

# Análisis de bifurcaciones en convertidores electrónicos tipo BOOST con control por modos de deslizamiento (SMC)

Ezequiel Fernández Fernández

Diciembre 2008



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Convertidores electrónicos de potencia conmutados . . . . .	5
1.2. Modelado de sistemas conmutados . . . . .	6
1.3. Dinámica de deslizamiento. Clasificación de las bifurcaciones .	8
1.4. La Bifurcación de Hopf . . . . .	9
1.4.1. Ejemplo canónico de la bifurcación de Hopf . . . . .	11
1.4.2. La forma normal de Poincaré. . . . .	22
1.4.3. Caracterización de la bifurcación de Hopf en sistemas bidimensionales . . . . .	28
<b>2. Modelado del convertidor</b>	<b>31</b>
2.1. Descripción del circuito . . . . .	31
2.2. Ecuaciones de estado . . . . .	34
2.3. Control del convertidor por modos de deslizamiento . . . . .	38
2.3.1. Estrategias posibles de control . . . . .	39
2.3.2. Implementación física del control por modos de desliza- miento . . . . .	41
2.4. Análisis de los equilibrios . . . . .	45
2.5. Dominio de deslizamiento . . . . .	51
2.5.1. Caso $K > 1$ . . . . .	53
2.5.2. Caso $K = 1$ . . . . .	54
2.5.3. Caso $K < 1$ . . . . .	55
<b>3. Análisis de la bifurcación</b>	<b>59</b>
3.1. Introducción . . . . .	59
3.2. Caracterización de la bifurcación . . . . .	60
<b>4. Simulaciones y conclusiones</b>	<b>67</b>



# Capítulo 1

## Introducción

En este proyecto pretendemos poner de manifiesto la riqueza dinámica y la complejidad de comportamientos que pueden aparecer en un dispositivo aparentemente elemental como es un sencillo convertidor electrónico de tensión.

En el primer capítulo se introducen, por un lado, el modelado y control de convertidores electrónicos de potencia y, por otro lado, se repasan los conceptos relativos a la bifurcación de Hopf que necesitaremos en nuestro análisis posterior.

### 1.1. Convertidores electrónicos de potencia conmutados

La alimentación de los equipos electrónicos, dado que en su mayoría necesitan una tensión continua, es un problema que actualmente requiere seguir investigando en nuevas fuentes de alimentación y en el control de las mismas. Cuando la tensión que nos llega es alterna, como es el caso de la red eléctrica, lo que se suele hacer es utilizar un rectificador que nos convierta dicha tensión en continua, pero cuyo valor final no suele coincidir con las necesidades del circuito a alimentar. Lo mismo puede ocurrir cuando disponemos de una fuente de tensión continua.

Ante esta situación se hace necesario incluir una etapa intermedia entre la tensión de entrada que tenemos y el equipo electrónico al que queremos suministrar la energía. Una de las posibles soluciones a este problema es recurrir a los llamados convertidores electrónicos de potencia conmutados, más concretamente a aquellos que trabajan únicamente con corriente continua. Los hay de tres tipologías distintas: convertidores *buck*, que reducen el valor de la tensión, convertidores *boost*, que la elevan y en el cual centraremos

nuestro objeto de estudio, y convertidores *buck-boost*.

La ventaja que tiene el utilizar uno de estos convertidores frente a otras alternativas, como puede ser el emplear directamente un transformador de tensión, es que estos tipos de circuitos consiguen el objetivo que buscamos con una gran eficiencia y con un número reducido de componentes electrónicos, que resultan en un equipo de pequeño tamaño y reducido peso. Sin embargo, al ser, como su propio nombre indica, circuitos constituidos por elementos que conmutan durante su funcionamiento, la dinámica resultante y el control de la misma presentan una serie de problemas que necesitan ser estudiados.

Una de las estrategias típicas de control empleadas en este tipo de circuitos, según la bibliografía existente, es la modulación del ancho de pulso (*Pulse Modulation Width, PWM*). Otra posibilidad, introducida en los últimos años, es el uso de técnicas de control basadas en el control por modos deslizantes (*Sliding Mode Control, SMC*), que es la que en este proyecto se desarrollará y estudiará. Esta técnica se basa en introducir un plano de conmutación en el espacio de estados de manera que éste quede dividido en dos subespacios. En cada uno de ellos el sistema controlado presentará una dinámica distinta, por lo que cada vez que la trayectoria del sistema atraviese el plano de conmutación, se producirá una discontinuidad en el modelo del sistema.

## 1.2. Modelado de sistemas conmutados

Las fuentes electrónicas de potencia conmutadas son en esencia sistemas que presentan una dinámica no lineal. Para analizar y diseñar un sistema de control apropiado se necesita un modelo preciso que defina correctamente dicha dinámica. Existen diversos enfoques a la hora de definir dicho modelo como puede ser el empleo de modelos linealizados alrededor del punto de funcionamiento, de modelos no lineales promedio o los denominados modelos híbridos.

Los primeros sólo son válidos para pequeñas perturbaciones de la señal alrededor del punto de funcionamiento, mientras que los segundos promedian los efectos de la conmutación con respecto al periodo de conmutación y el conocimiento del comportamiento del circuito durante ese instante en el que el circuito conmuta se pierde. Además, en ninguno de estos dos tipos de modelos es posible recoger todos los posibles modos de conducción o de funcionamiento que va a presentar nuestro sistema. Por estas razones, en este proyecto la opción elegida es la de los modelos híbridos, que nos permitirán recoger en un solo sistema de ecuaciones diferenciales toda la dinámica del sistema. Estos modelos se caracterizan por la presencia simultánea de

variables continuas y discretas.

El modelo de nuestro sistema dinámico puede representarse mediante una función  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  describiéndolo en la forma

$$\dot{x} = f(x, u),$$

donde

$$\begin{aligned} u(x) &= u^+(x), \text{ si } h(x) > 0, \\ u(x) &= u^-(x), \text{ si } h(x) < 0. \end{aligned}$$

La función escalar  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  determina una superficie  $(n-1)$ -dimensional

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}.$$

Dicha superficie representa el lugar geométrico donde se produce la conmutación, también denominada superficie de deslizamiento, que divide al espacio de estado en dos regiones diferentes

$$\begin{aligned} \chi^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n : h > 0\}, \\ \chi^- &= \{x \in \mathbb{R}^n : h < 0\}, \end{aligned}$$

por lo que el sistema puede ser reescrito en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^+(x, u^+(x)), \text{ si } x \in \chi^+, \\ \dot{x} &= f^-(x, u^-(x)), \text{ si } x \in \chi^-. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En las ecuaciones (1.1) queda patente que el comportamiento dinámico del sistema está dictado por dos campos vectoriales distintos según la región del espacio de estados en la que nos encontremos. Como resultado, el sistema cambiará de estructura dependiendo del estado de las variables del sistema. Dicho cambio se producirá en los puntos de la superficie  $S$  donde el sistema se vuelve no derivable.

Sobre la superficie  $S$  existe una región, denominada dominio de deslizamiento, que se denotará por  $\Omega$  que tiene la particularidad de que sobre ella ambos campos vectoriales están dirigidos hacia la superficie de deslizamiento empujando ambos en sentidos opuestos. Como consecuencia el sistema no podrá abandonar el plano y se queda deslizando sobre el mismo. En dicha región, se cumplirá que los productos escalares

$$\begin{aligned} \langle \nabla h(x), f^+(x, u^+(x)) \rangle &< 0, \\ \langle \nabla h(x), f^-(x, u^-(x)) \rangle &> 0, \end{aligned}$$

tendrán un signo opuesto, indicando que el campo apunta hacia el plano de deslizamiento por ambos lados.

### 1.3. Dinámica de deslizamiento. Clasificación de las bifurcaciones

En el dominio de deslizamiento  $\Omega$ , al pertenecer a la superficie  $S$ , el campo vectorial  $f$  está indefinido, por lo que las ecuaciones (1.1) no describen la dinámica del sistema cuando se encuentra en modo de deslizamiento. Para determinar dicha dinámica existen varios procedimientos, como pueden ser el método de Continuación de Filippov, o el del Control Equivalente de Utkin, que es el que se va a seguir en este proyecto. Consiste en reemplazar la variable discontinua  $u$  del sistema híbrido que define nuestro sistema, por un control equivalente  $u_{eq}$  de manera que, para el campo resultante, se satisfaga la condición

$$\frac{d}{dt}[h(x(t))] = 0,$$

denominada condición de invarianza, cuando suponemos que la solución verifica la condición

$$h(x) = 0,$$

es decir, que nos encontramos en la superficie de deslizamiento.

La dinámica del modo de deslizamiento viene dada entonces por el sistema equivalente

$$\dot{x} = f(x, u_{eq}(x)) = f_{eq}(x).$$

Una vez obtenida esta dinámica, contamos con una definición del campo vectorial para todos los puntos del espacio de estados. Podemos ahora definir distintos tipos de puntos de equilibrio en función de que éstos se encuentren dentro de la superficie de deslizamiento o no. A los primeros se les llamará puntos de equilibrio de deslizamiento o puntos de pseudo-equilibrio y, a los segundos, puntos de equilibrio naturales o propiamente dichos. Para obtenerlos hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_{eq}(x) &= 0, \\ h(x) &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

para el caso del equilibrio de deslizamiento, y

$$\begin{aligned} f^+(x) &= 0, \\ f^-(x) &= 0, \end{aligned}$$

para los posibles equilibrios naturales.

A su vez, para cada tipo de equilibrio podemos distinguir entre puntos reales y puntos virtuales de equilibrio. Aquí el adjetivo virtual indica que, en

su caso, el punto puede organizar la dinámica de una determinada región del espacio de estados, sin ser un auténtico valor de equilibrio, por encontrarse fuera de dicha región. Así, para los equilibrios naturales tenemos que los puntos reales de equilibrio son los que cumplen

$$\begin{aligned} f^+(x) &= 0, \text{ con } x \in \chi^+, \\ f^-(x) &= 0, \text{ con } x \in \chi^-, \end{aligned}$$

mientras que los puntos de equilibrio virtual son aquellos en que

$$\begin{aligned} f^+(x) &= 0, \text{ con } x \in \chi^-, \\ f^-(x) &= 0, \text{ con } x \in \chi^+. \end{aligned}$$

Por su parte, para los puntos de equilibrio de deslizamiento, los puntos reales son aquellos que cumpliendo (1.2) pertenecen al dominio de deslizamiento  $\Omega$ , y los virtuales son aquellos que no pertenecen a  $\Omega$ .

Con todas estas definiciones, podemos hacer una clasificación del tipo de bifurcaciones que pueden presentarse en este tipo de sistemas. Así podemos distinguir tres tipos diferentes:

**Tipo I.** Bifurcaciones que implican el colapso o cambio de la estabilidad de los puntos de equilibrio (punto de silla, Hopf, etc.)

**Tipo II.** Bifurcaciones relacionadas con el cambio de carácter real/virtual de los puntos de equilibrio.

**Tipo III.** Desaparición o aparición de un dominio de deslizamiento.

El objetivo de este proyecto será llevar a cabo el análisis de la bifurcación de Hopf que se produce en el convertidor *boost* como consecuencia de variar la ganancia de control cuando se utiliza una estrategia de modos deslizantes, obteniendo su caracterización y las implicaciones que tiene desde el punto de vista del diseño y del comportamiento que presentará el circuito. Hemos de indicar, tal y como se hace referencia en [5] que los otros dos tipos de bifurcaciones también pueden presentarse en este tipo de circuitos.

## 1.4. La Bifurcación de Hopf

El comportamiento dinámico de muchos procesos físicos o de la ingeniería de sistemas viene modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales. En general estas ecuaciones son no lineales y, además, dependen de ciertos parámetros que representan los posibles valores de las magnitudes que fijan

el caso concreto de proceso o el control del sistema. La elección de los valores concretos de los parámetros del sistema determina los posibles estados de equilibrio del mismo y su modo de respuesta dinámica ante las pequeñas perturbaciones de cada uno de esos estados. Al evolucionar con continuidad los valores de los parámetros, los posibles estados de equilibrio van cambiando, de manera que pueden surgir algunos nuevos equilibrios o desaparecer otros o simplemente cambiar sus propiedades.

En términos generales, el análisis del carácter de un punto de equilibrio de un sistema dinámico —es decir la discusión de si es o no estable— se remite a la investigación de la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema linealizado. Básicamente el signo de la parte real de los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema linealizado es quien fija la estabilidad, que se garantiza cuando todos los valores propios tienen parte real negativa. En sistemas dinámicos dependientes de parámetros, el modelo linealizado también cambiará al modificarse los valores de dichos parámetros, de manera que el carácter de los correspondientes puntos de equilibrio puede resultar alterado. Los cambios cualitativos del carácter de un determinado punto de equilibrio son el resultado de lo que se denomina una bifurcación. Las posibilidades de bifurcación son muy variadas, y aquí nos limitaremos a apuntar las dos que se producen genéricamente en sistemas dependientes de un sólo parámetro.

En sistemas con un sólo parámetro la pérdida de estabilidad se produce genéricamente mediante dos posibles mecanismos netamente diferenciados. En el primero de ellos, un valor propio real inicialmente negativo evoluciona con el cambio de los valores del parámetro hacia el semiplano real positivo. Puede demostrarse que, también genéricamente, en este caso se pierde la estabilidad por la confluencia del punto de equilibrio estable (nodo) con otro inestable (silla). Este fenómeno se denomina por esta razón bifurcación silla-nodo, y no será aquí objeto de más comentarios. La segunda posibilidad aparece cuando la estabilidad se pierde como consecuencia de que un par de valores propios complejos conjugados atraviesan el eje imaginario con lo que el punto de equilibrio se vuelve inestable. En este caso, genéricamente se produce lo que se denomina una bifurcación de Hopf.

La característica esencial de este tipo de bifurcación es que, para valores del parámetro cercanos al valor de bifurcación, se produce la aparición de un ciclo límite del sistema en las cercanías del estado de equilibrio. Existen dos posibilidades diferentes, de propiedades y consecuencias prácticas muy distintas. En primer lugar el ciclo límite (que será inestable) puede coexistir con el punto de equilibrio estable, antes de que el parámetro alcance el valor de bifurcación. En este caso la bifurcación de Hopf se denomina subcrítica, y supone en la práctica una limitación del dominio de atracción del

punto de equilibrio. Como segunda posibilidad, el ciclo límite puede surgir una vez que se ha traspasado el valor de bifurcación. En este caso se habla de una bifurcación supercrítica, en la que el ciclo límite es estable. En este supuesto el ciclo constituye un atractor que mitiga la inestabilidad del punto de equilibrio.

La teoría de la bifurcación de Hopf es relativamente complicada. Vamos a intentar presentar, de manera simplificada pero completa, una derivación fundamentalmente heurística de las ideas y fórmulas esenciales que surgen en esta teoría.

La siguiente sección presenta en detalle un ejemplo elemental de sistema bidimensional en el que aparece una bifurcación de Hopf. El objetivo es familiarizar al lector con las ideas fundamentales y las diferentes propiedades de los dos tipos de bifurcación. Este ejemplo es importante porque el estudio del caso general se reduce en cierto modo a él, que actúa así de modelo canónico o paradigmático de la bifurcación de Hopf. Se desarrolla la reducción de un sistema plano a la denominada forma normal de Poincaré, con la que se puede tratar el caso de un sistema plano general, que se remite en esencia al ejemplo introductorio estudiado. Seguimos en estas secciones las ideas que ya fueron presentadas en el proyecto fin de carrera de P. Noguero [1]

### 1.4.1. Ejemplo canónico de la bifurcación de Hopf

Vamos a estudiar en detalle un ejemplo de sistema diferencial plano dependiente de un parámetro que presenta una bifurcación de Hopf. Consideremos el sistema dinámico bidimensional

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= g(x, y) = \omega_0 x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde la prima indica derivada respecto al tiempo, se supone que  $a$ ,  $b$  y  $\omega_0$  son tres valores reales fijos y que  $\mu$  es un parámetro real. Se supone además que  $\omega_0 > 0$ .

Para buscar los puntos de equilibrio que presenta este sistema, igualamos a cero las ecuaciones de nuestro sistema bidimensional (1.3), obteniendo un punto de equilibrio en el origen del plano. Para estudiar la estabilidad de este punto de equilibrio, debemos hallar los autovalores de este sistema. Por lo tanto, calculamos su matriz jacobiana.

$$\begin{aligned}
J(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mu + 3ax^2 + ay^2 - 2bxy & -\omega_0 + 2axy - bx^2 - 3by^2 \\ \omega_0 + 3bx^2 + by^2 + 2ayx & \mu + abxy + ax^2 + 3ay^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Si particularizamos esta matriz para el punto de equilibrio, se obtiene

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \mu & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu \end{bmatrix},$$

y ahora ya podemos calcular los autovalores, resolviendo la ecuación

$$\begin{vmatrix} \mu - \lambda & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Enseguida vemos que los valores propios son el par de números complejos conjugados  $\mu \pm i\omega_0$ , de manera que puede asegurarse que el origen es un punto de equilibrio estable si el parámetro  $\mu$  es negativo, e inestable si el parámetro  $\mu$  es positivo. Obviamente, el valor  $\mu = 0$  corresponde a una situación de bifurcación. La estabilidad del origen en este caso se estudiará posteriormente.

Vamos a comprobar que además de este punto de equilibrio el sistema presenta, para determinados valores del parámetro  $\mu$ , un ciclo límite, que de hecho es un círculo centrado en el origen. Introduciendo la función compleja

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{1.4}$$

es inmediato escribir que

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= x - iy, \\
|z|^2 &= z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Esta variable satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} = \\
&= \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) + i [\omega_0 x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2)] = \\
&= \mu(x + ib) + i\omega_0(x + iy) + (x^2 + y^2) [(ax - by) + i(bx + ay)],
\end{aligned}$$

y por lo tanto podemos reescribir el sistema (1.3) en la forma

$$\dot{z} = \mu z + i\omega_0 z + (a + bi)z |z|^2.$$

Hemos comprobado así que el sistema se puede escribir, fácilmente, de la siguiente manera

$$z'(t) = (\mu + i\omega_0) z + (a + ib) z |z|^2. \quad (1.5)$$

Si usamos la forma polar

$$z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}, \quad (1.6)$$

se tiene que

$$z'(t) = \rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)e^{i\theta(t)}i\theta'(t). \quad (1.7)$$

Sustituimos ahora la ecuación (1.6) en la ecuación (1.5) y obtenemos

$$z'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t)e^{i\theta(t)} + (a + ib)\rho(t)^3e^{i\theta(t)}, \quad (1.8)$$

y si igualamos las ecuaciones (1.7) y la (1.8) llegamos a que

$$\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)e^{i\theta(t)}i\theta'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t)e^{i\theta(t)} + (a + ib)\rho(t)^3e^{i\theta(t)},$$

$$\rho'(t) + \rho(t)i\theta'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t)e^{i\theta(t)} + (a + ib)\rho(t)^3.$$

Si identificamos por separado la parte real y la imaginaria, resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \mu\rho + a\rho^3 \quad (\text{evolución del radio polar}), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_0 + b\rho^2 \quad (\text{evolución del ángulo polar}). \end{aligned}$$

La primera ecuación (que evidentemente sólo tendrá sentido para  $\rho > 0$ ) no depende del ángulo polar, por lo tanto está desacoplada y puede estudiarse por separado.

Para encontrar los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial del radio polar, debemos igualar dicha ecuación a cero. De esta manera llegamos a

$$\mu\rho + a\rho^3 = 0 \quad \iff \quad \rho(\mu + a\rho^2) = 0,$$

y obtenemos claramente un punto de equilibrio en  $\rho = 0$  para cualquier valor de  $\mu$ , que se corresponde con el punto de equilibrio existente en el origen del

sistema original. Además, la ecuación presenta en ciertos casos un segundo punto de equilibrio, que viene dada por la solución positiva de la ecuación

$$\mu + a\rho^2 = 0 ,$$

en el supuesto de que esta ecuación tenga raíces positivas. Al despejar, esta solución viene dada por

$$\rho(\mu) = \sqrt{-\frac{\mu}{a}},$$

y existe como solución real cuando el radicando es positivo, es decir, cuando el producto  $a\mu$  es negativo.

La existencia de este punto de equilibrio  $\rho(\mu)$  para el radio polar supone que en el sistema original existe un círculo estacionario centrado en el origen, cuyo radio es este valor de equilibrio  $\rho(\mu)$ . Esta órbita del sistema plano será estable o inestable según que el punto de equilibrio de la ecuación diferencial del radio polar sea estable o inestable. Para analizar la estabilidad del ciclo límite de radio  $\rho(\mu)$ , bastará analizar el signo de la derivada, que viene dada por

$$\frac{d}{d\rho} (\mu\rho + a\rho^3) \Big|_{\rho=\sqrt{-\frac{\mu}{a}}} = \mu + 3a\left(-\frac{\mu}{a}\right) = -2\mu.$$

Se obtiene así que el punto de equilibrio, y por tanto el ciclo límite asociado, es estable cuando  $\mu > 0$  e inestable cuando  $\mu < 0$ .

Las figuras 1.1 a 1.4 representan los diagramas de bifurcación en función del signo de la constante  $a$ . El caso  $a > 0$  corresponde a una bifurcación subcrítica (el ciclo límite existe sólo si  $\mu < 0$  y es inestable) y el caso  $a < 0$  a una supercrítica (ahora el ciclo límite existe cuando  $\mu > 0$  y es estable). Si representamos el ciclo límite en el espacio  $(x, y, \mu)$  para cada valor del parámetro  $\mu$ , obtenemos la familia de ciclos límite que forman una superficie parabólica, como podemos apreciar en las figuras 1.1 y 1.3. Esta misma representación la podemos hacer sobre el plano  $(\rho, \mu)$ , obteniendo para valores de  $a > 0$  la figura 1.2, donde la línea de círculos en blanco representa la variación con  $\mu$  del radio de la órbita inestable en la bifurcación subcrítica, y para valores de  $a < 0$  la figura 1.4, donde la línea de círculos negros representa la variación con  $\mu$  del radio del ciclo límite estable en la bifurcación supercrítica.

Las ecuaciones diferenciales del sistema en coordenadas polares se pueden integrar con relativa facilidad, obteniéndose con ello las soluciones del sistema explícitamente. Para simplificar la exposición supondremos que  $b = 0$  y  $\omega_0 = 1$ , lo que supone prácticamente que  $\theta = t$ . El caso general se trata de modo idéntico.

