

# Capítulo 4

## Simulaciones y conclusiones

Para corroborar los resultados obtenidos y obtener algunas implicaciones prácticas vamos a realizar varias simulaciones para ciertos valores de los parámetros del circuito. Comprobaremos, en primer lugar, la existencia del ciclo límite inestable para valores de  $K$  inferiores al valor crítico y cómo el punto de equilibrio se vuelve inestable cuando superamos dicho valor.

Si consideramos los siguientes valores típicos para los elementos que componen el circuito

$$\begin{aligned}L &= 2000 \mu H, \\C &= 100 \mu F., \\r_L &= 0,25 \Omega, \\R &= 20 \Omega,\end{aligned}$$

los parámetros adimensionalizados resultan

$$\begin{aligned}a &= 0,22, \\b &= 0,06.\end{aligned}$$

La intensidad en el punto de equilibrio y el valor de bifurcación del parámetro  $K$  serán en este caso

$$\begin{aligned}\bar{x}_- &= 0,40, \\K &= 1,46.\end{aligned}$$

Por su parte, los valores normalizados correspondientes a las condiciones iniciales del circuito son

$$\begin{aligned}x &= 0, \\y &= 1, \\z &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Además, vamos a considerar que la tensión de entrada es de  $9V$  y a la salida de  $12V$ , por lo que  $y_d = 1,33$ . Para poder comprobar la existencia del ciclo límite inestable, y ver que efectivamente estamos ante la presencia de una bifurcación de Hopf subcrítica, simulamos realizando una integración hacia atrás partiendo de unas condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio, que si se usan las ecuaciones (3.1) resulta ser el origen una vez que se ha realizado la translación correspondiente, y tomando un valor del parámetro  $K$  menor al crítico, por ejemplo  $K = 1,42$ .

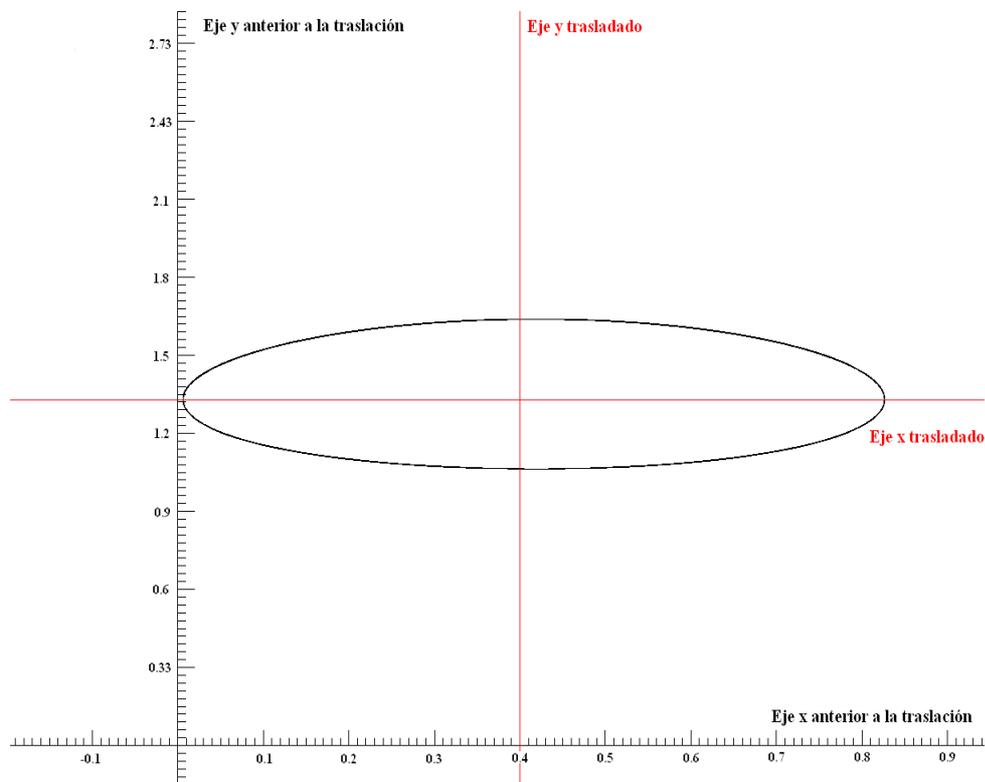


Figura 4.1: Ciclo límite para  $K = 1,42$ . Se encuentra completamente dentro de la región permitida.

Hay que recordar que la zona donde  $x < 0$  para los ejes originales no es alcanzable dado que la intensidad por la bobina nunca llega a ser negativa. Dado que el tamaño del ciclo límite será mayor cuanto menor sea el valor del parámetro  $K$ , podemos considerar aproximadamente que el valor mínimo para que el ciclo límite completo esté dentro de la región permitida es el que hemos tomado para la simulación de la figura 4.1. Si tenemos cualquier otro valor más pequeño, parte del ciclo estaría en la región donde  $x < 0$ , tal y

como se observa en la figura 4.2.

