

Proyecto Fin de Carrera

**ESTUDIO ANALÍTICO Y EXPERIMENTAL DE LA DINÁMICA
PROPIA DE UNA BICICLETA**

Autor: Antonio Martín Recuero

Tutor: D. José Luis Escalona Franco

Ingeniería Industrial

Mayo de 2009

Índice de contenidos

1	OBJETIVOS	6
2	INTRODUCCIÓN	8
3	ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UNA BICICLETA	9
3.1	Validez	9
3.2	Características del modelo	9
3.3	Obtención de las ecuaciones	9
3.3.1	Selección de coordenadas	9
3.3.2	Transformación de coordenadas	12
3.3.2.1	Orientación y velocidades angulares	12
3.3.2.2	Posición y velocidad de traslación de los sólidos	15
3.3.3	Restricciones cinemáticas	17
3.3.3.1	Restricciones de contacto	18
3.3.3.2	Restricciones de rodadura sin deslizamiento	20
3.3.3.3	Restricción de movilidad	21
3.3.3.4	Grados de libertad del sistema	22
3.4	Ecuaciones del movimiento	22
3.4.1	Energía cinética	23
3.4.2	Fuerzas de inercia	24
3.4.3	Fuerzas generalizadas de gravedad	25
3.5	Ecuaciones del movimiento en coordenadas independientes	25
3.6	Linealización	27
3.7	Cálculo de la estabilidad	28
4	ADQUISICIÓN DE DATOS	30
4.1	Introducción	30

4.2	Características técnicas principales de los sensores	30
5	RESULTADOS EXPERIMENTALES	32
5.1	Introducción	32
5.2	Obtención de centros de gravedad	32
5.3	Obtención de algunos parámetros	34
5.3.1	Masas	34
5.3.2	Localización de los centros de gravedad	34
5.3.3	Momentos de Inercia. Cálculo mediante barra de torsión	35
5.3.3.1	Introducción	35
5.3.3.2	Cálculo de la rigidez de la barra de torsión	37
5.3.3.3	Cálculo teórico de los tensores de inercia	39
5.3.3.4	Ensayos sobre el cuadro	40
5.3.3.5	Ensayos sobre el manillar	46
5.3.4	Momentos de Inercia. Cálculo mediante sujeción pendular	49
5.3.4.1	Introducción	49
5.3.4.2	Ensayos sobre el Cuadro	51
5.3.4.3	Ensayos sobre el Manillar	52
5.3.4.4	Ensayos sobre la Rueda Trasera	52
5.3.4.5	Ensayos sobre la Rueda Delantera	54
5.3.5	Resumen de los parámetros del sistema	55
5.4	Ensayos dinámicos	56
6	DIAGRAMAS DE CONTINUACIÓN	58
6.1	Introducción	58
6.2	Diagramas de continuación	59
7	CONCLUSIONES	63
8	TRABAJO FUTURO	64
9	ANEXO I. PROGRAMAS DE MATLAB	65
9.1	Introducción	65
9.2	Bicicleta.m	65

9.3	BicicletaNum.m	69
9.4	CalculaMatricesMCK.m	70
9.5	EcMov.m	71
9.6	MasaFuerzas.m	73
9.7	Parametros.m	74
9.8	Restr.m	75
9.9	rHolon.m	75
9.10	rNoHol.m	77

Índice de Figuras

Figura 1. Sistema de referencia y coordenadas de la bicicleta	12
Figura 2. Dos sólidos rígidos en contacto	19
Figura 3. Imagen que muestra uno de los puntos de sujeción del cuadro	33
Figura 4. Localización del centro de gravedad de los sólidos 3 y 4	34
Figura 5. Esquema de la junta Cardan utilizada	35
Figura 6. Modelo usado en el ensayo a torsión	36
Figura 7. Ensayo de prueba con barra de acero	37
Figura 8. Ensayo cuadro 1. Figura 9. Ensayo cuadro 2	41
Figura 10. Ensayo cuadro 3. Figura 11. Ensayo cuadro 4	41
Figura 12. Ensayo 1 del manillar. Figura 13. Ensayo 2 del manillar	47
Figura 13. Modelo usado en los ensayos con sujeción pendular	50
Figura 14. Diagrama de continuación de la bicicleta de [1]	60
Figura 15. Diagrama de continuación de la bicicleta del laboratorio	61
Figura 16. Comparación de autovalores de ambas bicicletas	61
Figura 17. Detalle de la evolución de los autovalores de ambas bicicletas	62

Índice de Tablas

Tabla 1. Frecuencias obtenidas en los ensayos del cuadro	44
Tabla 2. Datos de los ensayos del cuadro	45
Tabla 3. Momentos de inercia del cuadro	46
Tabla 4. Frecuencias obtenidas en los ensayos del manillar	48
Tabla 5. Datos de los ensayos del manillar	49
Tabla 6. Momentos de inercia del manillar	49

1 Objetivos

El presente proyecto fin de carrera pretende el estudio de la estabilidad de una bicicleta sin conductor, en su posición de equilibrio vertical cuando avanza en línea recta, mediante la comparación de los resultados obtenidos a partir de sus ecuaciones de movimiento linealizadas y los ensayos realizados. Para ello, se obtendrán los autovalores del sistema linealizado en el modelo teórico, siendo la velocidad de avance un parámetro del problema, y se obtendrán los parámetros de la bicicleta necesarios y el procedimiento a aplicar para obtener los autovalores mediante un ensayo experimental.

En sucesivos apartados se muestra el proceso de obtención de las ecuaciones de la bicicleta, y su linealización, además de la metodología empleada en la obtención de los parámetros geométricos de la bicicleta y los ensayos experimentales.

2 Introducción

La descripción del movimiento de una bicicleta ha sido motivo de discusión durante muchos años, no siendo hasta tiempos recientes cuando se han obtenido unas ecuaciones que han sido contrastadas por varios métodos [1, 2, 4]. El modelado de la bicicleta, además de ser un reto en tanto que sus ecuaciones no han sido fácilmente deducidas, describe un comportamiento extrapolable al de una motocicleta, y puede ser útil para la comprobación de programas informáticos de Dinámica general.

Otra aplicación de este modelado es el diseño de los elementos que componen el vehículo. Hasta hace unos años, el diseño se había basado en la experiencia, mientras en la actualidad es posible realizar análisis de sensibilidad frente a algunos parámetros, hecho de especial interés para conseguir un vehículo más estable a ciertas velocidades. De este modo el diseño de la bicicleta puede adecuarse a la masa del ciclista, a su pericia y al tipo de uso que vaya a realizar del mecanismo.

Trabajos recientes publicados por *Meijaard et al* [1] y *Kooijman et al* [2], cuyo contenido está estrechamente ligado al trabajo desarrollado en este estudio, han servido de estímulo para que en la Universidad de Sevilla se inicie un trabajo análogo con objetivos docentes. Este trabajo no sólo se reduce a los objetivos de este proyecto fin de carrera, sino que abarca unos más ambiciosos que, en primer término, pasan por llevar a cabo el *trabajo futuro* que se propone en estas páginas. Los resultados de estos estudios podrán ser mostrados en prácticas para alumnos de Ingeniería Industrial donde, de un modo gráfico, puedan apreciar el potencial de algunos conceptos impartidos en clase.

No se ha tenido en cuenta en este trabajo la influencia decisiva del ciclista en la dinámica del sistema. Esta influencia no sólo se limita al aporte de masa e inercia al cuadro de la bicicleta, sino que es la base del control sobre la estabilidad en la bicicleta, ejerciendo un control realimentado con la realidad dinámica del vehículo en cada instante.

3 Ecuaciones del Movimiento de una Bicicleta

3.1 Validez

Las ecuaciones que se desarrollan analíticamente en este trabajo se fundamentan en el modelado primigenio de *Whipple* de una bicicleta [6]. Su solución, tanto en su linealización como en la integración numérica de las ecuaciones no lineales, presenta una buena concordancia con los resultados obtenidos por *Meijaard et al* [1], cuya corrección puede considerarse comprobada. Por lo demás, la validez de las ecuaciones y resultados mostrados con posterioridad se ciñe al cumplimiento de las hipótesis del modelo utilizado, que se detallan en el subapartado siguiente.

3.2 Características del modelo

El modelo de *Whipple* consiste en suponer la bicicleta como un sistema formado por cuatro sólidos rígidos que se encuentran idealmente articulados. De este modo, la bicicleta estará compuesta por las ruedas delantera y trasera, el cuadro y el manillar. Se considerará que los sólidos poseen una simetría respecto al plano vertical (considerando la bicicleta en la posición de equilibrio superior) o de izquierda a derecha. Las ruedas serán axisimétricas y poseerán un movimiento de rodadura sin deslizamiento con el suelo, produciéndose el contacto entre ambos sólidos infinitamente rígidos en un punto. La distribución de la masa y la geometría de los sólidos podrán corresponderse con cualquier modelo de bicicleta, interviniendo éstas en el valor de los parámetros del sistema, tales como las masas y los tensores de inercia. El conjunto de hipótesis anteriores construye un sistema sin disipación de energía, en el que no hay resistencia aerodinámica. Además, se supondrá que la bicicleta avanza por un terreno llano y liso.

Se infiere por tanto que existen factores de importancia no incluidos en el modelo. Estos factores pueden ser, por ejemplo, la acción del ciclista como parte actuante en la dinámica del sistema, los posibles amortiguadores incluidos en una bicicleta comercial, el rozamiento en los pares cinemáticos y el comportamiento real del contacto neumático-suelo.

3.3 Obtención de las ecuaciones

3.3.1 Selección de coordenadas

Cada elección de las coordenadas del problema lleva aparejada un grado de complicación matemática de las ecuaciones resultantes. De hecho, dado que es un problema cuya resolución no es trivial, muchos de los autores que se han enfrentado al problema de la bicicleta mediante este modelo han utilizado un conjunto de coordenadas distinto, obteniendo unos resultados cuya veracidad no siempre es fácil de conocer [1]. En este subapartado se presentan todas las coordenadas intervinientes en las ecuaciones obtenidas, estando este conjunto de coordenadas seleccionadas relacionado con el modo de imponer las restricciones del sistema.