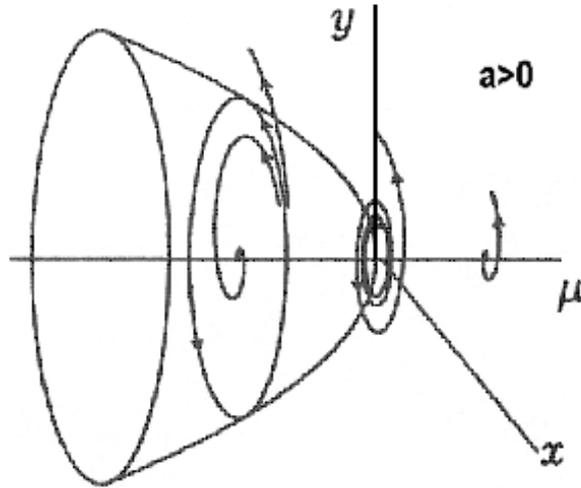


Figura 1.1: Bifurcación de Hopf subcrítica en el espacio  $(x, y, \mu)$ .

Si la condición inicial es  $\rho(0) = \rho_0 > 0$ , separando variables e integrando se tiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \int_0^t dt.$$

Para realizar el cálculo, obtenemos la descomposición del integrando del primer miembro en fracciones simples, lo que conduce a la igualdad

$$\frac{1}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{a\rho}{\mu + a\rho^2} \right).$$

Si utilizamos esta expresión, se tiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left[ \log \rho - \frac{1}{2} \log |\mu + a\rho^2| \right]_{\rho_0}^{\rho} = \frac{1}{\mu} \left[ \log \frac{\rho}{|\mu + a\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho_0}^{\rho}$$

y obtenemos entonces

$$\frac{1}{\mu} \left[ \log \frac{\rho}{|\mu + a\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho_0}^{\rho} = t,$$

de donde se deduce que la dependencia de  $\rho$  y  $t$  viene establecida por la ecuación

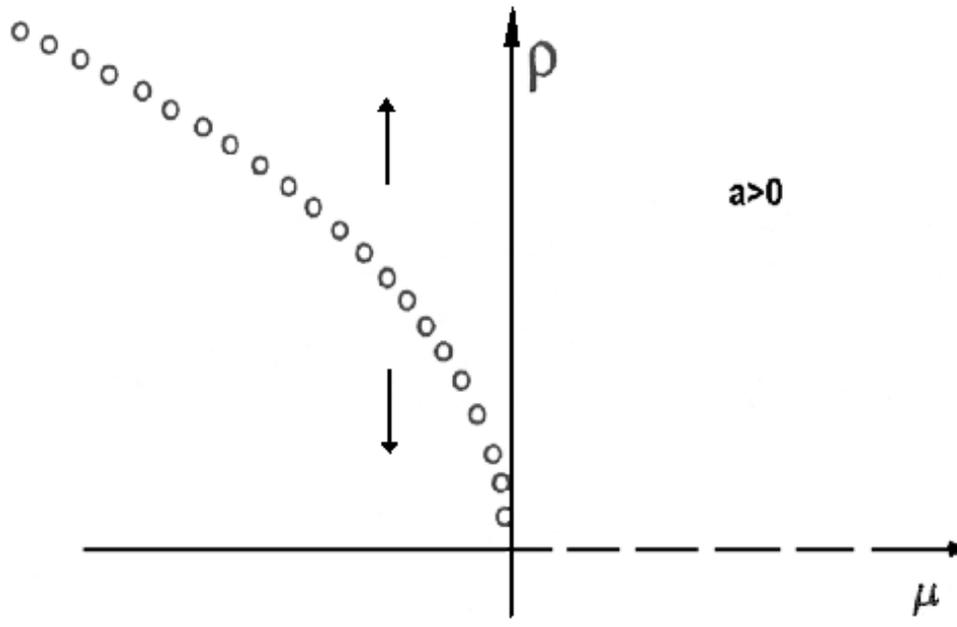


Figura 1.2: Diagrama de una bifurcación de Hopf subcrítica

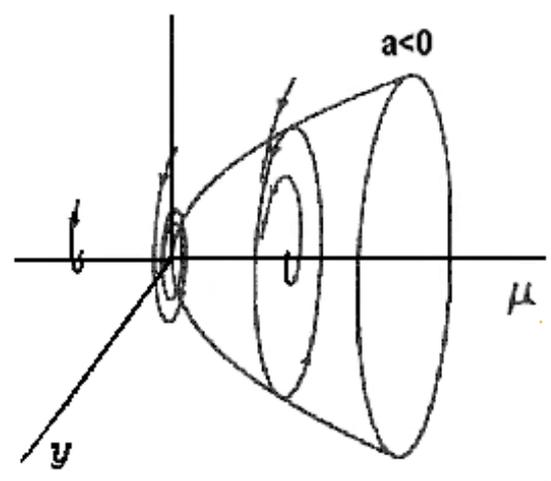


Figura 1.3: Bifurcación de Hopf supercrítica en el espacio  $(x, y, \mu)$

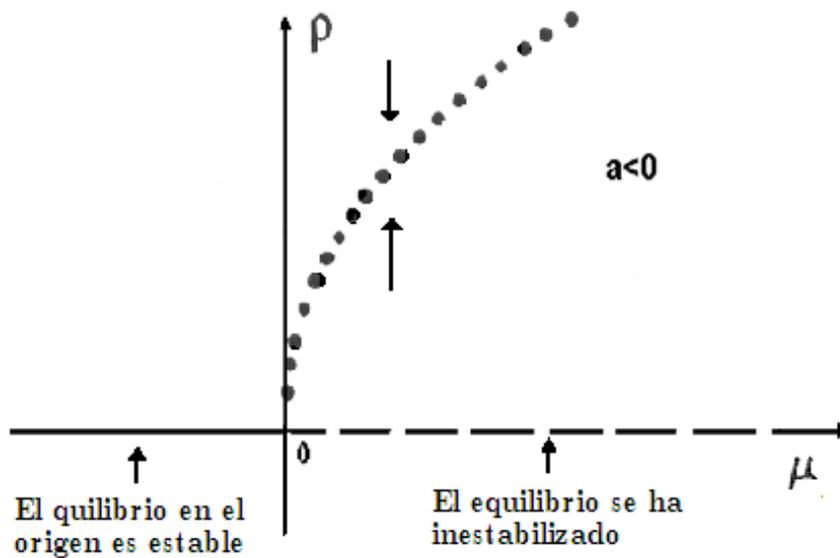


Figura 1.4: Diagrama de una bifurcación supercrítica de Hopf

$$\frac{\rho^2}{|\mu + a\rho^2|} = \frac{\rho_0^2}{|\mu + a\rho_0^2|} e^{2\mu t}.$$

Para analizar las soluciones, es conveniente distinguir dos casos, determinados por el signo del producto  $a\mu$ .

**Caso 1**  $a\mu > 0$

En este caso el signo de  $\mu$  coincide con el de  $a$  y, como ya hemos comentado anteriormente, no existe ciclo límite. Haciendo  $\frac{\mu}{a} = r^2$ , la relación entre  $\rho$  y  $t$  se puede escribir claramente como

$$\frac{\rho^2}{\mu + a\rho^2} = \frac{\rho_0^2}{\mu + a\rho_0^2} e^{2\mu t},$$

despejando  $\rho$  se deduce la expresión de su dependencia explícita de  $t$ , que es como sigue

$$\rho = \frac{\rho_0 e^{\mu t}}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0}{r^2} (1 - e^{2\mu t})}}.$$

Las soluciones presentan entonces un comportamiento radicalmente diferente según que el parámetro  $\mu$  sea negativo o positivo.

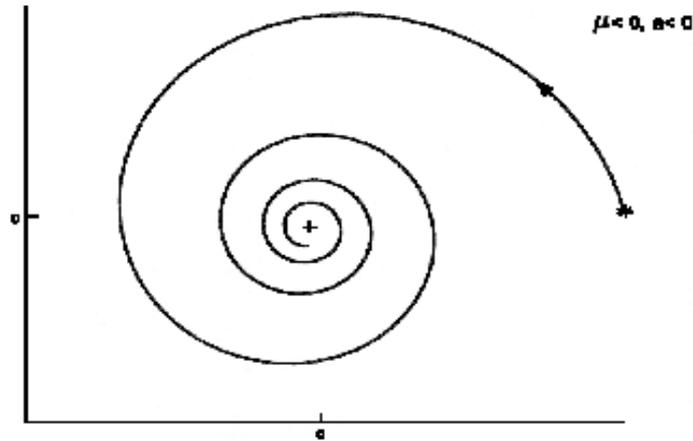


Figura 1.5: Origen estable. No hay ciclo límite

En el primer caso, es decir, si  $\mu < 0$ , es claro que el radicando del denominador es siempre positivo, por lo que la solución está definida en todo el intervalo  $[0, +\infty)$ . Además, se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0,$$

es decir, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable cuyo dominio de atracción es todo el plano. La figura 1.5 presenta el aspecto de una trayectoria en este caso.

En cambio, cuando  $\mu > 0$  el radicando sólo tiene sentido en el intervalo  $[0, t_\infty]$ , siendo

$$t_\infty = \frac{1}{2\mu} \log \left( 1 + \frac{r^2}{\rho_0^2} \right),$$

y además se tiene

$$\lim_{t \rightarrow t_\infty} \rho = \infty,$$

por lo tanto la solución se hace no acotada en un tiempo finito. Esta situación indica que el origen es un punto de equilibrio inestable. La figura 1.6 representa una trayectoria típica del sistema en este supuesto.

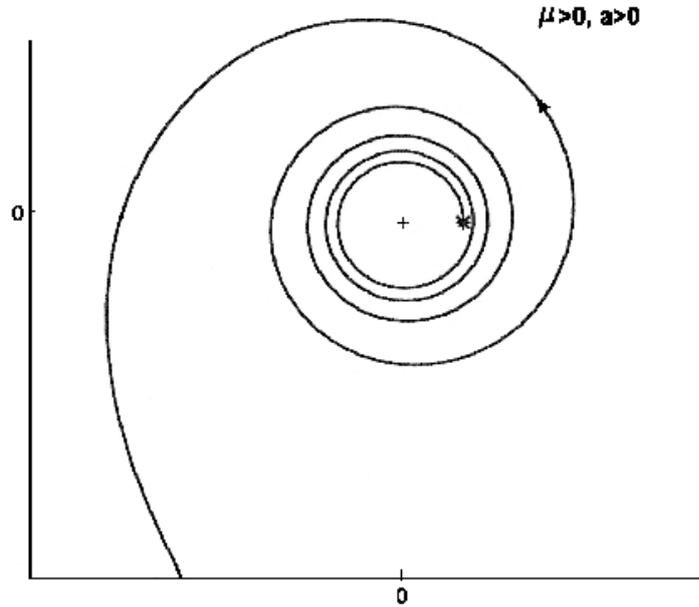


Figura 1.6: Origen inestable. No existe ciclo límite

### Caso 2 $a\mu < 0$

En este supuesto, los signos de  $\mu$  y  $a$  son diferentes y, como antes apuntamos, existe un ciclo límite. Poniendo  $\frac{\mu}{a} = -r^2$ , el ciclo límite es un círculo centrado en el origen de radio  $r$ . La relación entre  $\rho$  y  $t$  se escribe en la forma

$$\frac{\rho^2}{|\rho^2 - r^2|} = \frac{\rho_0^2}{|\rho_0^2 - r^2|} e^{2\mu t}.$$

Dado que la ecuación presenta un punto de equilibrio en  $\rho = r$ , es claro que si  $\rho_0 > r$  se cumplirá que  $\rho > r$  para todo  $t > 0$ . Alternativamente, si  $\rho_0 < r$  también será  $\rho < r$  para todo  $t > 0$ . Con esta observación, se deduce que la anterior relación entre  $\rho$  y  $t$  se puede escribir en la forma

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - r^2} = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - r^2} e^{2\mu t},$$

puesto que las diferencias  $\rho^2 - r^2$ , y  $\rho_0^2 - r^2$  tienen en todo caso el mismo signo. Despejando en esa ecuación el valor de  $\rho$ , se obtiene la fórmula

$$\rho = \frac{\rho_0 e^{\mu t}}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (e^{2\mu t} - 1)}}.$$

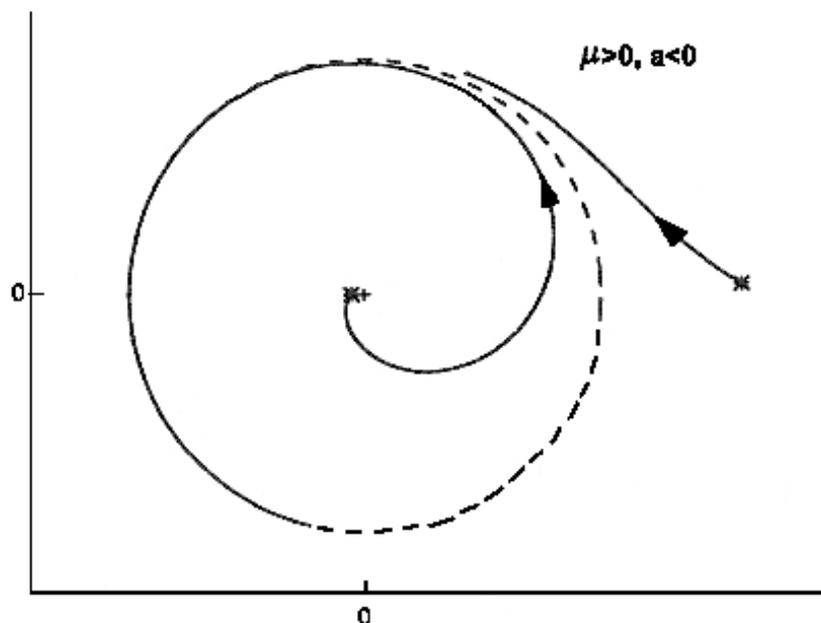


Figura 1.7: Origen inestable. Existe ciclo límite estable.

De nuevo, el comportamiento de la solución es diferente según que el valor del parámetro  $\mu$  sea positivo o negativo.

Si  $\mu > 0$ , es claro que el radicando del denominador es siempre positivo, cualquiera que sea el valor de  $\rho \neq r$ ; además, es fácil comprobar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = r.$$

En el sistema original, esto viene a decir que el origen del sistema es un punto de equilibrio inestable, el cual se encuentra rodeado por una órbita cerrada aislada (ciclo límite), que es única y estable. El ciclo límite es un círculo de radio  $\rho(\mu) = r$  cuyo dominio de atracción es todo el plano, salvo el origen que es un punto de equilibrio inestable. Todas las órbitas que empiezan fuera o dentro del ciclo límite, excluyendo el origen, tienden a este ciclo cuando  $t \rightarrow \infty$ . Este cambio de comportamiento al inestabilizarse el origen y llegar a una oscilación autosostenida es el típico en una bifurcación de Hopf supercrítica. La figura 1.5 presenta un par de trayectorias del sistema, una que comienza dentro del ciclo límite y la otra en su exterior.

En el supuesto de que  $\mu < 0$  es necesario distinguir los dos casos  $\rho_0 < r$  y  $\rho_0 > r$ , es decir, que el punto inicial esté situado dentro o fuera del ciclo límite. Si  $\rho_0 > r$ , es claro que el radicando del denominador siempre toma

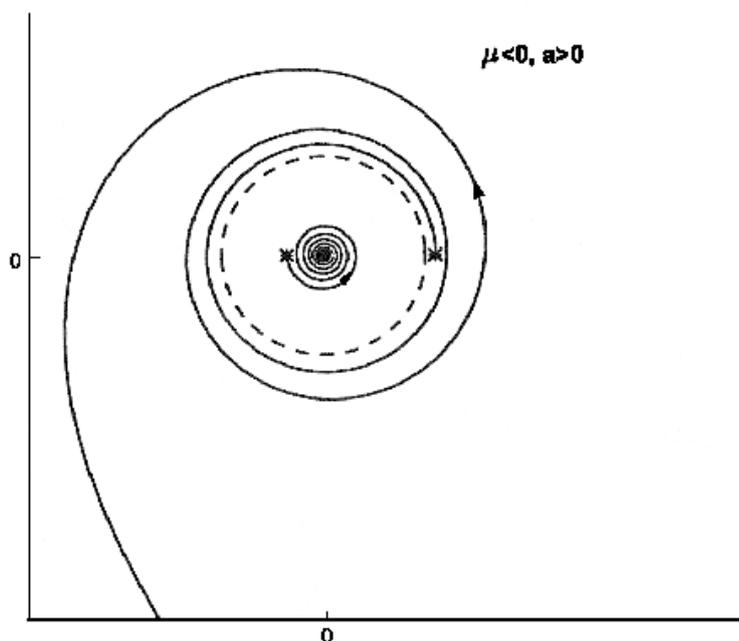


Figura 1.8: Origen estable. Existe ciclo límite inestable

valores positivos, con lo que la solución existe para todo  $t > 0$  y además se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0.$$

En cambio si  $\rho_0 > r$  la solución sólo existe mientras

$$t \leq \frac{1}{2\mu} \log \left( 1 - \frac{r^2}{\rho_0^2} \right).$$

Además se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = +\infty.$$

Esta situación se corresponde con el hecho de que el origen es un punto de equilibrio estable cuyo dominio de atracción es el círculo centrado en el mismo de radio  $r$ , y que este círculo es un ciclo límite inestable. La figura 1.8 adjunta representa dos soluciones de este caso.

### 1.4.2. La forma normal de Poincaré.

Para esta sección seguiremos el desarrollo que aparece en el Capítulo 3 de [3]. Consideremos el sistema dinámico bidimensional

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{f}(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= \tilde{g}(x, y, \mu)\end{aligned}\tag{1.9}$$

del que suponemos que el origen del plano es un punto de equilibrio para todo  $\mu$ . En el caso de que no fuese así, sino que nuestro punto de equilibrio fuese un punto genérico  $P \equiv (x_0(\mu), y_0(\mu))$ , trasladaríamos dicho punto al origen del plano para hacer más sencillos los cálculos posteriores. Para realizar esta traslación realizaríamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x - x_0(\mu) \longrightarrow x = \hat{x} + x_0(\mu) \longrightarrow \dot{x} = \hat{x}', \\ \hat{y} &= y - y_0(\mu) \longrightarrow y = \hat{y} + y_0(\mu) \longrightarrow \dot{y} = \hat{y}'.\end{aligned}$$

Si sustituimos este cambio en el sistema original, obtendríamos

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= \tilde{f}_\mu(\hat{x}, \hat{y}, \mu) \\ \hat{y}' &= \tilde{g}_\mu(\hat{x}, \hat{y}, \mu),\end{aligned}$$

cumpléndose que en este sistema el origen del plano es un punto de equilibrio.

Volvamos a nuestro sistema (1.9) del que suponemos que el origen del plano es un punto de equilibrio. Aceptemos además que la matriz jacobiana del sistema en el origen, es decir, la matriz

$$J(0, 0, \mu) := \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(0, 0, \mu) & \tilde{f}_y(0, 0, \mu) \\ \tilde{g}_x(0, 0, \mu) & \tilde{g}_y(0, 0, \mu) \end{bmatrix},$$

admite como valores propios un par de números complejos conjugados  $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ , con

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= 0, \\ \alpha'(0) &\neq 0, \\ \omega(0) &= \omega_0 > 0.\end{aligned}$$

En este caso, mediante un simple cambio lineal de variables, la parte lineal del sistema se puede reducir a la forma canónica real de Jordan, es decir,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + f_1(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + f_2(x, y, \mu),\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde las funciones  $f_1$  y  $f_2$  recogen los términos de orden superior al primero. Podemos reescribir dicho sistema en la forma

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(x, \mu), \quad (1.11)$$

con  $A(\mu)x$  la parte lineal del sistema y  $F(x, \mu)$  la parte no lineal.

Si introducimos la variable compleja  $z$ , veremos ahora que el sistema puede ser expresado para valores de  $|\alpha|$  suficientemente pequeños como

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + g(z, \bar{z}, \mu), \quad (1.12)$$

donde  $g = O(|z|^2)$  es una función suave de  $(z, \bar{z}, \mu)$ . Así, llamemos  $q(\mu) \in \mathbb{C}^2$  a un autovector de  $A(\mu)$  correspondiente al autovalor  $\lambda(\mu)$

$$A(\mu)q(\mu) = \lambda(\mu)q(\mu),$$

y  $p(\mu) \in \mathbb{C}^2$  a un autovector de la matriz traspuesta  $A^T(\mu)$  correspondiente al autovalor  $\bar{\lambda}(\mu)$

$$A^T(\mu)p(\mu) = \bar{\lambda}(\mu)p(\mu).$$

Dichos autovectores siempre se pueden escoger tal que queden normalizados, es decir, que

$$\langle p(\mu), q(\mu) \rangle = 1,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa el producto escalar estandar en  $\mathbb{C}^2$

$$\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2.$$

Entonces, cualquier vector  $x \in \mathbb{R}^2$  puede ser representado de manera unívoca para valores pequeños de  $\mu$  como

$$x = zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu),$$

donde  $z$  viene dado por la expresión

$$z = \langle p(\mu), x \rangle. \quad (1.13)$$

En efecto, para verificar la expresión (1.13) nos basta con demostrar que el producto escalar  $\langle p(\mu), \bar{q}(\mu) \rangle = 0$ .

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, q \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle,$$

y, por lo tanto,

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda}) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Ahora bien, como  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ , ya que para todo valor suficientemente pequeño de  $|\mu|$  tenemos que  $\omega(\mu) > 0$ , entonces la única posibilidad es que  $\langle p(\mu), \bar{q}(\mu) \rangle = 0$ .

La variable  $z$ , usando (1.11) y (1.13), cumplirá la ecuación

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle,$$

de manera que, si definimos

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle,$$

llegamos a (1.12) como se afirmó anteriormente.