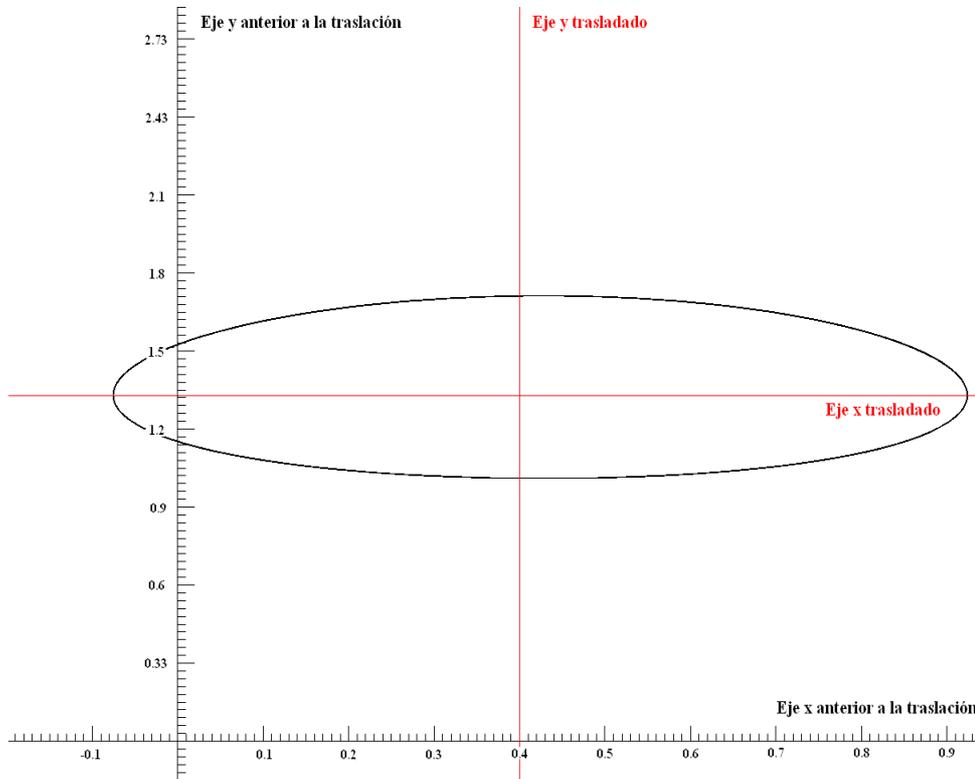


Figura 4.2: Ciclo límite para  $K = 1,4$ . Se observa que se cruza con el plano  $x = 0$  para dicho valor del parámetro.

Mientras el ciclo límite anterior esté totalmente contenido en la región admisible ( $x < 0, y < 0$ ) del plano de deslizamiento, dicho ciclo delimita la cuenca de atracción del punto de operación deseado. Es por tanto la región de seguridad donde desearíamos llegarán las demás órbitas que no están en el plano de deslizamiento. Surgen entonces de forma natural varias cuestiones que deberían ser resueltas para garantizar la robustez del diseño. En primer lugar habría que analizar si, partiendo de las condiciones iniciales de reposo, a saber  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ , la evolución natural del sistema nos lleva a un punto interior del ciclo límite. Por otro lado, también es de interés estudiar qué ocurre en el caso de que aparezcan perturbaciones en las condiciones de funcionamiento que saquen al sistema de la posición de equilibrio, es decir, si se volvería a caer en la región segura del plano de deslizamiento o si, por el contrario, pueden coexistir dinámicas estables aparte de la del equilibrio del punto de operación. La respuesta a estas cuestiones, que exigen un análisis

detallado, se dejan como objeto de estudio para trabajos posteriores.

El hecho de que el sistema realmente pueda presentar varias dinámicas distintas, aparte de la que se da en el plano de deslizamiento, dependiendo del valor de los parámetros del circuito y de lo próximo que estemos del valor crítico de bifurcación, es pues una cuestión muy relevante. Así pues, para los valores de los parámetros escogidos, simularemos el sistema tridimensional completo para distintos valores de  $K$  y observaremos como varía el comportamiento conforme nos vamos acercando a  $K_c$ , partiendo de un valor lejano.

De las simulaciones realizadas, hemos concluido que para valores de  $K$  muy pequeños el sistema alcanza el equilibrio sin entrar en ningún momento en el modo de conducción discontinua, dando lugar a unos valores de tensión y de intensidad con un rizado pequeño (natural, si se tiene en cuenta el efecto de *chattering* propio de cualquier sistema controlado mediante técnicas SMC).