Con el objeto de identificar los posibles movimientos de los sólidos rígidos que integran el sistema, la elección de coordenadas se basará en un dibujo de la bicicleta en posición arbitraria, donde la identificación de las coordenadas del sistema pueda realizarse con facilidad (ver figura 1).

El sistema de referencia $\langle XYZ \rangle$ es un sistema de referencia global, al que se referirá la energía cinética en el problema. Existen dos sistemas de referencia intermedios $\langle x_{i1} y_{i1} z_{i1} \rangle$ y $\langle x_{i2} y_{i2} z_{i2} \rangle$ que definen el plano de la bicicleta que contiene la rueda trasera, el cuadro y el eje del manillar. Por último, cada sólido rígido tiene asociado un sistema de referencia local en su centro de gravedad. Estos sistemas locales se representan mediante la terna $\langle x_i y_i z_i \rangle$, donde el subíndice i toma el valor de cada uno de los cuatro sólidos: 2, 3, 4 ó 5. Como puede observarse en la figura 1, estos sólidos se corresponden con la rueda trasera, el cuadro, el manillar y la rueda delantera, respectivamente.

Las coordenadas que se utilizan para definir la posición y velocidad de todos los sólidos de la bicicleta se detallan en los siguientes puntos:

1. En el sistema global de coordenadas, situamos el punto de contacto de la rueda trasera en el punto C , formado por las componentes x_C e y_C . De este modo aseguramos el contacto de la rueda trasera con el terreno llano y liso.
2. El ángulo de guiñada φ viene definido por la intersección entre el eje X y el x_{i1} , y permite el cambio de orientación de los sólidos 2, 3 y 4 en el plano horizontal.
3. El ángulo de vuelco θ permite la inclinación lateral de la bicicleta para cierto ángulo de guiñada, estando definido este ángulo como el formado por el eje z_{i1} y el z_{i2} . Los ángulos de guiñada y vuelco definen el plano que contiene al cuadro en la figura 1.
4. El ángulo de rodadura ψ es el que forma el eje z_2 asociado al sistema de referencia del sólido 2 con el eje z_{i2} , y define la rotación local de la rueda.
5. El eje z_3 del cuadro forma un ángulo β con el eje z_{i2} del segundo sistema de referencia intermedio. Este ángulo recoge la rotación del sólido 3 alrededor del sólido 2 causada por la variación del ángulo de giro del manillar γ .

6. El ángulo de dirección de la bicicleta γ es el que forma el eje x del sistema de referencia local 4 con el eje x del sistema de referencia 3. Se trata de una rotación simple debida a la orientación del eje z_3 , paralelo a z_4 .
7. El ángulo de rotación local o de rodadura de la rueda delantera es ε . Es el ángulo que forma la dirección z_5 respecto de la z_4 .

El conjunto de estas ocho coordenadas definen unívocamente la posición y orientación de los sólidos de la bicicleta modelada en el sistema de referencia global. Estas coordenadas se denominan generalizadas, y llevan asociadas una determinada inercia en el movimiento de la bicicleta. El siguiente vector recoge las ocho coordenadas mencionadas:

$$\mathbf{q} = [x_c \ y_c \ \varphi \ \theta \ \psi \ \beta \ \gamma \ \varepsilon]^T \quad (1)$$

No obstante, será necesaria la introducción de una coordenada más, no generalizada, y que facilitará la imposición de contacto de la rueda delantera. La coordenada ξ es un parámetro asociado al contacto de la rueda delantera que ayuda a localizar el punto de contacto y la tangente en ese punto de la rueda delantera. El parámetro ξ determina la orientación del radio R que contiene al punto de contacto respecto del eje local x_5 . Pese a no tener influencia en la inercia, esta coordenada generará dos ecuaciones de restricción relacionadas con el resto de coordenadas, reduciendo en uno el número de grados de libertad del sistema.

El nuevo vector de coordenadas del sistema vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{p} = [\mathbf{q}^T \ \xi]^T \quad (2)$$

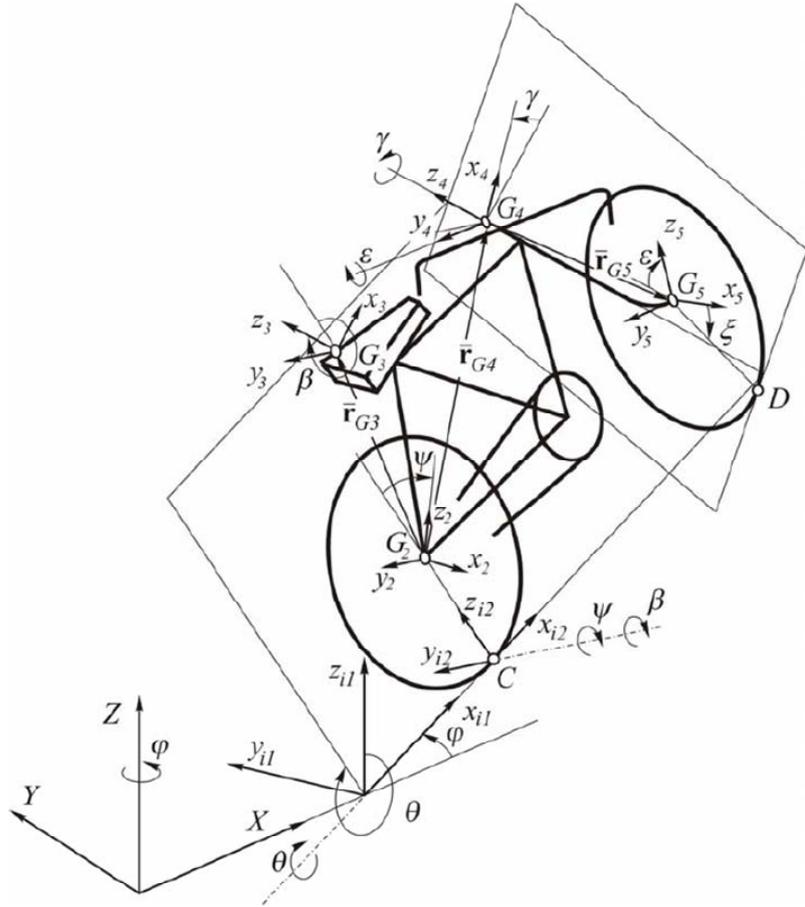


Figura 1. Sistema de referencia y coordenadas de la bicicleta

3.3.2 Transformación de coordenadas

3.3.2.1 Orientación y velocidades angulares

La matriz de giro que convierte la orientación del sistema de coordenadas local de cada sólido en la orientación del sistema de coordenadas global viene dado por el producto de las matrices de giro de rotación simple. Para cada sistema de coordenadas no global, las matrices de giro vendrán dadas por los siguientes productos de matrices:

$$\begin{aligned}
 A^{i1} &= A_\varphi, \quad A^{i2} = A_\varphi A_\theta \\
 A^2 &= A_\varphi A_\theta A_\psi, \quad A^3 = A_\varphi A_\theta A_\psi A_\beta \\
 A^4 &= A_\varphi A_\theta A_\psi A_\beta A_\gamma, \quad A^5 = A_\varphi A_\theta A_\psi A_\beta A_\gamma A_\varepsilon
 \end{aligned} \tag{3}$$

Donde cada una de las matrices de rotación simple del lado derecho de las ecuaciones describen una rotación plana en un eje local. En función del eje alrededor del cual se produzca el giro, y la variable asociada al mismo, estas matrices toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 A_\varphi &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \\
 A_\psi &= \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad A_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \\
 A_\gamma &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Tomando como criterio que el superíndice de los vectores y matrices indican el sistema de coordenadas, o sólido en su caso, y la presencia de una raya en su parte superior la pertenencia de dicha entidad algebraica a un sistema de referencia local, podemos realizar las siguientes transformaciones que serán extrapolables al resto de sólidos.

La velocidad angular del sólido 3 viene definida por la siguiente suma vectorial:

$$\boldsymbol{\omega}^3 = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{i}^{i1} + \dot{\beta} \mathbf{j}^2 \quad (5)$$

Donde \mathbf{k} , \mathbf{i}^{i1} y \mathbf{j}^2 son los vectores unitarios los ejes Z , x_{i1} , e y_2 en el sistema de referencia global. Estos vectores se obtienen, respectivamente, de las tercera, primera y segunda columna de las matrices \mathbf{I} , \mathbf{A}^{i1} y \mathbf{A}^2 . En la expresión anterior, se tienen en cuenta todas las posibles rotaciones simples del sólido 3 a partir de las coordenadas generalizadas elegidas. Nótese la ausencia de la rotación del sólido alrededor del sistema de referencia local $i2$, pues esta rotación sólo afecta a la rueda trasera.