El desarrollo en serie de Taylor de la función  $g(z, \bar{z}, \mu)$  puede escribirse en la forma

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\mu) z^k \bar{z}^l,$$

donde

$$g_{kl}(\mu) = \left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle \right|_{z=0},$$

para  $k+l \geq 2$ , donde  $k, l = 0, 1, \dots$

Supuesto que  $\mu = 0$ , la función  $F(x, \mu)$  de (1.11) está representada por

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

donde  $B(x, y)$  y  $C(x, y, u)$  representan funciones vectoriales multilineales simétricas de  $x, y, u \in \mathbb{R}^2$ . Dichas funciones vienen dadas por las expresiones

$$B(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \left[ \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right]_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2,$$

$$C(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \left[ \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \right]_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2.$$

Entonces,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

donde  $q = q(0)$ ,  $p = p(0)$ , por lo que los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor  $g_{kl}$ , con  $k+l = 2$ , de los términos cuadráticos de  $g(z, \bar{z}, 0)$  pueden ser expresados por

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle,$$

$$g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

De manera similar podemos obtener que

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle.$$

La ecuación (1.12) se puede escribir entonces

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^{-l} + O(|z|^4),$$

donde  $\lambda = \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , y  $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$ . Ahora, es posible probar la existencia de un cambio no lineal de variable de la forma

$$z = w + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sum_{k+l=n} d_{kl} w \bar{w}^l \right] = w + T.O.S.$$

que reduce la ecuación anterior a la expresión

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 |w|^2 w + O(|w|^4).$$

Para comprender la mecánica de esta transformación, consideremos el cambio de variable inverso, que se puede escribir también en la forma

$$w = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sum_{k+l=n} \delta_{kl} z^k \bar{z}^l \right],$$

sin más que invertir el desarrollo anterior. Derivando en ambos miembros de esta expresión, se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dz}{dt} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sum_{k+l=n} \delta_{kl} \left( k z^{k-1} \bar{z}^l \frac{dz}{dt} + l z^k \bar{z}^{l-1} \frac{d\bar{z}}{dt} \right) \right].$$

Utilizando ahora la ecuación diferencial (1.12), se puede escribir que

$$\begin{aligned} \dot{w} = & \lambda z + g(z, \bar{z}) + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sum_{k+l=n} \delta_{kl} \left( \lambda n z^k \bar{z}^{-l} + k z^{k-1} \bar{z}^l g(z, \bar{z}) + l z^k \bar{z}^{l-1} \overline{g(z, \bar{z})} \right) \right], \end{aligned}$$

y si sustituimos  $g(z, \bar{z}, \mu)$  por su desarrollo en serie y ordenamos en potencias crecientes de  $z$  y  $\bar{z}$ , se deduce que

$$\dot{w} = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} \delta'_{kl} z^k \bar{z}^l.$$

Cambiamos ahora  $z$  y  $\bar{z}$  por su expresión en términos de  $w$  y  $\bar{w}$  y reordenemos de nuevo. De esta forma se consigue expresar la derivada de  $w$  en términos de las potencias de la propia  $w$  y su conjugada mediante un desarrollo de la forma

$$\dot{w} = \lambda w + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sum_{k+l=n} \gamma_{kl} w^k \bar{w}^l \right].$$

Si desarrollamos ahora los cálculos pertinentes, y elegimos convenientemente los coeficientes  $d_{ij}$  que actúan a modo de parámetros del cambio de variables, se puede comprobar que se consigue que se anulen varios de los primeros coeficientes  $\gamma_{kl}$ ; concretamente, se puede obtener que

$$\begin{aligned} \gamma_{20} &= 0, & \gamma_{11} &= 0, & \gamma_{02} &= 0, \\ \gamma_{30} &= 0, & \gamma_{12} &= 0, & \gamma_{03} &= 0. \end{aligned}$$

De este modo, poniendo  $c_1 = \gamma_{21}$ , la ecuación se puede reducir a

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \sum_{n=4}^{\infty} \left[ \sum_{k+l=n} \gamma_{kl} w^k \bar{w}^l \right],$$

que es de la forma antes indicada.

Si aceptamos la existencia de ese cambio de variable, es posible deducir con relativa facilidad la expresión del coeficiente  $c_1$  en términos de los coeficientes  $g_{kl}$  del desarrollo de la función  $g(z, \bar{z}, \mu)$ . Para simplificar, si representamos el cambio de variable en la forma

$$z = w + \phi(w, \bar{w}),$$

y derivamos ambos miembros de esta expresión, resulta la igualdad

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dw}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{dw}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{w}} \frac{d\bar{w}}{dt}.$$

Al sustituir las derivadas de  $z$  y  $w$  por sus expresiones y emplear el cambio de variable realizado, la última ecuación se escribe en la forma

$$\begin{aligned} & \lambda [w + \phi(w, \bar{w})] + g \left( w + \phi(w, \bar{w}), \bar{w} + \overline{\phi(w, \bar{w})} \right) \\ &= \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4) + \phi_w(w, \bar{w}) [\lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4)] + \\ & \quad + \phi_{\bar{w}}(w, \bar{w}) [\bar{\lambda} \bar{w} + \bar{c}_1 \bar{w}^2 w + O(|w|^4)] = \\ &= \lambda w + \lambda w \phi_w(w, \bar{w}) + \bar{\lambda} \bar{w} \phi_{\bar{w}}(w, \bar{w}) + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4). \end{aligned}$$

La identificación de los términos de primer grado de ambos miembros conduce a la igualdad trivial  $\lambda w = \lambda w$ . Igualando las respectivas sumas de los términos de segundo grado, se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} & \lambda(d_{20}w^2 + d_{11}w\bar{w} + d_{02}\bar{w}^2) + (g_{20}w^2 + g_{11}w\bar{w} + g_{02}\bar{w}^2) = \\ & = \lambda w(2d_{20}w + d_{11}\bar{w}) + \bar{\lambda}\bar{w}(d_{11}w + 2d_{02}\bar{w}). \end{aligned}$$

Identificando coeficientes de monomios del mismo grado resultan las expresiones

$$d_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad d_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad d_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}.$$

Procediendo de un modo semejante con los términos de tercer grado, se obtiene la identidad

$$\begin{aligned} & \lambda(d_{30}w^3 + d_{21}w^2\bar{w} + d_{12}w\bar{w}^2 + d_{03}\bar{w}^3) + 2g_{20}w(d_{20}w^2 + d_{11}w\bar{w} + d_{02}\bar{w}^2) \\ & + g_{11} [w(\bar{d}_{20}\bar{w}^2 + \bar{d}_{11}w\bar{w} + \bar{d}_{02}w^2) + \bar{w}(d_{20}w^2 + d_{11}w\bar{w} + d_{02}\bar{w}^2)] + \\ & + 2g_{20}\bar{w}(\bar{d}_{20}\bar{w}^2 + \bar{d}_{11}w\bar{w} + \bar{d}_{02}w^2) + g_{30}w^3 + g_{21}w^2\bar{w} + g_{12}w\bar{w}^2 + g_{03}\bar{w}^3 \\ & = c_1w^2\bar{w} + \lambda w(3d_{30}w^2 + 2d_{21}w\bar{w} + d_{12}\bar{w}^2) + \\ & + \bar{\lambda}\bar{w}(d_{21}w^2 + 2d_{12}w\bar{w} + 3d_{03}\bar{w}^2). \end{aligned}$$

Identificando los términos de  $w^2\bar{w}$  en los dos miembros de esta igualdad, se obtiene que

$$\gamma = 2g_{20}d_{11} + g_{11}(\bar{d}_{11} + d_{20}) + 2g_{20}\bar{d}_{02} + g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})d_{21}.$$

Obsérvese que en la expresión de este coeficiente  $c_1$  interviene el coeficiente  $d_{21}$  del cambio de variable, que –no estando sometido a restricción alguna por el resto de las identificaciones de coeficientes– se puede elegir arbitrariamente. La elección más sencilla es  $d_{21} = 0$ , con la que se obtiene

$$c_1 = 2g_{20}d_{11} + g_{11}(\bar{d}_{11} + d_{20}) + 2g_{02}\bar{d}_{02} + g_{21}.$$

Sustituyendo las expresiones de los coeficientes  $d_{20}$ ,  $d_{11}$  y  $d_{02}$ , antes obtenidas, resulta

$$c_1 = \frac{2\lambda + \bar{\lambda}}{|\lambda|^2} g_{20}g_{11} + \frac{1}{\lambda} |g_{11}|^2 + \frac{2}{2\lambda - \bar{\lambda}} |g_{02}|^2 + g_{21}$$

En particular, que es el caso de interés para la bifurcación de Hopf, si  $\lambda = i\omega_0$  resulta la expresión

$$c_1 = \frac{1}{i\omega_0} \left[ |g_{11}|^2 + \frac{2}{3} |g_{02}|^2 - g_{20}g_{11} \right] + g_{21}.$$

### 1.4.3. Caracterización de la bifurcación de Hopf en sistemas bidimensionales

Veremos ahora que con la información anterior ya tenemos todos los elementos para saber si la bifurcación es subcrítica o supercrítica, es decir, para caracterizar el tipo de bifurcación de Hopf con la que nos encontramos.

Consideremos la ecuación

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\mu) + i\omega(\mu))w + c_1(\mu)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

donde  $\alpha(0) = 0$ , y  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ .

Supongamos que  $\alpha'(0) \neq 0$  y  $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$ , entonces la ecuación puede ser transformada en la forma

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

donde  $u$  es una nueva coordenada compleja, y  $\theta, \beta$  son el nuevo tiempo y el nuevo parámetro respectivamente, y  $s = \text{sign}(\text{Re}(c_1(0))) = \pm 1$ .

Para conseguir dicha transformación, en primer lugar se realiza un escalado lineal de tiempo

$$\tau = \omega(\mu)t.$$

Al ser  $\omega(\alpha) > 0$  para  $|\alpha|$  suficientemente pequeño la dirección del tiempo se conserva. Entonces, nos queda

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + k_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

donde

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}, \\ k_1(\beta) &= \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}. \end{aligned}$$

La segunda transformación consiste en un cambio de variable temporal no lineal en la forma  $\theta = \theta(\tau, \beta)$ , de manera que

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|\omega|^2)d\tau,$$

con  $e_1(\beta) = \text{Im}(d_1(\beta))$ . El resultado de aplicar dicho cambio de variable temporal es

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

donde  $l_1(\beta) = \operatorname{Re}(k_1(\beta)) - \beta e_1(\beta)$  es real, y

$$l_1(0) = \frac{\operatorname{Re}(c_1(0))}{\omega(0)}. \quad (1.14)$$

Por último, se realiza el cambio lineal de variable compleja

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

que es posible dado que  $\operatorname{Re}(c_1(0)) \neq 0$  y, por lo tanto,  $l_1(0) \neq 0$ . La ecuación queda entonces

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} u |u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su |u|^2 + O(|u|^4),$$

con  $s = \operatorname{sign}(l_1(0)) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(c_1(0)))$ , y donde a la función escalar  $l_1(0)$  se la denomina primer coeficiente de Lyapunov. Este coeficiente, a la vista del siguiente resultado, permite completar el análisis.

**Teorema (Cfr. Theorem 3.3, p. 98 de [3]).** *Supongamos que el sistema de ecuaciones diferenciales bi-dimensional*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

*tiene, para el punto de equilibrio en  $x = 0$  y para valores de  $|\mu|$  suficientemente pequeños, los autovalores*

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

*donde  $\alpha(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ . Si se cumple que*

$$\begin{aligned} l_1(0) &\neq 0, \text{ donde } l_1 \text{ es el primer coeficiente de Liapunov,} \\ \alpha'(0) &\neq 0, \text{ (condición de transversalidad),} \end{aligned}$$

*entonces el sistema puede ser expresado, mediante un cambio de variables, como*

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4). \quad (1.15)$$

*donde el signo  $+$  ó  $-$ . coincide con el signo de  $l_1(0)$ .*

Además, en la expresión (1.15) los términos de orden 4 pueden despreciarse cuando nos movemos cerca del origen.

Llegados a este punto ya poseemos todas las herramientas para caracterizar una bifurcación de Hopf, puesto que (1.15) es ya equivalente a la forma canónica (1.3), donde  $\mu = \beta$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $a = \pm 1$  (dependiendo del signo de  $l_1(0)$ ) y  $b = 0$ . En primer lugar se calcularía la forma normal de Poincaré, para luego, una vez comprobado que se cumple la condición de transversalidad, calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de la función  $g(z, \bar{z}, \mu)$  necesarios para obtener el coeficiente  $c_1(0)$ . Éste nos servirá para determinar el signo del primer coeficiente de Lyapunov  $l_1(0)$  empleando la expresión (1.14), el cual nos determinará el carácter de la bifurcación.

En definitiva, si  $l_1(0)$  es positivo, nos encontraremos con una bifurcación de Hopf subcrítica, apareciendo un ciclo límite inestable para valores del parámetro en los que el punto de equilibrio es inestable. Si es negativo, la bifurcación de Hopf es supercrítica, presentando un ciclo límite estable para valores del parámetro que inestabilizan el punto de equilibrio.

# Capítulo 2

## Modelado del convertidor

### 2.1. Descripción del circuito

Como ya hemos comentado, el circuito a estudiar se trata de un convertidor *boost* cuya función es la de transformar una tensión de entrada continua en otra de mayor valor, es decir, se trata de un elevador de tensión de continua.

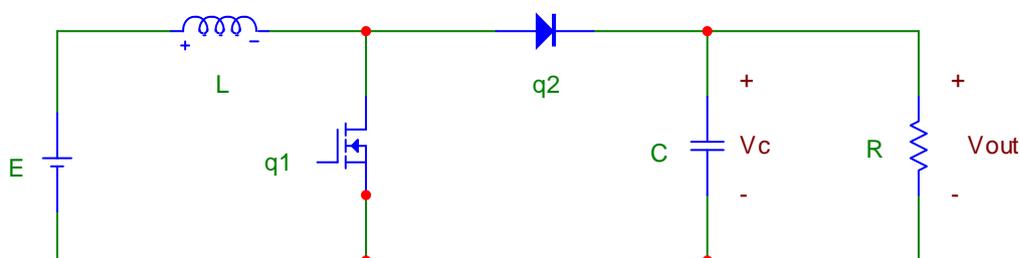


Figura 2.1: Circuito básico de un convertidor boost.

Entre los elementos que conforman el circuito tenemos un transistor MOS-FET que actúa como un conmutador controlado, cuyo estado está representado por la variable  $q_1$ , y un diodo, cuyo estado está definido por la variable  $q_2$ . A dichas variables les asignamos un valor cero si los elementos a los que representan están en un estado de no conducción, y un valor unidad si están en estado de conducción. Son pues, a priori, cuatro las combinaciones distintas posibles.

Cuando tanto el transistor como el diodo están cortados la estructura correspondiente la denominamos estado de no conducción (NC) dado que en dicha situación la intensidad que circula por la bobina es nula. Por su

parte, la carga  $R$  se encuentra alimentada por el condensador  $C$  el cual se está descargando sobre la misma.

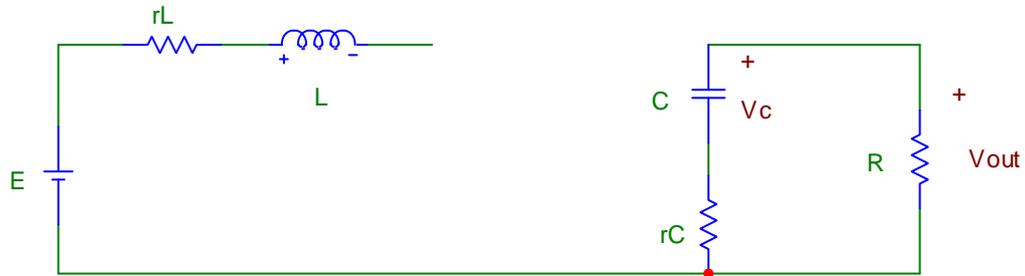


Figura 2.2: Estructura NC.

En el caso de que el transistor esté cerrado y el diodo abierto damos el nombre a la estructura de estado de carga (C) debido a que la bobina se encuentra almacenando energía de la fuente. Al igual que en el estado anterior el condensador se encuentra descargándose a través de la resistencia de carga.

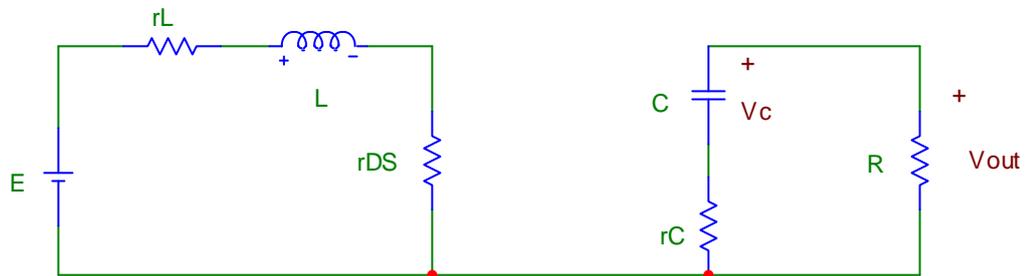


Figura 2.3: Estructura C.

Si el transistor se encuentra abierto y el diodo conduce decimos que el convertidor se encuentra en el estado de descarga (D) al estar cediendo la bobina su carga almacenada tanto al condensador como a la resistencia  $R$ .

La última de las combinaciones que en teoría podría darse, que es aquella en la que tanto el diodo como el transistor están conduciendo, no es viable. Esto es así porque cuando el transistor conduce, si despreciamos la resistencia parásita del transistor  $r_{DS}$ , la tensión en el ánodo del diodo será nula y, por tanto, menor que en el cátodo si el condensador se encuentra con una tensión positiva, cosa que ocurrirá siempre, quedando el diodo polarizado inversamente.

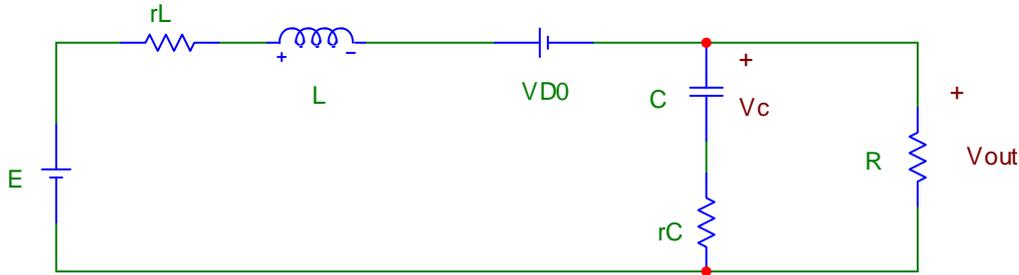


Figura 2.4: Estructura D.

$q_1$ (MOSFET)	$q_2$ (diodo)	Estructura
0	0	NC
0	1	D
1	0	C
1	1	No viable

Durante su funcionamiento el convertidor *boost*, bajo un control adecuado del transistor, cambiará de estado continuamente, de manera que toda la energía que el condensador cede a la carga en la estructura C (y en su caso en la NC) la recupere en la estructura D. A su vez, el tiempo de descarga del condensador debe ser pequeño para que no haya un cambio significativo en la tensión, pues el objetivo del circuito es mantener constante la tensión de salida. Por su parte, con la bobina debe suceder lo mismo, es decir, toda la energía que pierde en la estructura D, debe recuperarla en el C. Mientras el convertidor *boost* esté en este estado la intensidad que circula por la bobina aumentará al estar almacenando energía de la fuente. Por el contrario, cuando el convertidor se encuentre en la estructura D la intensidad por la bobina disminuirá al ceder energía al condensador y a la carga, siendo su caída de tensión negativa. Por tanto, el condensador quedará cargado a una tensión mayor que la de entrada. Se consigue entonces que la tensión a la salida del convertidor sea mayor que ésta.

El valor medio de la intensidad que circula por la bobina dependerá de la carga conectada, de tal manera que a mayor carga menor será la intensidad. Durante el tiempo que el convertidor permanece en la estructura D puede suceder que, para un determinado valor de la carga, dicha intensidad llegue a anularse, con lo que el diodo quedará cortado si el convertidor *boost* funciona como debe, es decir, si la tensión a la salida es mayor que a la entrada. Se alcanza entonces la estructura NC, de manera que  $i_L$  no puede llegar nunca a ser negativa. Cuando esto puede suceder, el convertidor trabaja en

el llamado modo de conducción discontinua (*discontinuous conduction mode*, que se suele abreviar por DCM), mientras que si la intensidad de la bobina no se anula nunca el convertidor se encuentra funcionando en el modo de conducción continua (*continuous conduction mode*, que se suele abreviar por CCM) y, en este caso, no se alcanza la estructura NC en ningún momento. El adjetivo discontinuo se usa aquí no en el sentido de función continua propio de las matemáticas, sino indicando solamente que la intensidad puede anularse.

Tenemos pues que en el modo CCM las únicas transiciones posibles son pasar de la estructura D a la C y viceversa, dado que son las únicas estructuras que se alcanzan. En el modo DCM la estructura NC se alcanza solamente si la bobina se descarga hasta alcanzar su intensidad un valor nulo, por lo que la única transición posible que permite llegar a dicha estructura es hacerlo desde la D, no habiendo otra posibilidad de cambio de estructura desde la misma. En el momento en que desde D no se alcance la estructura NC sino la C el modo de conducción sería el CCM y no el DCM. Una vez alcanzada la estructura NC hay dos posibilidades, que el transistor se cierre de nuevo antes de que el condensador se descargue hasta una tensión igual a la de entrada o no. En el primer caso, se pasará a la estructura C, y en el segundo, se llegará a un instante en el que el diodo quedaría polarizado directamente, aquel en el que el condensador quede a una tensión menor que la de la entrada, y se alcanza la estructura D aunque en una situación en la que inicialmente el condensador sigue descargándose.

## 2.2. Ecuaciones de estado

Nuestro objetivo ahora es obtener un modelo matemático único que recoja todos los aspectos que hemos descrito hasta este momento. El resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas incógnitas son las variables de estado que se asumen continuas y que denotamos como  $i_L$  (corriente de la bobina) y  $v_C$  (tensión del condensador) y en el que aparecerá además la variable discreta  $q_1$  correspondiente al estado del transistor, y otra variable discreta  $v$  que necesitaremos para poder incluir el modo DCM como ya veremos más adelante. A este tipo de modelos matemáticos, en el que se combinan variables continuas y discretas, se les conoce con el nombre de sistemas híbridos o sistemas de estructura variable (VSS, en inglés).

Vamos a comenzar obteniendo el modelo para el modo CCM, dado que a partir de él podemos obtener fácilmente el que recoja ambos modos de conducción. En este caso nunca pasamos por la estructura NC por lo que comenzamos trabajando por separado con las estructuras D ( $q_1 = 0$ ) y C ( $q_1 = 1$ ) aplicando las Leyes de Kirchoff para calcular las expresiones de las

ecuaciones diferenciales de  $i_L$  y  $v_C$ . Luego veremos como podemos recoger los dos sistemas de ecuaciones en uno solo en función de la variable discreta  $q_1$ .