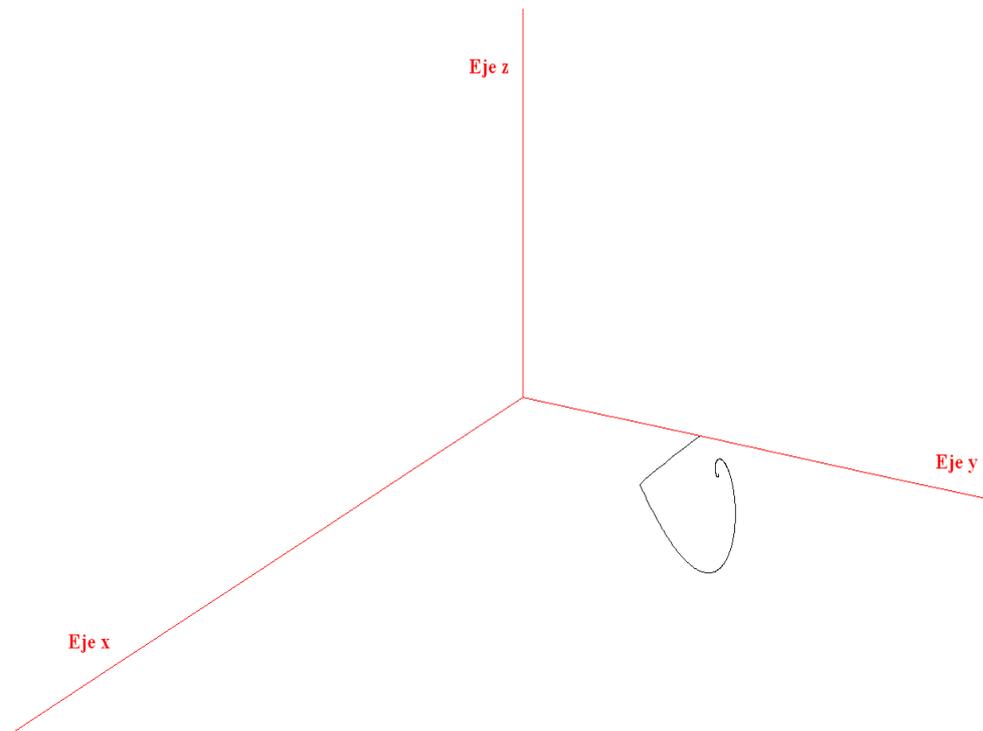


Figura 4.3: Dinámica para  $K = 0,2$ . El sistema alcanza el punto de pseudo-equilibrio estable rápidamente.

En la figura 4.4 se observa también como el equilibrio se alcanza rápidamente sin producirse grandes oscilaciones durante el transitorio. Al aumentar

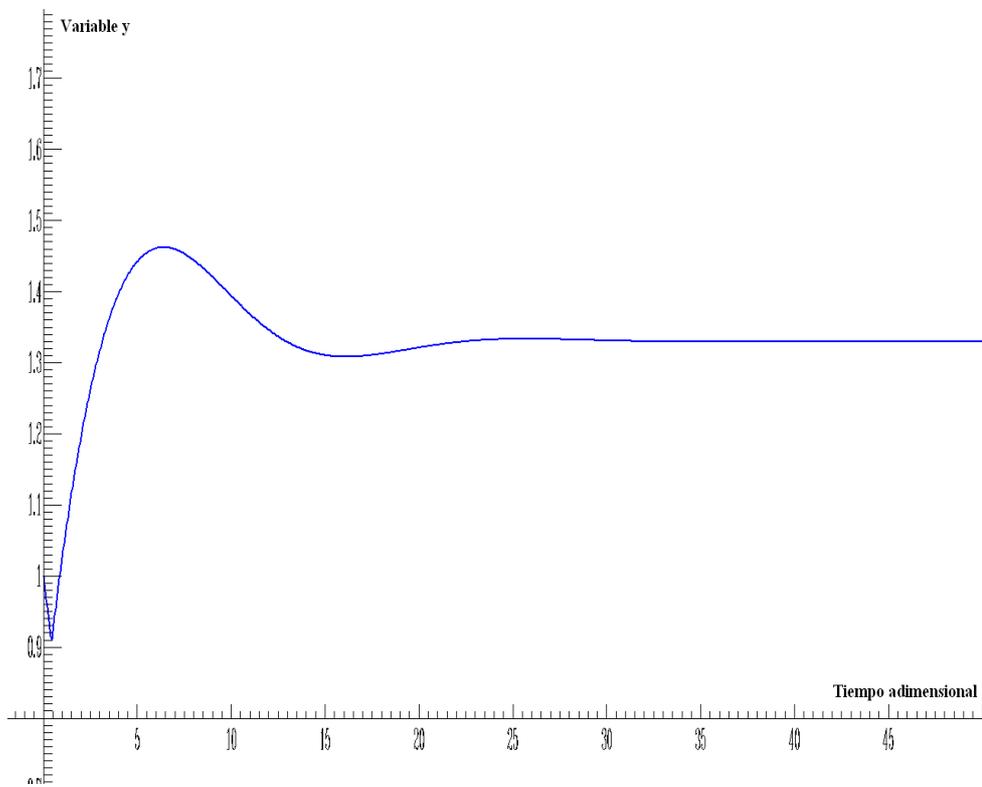


Figura 4.4: Respuesta temporal de la variable  $y$  para  $K = 0,2$ . Para pasar al tiempo en segundos hay que multiplicar por  $10^{-4}\sqrt{2}$

el valor de  $K$ , el transitorio será mayor, ver figuras 4.5 y 4.6, así como las oscilaciones que se producen antes de alcanzar el equilibrio.