Denominando $[\mathbf{A}^i]_j$ a la columna j de la matriz de rotación correspondiente al sistema de coordenadas i , los vectores unitarios anteriores toman la forma:

$$\mathbf{k} = [\mathbf{A}^1]_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}^{i1} = [\mathbf{A}^{i1}]_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}^2 = [\mathbf{A}^2]_2 = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

De las dos ecuaciones anteriores se infiere que podemos obtener la velocidad angular de cualquier sólido del sistema a partir de una matriz de transformación función de las coordenadas generalizadas que multiplica a un vector de velocidades angulares locales. En otras palabras, la velocidad angular de cada sólido, en el sistema de referencia, es lineal en velocidades. Nombrando a la matriz antedicha mediante \mathbf{G}^i , donde i se refiere al número del sólido, tenemos que para el cuadro la matriz toma la forma:

$$\boldsymbol{\omega}^3 = \mathbf{G}^3(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^1]_3 & [\mathbf{A}^{i1}]_1 & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^{i2}]_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

No obstante, por simplicidad, es adecuado obtener la velocidad angular del sólido en coordenadas locales. La velocidad angular del sólido 3 en el sistema de coordenadas local de dicho sólido $\langle x_3 y_3 z_3 \rangle$ viene dada por:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^3 = \dot{\phi}\bar{\mathbf{k}} + \dot{\theta}\bar{\mathbf{i}}^{i1} + \dot{\beta}\bar{\mathbf{j}}^2 \quad (8)$$

En esta ocasión, los vectores $\bar{\mathbf{k}}$, $\bar{\mathbf{i}}^{i1}$ y $\bar{\mathbf{j}}^2$ están expresados en el sistema de coordenadas $\langle x_3 y_3 z_3 \rangle$. Debido a la propiedad de ortonormalidad de las matrices de transformación, la obtención de las matrices $\bar{\mathbf{G}}^i$, cuyas significación y función son análogas a las de \mathbf{G}^i , se realiza mediante la trasposición de las matrices que recogen la rotación parcial de la velocidad hasta el sistema de coordenadas del sólido 3.

$$\bar{\mathbf{k}} = \left[(\mathbf{A}^3)^T \right]_3 = \begin{bmatrix} -\cos\theta \sin\beta \\ \sin\beta \\ \cos\theta \cos\beta \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{i}}^{i1} = \left[(\mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\beta)^T \right]_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ 0 \\ \sin\psi \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{j}}^2 = \left[(\mathbf{A}_\beta)^T \right]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

A partir de (9) podemos obtener la matriz $\bar{\mathbf{G}}^3$, que estará compuesta simbólicamente de las siguientes columnas:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^3 = \bar{\mathbf{G}}^3(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}^3)^T]_3 & [(\mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\beta)^T]_1 & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}_\beta)^T]_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Sin más que repetir el razonamiento anterior para cada uno de los otros tres sólidos del sistema, se pueden obtener las matrices \mathbf{G}^i y $\bar{\mathbf{G}}^i$. Para ello, deberán considerarse sólo las rotaciones simples que afectan a cada sólido para definir la velocidad angular del mismo y elegir las

columnas de las matrices de transformación que permiten el cambio de coordenadas de cada uno de los giros.

De forma genérica:

$$\bar{\omega}^i = \bar{\mathbf{G}}^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \omega^i = \mathbf{G}^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad i = 2, 3, 4 \text{ y } 5 \quad (11)$$

A continuación se muestran, usando la notación resumida, las matrices que permiten transformar la velocidad angular de cada uno de los sólidos:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^1]_3 & [\mathbf{A}^{i1}]_1 & [\mathbf{A}^{i2}]_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}^3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^1]_3 & [\mathbf{A}^{i1}]_1 & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^{i2}]_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}^4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^1]_3 & [\mathbf{A}^{i1}]_1 & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^{i2}]_2 & [\mathbf{A}^3]_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}^5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^1]_3 & [\mathbf{A}^{i1}]_1 & \mathbf{0} & [\mathbf{A}^{i2}]_2 & [\mathbf{A}^3]_3 & [\mathbf{A}^4]_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{G}}^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}^2)^T]_3 & [(\mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\psi)^T]_1 & [(\mathbf{A}_\psi)^T]_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{G}}^3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}^3)^T]_3 & [(\mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\beta)^T]_1 & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}_\beta)^T]_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{G}}^4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}^4)^T]_3 & [(\mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\gamma)^T]_1 & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\gamma)^T]_2 & [(\mathbf{A}_\gamma)^T]_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{G}}^5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}^5)^T]_3 & [(\mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\varepsilon)^T]_1 & \mathbf{0} & [(\mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\varepsilon)^T]_2 & [(\mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\varepsilon)^T]_3 & [(\mathbf{A}_\varepsilon)^T]_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

3.3.2.2 Posición y velocidad de traslación de los sólidos

La energía cinética del sistema se expresará en términos del sistema de referencia absoluto. Para tal fin, se obtendrán las matrices \mathbf{H}^i que transforman linealmente las velocidades generalizadas obteniendo la velocidad del centro de masa de cada sólido en el sistema de referencia inercial. El primer paso es conseguir la expresión del centro de gravedad del sólido en cuestión, en el siguiente caso es el sólido 2, en el sistema de referencia absoluto.

$$\mathbf{r}_{G_2} = \mathbf{r}_C + \mathbf{A}^{i2} \bar{\mathbf{r}}_{G_2} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} R \quad (13)$$

La anterior expresión se encuentra simplificada teniendo en cuenta que la localización del centro de la rueda trasera en el sistema de coordenadas $\langle x_{i2} y_{i2} z_{i2} \rangle$ viene definida por el vector $\bar{\mathbf{r}}_{G_2} = [0 \ 0 \ R]^T$. Derivando con respecto del tiempo (13) se obtiene la velocidad del centro de gravedad de la rueda que, como se ve en la próxima ecuación, permite una expresión matricial.

$$\mathbf{v}_{G_2} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \dot{\varphi} + \sin \varphi \cos \theta \dot{\theta} \\ \sin \varphi \sin \theta \dot{\varphi} - \cos \varphi \cos \theta \dot{\theta} \\ -\sin \theta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (14)$$

Donde la matriz \mathbf{H}^2 tiene la forma:

$$\mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & R \cos \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & R \sin \varphi \sin \theta & -R \cos \varphi \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

La aplicación simbólica de la regla de la cadena permite identificar cada una de estas matrices mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{H}^i = \frac{\partial \mathbf{r}_{G_i}}{\partial \mathbf{q}} \quad (16)$$

La posición absoluta de los centros de gravedad del resto de los sólidos del sistema se puede calcular del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{G_3} &= \mathbf{r}_{G_2} + \mathbf{A}^3 \bar{\mathbf{r}}_{G_3}^3, \\ \mathbf{r}_{G_4} &= \mathbf{r}_{G_2} + \mathbf{A}^3 \bar{\mathbf{r}}_{G_4}^3, \\ \mathbf{r}_{G_5} &= \mathbf{r}_{G_4} + \mathbf{A}^4 \bar{\mathbf{r}}_{G_5}^4 \end{aligned} \quad (17)$$

Donde $\bar{\mathbf{r}}_{G_3}^3 = [x_3 \ 0 \ z_3]^T$ y $\bar{\mathbf{r}}_{G_4}^3 = [x_4 \ 0 \ z_4]^T$ representan las componentes de los vectores que van, respectivamente, desde G2 hasta G3 y G4 en el sistema de referencia del cuadro, y

$\bar{\mathbf{r}}_{G_5}^4 = [x_5 \ 0 \ z_5]^T$ representa las componentes del vector que va desde G4 hasta G5 en el sistema de coordenadas $\langle x_4 \ y_4 \ z_4 \rangle$ del manillar. Se han seleccionado estos vectores de modo que su magnitud sea constante en el sistema de coordenadas local, por lo que sus derivadas resultan nulas en el cálculo de velocidades.

Cabe reseñar que el vector $\bar{\mathbf{r}}_{G_4}^3$, que sitúa el centro de gravedad del manillar en el sistema de coordenadas del cuadro, no describe con total fidelidad la geometría de la bicicleta en base a los experimentos realizados. Dicho centro de gravedad no pertenece al eje de giro del manillar, no obstante, consideramos que el error cometido con esta suposición es suficientemente pequeño.

En definitiva, podemos concluir que la velocidad del sistema puede ponerse en la forma:

$$\mathbf{v}_{G_i} = \mathbf{H}^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{G}^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (18)$$

Por consiguiente, las velocidades del sistema son lineales respecto de las velocidades generalizadas, siendo las constantes de proporcionalidad función de la posición del mecanismo en cada instante.

3.3.3 Restricciones cinemáticas

El número de grados de libertad del sistema es mucho menor que el número de coordenadas generalizadas expuestas con anterioridad. Existen, por tanto, un número de restricciones que se pasa a describir a continuación:

1. **Restricciones de contacto.** Dadas las hipótesis previas al modelado del sistema (la bicicleta avanza por un terreno llano y liso), el contacto con el suelo de la rueda trasera está garantizado mediante la nulidad de la tercera componente de su posición. Las restricciones de contacto responden a la forma $\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$; no dependen del tiempo explícitamente ni de las velocidades generalizadas, pudiéndose clasificar como esclerónomas y holónomas respectivamente.
2. **Restricciones de rodadura sin deslizamiento.** Este tipo de restricciones son el ejemplo de aquéllas clasificadas como no holónomas. El conjunto de ecuaciones de restricción que describen la rodadura sin deslizamiento toma la siguiente forma matricial: $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$.

3. **Restricción de movilidad.** Con esta restricción se impone el giro de la rueda trasera, simulando de este modo el pedaleo del ciclista. La ecuación será del tipo $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ siendo reónoma y holónoma.

3.3.3.1 Restricciones de contacto

La rueda delantera y el suelo llano y liso considerado, forman un contacto entre sólidos no conforme. Para que este contacto entre sólidos sea efectivo, deben garantizarse dos relaciones:

1. Dado que se trata de dos sólidos rígidos, la posición de un punto de ambos cuerpos deberá ser compartida. En la figura 2, el punto P es compartido por los cuerpos i y j .
2. Asimismo, debe imponerse que el plano tangente de ambos sólidos en el punto P sean paralelos.