Para la estructura D, si aplicamos las Leyes de Kirchoff sobre la malla de la izquierda y sobre el nodo donde se conecta el condensador, tenemos que

$$\begin{aligned} -E + v_{r_L} + v_L + V_{D_0} + v_{out} &= 0, \\ i_C &= i_L - i_{out}. \end{aligned}$$

donde  $E$  es la tensión de entrada,  $v_{r_L}$  la caída de tensión de la resistencia parásita de la bobina,  $v_L$  la caída de tensión en la bobina,  $V_{D_0}$  la tensión umbral del diodo,  $v_{out}$  la tensión de salida,  $i_C$  la intensidad por el condensador,  $i_L$  la intensidad por la bobina e  $i_{out}$  la intensidad a la salida.

Si tenemos en cuenta las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{di_L}{dt}, \\ v_{r_L} &= r_L i_L, \\ i_C &= C \frac{dv_C}{dt}, \\ i_{out} &= \frac{v_{out}}{R}, \end{aligned}$$

podemos llegar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - V_{D_0} - v_{out}, \\ C \frac{dv_C}{dt} &= i_L - \frac{v_{out}}{R}. \end{aligned}$$

Como el valor de  $V_{D_0}$  es constante, sólo necesitamos obtener la tensión de salida  $v_{out}$  en función de  $i_L$  y  $v_C$  que son nuestras variables de estado. Para conseguirlo volvemos a aplicar las Leyes de Kirchoff, esta vez en la malla de la derecha. Así obtenemos

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{v_{out} - v_C}{r_C}, \\ v_{out} &= R(i_L - i_C), \end{aligned}$$

expresiones con las que operando podemos despejar la tensión de salida.

$$v_{out} = \frac{r_C R}{r_C + R} i_L + \frac{R}{r_C + R} v_C. \quad (2.1)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela a la estructura D resulta, pues, ser el siguiente.

$$\begin{aligned}
L \frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - V_{D_0} - \frac{r_C R}{r_C + R} i_L - \frac{R}{r_C + R} v_C, \\
C \frac{dv_C}{dt} &= \frac{R}{r_C + R} i_L - \frac{1}{r_C + R} v_C.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Para la estructura C, siguiendo un procedimiento análogo, partimos de estas ecuaciones.

$$\begin{aligned}
L \frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - r_{DS} i_L, \\
C \frac{dv_C}{dt} &= -i_{out}.
\end{aligned}$$

La primera de ellas ya se encuentra escrita completamente en función de nuestras variables de estado. La segunda necesita que calculemos  $i_{out}$  en función de la tensión del condensador y la intensidad de la bobina. Para ello podemos usar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
i_{out} &= \frac{v_{out}}{R} = -\frac{v_{r_C}}{r_C}, \\
v_{out} &= v_C + v_{r_C}.
\end{aligned}$$

Combinando ambas expresiones y operando obtenemos el valor buscado:

$$i_{out} = \frac{1}{R + r_C} v_C.$$

La estructura C tiene entonces como modelo el sistema de ecuaciones diferenciales mostrado a continuación.

$$\begin{aligned}
L \frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - r_{DS} i_L, \\
C \frac{dv_C}{dt} &= -\frac{1}{R + r_C} v_C.
\end{aligned}$$

Ahora es cuando debemos obtener un sistema de ecuaciones diferenciales único que recoja a los dos anteriores introduciendo la variable discreta  $q_1$ . Sabiendo que dicha variable es nula para la estructura D y la unidad para la estructura C, se puede comprobar fácilmente que el siguiente modelo híbrido

cumple con los requisitos que estamos buscando.

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= E - \left[ r_L + q_1 r_{DS} + (1 - q_1) \frac{r_C R}{r_C + R} \right] i_L \\ &\quad - (1 - q_1) \left[ V_{D_0} + \frac{R}{r_C + R} v_C \right], \\ C \frac{dv_C}{dt} &= (1 - q_1) \frac{R}{r_C + R} i_L - \frac{1}{r_C + R} v_C. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A su vez, teniendo en cuenta el valor calculado (2.1) de  $v_{out}$  para la estructura D, y que para C

$$v_{out} = \frac{R}{r_C + R} v_C,$$

se llega también a una única expresión para la tensión de salida

$$v_{out} = \frac{r_C R}{r_C + R} (1 - q_1) i_L + \frac{R}{r_C + R} v_C.$$

Con el fin de simplificar el modelo, es usual considerar que  $V_{D_0} = 0$  y que la única resistencia parásita que no es despreciable es la de la inductancia  $r_L$ . De esta manera, la tensión de salida sería igual a la tensión del condensador, y el modelo queda

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= E - r_L i_L - (1 - q_1) v_C, \\ C \frac{dv_C}{dt} &= -\frac{v_C}{R} + (1 - q_1) i_L. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para facilitar el análisis del sistema obtenido lo mejor es proceder a su adimensionalización, lo cual se consigue introduciendo en (2.3) los parámetros

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ b &= \frac{r_L}{\sqrt{\frac{L}{C}}}. \end{aligned}$$

y realizando el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{E} \sqrt{\frac{L}{C}} i_L, \\ y &= \frac{v_C}{E}, \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{LC}} t. \end{aligned}$$

Por último usaremos como variable discreta  $u = 1 - q_1$ , que no es otra que la complementaria de la variable  $q_1$ .

El sistema adimensionalizado viene dado por estas ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - uy - bx \\ \dot{y} &= ux - ay\end{aligned}\tag{2.5}$$

En este modelo se tiene que  $u \in \{0, 1\}$  y que  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  al ser la intensidad de la bobina y la tensión en el condensador mayores que cero.

Ahora, para que el modelo pueda representar tanto el modo de conducción CCM como el DCM hay que tener en cuenta las ecuaciones correspondientes al estructura NC. En dicho estado, la intensidad de la bobina es siempre nula y además el condensador estará descargándose a través de la resistencia de carga  $R$ , por lo que la ecuación en  $y$  es la de una exponencial con una constante de tiempo igual a  $-1/RC$ . Teniendo en cuenta el cambio de variables anterior las ecuaciones correspondientes a esta estructura quedan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= -ay.\end{aligned}$$

Para incluir esta dinámica en el modelo obtenido para el modo CCM tenemos que recurrir a la introducción de una nueva variable discreta  $v$ , a la que asignamos los siguientes valores:

$$\begin{aligned}v &= 0, \text{ si } (x = 0) \ \& \ (y > 1) \\ v &= 1, \text{ si } x > 0.\end{aligned}$$

De esta forma el modelo que recoge tanto al modo de funcionamiento CCM como el DCM resulta ser

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - uy - bx)v, \\ \dot{y} &= (ux)v - ay.\end{aligned}$$

En efecto, cuando  $v = 0$  el sistema se reduce al correspondiente al modo NC y para  $v = 1$  las ecuaciones que quedan son las obtenidas en primer lugar cuando sólo se tuvieron en cuenta las estructuras D y C.

### 2.3. Control del convertidor por modos de deslizamiento

Una vez obtenido el modelo del sistema queremos diseñar una ley de control en modo de deslizamiento (*Sliding Mode Control*, abreviado en inglés

como SMC) que cumpla con los objetivos de regular la tensión de salida a un valor  $y = y_d$  (donde  $y_d$  es el valor deseado para la tensión de salida) y que el sistema sea robusto frente a cambios en la carga, manteniéndose el valor de la tensión de salida constante, minimizándose además la respuesta transitoria.

### 2.3.1. Estrategias posibles de control

A primera vista parecería que un control de la tensión de salida es el adecuado para este tipo de circuitos en el que el objetivo es obtener un determinado valor de la misma. En este caso, la función que define la superficie de deslizamiento a considerar es

$$h(y) = y - y_d.$$

Si resolvemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} h(y) &= y - y_d = 0, \\ \frac{dh(y)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

la expresión del control equivalente que se obtiene es

$$u_{eq} = \frac{ay_d}{x}.$$

Sustituyendo esta expresión junto con  $y = y_d$  en el modelo del circuito, nos da como resultado la siguiente dinámica de deslizamiento

$$\dot{x} = 1 - \frac{ay_d^2}{x},$$

que resulta tener un único punto de equilibrio en  $x = a(y_d)^2$ . Este equilibrio resulta ser inestable puesto que en él

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{ay_d^2} > 0$$

La consecuencia inmediata es que adoptar esta estrategia de control provocaría la destrucción del circuito.

Para evitar este inconveniente se puede recurrir a una estrategia de control de la corriente del circuito. Siguiendo un proceso análogo al anterior definimos como función que determina la superficie de deslizamiento  $h(x) = x - \bar{x}$ ,

donde  $\bar{x}$  es el valor de la corriente en el punto de equilibrio. Si imponemos ahora

$$\begin{aligned} h(x) &= x - \bar{x} = 0, \\ \frac{dh(x)}{dt} &= \dot{x} = 0, \end{aligned}$$

llegamos a que

$$u_{eq} = \frac{1 - b\bar{x}}{x}.$$

Si asumimos  $b = 0$ , multiplicamos la primera de las ecuaciones de (2.5) por  $x$  y la segunda por  $y$  y sumamos los resultados, resulta ser  $\bar{x} = a(y_d)^2$ . La dinámica de deslizamiento en este caso es pues

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} = a(y_d)^2, \\ \dot{y} &= \frac{x}{y} - ay = \frac{a(y_d)^2}{y} - ay, \end{aligned}$$

que tiene un punto de equilibrio en  $y = y_d$ . Ahora este equilibrio ya resulta estable puesto que

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = -2a < 0$$

El problema de esta estrategia de control es que necesitamos conocer a priori el valor de la carga que vamos a alimentar con el convertidor para poder definir apropiadamente la superficie de deslizamiento, así como el valor de  $\bar{x}$ , cosa que no siempre ocurrirá. Además, posibles perturbaciones en la carga harían variar nuestro punto de equilibrio. Por ejemplo, si hemos diseñado el control para un valor determinado de  $a$  y la carga cambia de manera que el verdadero valor de dicho parámetro pasa a ser  $\hat{a}$ , la ecuación diferencial de  $y$  sería

$$\dot{y} = \frac{a(y_d)^2}{y} - \hat{a}y,$$

por lo que el punto de equilibrio quedaría desplazado, en particular su verdadero valor sería

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{a}{\hat{a}}} y_d.$$

Concluimos entonces que el sistema no tiene entonces la robustez requerida frente a perturbaciones en la resistencia de carga.

Para resolver este problema de falta de robustez añadimos un término integral a la función que define la superficie de deslizamiento. Así, definiendo la nueva variable  $z = \int_0^t (y - y_d) d\tau$ , emplearemos la función

$$h(x, z) = x - x_* + Kz,$$

para determinar la nueva estrategia de control, donde el valor de  $x_*$  quedará determinado una vez analizados los puntos de equilibrio que resultan de adoptar esta estrategia.

Al introducir la nueva variable  $z$  debemos ampliar el modelo del sistema con una nueva ecuación que se corresponde con su derivada, quedando como resultado el modelo tridimensional

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - uy - bx)v, \\ \dot{y} &= uvx - ay, \\ \dot{z} &= y - y_d,\end{aligned}\tag{2.6}$$

con la ley de control

$$\begin{aligned}u &= 0, \text{ si } h(x, z) < 0, \\ u &= 1, \text{ si } h(x, z) > 0.\end{aligned}$$

Este sistema dinámico tridimensional de estructura variable constituye el objeto de estudio de este proyecto. Debemos hacer notar que pertenece a la clase de los llamados sistemas lineales a trozos (*piecewise linear systems*. PWS), que forman parte de la clase más amplia de sistemas no suaves (*non-smooth*), que están siendo estudiados intensamente en la actualidad.

### 2.3.2. Implementación física del control por modos de deslizamiento

Una vez que hemos llegado a la conclusión de que la estrategia de control idónea para el circuito que vamos a estudiar es aquella en la que hacemos un control en corriente con un término integral, pasamos a detallar la manera en la que dicha estrategia puede implementarse físicamente en el circuito. Seguiremos para tal fin las ideas expuestas en la tesis doctoral de Maria Isabel Arteaga Orozco [2].

En la figura 2.5 se presenta un diagrama de bloques en el que quedan recogidas las distintas partes que intervienen en el controlador. Se puede observar que las señales que se requieren para la generación de la superficie de deslizamiento se toman del propio circuito, acondicionándolas para que tengan un valor apropiado.

#### Acondicionamiento de las señales

La primera señal que debemos medir y adaptar su valor para poder construir posteriormente la superficie de deslizamiento será la corriente que circula

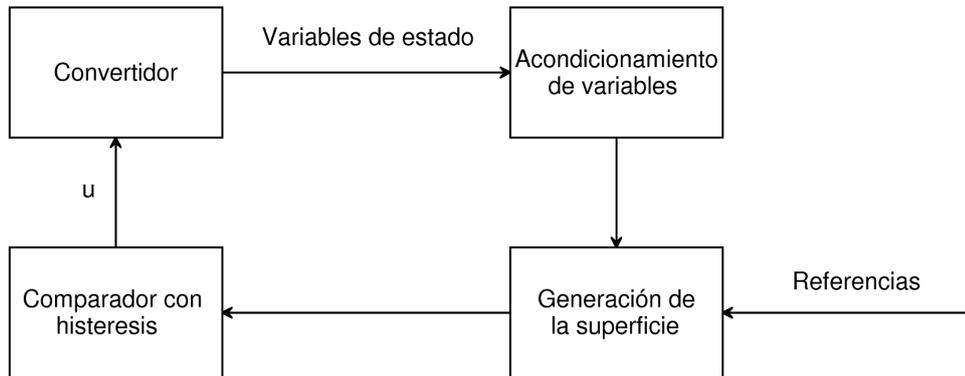


Figura 2.5: Diagrama de bloques del circuito correspondiente al controlador en modos deslizantes a implementar.

por la bobina. Para ello, colocamos en serie con la bobina una resistencia de valor muy pequeño  $R_S$ , por ejemplo de 0.025 ohmios, y amplificamos la caída de tensión que se produce en ella mediante el circuito integrado INA139, obteniéndose un valor proporcional a la corriente que pasa por la bobina.

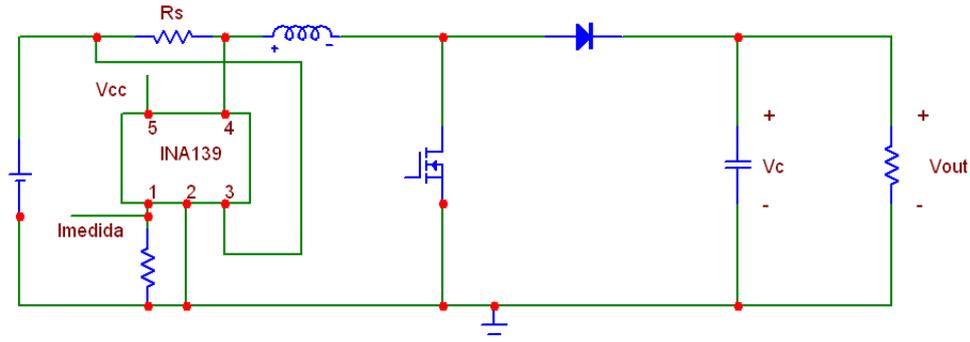


Figura 2.6: Acondicionamiento de la señal de la intensidad que circula por la bobina.

La otra señal que debemos acondicionar es la tensión de salida del circuito, para así poder calcular el término de la superficie de deslizamiento correspondiente a la integral de la diferencia entre el valor deseado de la tensión de salida y el real. Para el valor deseado podemos usar como referencia el valor de la tensión de entrada, dado que sabemos que el primero será el segundo multiplicado por el factor correspondiente a la amplificación de tensión que queremos obtener. Por tanto, para acondicionar el valor de la tensión de sali-

da a la referencia del valor deseado debemos aplicarle la ganancia inversa que el convertidor boost aplica a la tensión de entrada. Para ello podemos usar un amplificador operacional configurado como amplificador inversor como el que podemos observar en la figura 2.7.

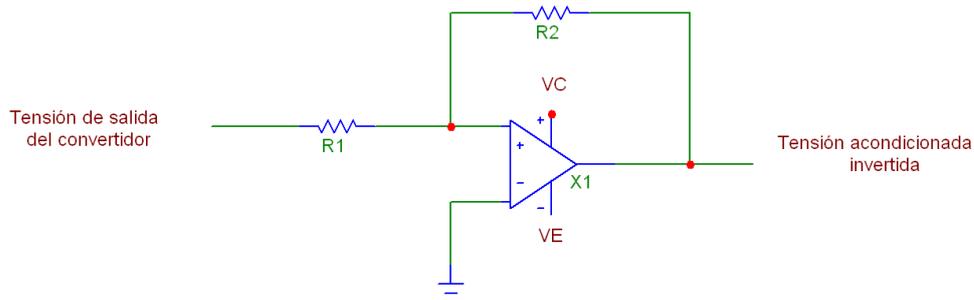


Figura 2.7: Acondicionamiento de la tensión de salida.

Sabiendo que la ganancia de este circuito vienen dada por la expresión

$$A_v = -\frac{R_2}{R_1},$$

debemos elegir los valores apropiados de las resistencias para obtener el valor  $-1/y_d$ .

El siguiente paso a realizar será obtener la diferencia entre los valores deseado y real de la tensión de salida, para lo cual emplearemos de nuevo un amplificador operacional configurado como circuito sumador de la manera que podemos observar en la figura 2.8.

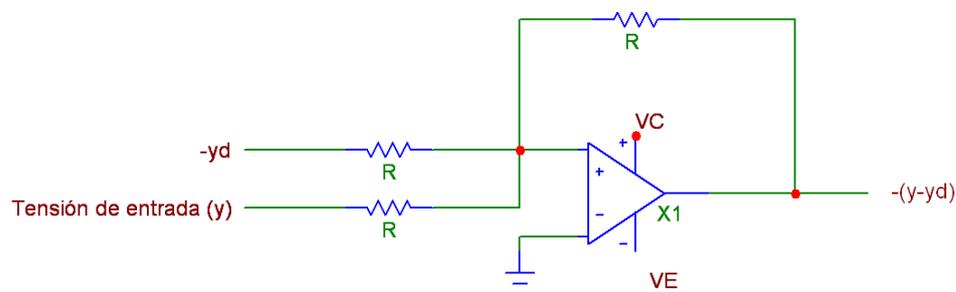


Figura 2.8: Diferencia de las tensiones de salida deseada y real.

Para terminar con la obtención del término integral se configura una vez más un amplificador operacional configurado como circuito integrador, el

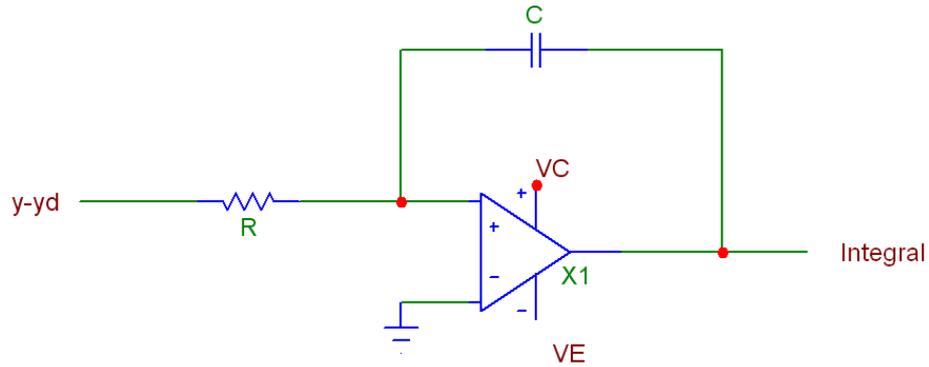


Figura 2.9: Obtención del término integral.

cual tiene una ganancia de  $-1/RC$ , por lo que habrá que elegir los valores de  $R$  y  $C$  adecuados para que la señal correspondiente al término integral de la superficie de deslizamiento esté correctamente acondicionada, teniendo en cuenta el valor del parámetro  $K$  que queremos implementar.

### Referencia de intensidad

Para poder obtener la superficie de deslizamiento necesitamos una señal que haga el papel de referencia de intensidad correspondiente al término de la intensidad en el punto de equilibrio que circula por la bobina. El circuito que provea dicha referencia debe caracterizarse por su estabilidad y por su bajo consumo. Para ello se toma la configuración de la figura 2.10.

Este circuito se trata de un estabilizador de tensión utilizado para obtener referencias de tensión con bajo nivel de intensidad a la salida, donde el potenciómetro  $R_3$  se utiliza para ajustar correctamente el valor de  $I_{ref}$ . La tensión  $V_{dd}$  se puede obtener mediante el regulador LM7808 con la configuración de la figura 2.11.

El último paso antes de implementar el circuito que nos proporcionará la superficie de deslizamiento es restar la referencia de corriente  $I_{ref}$  y el término integral, utilizando un amplificador operacional configurado como circuito restador tal y como observamos en la figura 2.12, tomando  $R_1 = R_2$  para no introducir ninguna ganancia.

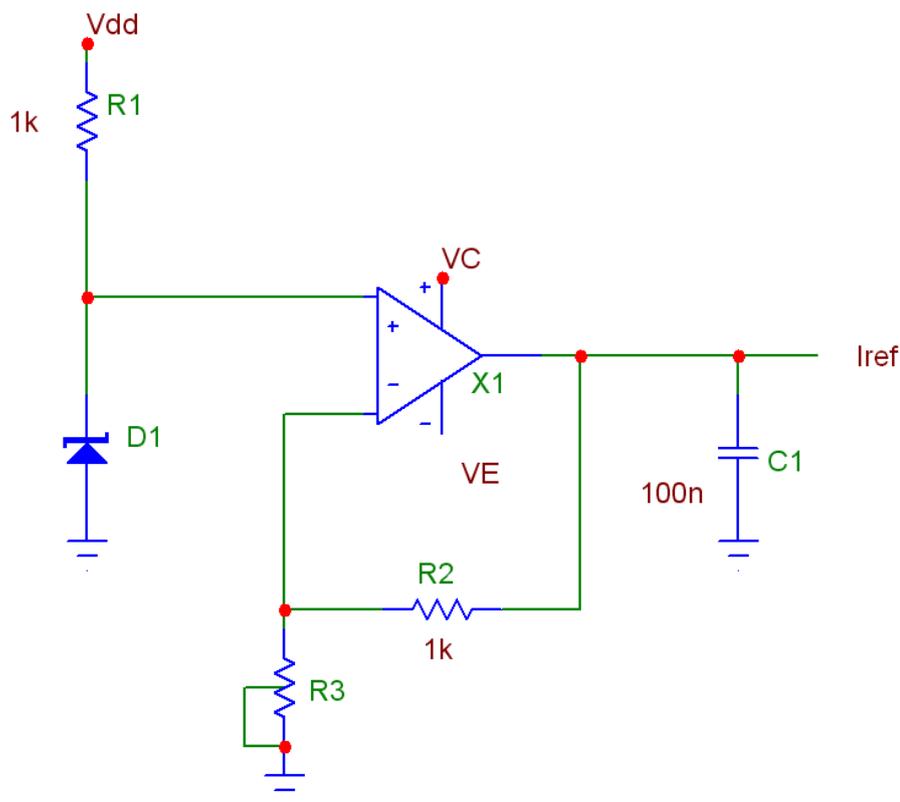


Figura 2.10: Referencia de intensidad.