Si tomamos un nuevo valor de  $K$  mayor al anterior llegaremos al caso en que, partiendo de las mismas condiciones iniciales, la intensidad de la bobina se anula, es decir, se alcanza el plano  $x = 0$  donde la dinámica del sistema pasa a ser la propia del modo de conducción discontinuo DCM. A partir de ese valor de  $K$  nos encontramos con dos casos distintos. El primero de ellos es el representado en la figura 4.7 en el cual el punto de pseudo-equilibrio es alcanzado de la misma manera que en las simulaciones anteriores, aunque con un transitorio más prolongado. En el segundo, sin embargo, tal y como podemos ver en la figura 4.8, el sistema no alcanza dicho punto de pseudo-equilibrio, sino que es atraído por un nuevo ciclo límite, estable y tridimensional, en el cual queda atrapada la trayectoria del sistema, y el circuito se encontrará trabajando en modo de conducción discontinua.

Por lo tanto queda patente que, aparte de la presencia del ciclo límite

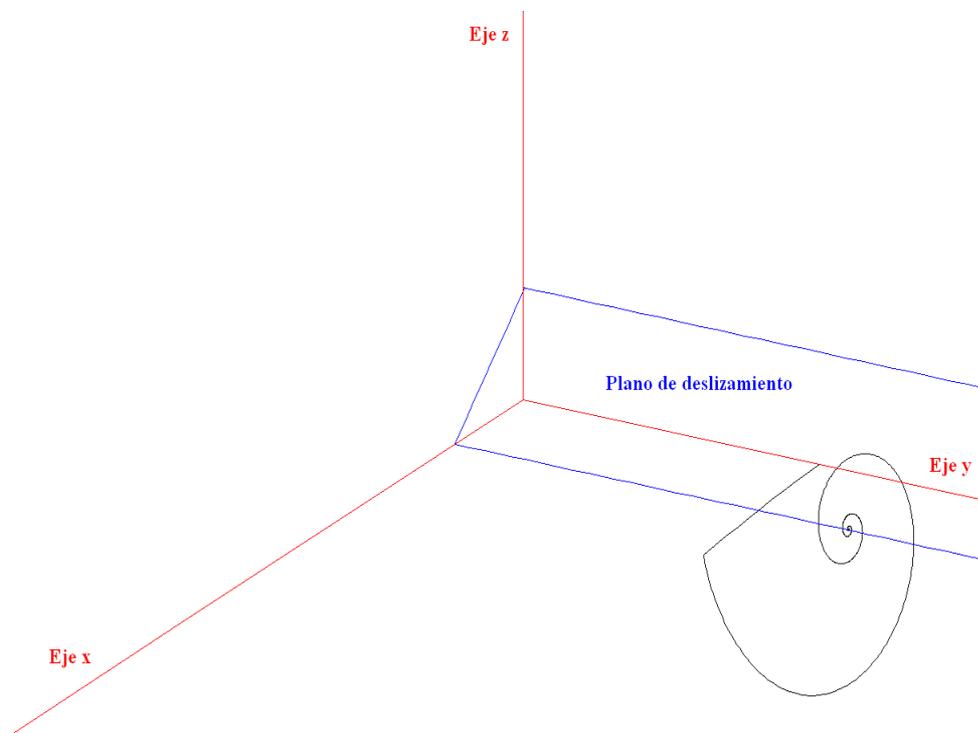


Figura 4.5: Dinámica para  $K = 0,5$ . se alcanza de nuevo el punto de pseudo-equilibrio pero con un transitorio mayor y con más oscilaciones.

inestable de la bifurcación de Hopf, coexisten otros ciclos límites distintos. De hecho, si analizamos conjuntamente los dos casos anteriores, se llega a la conclusión de que aparte del ciclo límite estable que podemos observar en la figura 4.8, debe existir otro ciclo límite inestable, también tridimensional, que delimita la nueva región de atracción del punto de pseudo-equilibrio. Dicha región, en la cual cae la trayectoria del sistema en la figura 4.7, ha quedado bastante reducida con respecto a la que delimita el ciclo límite inestable propio de la bifurcación de Hopf. El estudio de estos nuevos ciclos límites deberá ser realizado en trabajos posteriores.

Si seguimos aumentando el valor de  $K$  alcanzamos un tipo de comportamiento complejo, como por ejemplo sucede si a nuestro sistema le asignamos un valor de  $K = 1,4$ .

