\mu)}{\delta y_d} XY, \\ g(X, Y) &= \left(-\frac{a\mu^2}{\delta^2} - \frac{\mu}{y_d} - b\right) X^2 - \frac{a\omega(\mu)^2}{\delta^2} Y^2 + \left(\frac{2a\mu\omega(\mu)}{\delta^2} + \frac{\omega(\mu)}{y_d}\right) XY. \end{aligned}$$

Las funciones $F(X, Y)$ y $G(X, Y)$ recogen los términos no lineales que finalmente resultan de multiplicar por la izquierda por la matriz P^{-1} .

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= f(X, Y) = -\frac{\mu^2}{\delta y_d} X^2 - \frac{\omega(\mu)^2}{\delta y_d} Y^2 + \frac{2\mu\omega(\mu)}{\delta y_d} XY, \\ G(X, Y) &= \frac{\mu}{\omega(\mu)} f(X, Y) + \frac{\delta}{\omega(\mu)} g(X, Y) = \left(-\frac{\mu^3}{\delta y_d \omega(\mu)} f - \frac{a\mu^2}{\delta \omega(\mu)} - \frac{\delta \mu}{\omega(\mu) y_d} - \frac{b\delta}{\omega(\mu)}\right) X^2 + \\ &\quad + \left(-\frac{\omega(\mu)\mu}{\delta y_d} - \frac{a\omega(\mu)}{\delta}\right) Y^2 + \left(\frac{2\mu^2}{\delta y_d} + \frac{2a\mu}{\delta} + \frac{\delta}{y_d}\right) XY. \end{aligned}$$

Por su parte, la parte lineal del sistema queda

$$A(\mu) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P^{-1} J(0, 0) P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu X - \omega(\mu) Y \\ \omega(\mu) X + \mu Y \end{bmatrix},$$

y el sistema en su forma canónica toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \mu X - \omega(\mu) Y - \frac{\mu^2}{\delta y_d} X^2 - \frac{\omega(\mu)^2}{\delta y_d} Y^2 + \frac{2\mu\omega(\mu)}{\delta y_d} XY, \\ \dot{Y} &= \omega(\mu) X + \mu Y + \left(-\frac{\mu^3}{\delta y_d \omega(\mu)} f - \frac{a\mu^2}{\delta \omega(\mu)} - \frac{\delta \mu}{\omega(\mu) y_d} - \frac{b\delta}{\omega(\mu)}\right) X^2 + \\ &\quad + \left(-\frac{\omega(\mu)\mu}{\delta y_d} - \frac{a\omega(\mu)}{\delta}\right) Y^2 + \left(\frac{2\mu^2}{\delta y_d} + \frac{2a\mu}{\delta} + \frac{\delta}{y_d}\right) XY. \end{aligned}$$

Para proseguir con la caracterización de la bifurcación de Hopf nos interesa sustituir el valor crítico del parámetro en las ecuaciones anteriores, que se corresponde con $\mu = 0$, con lo que obtenemos como resultado

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\beta Y - \frac{\beta^2}{K y_d^2} Y^2, \\ \dot{Y} &= \beta X - \frac{b\delta}{\beta} X^2 - \frac{a\beta}{\delta} Y^2 + \frac{\delta}{y_d} XY, \end{aligned}$$

donde los parámetros β, δ deben evaluarse para el valor crítico de $K = K_c$.

La condición de transversalidad se cumple al ser $\alpha(0) = \mu$ y, por lo tanto

$$\alpha'(0) = 1 \neq 0 \text{ para todo } \mu.$$

Podemos continuar pues calculando los autovectores por la derecha y por la izquierda de la matriz

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{bmatrix}, ,$$

para $\mu = 0$

$$A_0 = A(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix},$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\lambda(0) = i\omega(0) = i\beta.$$

Los autovalores vendrán dados respectivamente por

$$\begin{aligned} A_0 q &= \lambda(0)q, \\ A_0^T p &= -\lambda(0)p. \end{aligned}$$

De la primera expresión se obtiene

$$\begin{aligned} -q_2 &= iq_1, \\ q_1 &= iq_2, \end{aligned}$$

de donde se llega a que

$$q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Si operamos análogamente con la segunda expresión el autovector p queda

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

El motivo por el cual se ha introducido el factor de $1/2$ en el vector q es conseguir que el problema quede normalizado, es decir

$$\langle p, q \rangle = 1.$$

Procedemos ahora a calcular el coeficiente $c_1(0)$ cuyo signo de la parte real determinara el carácter de la bifurcación de Hopf que presenta el sistema. Dicho coeficiente, como ya hemos visto, viene expresado por

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}.$$

En nuestro caso no tenemos términos cúbicos, por lo que $g_{21} = 0$. Además, solo nos interesa la parte real del coeficiente:

$$\operatorname{Re}(c_1(0)) = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{2\omega_0}g_{20}g_{11}\right) = -\frac{1}{2\beta}(\operatorname{Re}(g_{20})\operatorname{Im}(g_{11}) + \operatorname{Im}(g_{20})\operatorname{Re}(g_{11})). \quad (3.2)$$

Pasamos entonces a calcular los coeficientes

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle = B_1(q, q) + iB_2(q, q), \\ g_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle = B_1(q, \bar{q}) + iB_2(q, \bar{q}), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B_1(q, q) &= \frac{1}{4}[1, -i] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2\beta^2}{\delta y_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{\beta^2}{2\delta y_d}, \\ B_2(q, q) &= \frac{1}{4}[1, -i] \begin{bmatrix} \frac{-2b\delta}{\beta} & \frac{\delta}{y_d} \\ \frac{\delta}{y_d} & \frac{-2a\beta}{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\beta}{\delta} - \frac{b\delta}{\beta} - i\frac{\delta}{y_d}\right), \\ B_1(q, \bar{q}) &= \frac{1}{4}[1, -i] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2\beta^2}{\delta y_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -\frac{\beta^2}{2\delta y_d}, \\ B_2(q, \bar{q}) &= \frac{1}{4}[1, -i] \begin{bmatrix} \frac{-2b\delta}{\beta} & \frac{\delta}{y_d} \\ \frac{\delta}{y_d} & \frac{-2a\beta}{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -\frac{b\delta}{2\beta} - \frac{a\beta}{2\delta}. \end{aligned}$$

Con esto se tiene que

$$\begin{aligned} g_{20} &= \left(\frac{\beta^2}{2\delta y_d} + \frac{\delta}{2y_d}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{a\beta}{\delta} - \frac{b\delta}{\beta}\right), \\ g_{11} &= -\frac{\beta^2}{2\delta y_d} + \frac{i}{2}\left(-\frac{a\beta}{\delta} - \frac{b\delta}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Si sustituimos en (3.2) el resultado es

$$\operatorname{Re}(c_1(0)) = \frac{1}{8\beta^2\delta^2 y_d}(2a\beta^4 + b\delta^4 + a\beta^2\delta^2).$$

Al ser todos los coeficientes positivos resulta claro que

$$\operatorname{Re}(c_1(0)) > 0,$$

por lo que el tipo de bifurcación de Hopf que presenta el sistema es subcrítica, apareciendo un ciclo inestable que delimita la región de atracción del punto de equilibrio antes de alcanzar el valor de la bifurcación.