### Implementación de la superficie de deslizamiento

Para implementar la superficie de deslizamiento se utiliza un comparador con histéresis cuyas entradas serán la intensidad que hemos medido que circula por la bobina y la señal obtenida en la figura 2.12. La configuración del circuito correspondiente a este comparador es la de la figura 2.13. En el mismo, el potenciómetro se usa para ajustar el ciclo de histéresis. Por su parte, la señal de salida debe ser un valor apropiado para polarizar el transistor del convertidor.

## 2.4. Análisis de los equilibrios

Vamos a buscar ahora los posibles puntos de equilibrio natural de dicho sistema. Dependiendo del modo de conducción en el que esté funcionando el

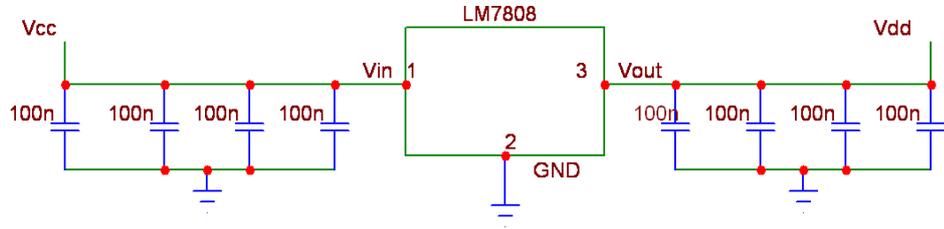


Figura 2.11: Tensión  $V_{dd}$  proporcionada por el integrado LM7808.

convertidor, nos podemos encontrar con que la condición  $v = 1$  se verifique siempre (si estamos en el modo CCM), o bien que  $v = 0$  en ciertos instantes (cuando se alcance la estructura NC) si trabajamos en el modo DCM. En este último caso, cuando  $v$  se anula, el sistema se reduce a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= -ay, \\ \dot{z} &= y - y_d,\end{aligned}$$

y no hay ningún punto de equilibrio, pues  $y_d \neq 0$ . Consideramos pues, a partir de ahora, que  $v = 1$ .

Según la ley de control se tiene que  $u = 1$  si  $h(x, y) > 0$ . En dicho caso, las ecuaciones del sistema quedan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - y - bx, \\ \dot{y} &= x - ay, \\ \dot{z} &= y - y_d.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Igualando a cero las tres expresiones y despejando, se obtiene el siguiente posible punto de equilibrio

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{a}{1 + ab}, \\ \bar{y} &= \frac{1}{1 + ab}, \\ \bar{z} &= \bar{z}.\end{aligned}$$

donde  $\bar{z}$  es cualquier valor arbitrario y además se debe tener  $\bar{y} = y_d$ . Es claro que  $\bar{y} < 1$  al ser  $a$  y  $b$  valores positivos y debido a que para el convertidor *boost*

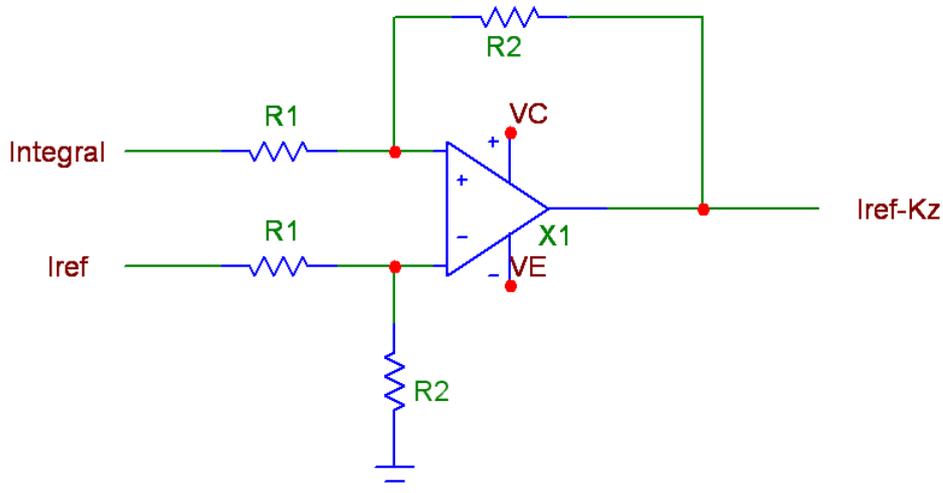


Figura 2.12: Circuito que resta la señal de referencia de intensidad y la señal del término integral.

siempre se tiene que  $y_d > 1$ , las condiciones anteriores no son compatibles y no aparece ningún equilibrio cuando  $h(x, y) > 0$ .

Nos queda entonces el caso  $h(x, y) < 0$ , en el que  $u = 0$ , y resulta el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - bx, \\ \dot{y} &= -ay, \\ \dot{z} &= y - y_d,\end{aligned}$$

que es claramente incompatible, pues en el posible punto de equilibrio se tiene que  $\bar{y} = 0$ , por lo que tampoco hay equilibrio.

Concluimos entonces que los únicos comportamientos en régimen permanente o estacionario serán debidos a la existencia de pseudo-equilibrios en la superficie de deslizamiento. Para comprobarlo hay que obtener primero la expresión de  $u_{eq}$  que sustituida en las ecuaciones de nuestro sistema determina la dinámica de deslizamiento del mismo. Para ello en primer lugar debe ocurrir que en los puntos con

$$h(x, z) = 0,$$

se satisfaga la condición de invarianza

$$\frac{dh(x, z)}{dt} = 0,$$

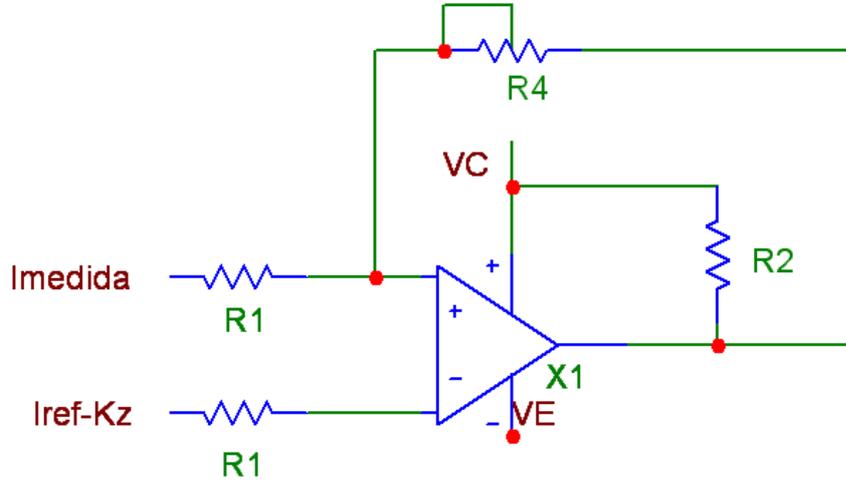


Figura 2.13: Comparador con histéresis utilizado para implementar el comparador con histéresis.

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} x - x_* + Kz &= 0, \\ 1 - uy - bx + K(y - y_d) &= 0. \end{aligned}$$

Operamos con dichas expresiones y se despeja el valor de  $u_{eq}$ , que resulta ser

$$u_{eq} = \frac{1 - bx + K(y - y_d)}{y} = \frac{1 - bx_* + K(y + bz - y_d)}{y}$$

Sustituyendo este valor en (2.6) con  $v = 1$ , la dinámica de deslizamiento queda, entonces, como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -K(y - y_d), \\ \dot{y} &= -ay + \frac{x}{y} - b\frac{x^2}{y} + K(y - y_d)\frac{x}{y}, \\ \dot{z} &= y - y_d. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Si igualamos a cero los miembros de la derecha obtenemos que en los posibles valores de equilibrio se debe cumplir

$$\bar{y} = y_d,$$

y para  $\bar{x}$  se llega que debe verificar la condición

$$bx^2 - x + ay^2 = 0. \quad (2.9)$$

Si  $b = 0$  el termino cuadrático desaparece, y

$$\bar{x} = ay^2.$$

y si elegimos  $x_* = \bar{x}$  entonces  $\bar{z}$  será nulo.

En el caso de que  $b \neq 0$

$$\bar{x}_{\pm} = \frac{1}{2b} \pm \frac{\sqrt{1 - 4aby_d^2}}{2b}, \quad (2.10)$$

debiéndose cumplir que el radicando sea positivo, es decir, que

$$1 - 4aby_d^2 > 0.$$

El valor deseado para la tensión está también entonces acotado superiormente, quedando restringido al intervalo

$$1 < y_d < \sqrt{\frac{1}{4ab}}.$$

De nuevo, si elegimos  $x^* = x_-$  se obtiene tras imponer  $h(x, z) = 0$  que  $\bar{z} = 0$ .

Se puede ver, pues, que cuando  $b$  no se anula existen dos puntos de equilibrio, mientras que cuando sí lo hace sólo existe uno. Para determinar su estabilidad proyectamos el sistema (2.7) sobre el plano  $(x, y)$  y calculamos la matriz jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ \frac{1}{y}[1 - 2bx + K(y - y_d)] & -a + \frac{1}{y^2}(-x + bx^2 + Kxy_d) \end{pmatrix},$$

que para los puntos de equilibrio queda

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ \frac{1}{\bar{y}}[1 - 2b\bar{x}] & -a + \frac{1}{\bar{y}^2}(-\bar{x} + b\bar{x}^2 + K\bar{x}\bar{y}) \end{pmatrix}.$$

Las condiciones de estabilidad se traducen en que el determinante de la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio debe ser positivo, y la traza debe ser negativa. Ambos están expresados por

$$\begin{aligned} d(J) &= \frac{K}{\bar{y}}(1 - 2b\bar{x}), \\ t(J) &= -a + \frac{1}{\bar{y}^2}(-\bar{x} + b\bar{x}^2 + K\bar{x}\bar{y}). \end{aligned}$$

De la condición para el determinante tenemos que sólo se tiene estabilidad si

$$K \frac{1 - 2b\bar{x}}{\bar{y}} > 0.$$

que se satisface trivialmente cuando  $b = 0$  si  $K > 0$ .

Cuando  $b > 0$ , como  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son cantidades positivas, la condición se cumple si

$$\begin{aligned} K &> 0, \\ \bar{x} &< \frac{1}{2b}. \end{aligned}$$

La segunda expresión pone de manifiesto que, por ejemplo, el punto de equilibrio correspondiente a la solución con signo menos de (2.10) puede ser estable, ya que

$$\sqrt{1 - 4ab(y_a)^2} < 1,$$

al ser  $a$  y  $b$  cantidades positivas. Por esta misma razón, la solución con signo más siempre es inestable. La condición para la traza, por su parte, exige que

$$K < \frac{a\bar{y}^2 - b\bar{x}^2 + \bar{x}}{\bar{x}\bar{y}} = \frac{2a\bar{y}}{\bar{x}},$$

donde hemos usado (2.9). Uniendo todas las condiciones, la estabilidad de los puntos de equilibrio cuando  $b = 0$  exige las desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &< K < \frac{a\bar{y}^2 - b\bar{x}^2 + \bar{x}}{\bar{x}\bar{y}} = \frac{2a\bar{y}}{\bar{x}}, \\ \bar{x} &< \frac{1}{2b}, \end{aligned}$$

mientras que para el caso  $b = 0$  nos basta con la primera desigualdad.

Si sustituimos en cada caso los posibles valores de equilibrio, llegamos a las siguientes condiciones. Para el caso  $b = 0$  nos queda

$$0 < K < \frac{2}{\bar{y}}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\bar{x} = a\bar{y}^2$ . Para el caso  $b \neq 0$ , ya hemos indicado que sólo puede ser estable el equilibrio  $\bar{x}_-$ , que cumple siempre la segunda de las desigualdades, y para la primera se obtiene

$$0 < K < \frac{2a\bar{y}}{\bar{x}_-} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab\bar{y}^2}}{\bar{y}},$$

tras unas sencillas manipulaciones algebraicas.

Es importante hacer notar que si se violan estas condiciones, bien por cuestiones de diseño, bien por variaciones en la carga, hemos de esperar comportamientos indeseados. En particular, las condiciones  $K\bar{y} = 2$  (cuando  $b = 0$ ) y

$$K\bar{y} = 1 + \sqrt{1 - 4ab\bar{y}^2}, \quad (2.11)$$

cuando  $b \neq 0$  deben estar asociadas a la aparición de bifurcaciones. Dejaremos constancia para futuras referencias que en el caso  $b \neq 0$ , la condición de bifurcación está asociada al valor

$$\bar{y} = \frac{2K}{K^2 + 4ab}, \quad (2.12)$$

que se obtiene sin más que resolver la ecuación (2.11).

## 2.5. Dominio de deslizamiento

Para obtener una visión global de la dinámica de nuestro modelo, en esta sección haremos explícitos los conceptos introducidos anteriormente relativos al dominio de deslizamiento. Dadas las ecuaciones del sistema, definimos los campos vectoriales

$$f^{(1)}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - bx - y \\ x - ay \\ y - y_d \end{bmatrix},$$

$$f^{(2)}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - bx \\ -ay \\ y - y_d \end{bmatrix},$$

donde  $f^{(1)}(x, y)$  se corresponde con las ecuaciones para  $u = 1$  ( $h > 0$ ), y  $f^{(2)}(x, y)$  para  $u = 0$  ( $h < 0$ ).

De la expresión del plano de deslizamiento se tiene

$$\nabla h = (1, 0, K),$$

de manera que el dominio de deslizamiento será la región del plano  $h = 0$  donde se cumplen las restricciones

$$\langle \nabla h, f^{(1)}(x, y) \rangle < 0,$$

$$\langle \nabla h, f^{(2)}(x, y) \rangle > 0,$$

es decir, cuando ambos campos vectoriales empujen hacia el plano. Entonces, las órbitas del sistema no abandonan el plano de deslizamiento permaneciendo en él deslizando sobre el mismo.

En nuestro caso, las restricciones a las que se llegan son

$$\begin{aligned} 1 - bx - y + K(y - y_d) &< 0, \\ 1 - bx + K(y - y_d) &> 0. \end{aligned}$$

Si despejamos  $y$ , finalmente se obtiene

$$y < \frac{b}{K-1}x + \frac{Ky_d - 1}{K-1}, \quad (2.13)$$

$$y > \frac{b}{K}x + \frac{Ky_d - 1}{K}. \quad (2.14)$$

Al observar los denominadores de (2.13) se puede ver que hay que distinguir tres casos distintos según sea el valor de  $K$ .

Aparte, es importante comprobar si los puntos de equilibrio pertenecen o no al dominio de deslizamiento. Para poder analizarlo facilmente necesitamos determinar el lugar geométrico definido por los posibles puntos de equilibrio del sistema, el cual podemos obtener a partir de la expresión

$$bx^2 + ay^2 - x = 0,$$

que ya vimos anteriormente que se verifica en el equilibrio. Si operamos con ella, se llega a que el lugar geométrico que buscamos es

$$\frac{(x - \frac{1}{2b})^2}{\frac{1}{4b^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4ab}} = 1,$$

que se trata de una elipse centrada en  $x = 1/2b, y = 0$  y de semiejes de longitud  $1/2b$  paralelo al eje  $x$  y  $1/(2\sqrt{ab})$  paralelo al eje  $y$ .

A modo de ejemplo, vamos a representar graficamente el dominio de deslizamiento del sistema resultante para el circuito constituido por los siguientes elementos

$$\begin{aligned} L &= 2mH, \\ r_L &= 1,5, \\ C &= 10\mu F, \\ R &= 50\Omega, \end{aligned}$$

que presenta los siguientes valores adimensionales

$$\begin{aligned} a &= 0,2828, \\ b &= 0,1061. \end{aligned}$$

Si a este circuito le pedimos que aumente la tensión tal que resulte una  $y_d = 1,33$ , los valores de equilibrio de la intensidad de la bobina son

$$\begin{aligned}x_- &= 0,53, \\x_+ &= 8,90,\end{aligned}$$

con un valor crítico de la ganancia

$$K_c = 1,42.$$

### 2.5.1. Caso $K > 1$

Para valores de  $K$  mayores que la unidad los denominadores de (2.13) son positivos, así como los numeradores de los términos independientes de ambas restricciones, al ser también  $y_d > 1$ . Por otro lado, se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{Ky_d - 1}{K - 1} &> \frac{Ky_d - 1}{K}, \\ \frac{b}{K - 1} &> \frac{b}{K}.\end{aligned}$$

Vemos entonces que, si proyectamos sobre el plano  $(x, y)$ , la frontera del dominio de deslizamiento queda definida por dos rectas cuyos cortes con el eje  $y$  se producen en el semieje positivo. Además, la recta que delimita superiormente la región, que es

$$y = \frac{b}{K - 1}x + \frac{Ky_d - 1}{K - 1},$$

tiene una pendiente mayor que la recta que define el límite inferior,

$$y = \frac{b}{K}x + \frac{Ky_d - 1}{K},$$

por lo que el corte de ambas no se producirá en el semiplano positivo, que es nuestra región permitida.

Para comprobar si los puntos de equilibrio pertenecen o no al dominio de deslizamiento, dado que

$$y_d < \frac{Ky_d - 1}{K - 1},$$

tendremos que sustituir el valor  $y = y_d$  en la recta que define el límite inferior y ver qué valor de  $x$  se despeja. Si lo hacemos, se obtiene

$$x = \frac{1}{b},$$

que se trata de uno de los puntos de corte de la elipse de los puntos de equilibrio con el eje  $x$ . Esto quiere decir que ambos puntos de equilibrio, tanto el inestable como el estable, caen dentro de la región de deslizamiento.

Para dejar más claro todo lo expuesto hasta aquí, representamos gráficamente el dominio de deslizamiento para un valor de  $K = 1,5$  y los valores de los parámetros que tomamos anteriormente para nuestro sistema.

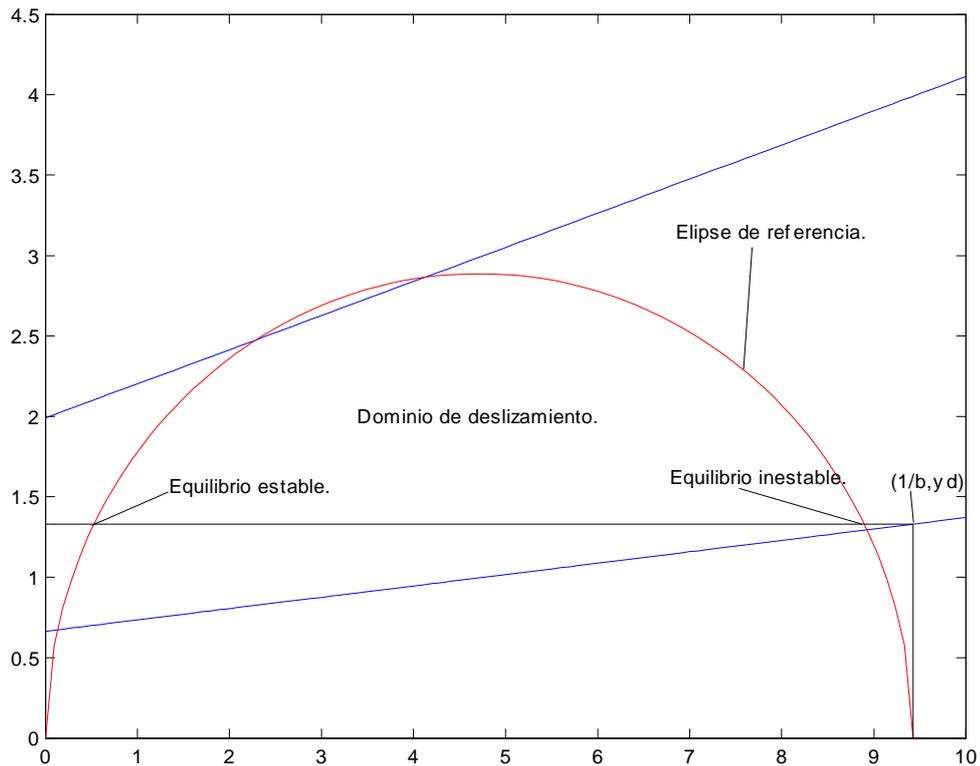


Figura 2.14: Dominio de deslizamiento para  $K = 1,5$ .

### 2.5.2. Caso $K = 1$

Cuando  $K$  es exactamente la unidad, las restricciones (2.13) y (2.14) quedan transformadas en

$$\begin{aligned} 0 &< bx + y_d - 1, \\ y &> bx + y_d - 1. \end{aligned}$$

La primera de las restricciones se cumple siempre al ser  $y_d > 1$  y tanto  $b$  como  $x$  ser cantidades positivas. La segunda define una recta que delimita

inferiormente el dominio de deslizamiento. Si en ella hacemos  $y = y_d$ , de nuevo obtenemos que  $x = 1/b$ , por lo que los puntos de equilibrio están dentro del dominio de deslizamiento.