Puesto que consideramos la rueda como un círculo en el espacio, la posición de un punto cualquiera de la rueda en el sistema de referencia local viene dado por la siguiente expresión.

$$\bar{\mathbf{r}}_p^5 = [R \cos \xi \quad 0 \quad -R \sin \xi]^T, \quad \xi \in [0, 2\pi] \quad (19)$$

Donde ξ es la coordenada no generalizada auxiliar que permite localizar el contacto en el sistema de referencia local del sólido 5. La dirección del vector tangente a la rueda en el punto P , en el sistema de referencia local, se calcula como:

$$\dot{t}_p^5 = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_p^5}{\partial \xi} = [-R \sin \xi \quad 0 \quad -R \cos \xi]^T, \quad \xi \in [0 \quad 2\pi] \quad (20)$$

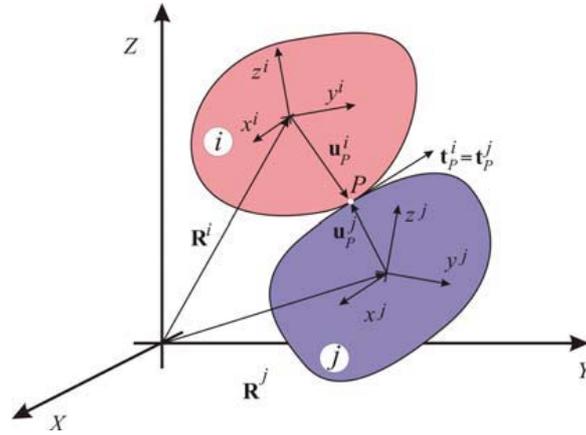


Figura 2. Dos sólidos rígidos en contacto

La posición absoluta de cualquier punto P de la rueda delantera y del vector tangente a dicho punto, vendrá dada por una transformación de coordenadas del siguiente tipo:

$$\mathbf{r}_p(\mathbf{q}, \xi) = \mathbf{r}_{G_s} + \mathbf{A}^5 \bar{\mathbf{r}}_p^5, \quad \mathbf{t}_p(\mathbf{q}, \xi) = \mathbf{A}^5 \bar{\mathbf{t}}_p^5, \quad \xi \in [0 \ 2\pi] \quad (21)$$

Para que el contacto con el terreno llano y liso cumpla con los dos requerimientos expuestos con anterioridad, el vector de posición del punto P de contacto, y su vector tangente no pueden tener componente en Z . Estas restricciones pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}(\mathbf{q}, \xi)]_Z &= 0 \\ [\mathbf{t}(\mathbf{q}, \xi)]_Z &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Que denominaremos matricialmente como:

$$\mathbf{C}^{con}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (23)$$

La primera de las ecuaciones (22) localiza el punto de contacto a través de la coordenada ξ , fijando de este modo su valor. La segunda de ellas establece una relación entre el resto de las coordenadas generalizadas restando un grado de libertad al sistema. Podría ser posible eliminar entre las dos ecuaciones el parámetro ξ y reducir las restricciones de contacto a una sola. Sin embargo, dada la naturaleza no lineal de las mismas, no es posible manipularlas para obtener simbólicamente el valor del parámetro correspondiente al punto de contacto instantáneo.

3.3.3.2 Restricciones de rodadura sin deslizamiento

Las restricciones de rodadura sin deslizamiento de la rueda delantera y trasera garantizan que la velocidad del punto de contacto es nula en todo instante. Para el caso de la rueda trasera, la velocidad de dicho punto, denominado C , viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{G_2} + \boldsymbol{\omega}^2 \wedge \mathbf{r}_{G_2C} \quad (24)$$

Donde el vector $\mathbf{r}_{G_2C} = \mathbf{A}^{i2} [0 \ 0 \ -R]^T$ es aquél que sitúa la posición de C relativa a G_2 en el sistema de referencia global. Simplificando la ecuación (23) se obtiene el vector:

$$\mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} \dot{x}_C - R \cos \varphi \dot{\psi} \\ \dot{y}_C - R \sin \varphi \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Para garantizar las condiciones de rodadura sin deslizamiento, igualamos las componentes Y y Z de la velocidad a cero. De este modo, se obtiene un conjunto de dos ecuaciones de restricción que afectan a la rueda trasera que designamos matricialmente mediante:

$$\mathbf{C}^{rod,2}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{0} \quad (26)$$

Las ecuaciones (26) son no holónomas, no se pueden integrar, y pueden escribirse mediante una aplicación lineal como:

$$\mathbf{B}^2(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -R \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -R \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Donde, debido a la linealidad con la velocidad de las restricciones, la matriz \mathbf{B}^2 puede obtenerse como el jacobiano de las restricciones (26) respecto de las velocidades $\dot{\mathbf{p}}$ del sistema, de modo que:

$$\mathbf{B}^2 = \frac{\partial \mathbf{C}^{rod,2}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \quad (28)$$

Para la imposición de este tipo de restricciones a la rueda delantera se puede seguir un razonamiento análogo al anterior. Si designamos por D el punto de contacto de la rueda delantera, la velocidad de ese punto se calcula como:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{G_5} + \boldsymbol{\omega}^5 \wedge \mathbf{A}^5 \bar{\mathbf{r}}_D^5 \quad (29)$$

En este caso las tres componentes son distintas de cero. Ello se debe a que la tercera no tiene impuesta la condición de contacto implícitamente en las ecuaciones como ocurría en el caso de la rueda trasera. En otras palabras, el cumplimiento de las condiciones de contacto del apartado anterior anularía la tercera componente de esta velocidad. Obtenemos pues dos nuevas ecuaciones de restricción para la rueda delantera:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_D]_X &= 0, \quad [\mathbf{v}_D]_Y = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{C}^{rod,5}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (30)$$

De nuevo, estas ecuaciones (30) pueden ser rescritas como:

$$\mathbf{B}^5(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}^5 = \frac{\partial \mathbf{C}^{rod,5}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \quad (31)$$

Las restricciones de rodadura sin deslizamiento de las ruedas y sus matrices jacobiano se agrupan de la forma:

$$\mathbf{C}^{rod}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{rod,2}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{C}^{rod,5}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^2(\mathbf{p}) \\ \mathbf{B}^5(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (32)$$

3.3.3.3 Restricción de movilidad

El movimiento de una bicicleta viene dado por el giro de la rueda trasera consecuencia del pedaleo del ciclista. Es por tanto necesario imponer alguna ley de giro en la velocidad $\dot{\psi}$ de la rueda trasera. Fijaremos una velocidad de avance constante, por lo que teniendo en cuenta las condiciones de rodadura sin deslizamiento podemos obtener la relación:

$$\psi - \frac{V}{R}t = 0 \Rightarrow \mathbf{C}^{mov}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (33)$$

Esta restricción de movilidad, pese a partir de una relación en velocidad, es holónoma al ser integrable.

3.3.3.4 Grados de libertad del sistema

Se han utilizado ocho coordenadas generalizadas para definir con univocidad la posición de cada uno de los sólidos de la bicicleta, además de un parámetro para imponer la restricción de contacto en la rueda delantera.

Las restricciones del sistema son, en forma matricial, las siguientes:

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{con}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{C}^{rod}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{C}^{mov}(\mathbf{p}, t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (34)$$

Esta matriz (34) estará formada por las dos restricciones de contacto de la rueda delantera, las cuatro de rodadura sin deslizamiento de ambas ruedas y la restricción de movimiento que elimina la variable ψ como incógnita.

La definición de nuestro sistema requiere de nueve coordenadas que están relacionadas por siete restricciones, resultando un sistema de dos grados de libertad.

3.4 Ecuaciones del movimiento

Para la obtención de las ecuaciones del movimiento se hará uso de las ecuaciones de Lagrange de primera especie, donde la inclusión del vector de multiplicadores de Lagrange tiene en cuenta las fuerzas de reacción provocadas por cada una de las restricciones del sistema. El conjunto de ecuaciones que describen el sistema son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{grav} + \mathbf{Q}_{ext} \quad (35)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t) = \mathbf{0}$$

Donde T es la energía cinética del sistema, λ es el vector de multiplicadores de Lagrange, \mathbf{Q}_{grav} son las fuerzas generalizadas debidas a la gravedad y \mathbf{Q}_{ext} son el resto de fuerzas generalizadas externas. La matriz \mathbf{D} se obtiene como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p^{con} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_p^{mov} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Siendo $\mathbf{C}_p = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{p}}$ el jacobiano de las restricciones holónomas del sistema respecto de las coordenadas, y \mathbf{B} el jacobiano respecto a las velocidades de las restricciones de contacto. Las ecuaciones (36) están compuestas de ecuaciones diferenciales y algebraicas cuya resolución se abordará en un apartado posterior.

3.4.1 Energía cinética

La energía cinética total de la bicicleta, suma de la energía cinética de traslación y de la rotación, queda determinada por el siguiente sumatorio que contempla los cuatro sólidos del sistema.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^5 \left[m^i \mathbf{v}_{G_i}^T \mathbf{v}_{G_i} + (\boldsymbol{\omega}^i)^T \mathbf{I}^i \boldsymbol{\omega}^i \right] \quad (37)$$

Donde m^i es la masa de cada uno de los cuatro sólidos e \mathbf{I}^i es el tensor de inercia en coordenadas globales. Por sencillez en el cálculo, usaremos una expresión alternativa de la energía cinética, expresando la energía de rotación en coordenadas locales. De este modo, los tensores de inercia asociados a cada elemento de la bicicleta serán constantes. La expresión que se utilizará es la siguiente:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^5 \left[m^i \mathbf{v}_{G_i}^T \mathbf{v}_{G_i} + (\bar{\boldsymbol{\omega}}^i)^T \bar{\mathbf{I}}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}^i \right] \quad (38)$$

Usando las matrices \mathbf{H}^i y $\bar{\mathbf{G}}^i$ de modo que la anterior expresión sea una función lineal en velocidad de las coordenadas, tenemos que:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^5 \left[m^i \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{H}^{iT} \mathbf{H}^i \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{T}}^i \bar{\mathbf{G}}^i \dot{\mathbf{p}} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^5 \dot{\mathbf{p}}^T \left[m^i \mathbf{H}^{iT} \mathbf{H}^i + \bar{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{T}}^i \bar{\mathbf{G}}^i \right] \dot{\mathbf{p}} \quad (39)$$

Por tanto, podemos expresar la matriz de masa del sistema en función de las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \sum_{i=2}^5 \left[m^i \mathbf{H}^{iT} \mathbf{H}^i + \bar{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{T}}^i \bar{\mathbf{G}}^i \right] \quad (40)$$

Pudiendo escribir la energía cinética en la forma:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{M}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{p}} \quad (41)$$

Las matrices \mathbf{H}^i y $\bar{\mathbf{G}}^i$ de este apartado incorporan una nueva columna necesaria para tener en cuenta la coordenada ξ relativa al contacto, sin efectos en la energía cinética del sistema.