Observamos que la trayectoria del sistema que parte de las condiciones iniciales (4.1), no cae nunca dentro de la región delimitada por el ciclo límite inestable de la bifurcación de Hopf y empieza a comportarse caóticamente,

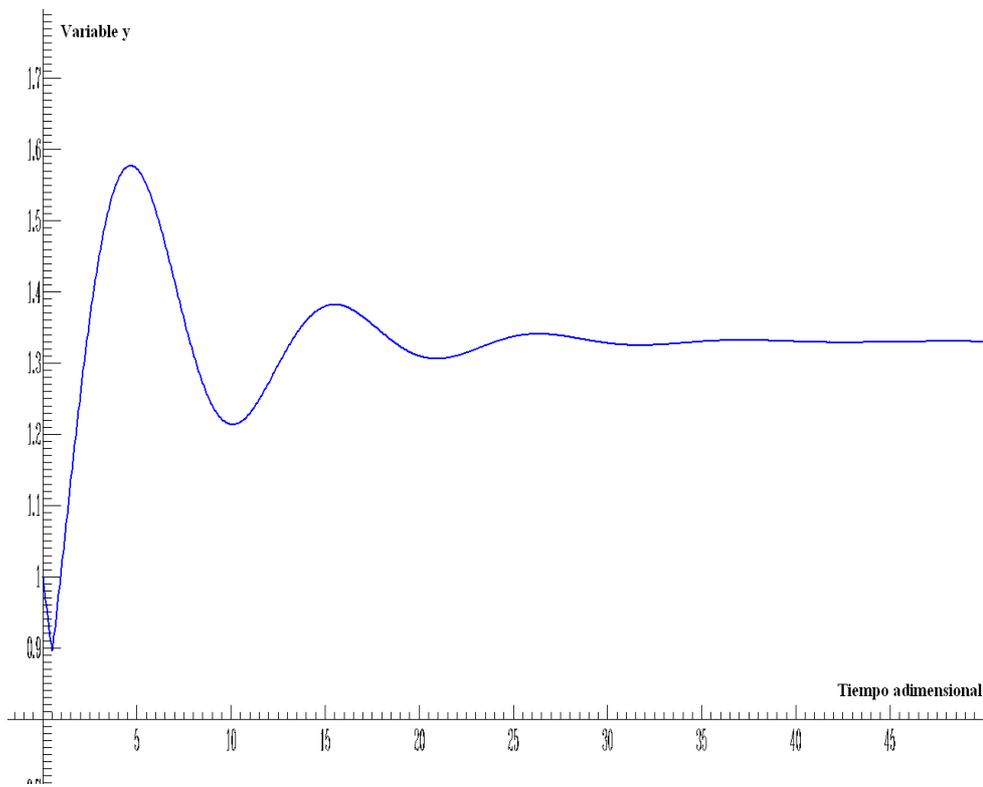


Figura 4.6: Respuesta temporal de la variable  $y$  para  $K = 0,5$ .

describiendo ciclos distintos de manera aparentemente aleatoria. La tensión de salida oscilará alrededor del valor deseado con una amplitud que no es constante, sino que variará de un ciclo a otro.

Por último, queremos comentar otra particularidad a tener en cuenta en el correcto diseño de nuestro circuito. Si tomamos ahora un valor de  $K = 1,5$ , podemos observar en la figura 4.12 que el circuito no llegue a comenzar a conmutar.

El hecho de que en nuestro caso particular el valor de  $K$  sea mayor al crítico no tiene nada que ver con que nos hayamos encontrado con este problema. El motivo por el cual ocurre esto es porque al variar el valor de  $K$ , estamos cambiando también la pendiente del plano de deslizamiento, de forma que a mayor  $K$  menos pendiente y, por tanto, más horizontal es el plano. Por su parte, el circuito parte de las condiciones iniciales (4.1) en el semiespacio inferior al plano de deslizamiento, y con  $\dot{z} < 0$ , al ser  $y_0 < y_d$ . Entonces, para que la trayectoria que sigue el circuito al arrancar llegue a caer sobre el plano de deslizamiento es necesario que éste tenga una pendiente mínima.