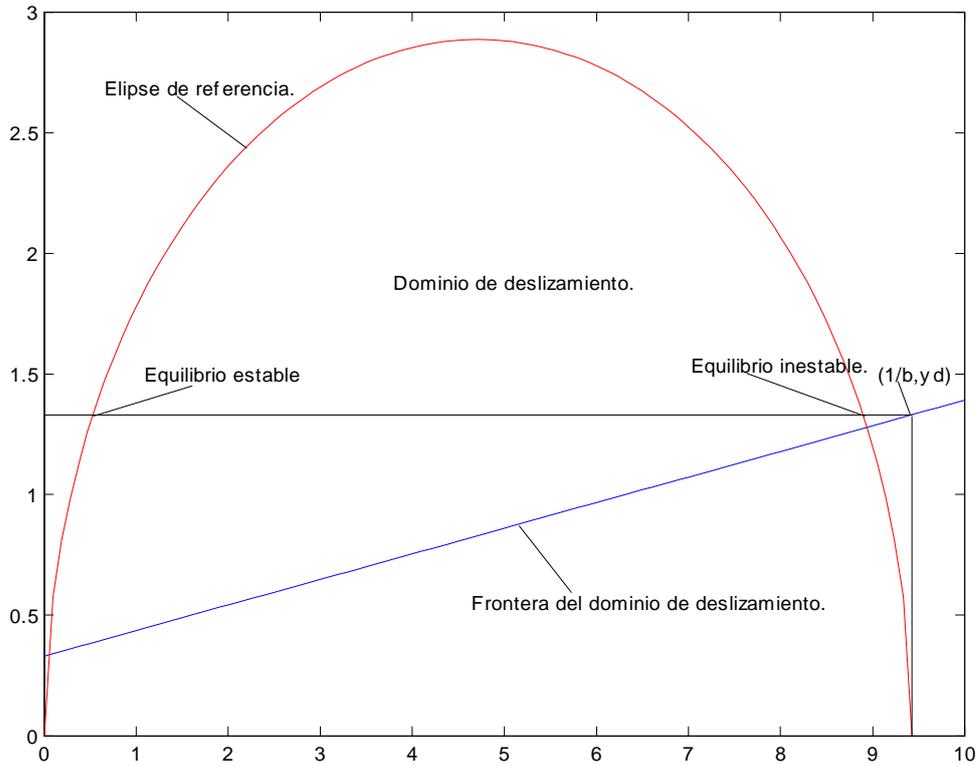


Figura 2.15: Dominio de deslizamiento para  $K = 1$ .

### 2.5.3. Caso $K < 1$

Si  $K$  resulta ser una cantidad menor que la unidad en primer lugar vemos que el signo de la desigualdad (2.13) cambia de sentido, dado que al despejar  $y$  habremos tenido que multiplicar por la cantidad negativa  $K - 1$ . Por este motivo, resulta que ahora, la pareja de restricciones que definen el dominio de deslizamiento es

$$y > \frac{b}{K-1}x + \frac{Ky_d - 1}{K-1}, \quad (2.15)$$

$$y > \frac{b}{K}x + \frac{Ky_d - 1}{K}. \quad (2.16)$$

Por su parte, el numerador del término independiente de ambas expresiones cambia ahora de signo para un valor de  $K = 1/y_d$ . Hay entonces que distinguir entre otros tres subcasos.

**Caso  $K > 1/y_d$**

La expresión  $Ky_d - 1$  es positiva en este caso, y el término independiente de la restricción (2.15) negativo, así como la pendiente de la recta que define. Por tanto, ésta se encontrará en la parte negativa del eje  $y$  cumpliéndose entonces dicha restricción para todo valor de  $y$  positivo.

Para la restricción (2.16) tenemos que define una recta que delimita inferiormente la región de deslizamiento. Haciendo  $y = y_d$  en dicha recta, una vez más resulta que  $x = 1/b$ , y los puntos de equilibrio estarán en la región de deslizamiento.

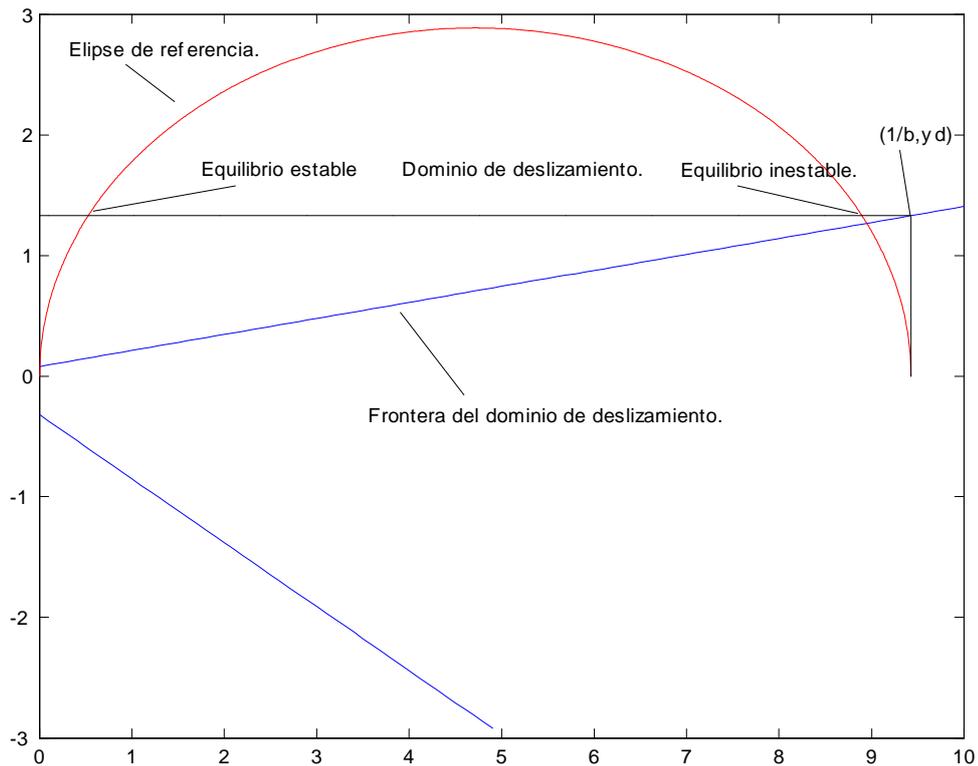


Figura 2.16: Dominio de deslizamiento para  $K = 0,8$ .

### Caso $K = 1/y_d$

Los términos independientes de ambas restricciones serán ahora nulos, cortándose las rectas que definen en el origen, una con pendiente negativa, la (2.15), y otra con pendiente positiva, la (2.16).

Se trata pues este caso de uno análogo al anterior pero con la recta frontera partiendo del origen.

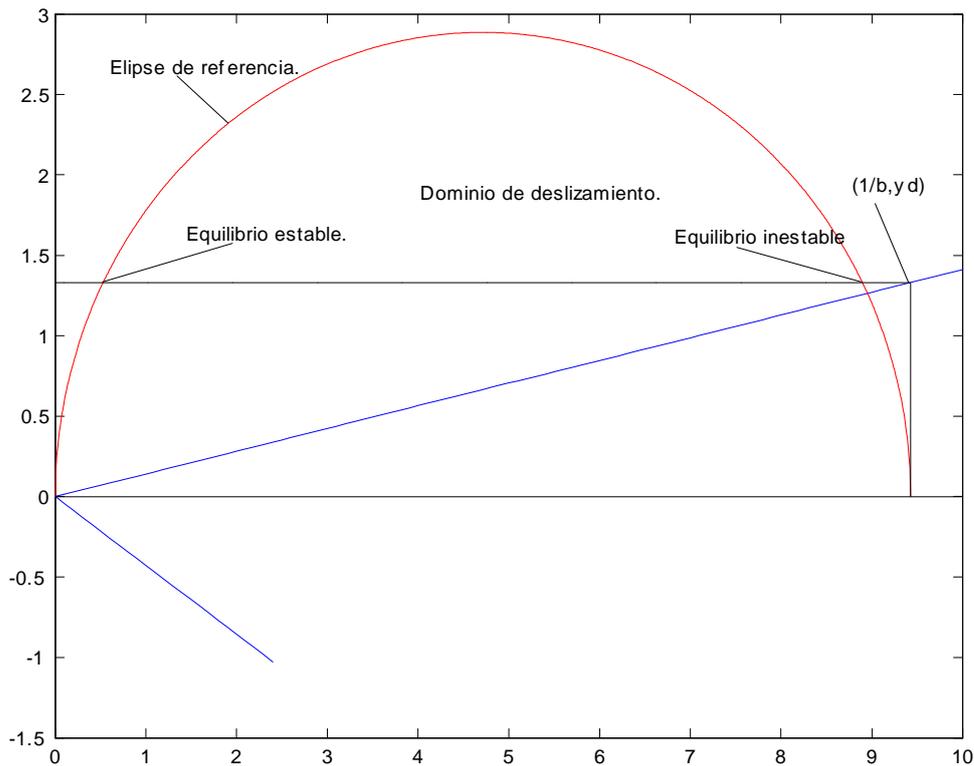


Figura 2.17: Dominio de deslizamiento para  $K = 1/y_d = 0,7519$ .

### Caso $K < 1/y_d$

En este último caso, el signo de los términos independientes se invierte, es decir, ahora la recta definida por (2.15) corta al eje  $y$  en su parte positiva siendo su pendiente negativa, y la recta definida por (2.16) en su zona negativa siendo su pendiente positiva. Ambas rectas se cortarán entonces en un punto que, en principio, podría pertenecer al semiplano positivo. Si hacemos

$$\frac{b}{K-1}x + \frac{Ky_d - 1}{K-1} = \frac{b}{K}x + \frac{Ky_d - 1}{K},$$

despejando se tiene que

$$x = \frac{1 - Ky_d}{b}.$$

Si sustituimos dicho valor de  $x$  en las expresiones de las rectas vemos que en ambas se llega a que  $y = 0$ , por lo que el punto de corte se encuentra justo en el eje  $x$ .

La región de deslizamiento está pues limitada inferiormente por la restricción (2.15) para un valor de  $x$  inferior al obtenido, y por la restricción (2.16) para un valor de  $x$  superior.

Para terminar este apartado, teniendo en cuenta que el punto de corte de la recta definida por (2.15) con el eje  $y$  es menor que el valor de  $y_d$ , para saber si los puntos de equilibrio están en el dominio de deslizamiento hay que sustituir  $y = y_d$  en la recta definida por (2.16), obteniéndose el mismo resultado que para todos los casos anteriores.

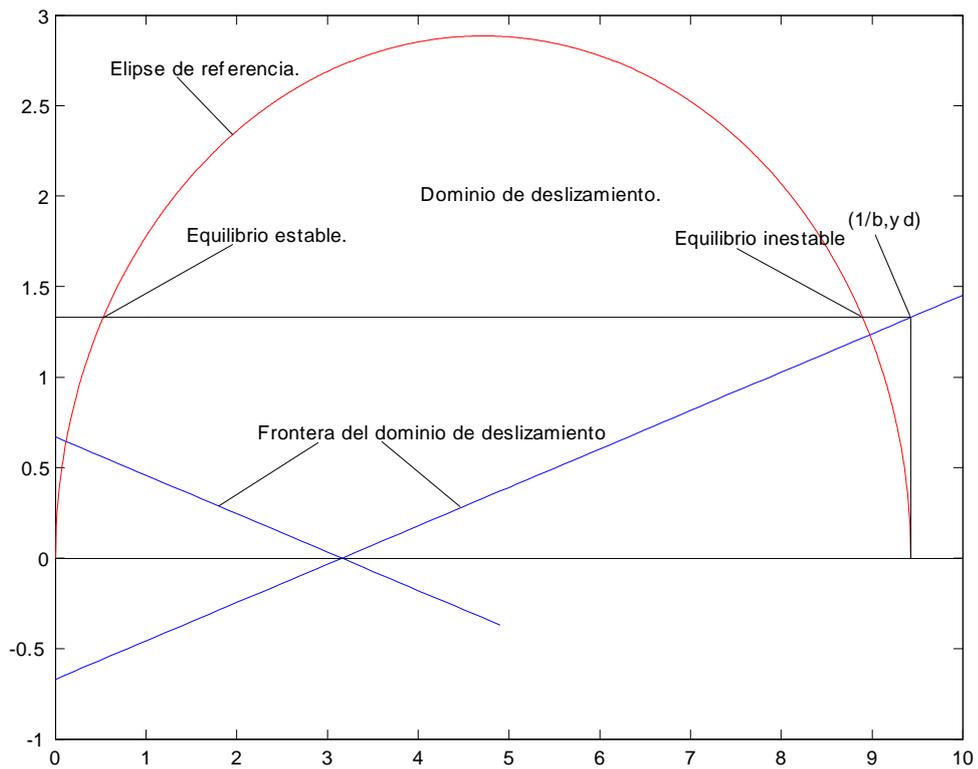


Figura 2.18: Dominio de deslizamiento para  $K = 0,5$ .

# Capítulo 3

## Análisis de la bifurcación

### 3.1. Introducción

Una vez que hemos establecido cual es la estrategia de control a seguir, obtenido las ecuaciones matemáticas que modelan el circuito controlado y extraído de ellas toda la información correspondiente en cuanto a las condiciones que se deben cumplir para que se pueda alcanzar un equilibrio estable, es el momento de comenzar a analizar cuál va ser el comportamiento del circuito frente a variaciones del parámetro  $K$ .

En concreto, hemos hecho notar que cuando se cumpla la relación (2.12) se producirá un fenómeno bifurcativo cuya primera consecuencia es la pérdida de estabilidad del pseudo-equilibrio para valores de  $K$  mayores al valor crítico. Comenzaremos pues caracterizando el tipo de bifurcación que nos encontramos para dicho valor de  $K$ .

En primer lugar, teniendo en cuenta que dicha bifurcación se producirá cuando el sistema se encuentre en modo deslizante, es decir, sobre la superficie del plano de deslizamiento, para llevar a cabo el estudio de la bifurcación podemos considerar las ecuaciones obtenidas para la dinámica de deslizamiento (2.8). Además, podemos proyectar las ecuaciones sobre el plano  $(x, y)$ , lo que en la práctica nos lleva a tomar únicamente las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -K(y - y_d), \\ \dot{y} &= -ay + \frac{x}{y} - b\frac{x^2}{y} + K(y - y_d)\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

En la segunda de las ecuaciones anteriores vemos que hay términos que tienen el denominador igual a la variable  $y$ . Para simplificar y obtener un sistema polinomial, podemos trabajar con el sistema equivalente que resulta de multiplicar el segundo miembro de ambas ecuaciones por dicha variable,

lo cual es admisible siempre que  $y > 0$ , y equivale a hacer el cambio

$$\frac{d}{d\tau} = y \frac{d}{dt},$$

o lo que es lo mismo

$$\tau = yt.$$

El resultado es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -Ky(y - y_d), \\ \dot{y} &= -ay^2 + x - bx^2 + K(y - y_d)x.\end{aligned}$$

El comportamiento de estas dos ecuaciones es el mismo que el de las anteriores con la salvedad de que hemos incluido un equilibrio artificial en el origen como consecuencia del cambio de variable realizado. En cualquier caso insistimos en que nos interesa sólo la región con  $y > 0$ . El siguiente paso es precisamente hacer una traslación para llevar nuestro equilibrio real al origen, lo cual se consigue realizando el cambio de variable

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - \bar{x}_-, \\ \tilde{y} &= y - y_d.\end{aligned}$$

y nuestras ecuaciones serán de interés para  $\tilde{y} > -y_d$ .

Si tenemos en cuenta que en el equilibrio se cumple (2.9), el sistema de ecuaciones, tras una serie de sencillas manipulaciones, finalmente queda

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= -K\tilde{y}(\tilde{y} + y_d), \\ \dot{\tilde{y}} &= (1 - 2b\bar{x})\tilde{x} + (K\bar{x} - 2ay_d)\tilde{y} + K\tilde{x}\tilde{y} - b\tilde{x}^2 - a\tilde{y}^2,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde se ha obviado el símbolo de las variables  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , así como el subíndice de  $\bar{x}_-$ , dado que a partir de ahora consideraremos siempre únicamente el punto de pseudo-equilibrio de los dos existentes con posibilidades de ser estable.

## 3.2. Caracterización de la bifurcación

Estamos ya en condiciones de poder aplicar el procedimiento detallado en el primer capítulo de este proyecto para caracterizar el tipo de bifurcación asociado al valor crítico  $K_c$  del parámetro  $K$ . En primer lugar, calculamos la matriz jacobiana en el punto de equilibrio y comprobaremos que los autovalores de la misma son un par de complejos conjugados, lo que nos indicara que posiblemente nos encontramos ante una bifurcación de Hopf.

El jacobiano del sistema diferencial (3.1) es

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -K(2y + y_d) \\ -2bx + Ky + 1 - 2b\bar{x} & K\bar{x} - 2ay_d + Kx - 2ay \end{bmatrix} =,$$

que en el origen (punto de equilibrio) queda

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -Ky_d \\ 1 - 2b\bar{x} & K\bar{x} - 2ay_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Ky_d \\ 1 - 2b\bar{x} & \bar{x}(K - K_c) \end{bmatrix}.$$

Dicha matriz tiene como ecuación característica

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & -Ky_d \\ 1 - 2b\bar{x} & K\bar{x} - 2ay_d - \lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(\bar{x}(K - K_c) - \lambda) + Ky_d(1 - 2b\bar{x}) = \\ &= \lambda^2 + \bar{x}(K_c - K)\lambda + Ky_d(1 - 2b\bar{x}) = 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\bar{x}(K - K_c) \pm \sqrt{\bar{x}(K - K_c)^2 - 4Ky_d(1 - 2b\bar{x})}}{2} = \\ &= \frac{\bar{x}(K - K_c)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{x}(K - K_c)}{2}\right)^2 - Ky_d(1 - 2b\bar{x})}. \end{aligned}$$

Si para simplificar introducimos la notación

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\bar{x}(K - K_c)}{2}, \\ \beta &= \sqrt{Ky_d(1 - 2b\bar{x})}, \end{aligned}$$

resulta

$$\lambda = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \beta^2}.$$

Si damos a  $K$  el valor crítico donde se produce la bifurcación, es evidente que el valor de  $\mu$  se anula, mientras que el valor de  $\beta^2$  obviamente es positivo. Se tiene entonces que

$$\lambda = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu) = \mu \pm i\sqrt{\beta^2 - \mu^2},$$

y nos encontramos con una posible bifurcación de Hopf cuyo carácter debemos determinar ahora.

Procederemos entonces a pasar el sistema a la forma canónica de Jordan. Para ello, primero calculamos el autovector de uno de los autovalores de la

matriz jacobiana, por ejemplo el de  $\lambda_1 = \mu + i\omega(\mu)$ , para lo cual resolvemos el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{bmatrix} -\mu - i\omega(\mu) & -\delta \\ 1 - 2b\bar{x} & \mu - i\omega(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\delta = Ky_d$ .

Quedándonos con la primera ecuación y haciendo  $v_1 = 1$  nos queda

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\mu - i\omega(\mu)}{\delta} \end{bmatrix}.$$

A partir de dicho autovector se obtiene la matriz de cambio de base que nos transforma el sistema a su forma canonica como sigue

$$\begin{aligned} v &= p_1 - ip_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\mu}{\delta} \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega(\mu)}{\delta} \end{bmatrix}, \\ P &= [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\mu}{\delta} & \frac{\omega(\mu)}{\delta} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz inversa de  $P$  es

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\omega(\mu)} & \frac{\delta}{\omega(\mu)} \end{bmatrix}.$$

Realizando entonces el cambio de variable

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \frac{\mu}{\omega(\mu)}X + \frac{\delta}{\omega(\mu)}Y \end{bmatrix},$$

las ecuaciones del sistema quedan

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = P^{-1}J(0,0)P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} f(X,Y) \\ g(X,Y) \end{bmatrix} = A_\mu \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \end{bmatrix},$$

donde  $A(\mu)$  es la matriz de la parte lineal y las funciones  $f(X, Y)$  y  $g(X, Y)$  recogen la parte no lineal de las ecuaciones (3.1) una vez que hemos sustituido en las originales los siguientes valores

$$\begin{aligned} x^2 &= X^2, \\ xy &= -\frac{\mu}{\delta}X^2 + \frac{\omega(\mu)}{\delta}XY, \\ y^2 &= \frac{\mu^2}{\delta^2}X^2 + \frac{\omega(\mu)^2}{\delta^2}Y^2 - \frac{2\mu\omega(\mu)}{\delta^2}XY, \end{aligned}$$

resultantes de aplicar el cambio de variables anterior a los términos cuadráticos. Se obtiene que

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= -\frac{\mu^2}{\delta y_d} X^2 - \frac{\omega(\mu)^2}{\delta y_d} Y^2 + \frac{2\mu\omega(\mu)}{\delta y_d} XY, \\ g(X, Y) &= \left(-\frac{a\mu^2}{\delta^2} - \frac{\mu}{y_d} - b\right) X^2 - \frac{a\omega(\mu)^2}{\delta^2} Y^2 + \left(\frac{2a\mu\omega(\mu)}{\delta^2} + \frac{\omega(\mu)}{y_d}\right) XY. \end{aligned}$$

Las funciones  $F(X, Y)$  y  $G(X, Y)$  recogen los términos no lineales que finalmente resultan de multiplicar por la izquierda por la matriz  $P^{-1}$ .

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= f(X, Y) = -\frac{\mu^2}{\delta y_d} X^2 - \frac{\omega(\mu)^2}{\delta y_d} Y^2 + \frac{2\mu\omega(\mu)}{\delta y_d} XY, \\ G(X, Y) &= \frac{\mu}{\omega(\mu)} f(X, Y) + \frac{\delta}{\omega(\mu)} g(X, Y) = \left(-\frac{\mu^3}{\delta y_d \omega(\mu)} f - \frac{a\mu^2}{\delta \omega(\mu)} - \frac{\delta \mu}{\omega(\mu) y_d} - \frac{b\delta}{\omega(\mu)}\right) X^2 + \\ &\quad + \left(-\frac{\omega(\mu)\mu}{\delta y_d} - \frac{a\omega(\mu)}{\delta}\right) Y^2 + \left(\frac{2\mu^2}{\delta y_d} + \frac{2a\mu}{\delta} + \frac{\delta}{y_d}\right) XY. \end{aligned}$$

Por su parte, la parte lineal del sistema queda

$$A(\mu) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P^{-1} J(0, 0) P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu X - \omega(\mu) Y \\ \omega(\mu) X + \mu Y \end{bmatrix},$$

y el sistema en su forma canónica toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \mu X - \omega(\mu) Y - \frac{\mu^2}{\delta y_d} X^2 - \frac{\omega(\mu)^2}{\delta y_d} Y^2 + \frac{2\mu\omega(\mu)}{\delta y_d} XY, \\ \dot{Y} &= \omega(\mu) X + \mu Y + \left(-\frac{\mu^3}{\delta y_d \omega(\mu)} f - \frac{a\mu^2}{\delta \omega(\mu)} - \frac{\delta \mu}{\omega(\mu) y_d} - \frac{b\delta}{\omega(\mu)}\right) X^2 + \\ &\quad + \left(-\frac{\omega(\mu)\mu}{\delta y_d} - \frac{a\omega(\mu)}{\delta}\right) Y^2 + \left(\frac{2\mu^2}{\delta y_d} + \frac{2a\mu}{\delta} + \frac{\delta}{y_d}\right) XY. \end{aligned}$$

Para proseguir con la caracterización de la bifurcación de Hopf nos interesa sustituir el valor crítico del parámetro en las ecuaciones anteriores, que se corresponde con  $\mu = 0$ , con lo que obtenemos como resultado

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\beta Y - \frac{\beta^2}{K y_d^2} Y^2, \\ \dot{Y} &= \beta X - \frac{b\delta}{\beta} X^2 - \frac{a\beta}{\delta} Y^2 + \frac{\delta}{y_d} XY, \end{aligned}$$

donde los parámetros  $\beta, \delta$  deben evaluarse para el valor crítico de  $K = K_c$ .