3.4.2 Fuerzas de inercia

Haciendo uso del concepto de fuerzas de inercia podemos describir la ecuación (35). El primer término del lado izquierdo puede obtenerse mediante la expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right) = \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{p}} \quad (42)$$

Que se ha obtenido a partir de la forma compacta (41) de la energía cinética. El segundo término resulta:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{2} \frac{\partial [\mathbf{M} \dot{\mathbf{p}}]}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} \quad (43)$$

El primer término de la ecuación (42) cambiado de signo más el término de la ecuación (43) da un vector de fuerzas de inercia generalizadas cuadráticas en velocidad \mathbf{Q}_v que tiene la expresión:

$$\mathbf{Q}_v = -\dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \frac{\partial [\mathbf{M}\dot{\mathbf{p}}]}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} \quad (44)$$

3.4.3 Fuerzas generalizadas de gravedad

El término de las fuerzas generalizadas de gravedad, \mathbf{Q}_{grav} , se va a obtener mediante la potencia virtual desarrollada por los pesos en el sistema de referencia global:

$$\dot{W}_{grav} = \sum_{i=2}^5 \mathbf{P}^{iT} \mathbf{v}_{G_i}^* = \sum_{i=2}^5 (\mathbf{P}^{iT} \mathbf{H}^i) \dot{\mathbf{p}}^* \quad (45)$$

Donde en la anterior expresión, los pesos vienen dados por $\mathbf{P}^i = [0 \ 0 \ -m^i \mathbf{g}]^T$ y el asterisco denota una cantidad virtual. La expresión de las fuerzas generalizadas de gravedad queda como:

$$\mathbf{Q}_{grav} = \sum_{i=2}^5 (\mathbf{H}^{iT} \mathbf{P}^i) \quad (46)$$

Las ecuaciones que resuelven el sistema modelado son, resumidamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{D}^T \lambda &= \mathbf{Q}_v(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) + \mathbf{Q}_{grav}(\mathbf{p}) + \mathbf{Q}_{ext} \\ \mathbf{C}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (47)$$

Donde se observa que cada término corresponde a cada uno de los tipos de fuerzas ya analizadas.

3.5 Ecuaciones del movimiento en coordenadas independientes

El conjunto de ecuaciones (47) combina ecuaciones diferenciales y algebraicas, por lo que para su resolución será necesario el uso de un método adecuado para tal fin. El objetivo es obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de coordenadas independientes.

Para conseguir este resultado se aplicará el método *generalized coordinate partitioning*. En base a matrices y vectores ya obtenidos en anteriores apartados, podemos expresar todas las

restricciones del sistema como un conjunto lineal en velocidades generalizadas mediante la expresión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_p^{con} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_p^{mov} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ V/R \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{C}_t \quad (48)$$

Donde \mathbf{C}_t es la derivada parcial de las restricciones holónomas respecto del tiempo. Teniendo en cuenta el número de grados de libertad del sistema, es posible establecer una clasificación de coordenadas; esto es, podemos elegir dos coordenadas, correspondientes a los dos grados de libertad del sistema, que tengan la consideración de independientes, mientras que el resto de coordenadas serán función de las anteriores. La elección se realiza teniendo en cuenta la importancia de las coordenadas independientes en la dinámica del sistema. De este modo, el vector de coordenadas independientes \mathbf{p}_i estará formado por el ángulo de vuelco θ y el ángulo de la dirección γ . Análogamente, el vector de coordenadas dependientes \mathbf{p}_d se compondrá del resto de coordenadas. Reordenando filas y columnas de las ecuaciones de restricción anteriores, podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_i & \mathbf{D}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} = -\mathbf{C}_t \quad (49)$$

Resulta obvio que a partir de la ecuación (49) puede obtenerse el vector de velocidad de coordenadas independientes en función de las velocidades de las coordenadas dependientes y las matrices de restricción definidas en (48).

$$\dot{\mathbf{p}}_d = \mathbf{D}_d^{-1} (-\mathbf{C}_t - \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{p}}_i) \quad (50)$$

Esta separación de coordenadas obliga a que la matriz \mathbf{D}_d posea rango completo. Por comodidad, la obtención de todas las velocidades generalizadas a partir de las velocidades de las coordenadas independientes se hará a partir de las matrices \mathbf{E} y \mathbf{F} .

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{D}_d^{-1} \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_d^{-1} \mathbf{C}_t \end{bmatrix} = \mathbf{E} \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{F} \quad (51)$$

Las matrices \mathbf{E} y \mathbf{F} dependen de las coordenadas del sistema y del tiempo. Las aceleraciones del sistema se obtienen derivado la ecuación (51), resultando:

$$\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{E}\ddot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{E}\ddot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{J} \quad (52)$$

Donde $\mathbf{J} = \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{F}}$ absorbe los términos que no dependen de las aceleraciones generalizadas independientes. Utilizando este resultado en la primera ecuación de (35) y premultiplicando por \mathbf{E}^T , tenemos que:

$$\mathbf{E}^T \mathbf{M} (\mathbf{E}\ddot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{J}) + \mathbf{E}^T \mathbf{D}^T \lambda = \mathbf{E}^T (\mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_{grav} + \mathbf{Q}_{ext}) \quad (53)$$

Donde el producto $\mathbf{E}^T \mathbf{D}^T$ es idénticamente nulo, anulando las fuerzas de reacción en el sistema de ecuaciones. Simplificando, obtenemos:

$$\mathbf{E}^T \mathbf{M} \mathbf{E} \ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{E}^T (\mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_{grav} + \mathbf{Q}_{ext} - \mathbf{M} \mathbf{J}) \quad (54)$$

Llamando $\mathbf{M}_i = \mathbf{E}^T \mathbf{M} \mathbf{E}$ a la matriz de masa del sistema en coordenadas independientes, y al vector de fuerzas aplicadas $\mathbf{Q}_i = \mathbf{E}^T (\mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_{grav} + \mathbf{Q}_{ext} - \mathbf{M} \mathbf{J})$:

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{Q}_i \quad (55)$$

El proceso ha terminado con la obtención de dos ecuaciones diferenciales ordinarias que resuelven el problema. El número de ecuaciones es mínimo, pues coincide con el número de grados de libertad del sistema $n-m$. No obstante, este enfoque de resolución de las ecuaciones diferenciales-algebraicas requiere un alto coste computacional, ya que exige resolver las ecuaciones de restricción en cada paso de tiempo. Esto es así porque la matriz \mathbf{M}_i depende de \mathbf{p} y el vector de fuerzas aplicadas \mathbf{Q}_i , de \mathbf{p} y $\dot{\mathbf{p}}$.

3.6 Linealización

Con objeto del estudio de la estabilidad de la bicicleta, es conveniente la linealización de las ecuaciones del movimiento (55) en torno a la posición de equilibrio superior de la bicicleta, esto es, cuando el ángulo de vuelco es nulo, y el de dirección también ($\theta = \gamma = 0$). En esta situación

de equilibrio, conocemos la velocidad de las coordenadas angulares asociadas a las ruedas $\dot{\psi} = \dot{\varepsilon} = V/R$, $\dot{\xi} = -V/R$. El resto de las coordenadas del sistema son coordenadas cíclicas o “ignorables”, ya que no intervienen en la generación de fuerzas en el sistema. Para la linealización de las ecuaciones, los valores de este último conjunto de coordenadas carecen de importancia, fijando un valor nulo en nuestro caso. La posición de equilibrio descrita en líneas superiores queda definida por los siguientes vectores de posición, velocidad y aceleración:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{est} &= [x_c \ y_c \ \varphi \ \theta \ \psi \ \beta \ \gamma \ \varepsilon \ \xi]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \beta_{est} \ 0 \ 0 \ \xi_{est}]^T \\ \dot{\mathbf{p}}_{est} &= [\dot{x}_c \ \dot{y}_c \ \dot{\varphi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma} \ \dot{\varepsilon} \ \dot{\xi}]^T = [V \ 0 \ 0 \ 0 \ V/R \ 0 \ 0 \ V/R \ -V/R]^T \\ \ddot{\mathbf{p}}_{est} &= [\ddot{x}_c \ \ddot{y}_c \ \ddot{\varphi} \ \ddot{\theta} \ \ddot{\psi} \ \ddot{\beta} \ \ddot{\gamma} \ \ddot{\varepsilon} \ \ddot{\xi}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T\end{aligned}\quad (56)$$

Donde los valores de β_{est} y ξ_{est} se obtienen de resolver las restricciones de contacto de la rueda delantera para unos valores dados del resto de coordenadas. Las ecuaciones linealizadas del sistema se escribirán como:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{p}}_i + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{p}}_i + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{p}_i = \mathbf{0}\quad (57)$$

En las que las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ y $\bar{\mathbf{K}}$, son constantes ya que dependen de las coordenadas y velocidades generalizadas del sistema, encontrándose éstas ya fijadas para la posición de equilibrio. Las matrices, consecuencia de la linealización en torno del equilibrio, se calculan como:

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_i(\mathbf{p} = \mathbf{p}_{est}), \bar{\mathbf{C}} = -\frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial \dot{\mathbf{p}}_i}(\mathbf{p} = \mathbf{p}_{est}, \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_{est}), \bar{\mathbf{K}} = -\frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{p}_i}(\mathbf{p} = \mathbf{p}_{est}, \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_{est})\quad (58)$$

Cada una de las anteriores matrices tendrá un valor constante para cantidades fijas de las coordenadas del sistema y sus derivadas.