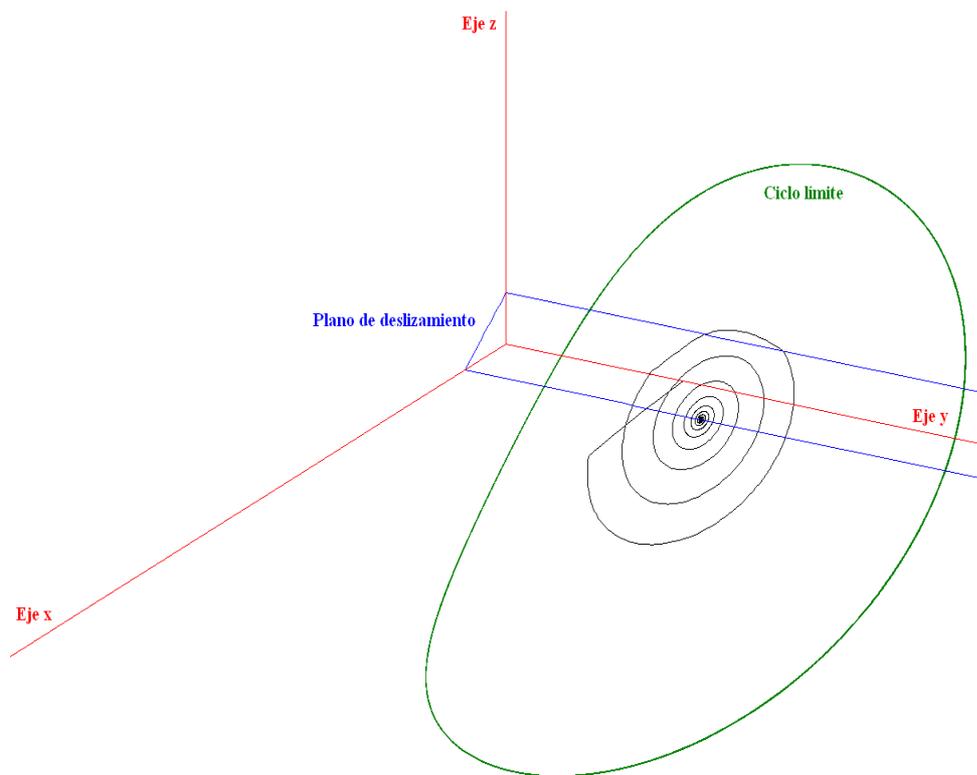


Figura 4.7: Dinámica para  $K = 1$ . Se llega al punto de pseudo-equilibrio pasando previamente por el plano  $x = 0$ .

Habrá que tener especial cuidado al elegir los valores de los componentes del circuito, para que este fenómeno no se produzca para valores de  $K$  demasiado pequeños, de manera que tengamos un rango de valores de dicho parámetro suficientemente amplio en el que el circuito tenga un comportamiento adecuado.

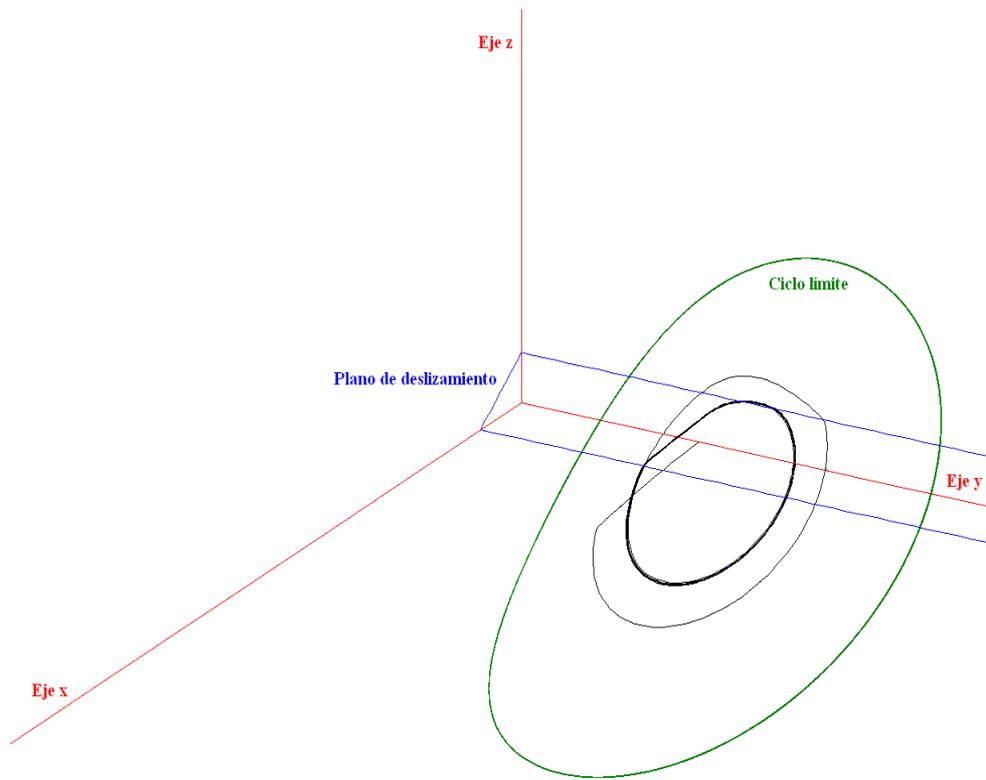


Figura 4.8: Dinámica para  $K = 1,1$ . El sistema, en régimen permanente, describe una órbita periódica estable.