La condición de transversalidad se cumple al ser  $\alpha(0) = \mu$  y, por lo tanto

$$\alpha'(0) = 1 \neq 0 \text{ para todo } \mu.$$

Podemos continuar pues calculando los autovectores por la derecha y por la izquierda de la matriz

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{bmatrix},,$$

para  $\mu = 0$

$$A_0 = A(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix},$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\lambda(0) = i\omega(0) = i\beta.$$

Los autovalores vendrán dados respectivamente por

$$\begin{aligned} A_0 q &= \lambda(0)q, \\ A_0^T p &= -\lambda(0)p. \end{aligned}$$

De la primera expresión se obtiene

$$\begin{aligned} -q_2 &= iq_1, \\ q_1 &= iq_2, \end{aligned}$$

de donde se llega a que

$$q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Si operamos análogamente con la segunda expresión el autovector  $p$  queda

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

El motivo por el cual se ha introducido el factor de  $1/2$  en el vector  $q$  es conseguir que el problema quede normalizado, es decir

$$\langle p, q \rangle = 1.$$

Procedemos ahora a calcular el coeficiente  $c_1(0)$  cuyo signo de la parte real determinara el carácter de la bifurcación de Hopf que presenta el sistema. Dicho coeficiente, como ya hemos visto, viene expresado por

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}.$$

En nuestro caso no tenemos términos cúbicos, por lo que  $g_{21} = 0$ . Además, solo nos interesa la parte real del coeficiente:

$$\operatorname{Re}(c_1(0)) = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{2\omega_0}g_{20}g_{11}\right) = -\frac{1}{2\beta}(\operatorname{Re}(g_{20})\operatorname{Im}(g_{11}) + \operatorname{Im}(g_{20})\operatorname{Re}(g_{11})). \quad (3.2)$$

Pasamos entonces a calcular los coeficientes

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle = B_1(q, q) + iB_2(q, q), \\ g_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle = B_1(q, \bar{q}) + iB_2(q, \bar{q}), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B_1(q, q) &= \frac{1}{4}[1, -i] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2\beta^2}{\delta y_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{\beta^2}{2\delta y_d}, \\ B_2(q, q) &= \frac{1}{4}[1, -i] \begin{bmatrix} \frac{-2b\delta}{\beta} & \frac{\delta}{y_d} \\ \frac{\delta}{y_d} & \frac{-2a\beta}{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\beta}{\delta} - \frac{b\delta}{\beta} - i\frac{\delta}{y_d}\right), \\ B_1(q, \bar{q}) &= \frac{1}{4}[1, -i] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2\beta^2}{\delta y_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -\frac{\beta^2}{2\delta y_d}, \\ B_2(q, \bar{q}) &= \frac{1}{4}[1, -i] \begin{bmatrix} \frac{-2b\delta}{\beta} & \frac{\delta}{y_d} \\ \frac{\delta}{y_d} & \frac{-2a\beta}{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -\frac{b\delta}{2\beta} - \frac{a\beta}{2\delta}. \end{aligned}$$

Con esto se tiene que

$$\begin{aligned} g_{20} &= \left(\frac{\beta^2}{2\delta y_d} + \frac{\delta}{2y_d}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{a\beta}{\delta} - \frac{b\delta}{\beta}\right), \\ g_{11} &= -\frac{\beta^2}{2\delta y_d} + \frac{i}{2}\left(-\frac{a\beta}{\delta} - \frac{b\delta}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Si sustituimos en (3.2) el resultado es

$$\operatorname{Re}(c_1(0)) = \frac{1}{8\beta^2\delta^2 y_d}(2a\beta^4 + b\delta^4 + a\beta^2\delta^2).$$

Al ser todos los coeficientes positivos resulta claro que

$$\operatorname{Re}(c_1(0)) > 0,$$

por lo que el tipo de bifurcación de Hopf que presenta el sistema es subcrítica, apareciendo un ciclo inestable que delimita la región de atracción del punto de equilibrio antes de alcanzar el valor de la bifurcación.



# Capítulo 4

## Simulaciones y conclusiones

Para corroborar los resultados obtenidos y obtener algunas implicaciones prácticas vamos a realizar varias simulaciones para ciertos valores de los parámetros del circuito. Comprobaremos, en primer lugar, la existencia del ciclo límite inestable para valores de  $K$  inferiores al valor crítico y cómo el punto de equilibrio se vuelve inestable cuando superamos dicho valor.

Si consideramos los siguientes valores típicos para los elementos que componen el circuito

$$\begin{aligned}L &= 2000 \mu H, \\C &= 100 \mu F., \\r_L &= 0,25 \Omega, \\R &= 20 \Omega,\end{aligned}$$

los parámetros adimensionalizados resultan

$$\begin{aligned}a &= 0,22, \\b &= 0,06.\end{aligned}$$

La intensidad en el punto de equilibrio y el valor de bifurcación del parámetro  $K$  serán en este caso

$$\begin{aligned}\bar{x}_- &= 0,40, \\K &= 1,46.\end{aligned}$$

Por su parte, los valores normalizados correspondientes a las condiciones iniciales del circuito son

$$\begin{aligned}x &= 0, \\y &= 1, \\z &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Además, vamos a considerar que la tensión de entrada es de  $9V$  y a la salida de  $12V$ , por lo que  $y_d = 1,33$ . Para poder comprobar la existencia del ciclo límite inestable, y ver que efectivamente estamos ante la presencia de una bifurcación de Hopf subcrítica, simulamos realizando una integración hacia atrás partiendo de unas condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio, que si se usan las ecuaciones (3.1) resulta ser el origen una vez que se ha realizado la translación correspondiente, y tomando un valor del parámetro  $K$  menor al crítico, por ejemplo  $K = 1,42$ .

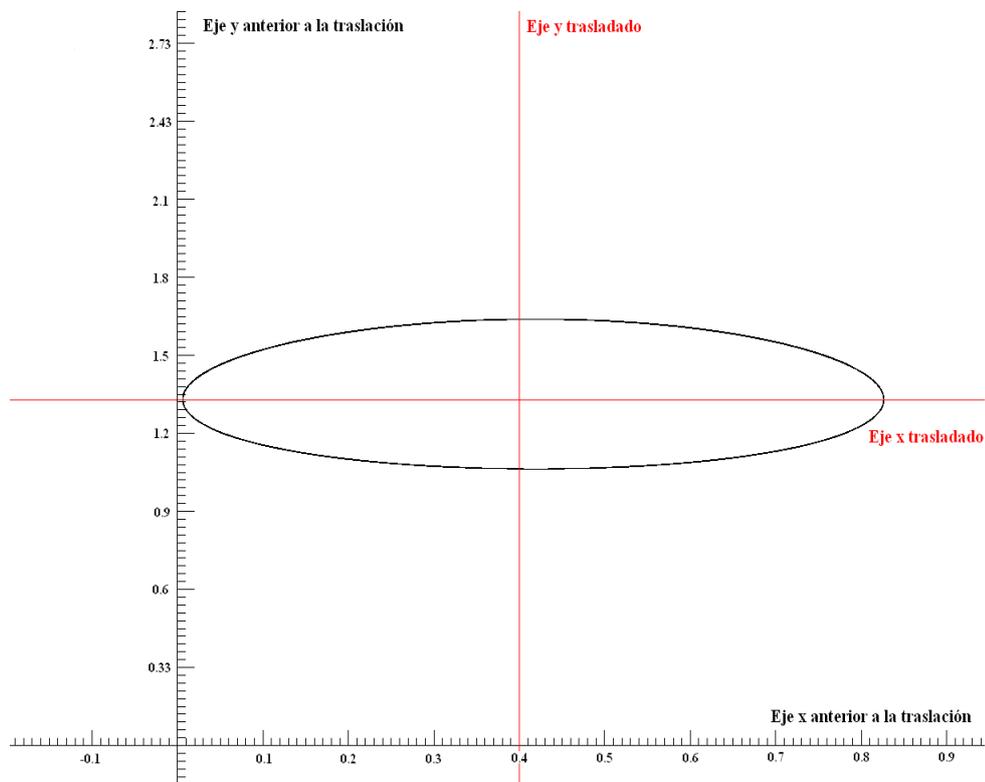


Figura 4.1: Ciclo límite para  $K = 1,42$ . Se encuentra completamente dentro de la región permitida.

Hay que recordar que la zona donde  $x < 0$  para los ejes originales no es alcanzable dado que la intensidad por la bobina nunca llega a ser negativa. Dado que el tamaño del ciclo límite será mayor cuanto menor sea el valor del parámetro  $K$ , podemos considerar aproximadamente que el valor mínimo para que el ciclo límite completo esté dentro de la región permitida es el que hemos tomado para la simulación de la figura 4.1. Si tenemos cualquier otro valor más pequeño, parte del ciclo estaría en la región donde  $x < 0$ , tal y

como se observa en la figura 4.2.

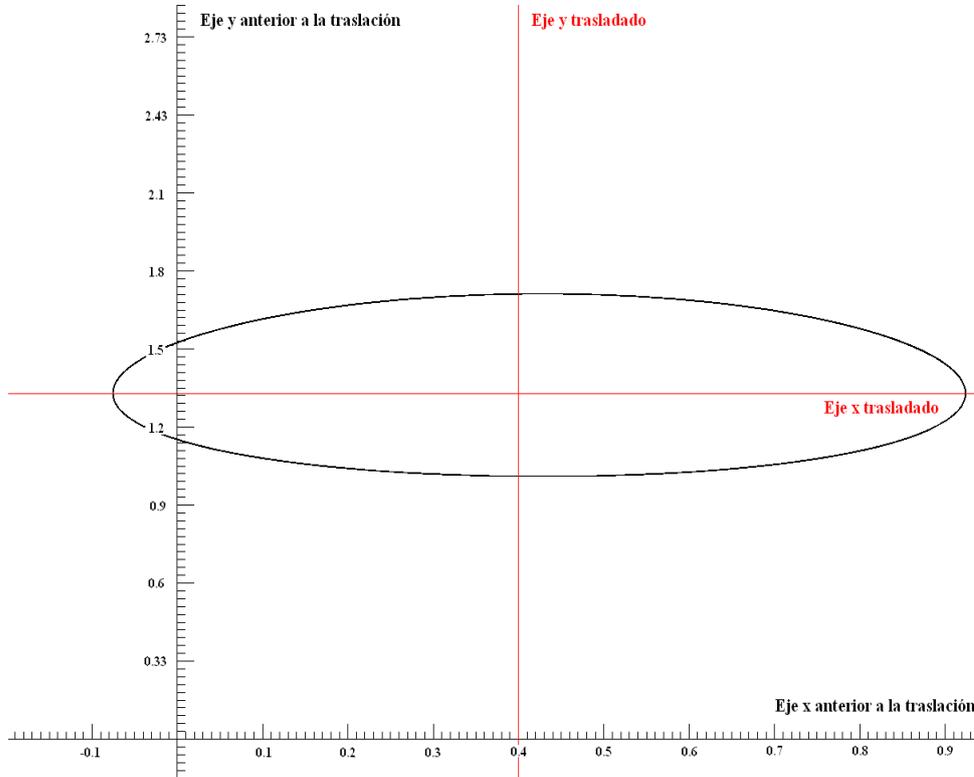


Figura 4.2: Ciclo límite para  $K = 1,4$ . Se observa que se cruza con el plano  $x = 0$  para dicho valor del parámetro.

Mientras el ciclo límite anterior esté totalmente contenido en la región admisible ( $x < 0, y < 0$ ) del plano de deslizamiento, dicho ciclo delimita la cuenca de atracción del punto de operación deseado. Es por tanto la región de seguridad donde desearíamos llegarán las demás órbitas que no están en el plano de deslizamiento. Surgen entonces de forma natural varias cuestiones que deberían ser resueltas para garantizar la robustez del diseño. En primer lugar habría que analizar si, partiendo de las condiciones iniciales de reposo, a saber  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ , la evolución natural del sistema nos lleva a un punto interior del ciclo límite. Por otro lado, también es de interés estudiar qué ocurre en el caso de que aparezcan perturbaciones en las condiciones de funcionamiento que saquen al sistema de la posición de equilibrio, es decir, si se volvería a caer en la región segura del plano de deslizamiento o si, por el contrario, pueden coexistir dinámicas estables aparte de la del equilibrio del punto de operación. La respuesta a estas cuestiones, que exigen un análisis

detallado, se dejan como objeto de estudio para trabajos posteriores.

El hecho de que el sistema realmente pueda presentar varias dinámicas distintas, aparte de la que se da en el plano de deslizamiento, dependiendo del valor de los parámetros del circuito y de lo próximo que estemos del valor crítico de bifurcación, es pues una cuestión muy relevante. Así pues, para los valores de los parámetros escogidos, simularemos el sistema tridimensional completo para distintos valores de  $K$  y observaremos como varía el comportamiento conforme nos vamos acercando a  $K_c$ , partiendo de un valor lejano.

De las simulaciones realizadas, hemos concluido que para valores de  $K$  muy pequeños el sistema alcanza el equilibrio sin entrar en ningún momento en el modo de conducción discontinua, dando lugar a unos valores de tensión y de intensidad con un rizado pequeño (natural, si se tiene en cuenta el efecto de *chattering* propio de cualquier sistema controlado mediante técnicas SMC).

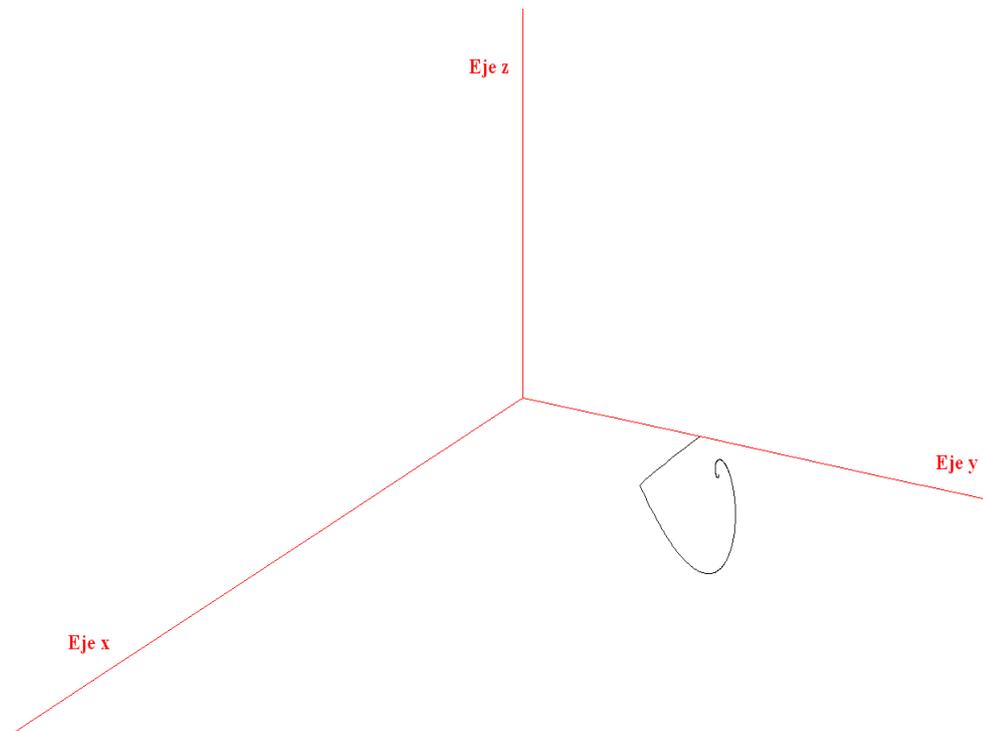


Figura 4.3: Dinámica para  $K = 0,2$ . El sistema alcanza el punto de pseudo-equilibrio estable rápidamente.

En la figura 4.4 se observa también como el equilibrio se alcanza rápidamente sin producirse grandes oscilaciones durante el transitorio. Al aumentar

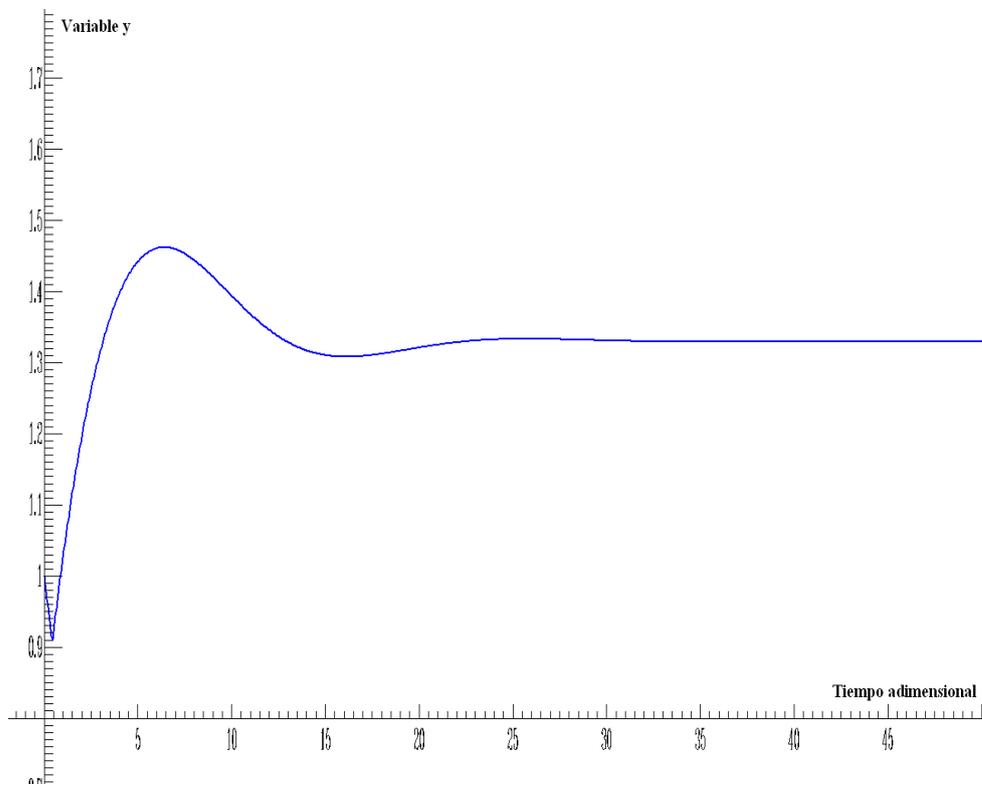


Figura 4.4: Respuesta temporal de la variable  $y$  para  $K = 0,2$ . Para pasar al tiempo en segundos hay que multiplicar por  $10^{-4}\sqrt{2}$

el valor de  $K$ , el transitorio será mayor, ver figuras 4.5 y 4.6, así como las oscilaciones que se producen antes de alcanzar el equilibrio.

Si tomamos un nuevo valor de  $K$  mayor al anterior llegaremos al caso en que, partiendo de las mismas condiciones iniciales, la intensidad de la bobina se anula, es decir, se alcanza el plano  $x = 0$  donde la dinámica del sistema pasa a ser la propia del modo de conducción discontinuo DCM. A partir de ese valor de  $K$  nos encontramos con dos casos distintos. El primero de ellos es el representado en la figura 4.7 en el cual el punto de pseudo-equilibrio es alcanzado de la misma manera que en las simulaciones anteriores, aunque con un transitorio más prolongado. En el segundo, sin embargo, tal y como podemos ver en la figura 4.8, el sistema no alcanza dicho punto de pseudo-equilibrio, sino que es atraído por un nuevo ciclo límite, estable y tridimensional, en el cual queda atrapada la trayectoria del sistema, y el circuito se encontrará trabajando en modo de conducción discontinua.