3.7 Cálculo de la estabilidad

Las ecuaciones linealizadas (57) hacen posible el estudio de la estabilidad de la posición de equilibrio vertical en función de los parámetros que se desee. El sistema de ecuaciones de dos ecuaciones de segundo orden es posible escribirlo, duplicando el número de ecuaciones, en uno de primer orden del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \ddot{\mathbf{p}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{K}} & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (59)$$

El estudio de la estabilidad de esta posición de equilibrio se realiza en base al signo de la parte real de los autovalores de la matriz \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| = 0 &\Rightarrow \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ [A - \lambda_i I] \Phi_i = \mathbf{0} &\Rightarrow \Phi_i \end{aligned} \quad (60)$$

Si la parte real de un autovalor es positiva, el modo asociado a dicho valor tenderá a amplificarse con el tiempo, resultando una posición de equilibrio inestable. El razonamiento a la inversa, en caso de parte real negativa de un autovalor, también es válido. Ocurre que, para que el sistema sea estable en una posición de equilibrio, todos los autovalores deben tener una parte real negativa.

La validez de los resultados de estabilidad conseguidos mediante el estudio del sistema linealizado es extrapolable al sistema modelado no lineal siempre que no nos encontremos en casos límite, donde existe incertidumbre acerca del comportamiento del vehículo.

4 Adquisición de Datos

4.1 Introducción

La monitorización de los ángulos girados por los sólidos es una tarea fundamental en el desarrollo de los ensayos descritos en este trabajo. En el caso de los ensayos conducentes a la obtención de los momentos de inercia (apartados 5.3.3 y 5.3.4) es necesario obtener la evolución con el tiempo del ángulo girado por la barra, para el cálculo por torsión, o del girado por el sólido, en el cálculo por sujeción pendular. Del mismo modo, es imprescindible obtener, tras el procesado adecuado de los datos, los ángulos θ y γ que caractericen el movimiento del sistema en los ensayos dinámicos (apartado 5.4). Estas labores fueron llevadas a cabo por sensores capaces de registrar los ángulos girados respecto de un sistema global de coordenadas.

4.2 Características técnicas principales de los sensores

La transmisión de los datos desde la unidad central, que recibe la información de los sensores, hasta el computador puede realizarse mediante cable o por dispositivo *bluetooth*. La necesidad de movilidad por parte del vehículo en los ensayos dinámicos obliga a la elección de la transmisión inalámbrica, realizándose ésta a una frecuencia fija de 100 Hz.

El programa receptor de información en el ordenador genera dos archivos *.log* con la siguiente información captada por los sensores:

- i. El archivo de ángulos ofrece en tres, cuatro o nueve columnas los datos referentes a la posición angular del sensor respecto del sistema global de coordenadas, acompañadas de una columna que recoge el vector de tiempo. El número de columnas en que se describe la posición angular depende del modo de salida elegido. Así, si se elige la opción de ángulos alrededor de los ejes X , Y y Z (vuelco, cabeceo y guiñada), la salida constará de tres columnas (en grados sexagesimales), si se opta por la salida de cuaterniones (parámetros de Euler), la información se dará en cuatro columnas, y si se marca la opción de matriz de rotación, la primera columna del archivo se compondrá del vector de tiempo mientras que las otras nueve contendrán la información de la matriz de rotación en cada instante de tiempo. Cabe destacar que la primera opción de las anteriores puede conducir a una singularidad en el cambio de coordenadas si se alcanzan determinados valores en las coordenadas angulares.

- ii. Existe un segundo archivo que contiene información de calibración que puede ser útil y además combinada con la del archivo de ángulos. El archivo de calibración ofrece información sobre aceleración, velocidad angular y el campo magnético terrestre en coordenadas locales. Esta información puede servir para ubicar con precisión la orientación del sensor sobre el sólido además de ser una fuente adicional de información.

Tanto la colocación en los sólidos como el procesado posterior de los datos de los sensores definirán en gran medida la precisión susceptible de ser alcanzada en los ensayos y el éxito de los mismos. Esta cuestión cobra especial importancia en el caso de los ensayos dinámicos, donde los errores de la señal adquirida pueden irse acumulando debido a imprecisiones en la ejecución y a la propia incertidumbre en la fabricación del sensor.

5 Resultados Experimentales

5.1 Introducción

En este apartado de *Resultados Experimentales* se muestra los procedimientos y modos de obtención de los parámetros del sistema que definen a una bicicleta determinada. En nuestro caso, todos los parámetros hallados corresponden a una bicicleta comercial a la que se le han sustraído los elementos de impulsión y freno controlados por el ciclista, tales como frenos, cables y cadena. La única característica reseñable del vehículo está relacionada con el modelo teórico de rodadura sin deslizamiento: los neumáticos son finos y lisos con el objeto de aproximar el contacto puntual modelado en la teoría.

5.2 Obtención de centros de gravedad

Con el fin de poder cuantificar los vectores que localizan los centros de gravedad de cada uno de los sólidos involucrados en el sistema, se hace necesaria la obtención de la posición de los centros de gravedad de cada uno de los mismos.

Dada la simetría de todos los elementos, contemplada en el modelo teórico, se han obtenido y localizado los centros de masa considerando que existe simetría en el plano xz del sistema local de referencia de cada uno de los sólidos. Estos sistemas locales de referencia se muestran en la figura 1.

El procedimiento que se ha utilizado puede resumirse en los siguientes puntos:

- i. Se ha colgado el sólido de un punto adecuado del mismo, tratando, en la medida de lo posible, de que la sujeción actúe como un par de revolución con eje en dirección y . El efecto de dicha articulación alinea el centro de gravedad del sólido en cuestión con el par de revolución en la vertical.
- ii. Se ha repetido el procedimiento anterior el número de ocasiones que ha sido posible, con el objeto de, como mínimo en dos tandas, definir o acotar el centro de gravedad de cada sólido.
- iii. Para el procedimiento anterior ha sido utilizada una grúa y otros elementos auxiliares de sujeción. La localización del centro de gravedad se ha realizado a partir de fotografías del sólido colgado tomadas perpendicularmente y la ayuda de un programa de dibujo que permite medir distancias y ángulos. De este modo puede obtenerse, mediante escala, cualquier medida en un sistema de referencia arbitrario.

Las ruedas delanteras y traseras no han sido objeto de este estudio pues se ha considerado su centro de gravedad en el eje de rotación de las mismas.

Con la simple sujeción del gancho de la grúa o auxiliados por elementos como bridas o redondos de acero, la posición en equilibrio del sólido marca una de las líneas que definirán posteriormente el centro de gravedad (ver figura 3). Sucesivas repeticiones de este procedimiento en los sólidos 3 y 4 dan como resultado las gráficas mostradas en la figura 4. En negro está representada la silueta de los tubos principales que definen cada sólido en el plano, mientras las líneas rectas de color más claro sitúan en la vertical (para cada posición de cuelgue) el centro de gravedad del sólido.

Para la localización del centro de gravedad del manillar se llevaron a cabo dos posiciones de cuelgue, definiendo ambas un punto consecuencia de la intersección de las dos verticales. Este punto, al contrario de lo considerado en el modelo teórico (17), no pertenece al eje de rotación del manillar. No obstante, puede apreciarse que la excentricidad es mínima, lo que unido a la reducida inercia del sólido 4, hace que esta aproximación teórica pueda ser asumible.

En el caso del sólido 3, se realizaron tres ensayos que definen una región susceptible de contener el centro de masa real del elemento. Puede observarse en la figura 4 que dicha región no es excesivamente extensa (por lo que podemos considerar que la metodología empleada en estos ensayos no conduce a un error elevado), habiéndose establecido el origen de coordenadas local del sólido en el baricentro del triángulo definido por las tres verticales.



Figura 3. Imagen que muestra uno de los puntos de sujeción del cuadro

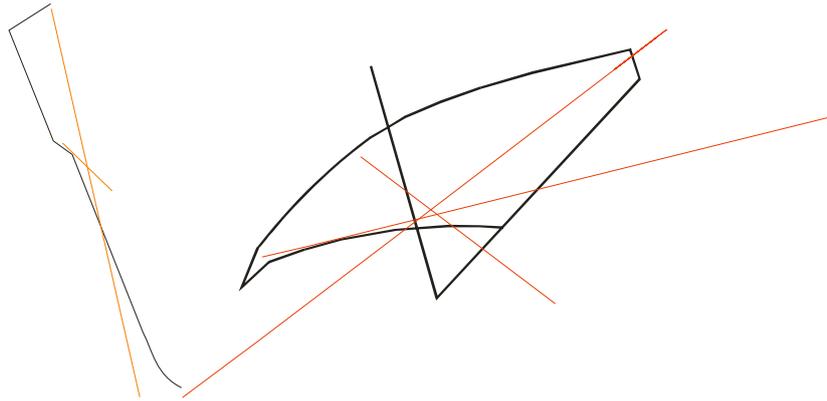


Figura 4. Localización del centro de gravedad de los sólidos 3 y 4

Mediante la superposición de las imágenes que definen los centros de gravedad de cada uno de los sólidos y una fotografía de la bicicleta vertical se hallarán las distancias que definirán los vectores de posición en coordenadas locales.

Como se verá en el subapartado siguiente, el conocimiento de la ubicación de los centros de masa de los cuerpos también será necesario para el cálculo de momentos de inercia.

5.3 Obtención de algunos parámetros

5.3.1 Masas

Cada uno de los sólidos de la bicicleta ha sido pesado en un dinamómetro con una precisión de 20 gramos. Los resultados obtenidos, utilizando la notación habitual, son los siguientes:

$$m_2 = 2,52 \text{ kg}, m_3 = 5,48 \text{ kg}, m_4 = 2,96 \text{ kg}, m_5 = 1,96 \text{ kg} \quad (61)$$

5.3.2 Localización de los centros de gravedad

Para completar la lista de parámetros que definen el sistema es necesario obtener la localización de los centros de gravedad respecto de los sistemas locales de referencia pertinentes, definidos por las ecuaciones (13) y (17). Esta tarea se realizó en base a una fotografía de la bicicleta donde se superpusieron los dibujos que sitúan el centro de gravedad de cada uno de los sólidos.

Los resultados que se obtuvieron se resumen, junto con el resto de parámetros del sistema, en el siguiente apartado.

5.3.3 Momentos de Inercia. Cálculo mediante barra de torsión

5.3.3.1 Introducción

Las masas, momentos de inercia y distancias entre centros de gravedad definen el vehículo en estudio. Por tanto, debe realizarse un esfuerzo en obtener dichos parámetros de la manera más fiable, pues de otro modo la comparación del modelo teórico con los resultados experimentales sería inconcluyente.