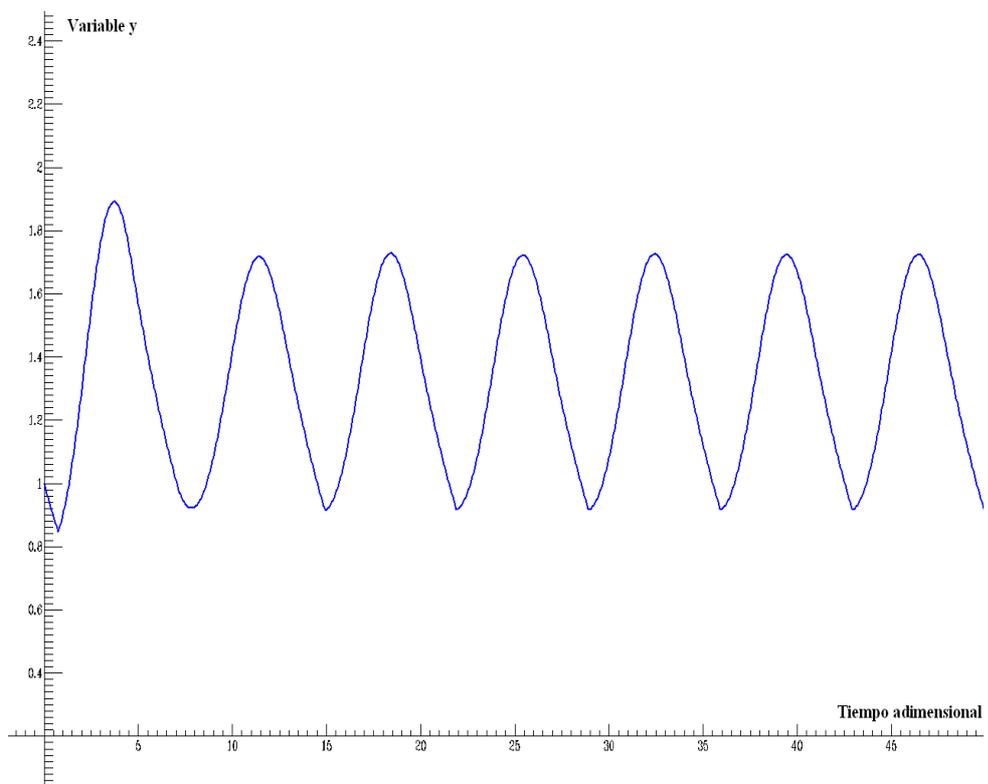


Figura 4.9: Respuesta temporal para  $K = 1,1$ .

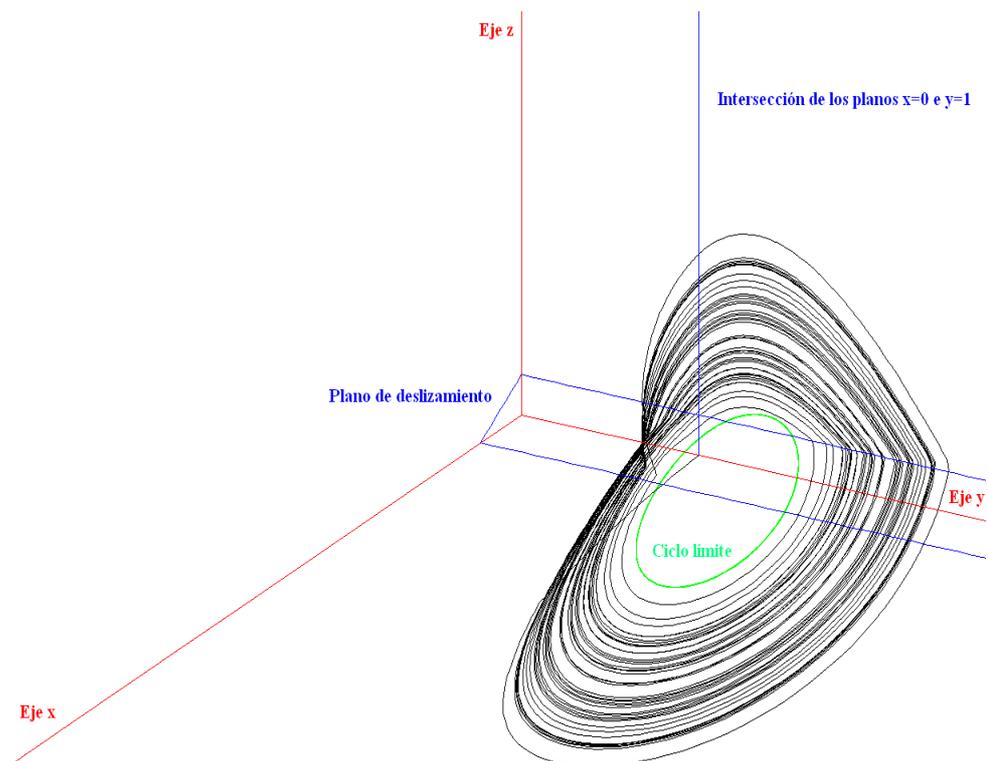


Figura 4.10: Dinámica para  $K = 1,4$ . El sistema presenta un comportamiento caótico, describiendo de manera aparentemente aleatoria, distintas órbitas en una región acotada del espacio de estados. Este comportamiento coexiste con el pseudo-equilibrio estable.