Por lo tanto queda patente que, aparte de la presencia del ciclo límite

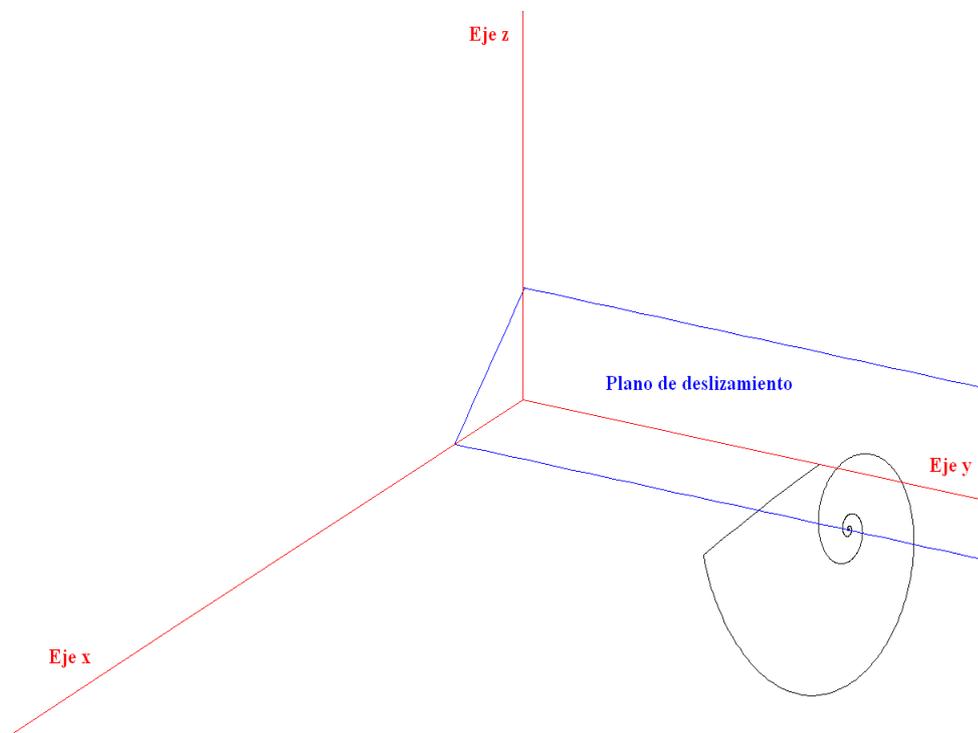


Figura 4.5: Dinámica para  $K = 0,5$ . se alcanza de nuevo el punto de pseudo-equilibrio pero con un transitorio mayor y con más oscilaciones.

inestable de la bifurcación de Hopf, coexisten otros ciclos límites distintos. De hecho, si analizamos conjuntamente los dos casos anteriores, se llega a la conclusión de que aparte del ciclo límite estable que podemos observar en la figura 4.8, debe existir otro ciclo límite inestable, también tridimensional, que delimita la nueva región de atracción del punto de pseudo-equilibrio. Dicha región, en la cual cae la trayectoria del sistema en la figura 4.7, ha quedado bastante reducida con respecto a la que delimita el ciclo límite inestable propio de la bifurcación de Hopf. El estudio de estos nuevos ciclos límites deberá ser realizado en trabajos posteriores.

Si seguimos aumentando el valor de  $K$  alcanzamos un tipo de comportamiento complejo, como por ejemplo sucede si a nuestro sistema le asignamos un valor de  $K = 1,4$ .

Observamos que la trayectoria del sistema que parte de las condiciones iniciales (4.1), no cae nunca dentro de la región delimitada por el ciclo límite inestable de la bifurcación de Hopf y empieza a comportarse caóticamente,

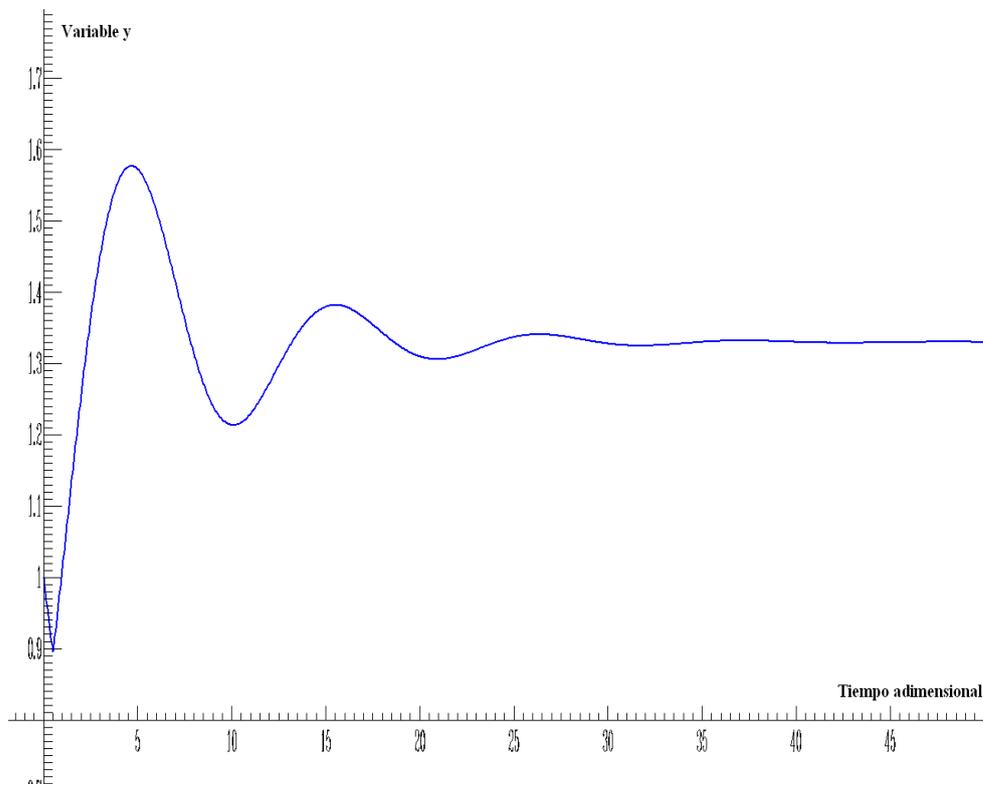


Figura 4.6: Respuesta temporal de la variable  $y$  para  $K = 0,5$ .

describiendo ciclos distintos de manera aparentemente aleatoria. La tensión de salida oscilará alrededor del valor deseado con una amplitud que no es constante, sino que variará de un ciclo a otro.

Por último, queremos comentar otra particularidad a tener en cuenta en el correcto diseño de nuestro circuito. Si tomamos ahora un valor de  $K = 1,5$ , podemos observar en la figura 4.12 que el circuito no llegue a comenzar a conmutar.

El hecho de que en nuestro caso particular el valor de  $K$  sea mayor al crítico no tiene nada que ver con que nos hayamos encontrado con este problema. El motivo por el cual ocurre esto es porque al variar el valor de  $K$ , estamos cambiando también la pendiente del plano de deslizamiento, de forma que a mayor  $K$  menos pendiente y, por tanto, más horizontal es el plano. Por su parte, el circuito parte de las condiciones iniciales (4.1) en el semiespacio inferior al plano de deslizamiento, y con  $\dot{z} < 0$ , al ser  $y_0 < y_d$ . Entonces, para que la trayectoria que sigue el circuito al arrancar llegue a caer sobre el plano de deslizamiento es necesario que éste tenga una pendiente mínima.

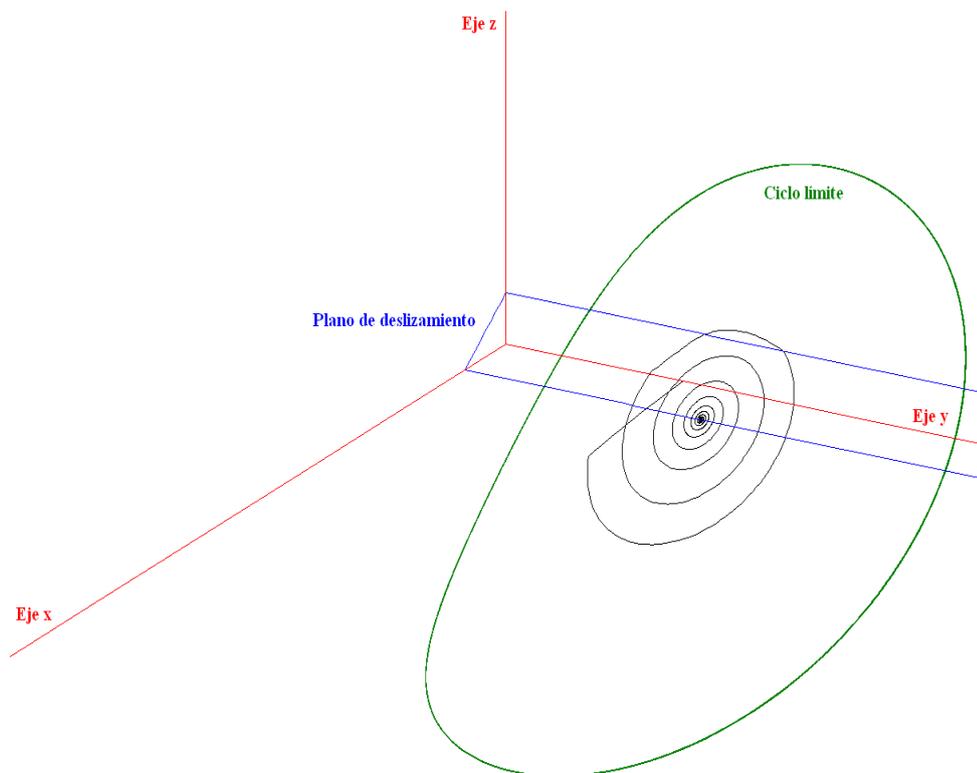


Figura 4.7: Dinámica para  $K = 1$ . Se llega al punto de pseudo-equilibrio pasando previamente por el plano  $x = 0$ .

Habrá que tener especial cuidado al elegir los valores de los componentes del circuito, para que este fenómeno no se produzca para valores de  $K$  demasiado pequeños, de manera que tengamos un rango de valores de dicho parámetro suficientemente amplio en el que el circuito tenga un comportamiento adecuado.

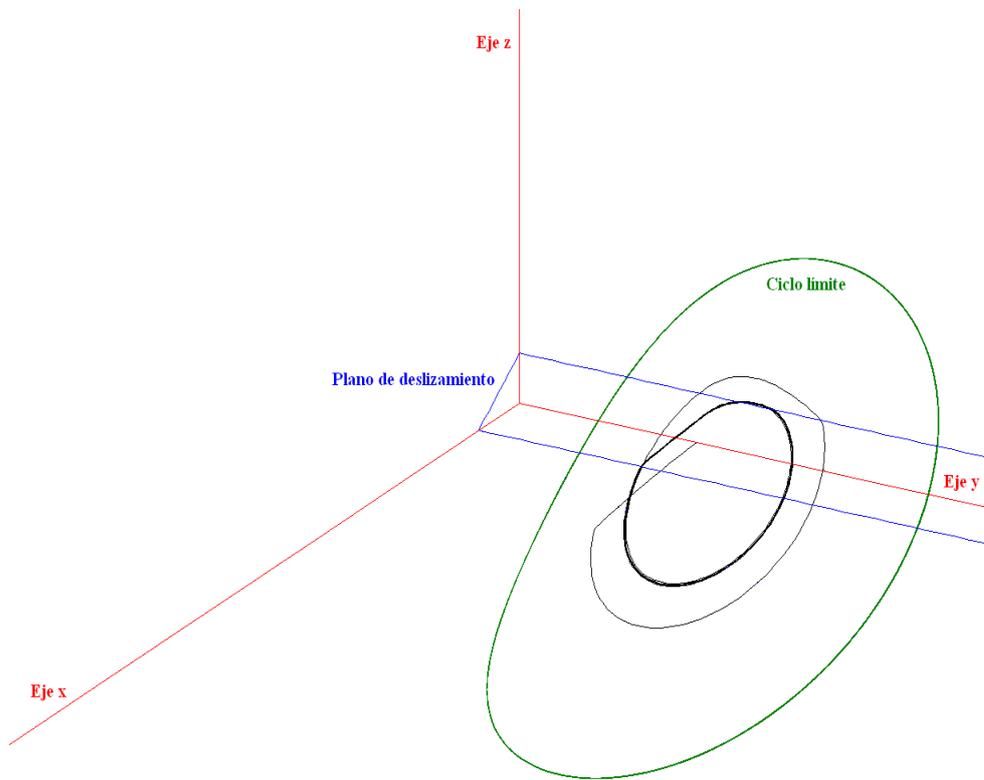


Figura 4.8: Dinámica para  $K = 1,1$ . El sistema, en régimen permanente, describe una órbita periódica estable.

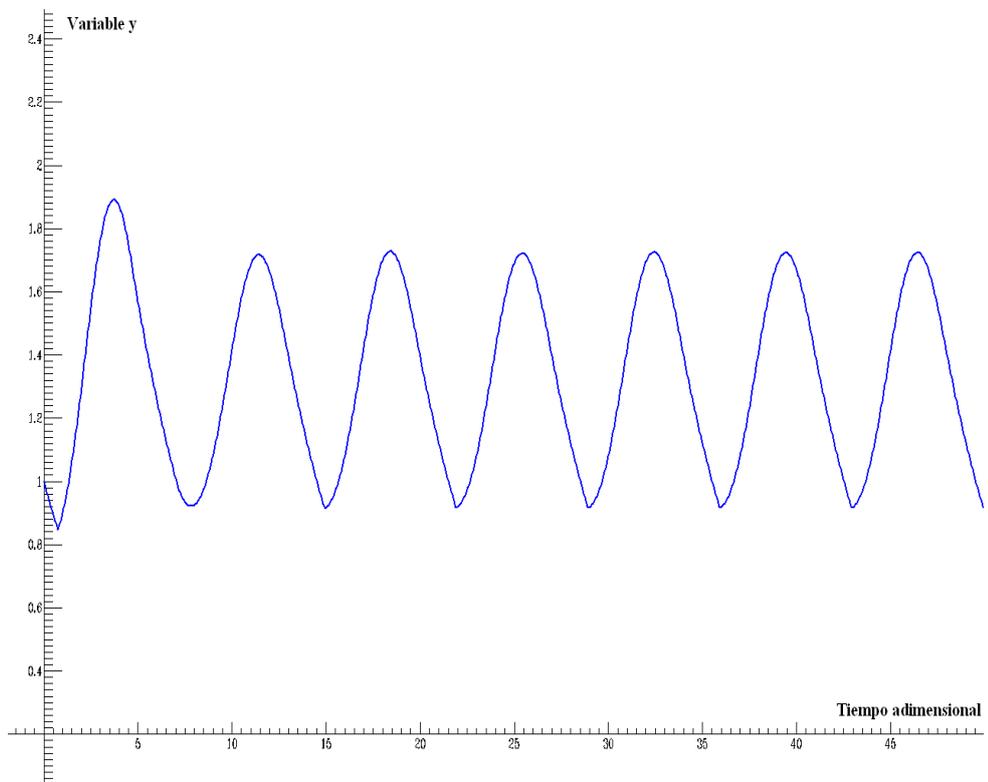


Figura 4.9: Respuesta temporal para  $K = 1,1$ .

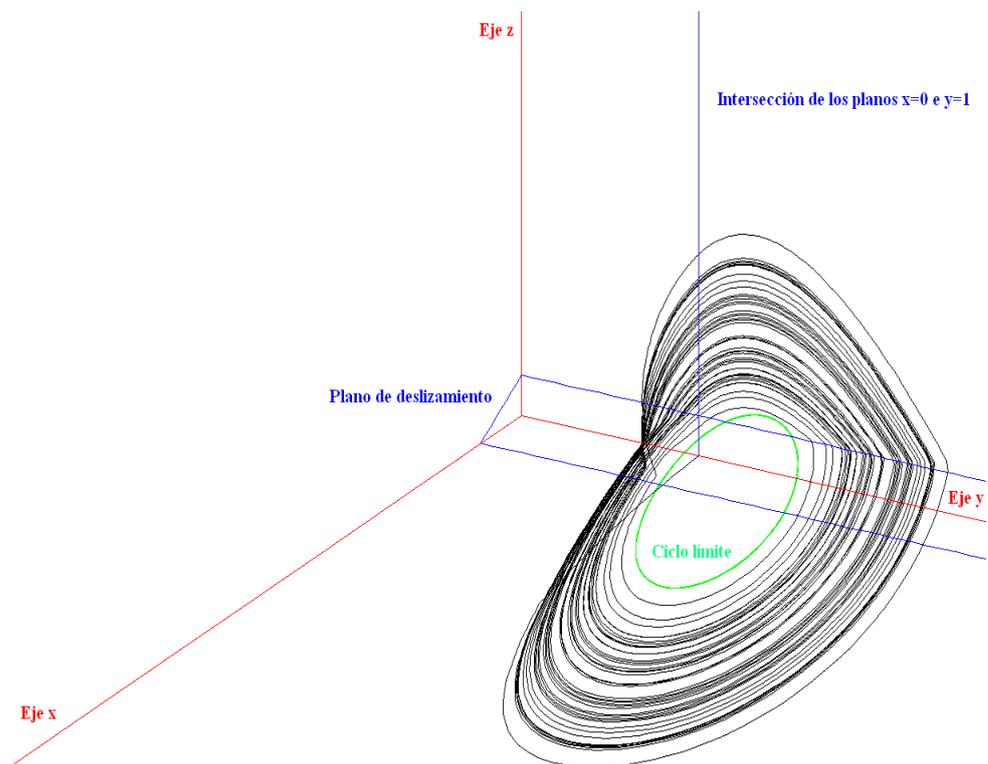


Figura 4.10: Dinámica para  $K = 1,4$ . El sistema presenta un comportamiento caótico, describiendo de manera aparentemente aleatoria, distintas órbitas en una región acotada del espacio de estados. Este comportamiento coexiste con el pseudo-equilibrio estable.

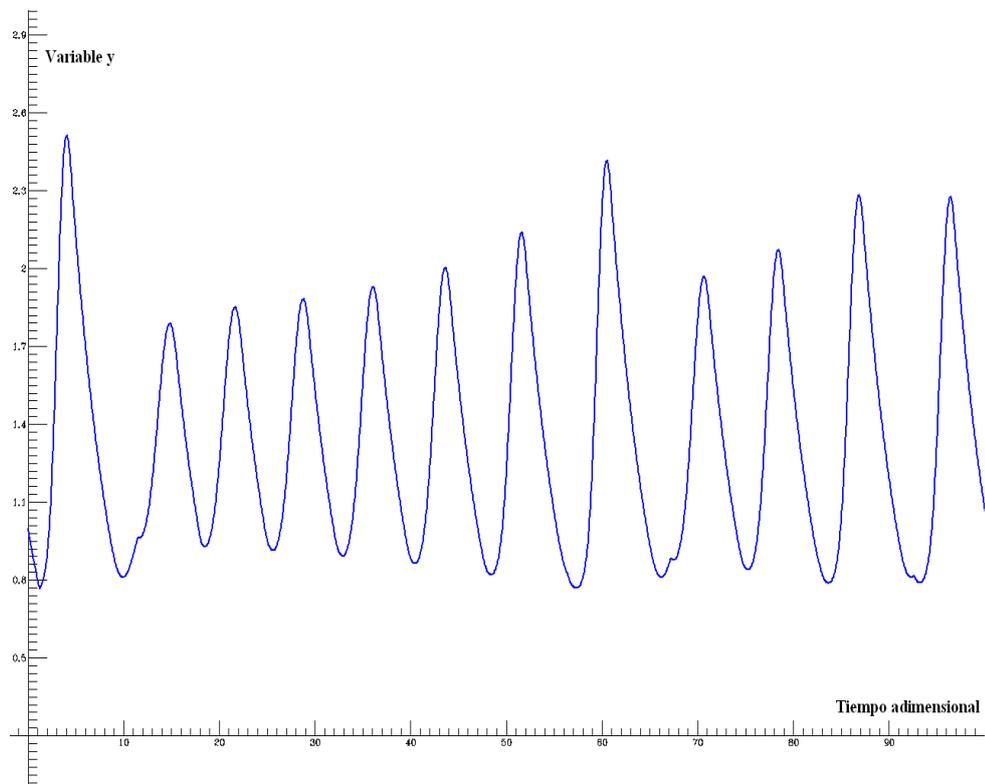


Figura 4.11: Respuesta temporal para  $K = 1,4$ .

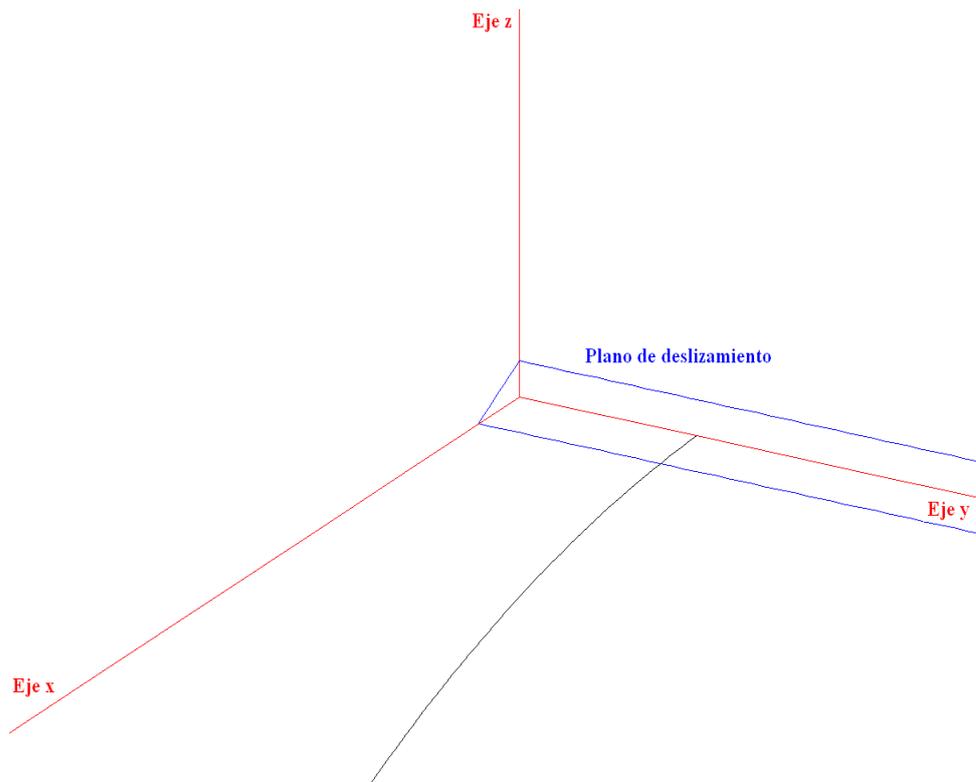


Figura 4.12: Dinámica para  $K = 1,5$ . El sistema no llega a conmutar cuando se parten de las condiciones de reposo.



# Bibliografía

- [1] P. Noguero Blanco, Análisis de la bifurcación de Hopf en el Regulador Centrifugo de Watt, Proyecto Fin de Carrera, E.T.S.I. Sevilla (2006).
- [2] Maria Isabel Arteaga Orozco, Control no lineal de convertidores conmutados CC/CC: Análisis de prestaciones y verificación experimental, Tesis Doctoral Universidad Politecnica de Cataluña (2006).
- [3] Y. A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer-Verlag, New York, (2004).
- [4] L. S. Pontryagin, Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, (1962)
- [5] F. B. Cunha, D. J. Pagano, U. F. Moreno, Sliding Bifurcations of Equilibria in Planar Variable Structure Systems, IEEE (2003).
- [6] D. J. Pagano, Enrique Ponce, Sliding bifurcations in a DCM boost converter controlled by a SMC strategy. Preprint , 2008.