Los momentos de inercia de cada uno de los elementos fueron medidos a partir de los resultados obtenidos de la torsión de una barra de 199 cm y 10 mm de diámetro. La barra de torsión se encuentra soldada a un perfil metálico sujeto por compresión al forjado. De este modo, cualquier movimiento angular en un plano horizontal se debe a la rigidez a torsión de la barra, pudiendo modelarse este extremo como un empotramiento. En el otro extremo, la barra de torsión posee una junta Cardan con unas sujeciones adecuadas para cada una de las fijaciones realizadas a los sólidos. Esta junta permite el giro libre del sólido ensayado en dos direcciones perpendiculares al eje de la barra (ángulos α y β en la figura 5). Con esto se consigue que el momento producido por desalineamientos del centro de gravedad del sólido respecto de la vertical de la barra no redunde en la deformación a flexión de la barra de torsión. La esbeltez de la barra también permite desplazamientos en el plano horizontal con suma facilidad, contribuyendo a crear un movimiento complejo de los elementos ensayados que en ocasiones dificultan la consecución de resultados satisfactorios.

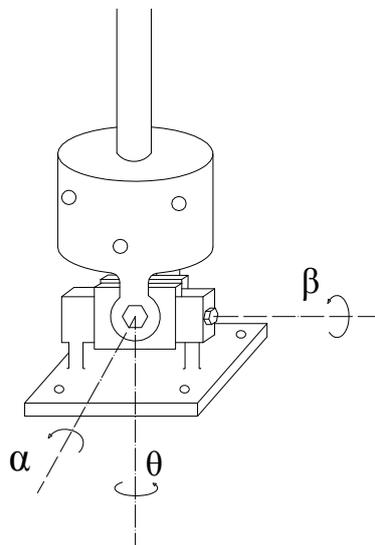


Figura 5. Esquema de la junta Cardan utilizada

El ensayo consiste en la excitación del sólido, rígidamente unido a la junta Cardan, mediante un desplazamiento angular pequeño en el sentido del eje vertical. La oscilación de dicho ángulo en el tiempo será recogida por los sensores. Con esta información se podrá obtener la frecuencia de

oscilación, y con ésta un momento polar definido por la vertical que pasa por el punto de sujeción.

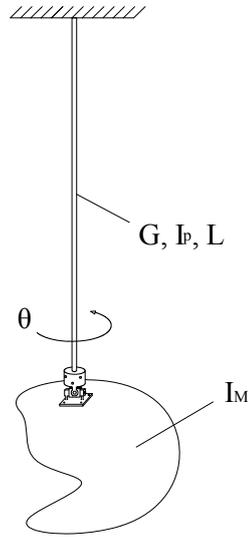


Figura 6. Modelo usado en el ensayo a torsión

El sistema descrito de barra de torsión y sólido (ver figura 6), puede modelarse en primera aproximación mediante un sistema de un solo grado de libertad en el que la rigidez es debida a la barra de torsión, y la inercia polar al sólido (despreciando la contribución de la barra y elementos de sujeción auxiliares). La ecuación de movimiento del sistema sencillo descrito es la siguiente:

$$I_M \ddot{\theta} + \left[\frac{GI_p}{L} \right] \theta = 0 \quad (62)$$

Donde en la anterior ecuación, I_M es el momento de inercia másico del sólido sujeto, G es el módulo de elasticidad transversal del material de la barra, I_p es el momento polar de la sección de la barra, siendo θ el ángulo girado en el plano horizontal consecuencia de la elasticidad a torsión de la barra. En base a la definición de frecuencia natural del sistema, podemos obtener el momento de inercia másico del elemento sujeto según el mismo eje vertical de la barra como:

$$I_M = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{GI_p}{L} \right] \quad (63)$$

Donde T es el periodo de la oscilación no amortiguada del modelo utilizado de un grado de libertad.

5.3.3.2 Cálculo de la rigidez de la barra de torsión

La rigidez de la barra de torsión, definida por los tres parámetros descritos en el segundo término de la ecuación (62), puede calcularse tanto experimental como teóricamente a partir de los datos de módulo de elasticidad transversal, longitud y sección de la barra. Debido a la influencia de las inercias de los elementos de sujeción, y a la incertidumbre relativa de algunos parámetros, se ha optado por establecer la rigidez de la barra de torsión experimentalmente mediante el ensayo de una barra de acero de algo más de 1 metro de longitud y 60 cm de diámetro. Esta geometría conocida permite establecer con una notable precisión el momento de inercia másico respecto a su centro de gravedad, y fijar la rigidez de la barra con un elemento cuya masa es superior a la de los sólidos de la bicicleta, restando así la influencia de las inercias pertenecientes a la barra de torsión o sus elementos auxiliares. Pese a ello, ambos resultados están razonablemente próximos.

En la figura 7 puede verse el conjunto descrito de barra de torsión y barra de prueba con un sensor en su extremo, capaz de recoger las variaciones angulares.



Figura 7. Ensayo de prueba con barra de acero

Cálculo teórico

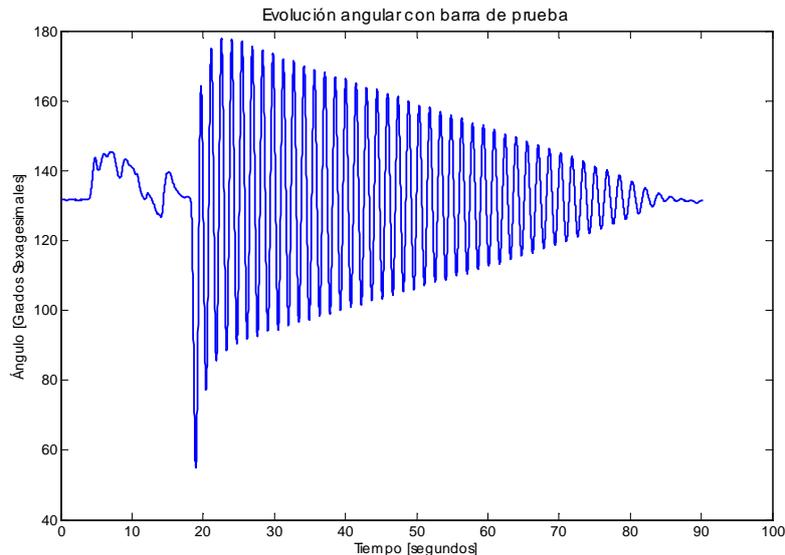
$$\frac{GI_P}{L} = \frac{72 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 9,8175 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4}{1,99 \text{ m}} = 35,52 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \quad (64)$$

Cálculo experimental

Introduciendo las características de la barra de prueba, obtenemos el momento másico de la barra cilíndrica de prueba sin despreciar su radio.

$$I_M = \frac{1}{12} m_{\text{barra}} [3R^2 + L^2] = \frac{1}{12} 22,31 \cdot \left[3 \left(\frac{1}{2} 59,95 \cdot 10^{-3} \right)^2 + 1,007^2 \right] = 1,8906 \text{ kgm}^2 \quad (65)$$

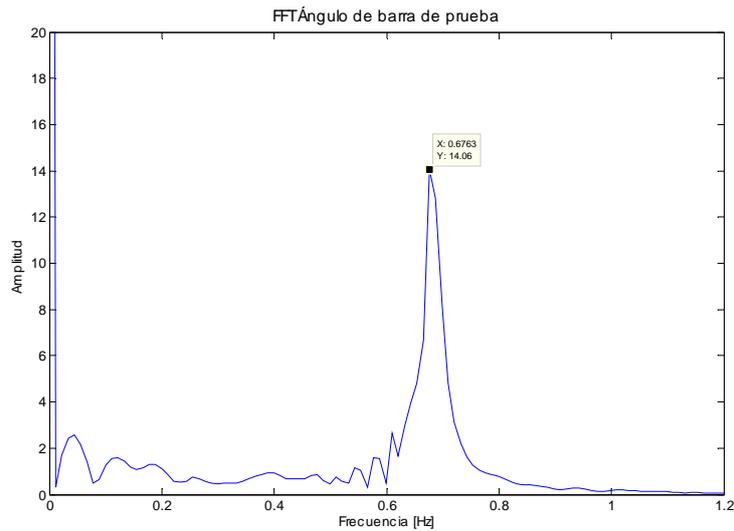
A partir de la ecuación (63), y mediante el conocimiento de la frecuencia de oscilación del sistema, es posible obtener la rigidez de la barra de torsión mediante cálculo experimental. El sensor fijado a la barra envía datos de posición angular respecto de la vertical terrestre a una frecuencia de 100 Hz. Estos datos, para un ensayo de los realizados, tienen la siguiente evolución en el tiempo.



Donde puede apreciarse un primer periodo de reposo, seguido de un desplazamiento angular inicial que provoca una vibración libre amortiguada.

Tomando como punto de partida los datos enviados por el sensor, un modo efectivo para conocer la frecuencia de vibración es realizar una transformada de Fourier discreta de los datos, donde poder obtener un único valor representativo de las oscilaciones. En todos los casos, para cada uno de los sólidos y cogidas, se realizaron varios ensayos donde se obtuvieron frecuencias de vibración mediante la transformada de Fourier. Comprobándose la cercanía en valor de los ensayos y tomando como resultado final la media de los mismos.

La próxima figura muestra la *FFT* (*Fast Fourier Transform*) de la señal anterior, observándose un valor pico a la frecuencia natural del movimiento.



El valor pico servirá para calcular mediante la ecuación (63) el valor del momento polar de inercia que, en el caso de los ensayos de los sólidos del sistema, necesitará un nuevo procesado para obtener los valores definitivos.