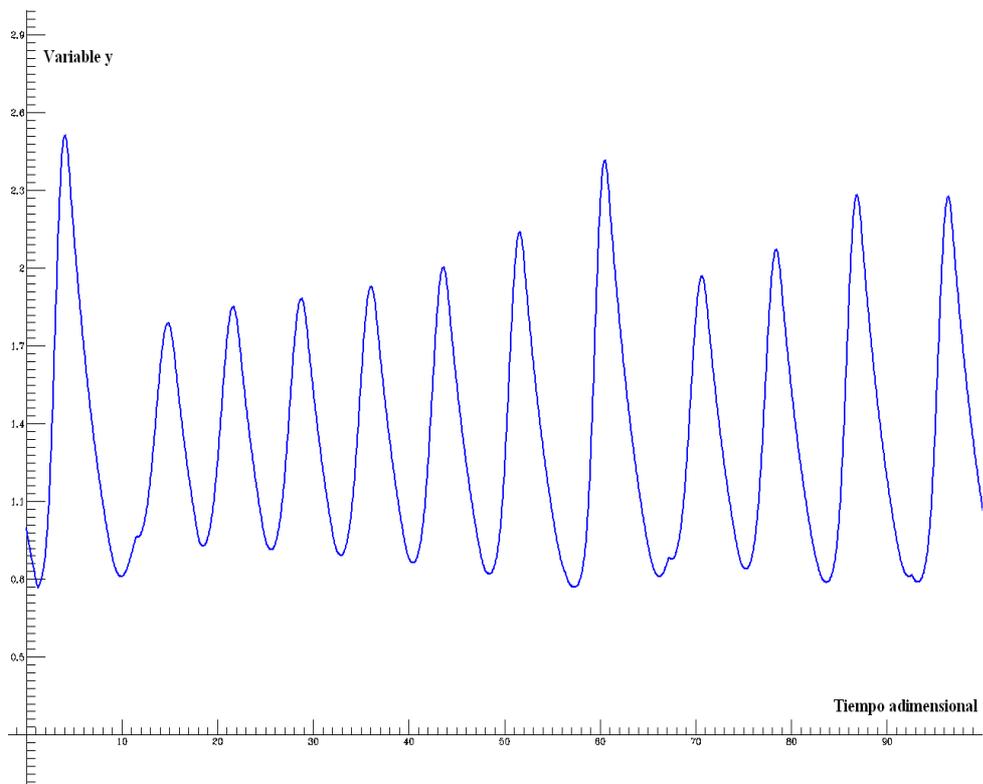


Figura 4.11: Respuesta temporal para  $K = 1,4$ .

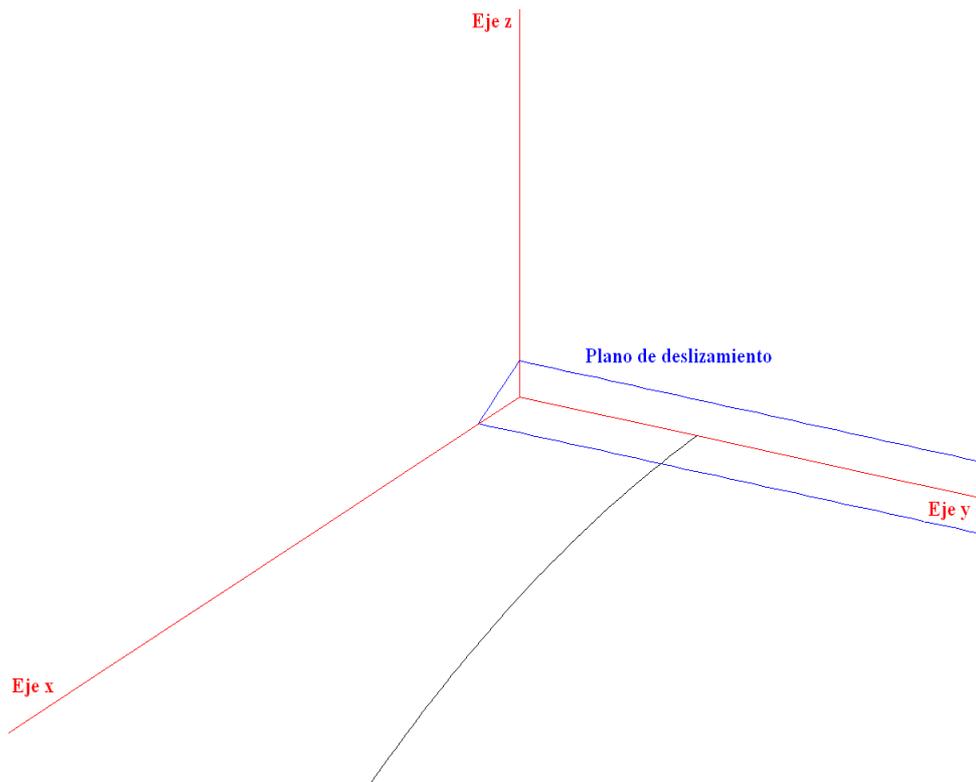


Figura 4.12: Dinámica para  $K = 1,5$ . El sistema no llega a conmutar cuando se parten de las condiciones de reposo.