La media de los ensayos realizados da una frecuencia angular para esta barra sujeta por su centro de masa de:

$$f_n = 0,6782 \text{ Hz} \quad (66)$$

De tal modo que la rigidez de la barra es:

$$\frac{GI_P}{L} = 4\pi^2 f_n^2 I_M = 34,33 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \quad (67)$$

5.3.3.3 Cálculo teórico de los tensores de inercia

Lo expuesto con anterioridad sirve para validar el modelo teórico de la barra de torsión, no obstante, no ofrece como resultado ningún parámetro del sistema. A continuación se expondrá el modo de cálculo de los momentos de inercia máxicos de los sólidos de la bicicleta en el sistema de referencia local de cada uno de ellos. Comenzaremos por establecer las hipótesis básicas del proceso de obtención de estos parámetros.

Se mantendrá en este desarrollo la hipótesis de simetría en el plano xz de los sólidos. Por ello, el tensor de inercia de cada uno de los mismos puede escribirse del siguiente modo:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Uno de los principales problemas prácticos para la realización de los experimentos de torsión es la localización de la sujeción de la junta Cardan con el sólido. Debido a la geometría de los sólidos y a la sencillez de la cogida, es inviable la sujeción de los sólidos de tal modo que el eje alrededor del cual se mida la inercia sea el mismo que los que define el sistema local de referencia del sólido. Es necesario por tanto determinar la relación entre los momentos de inercia medidos y el tensor de inercia del sólido en el sistema de referencia local. Esta relación viene regida por las siguientes tres ecuaciones:

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{I} \mathbf{e}_i = I_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (69)$$

Donde \mathbf{I} es el tensor de inercia ya definido, \mathbf{e}_i es el vector unitario que sitúa el eje vertical alrededor del cual gira el sólido en el sistema de referencia local, e I_i el momento de inercia calculado a partir de la frecuencia natural final para el ensayo i . Son por tanto necesarias tres mediciones con distinta orientación para obtener el tensor de inercia completo.

El cálculo de las componentes de los vectores \mathbf{e}_i se ha realizado mediante la captura de imágenes de los ensayos, a partir de las cuales se ha podido conocer la orientación relativa de la vertical respecto del sistema de referencia local definido por el ángulo β en los casos de los sólidos 3 y 4 (ver figura 1). De la correcta cuantificación de los momentos de inercia máxicos en los sistemas de referencia locales dependerá la veracidad de los resultados de la expresión de la energía cinética de rotación (38), calculada por conveniencia en los sistemas locales.

5.3.3.4 Ensayos sobre el cuadro

Seguidamente y de manera esquemática se mostrará el proceso de obtención de los momentos de inercia en el sistema de referencia local para el cuadro.

Se realizaron cuatro sujeciones del sólido 3 a la junta Cardan, siendo dos de ellas redundantes entre sí. En las siguientes figuras se muestran fotografías tomadas de las orientaciones del cuadro en cada de uno de los cuatro ensayos realizados. Estas orientaciones marcarán la dirección del momento de inercia calculado.



Figura 8. Ensayo cuadro 1



Figura 9. Ensayo cuadro 2



Figura 10. Ensayo cuadro 3



Figura 11. Ensayo cuadro 4

Puede observarse que los ensayos 2 y 3 corresponden a la misma orientación del momento de inercia. En todos los ensayos anteriores se llevaron a cabo, como mínimo, dos ensayos de torsión de la barra en los que se obtuvieron la frecuencia natural correspondiente con el pico de la *FFT*. Dicho pico debe ser pronunciado y estar correctamente identificado para tener validez.

Para la realización de los ensayos se añadió al cuadro y manillar un determinado número de pesas con el fin de alinear la barra con el centro de gravedad del sólido de modo que el giro de la junta Cardan necesario para el alineamiento natural, debido a la gravedad, fuese el menor posible. El motivo de este proceder se debió a que si el ángulo girado por la junta es grande, el ángulo inicial que pone en marcha el movimiento excita otros modos de vibración del sistema, provocando un movimiento imprevisible del sólido que invalida el ensayo por causa de impactos de la barra de torsión sobre el forjado. En este movimiento intervienen los grados de libertad reales del sistema, esto es, los ángulos α , β y θ de la junta, y los desplazamientos horizontales perpendiculares a la barra de torsión en dos direcciones perpendiculares. El sólido a ensayar, si se excitan otros modos además del torsional, adquiere un movimiento que combina la influencia de los cinco modos asociados a estos cinco grados de libertad, impidiendo obtener un movimiento de vibración libre debido a los impactos mencionados.

En las figuras 8, 9, 10, 11, para el cuadro, y 13, para el manillar, se observa que el sólido en ensayo tiene fijadas un determinado número de pesas de modo que sea posible que la junta

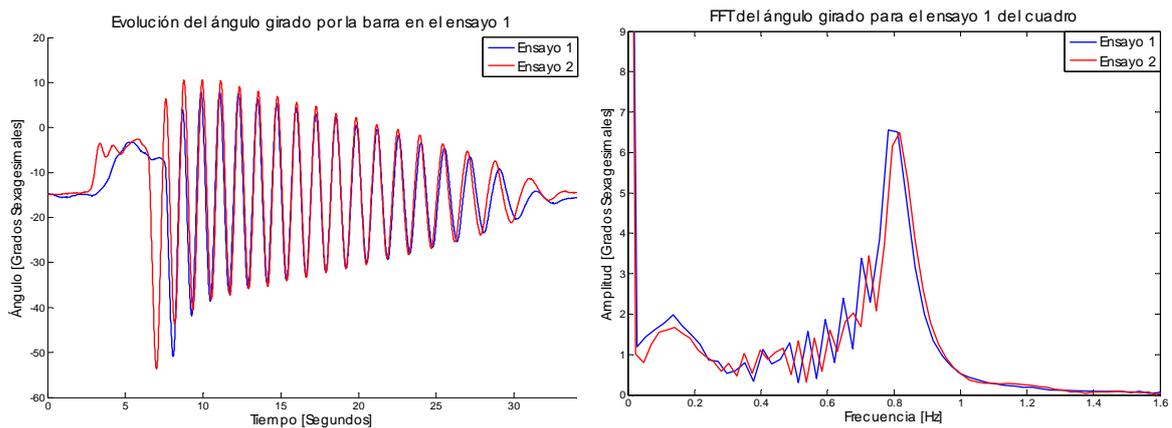
Cardan reciba un movimiento torsional de la barra cuando sea excitado el sistema mediante el ángulo inicial. Esto se consigue tratando de que la barra a que está fijada la junta quede perpendicular (tanto como sea posible) a la barra de torsión. De ahí que las pesas, como se puede apreciar en las fotografías, se coloquen para que los ángulos α y β de la junta, tras la colocación del conjunto sólido y pesas, sean lo menor posible.

A efectos del cálculo de la inercia del sólido, las pesas son consideradas como masas puntuales a cierta distancia del eje de la barra de torsión. Esta distancia ha sido medida localizando el centro de masa de las pesas intuitivamente en el momento de realizar la medición sobre el sólido.

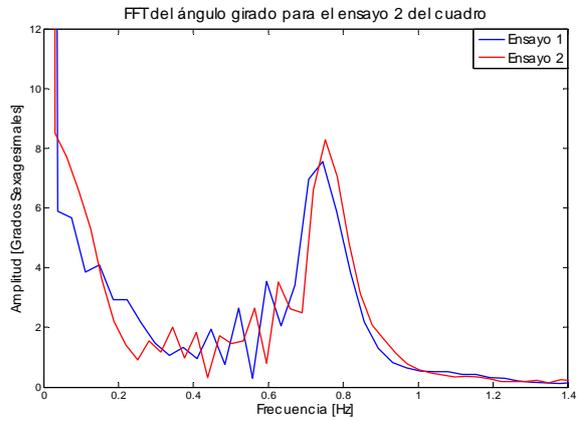
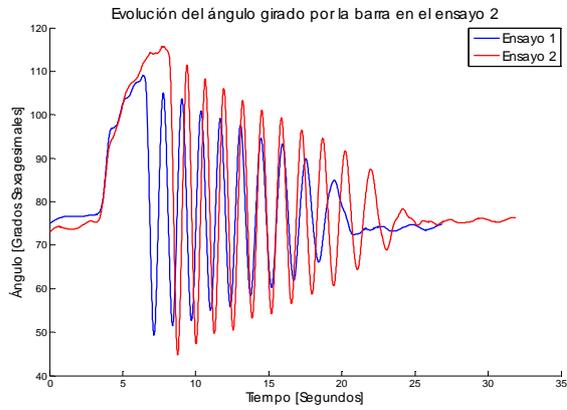
Las gráficas siguientes muestran la evolución en el tiempo y la *FFT* del ángulo girado por la barra de torsión. En ellas puede comprobarse que la evolución en el tiempo es oscilatoria y amortiguada, comportamiento esperado pues existe disipación por rozamiento y amortiguamiento estructural, presentando los ensayos realizados, para una misma cogida, resultados similares. No se ha modelado el amortiguamiento del sistema, pudiéndose despreciar su efecto ya que en base a la evolución obtenida del ángulo girado, puede inferirse que el factor de amortiguamiento es bajo, poniéndose de manifiesto que la frecuencia natural del modelo teórico y la frecuencia natural amortiguada del movimiento están muy próximas.

Las transformadas de Fourier discretas nos enseñan una marcada frecuencia natural del sistema para cada uno de las direcciones ensayadas.

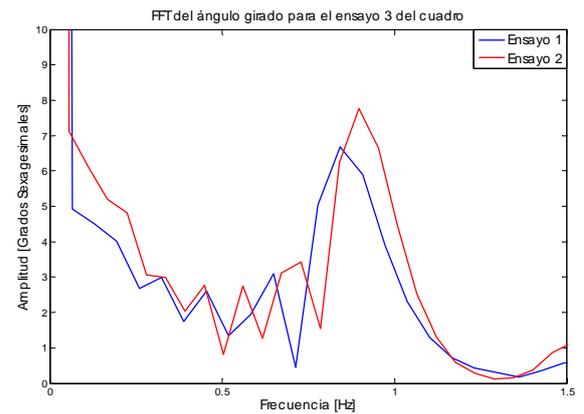
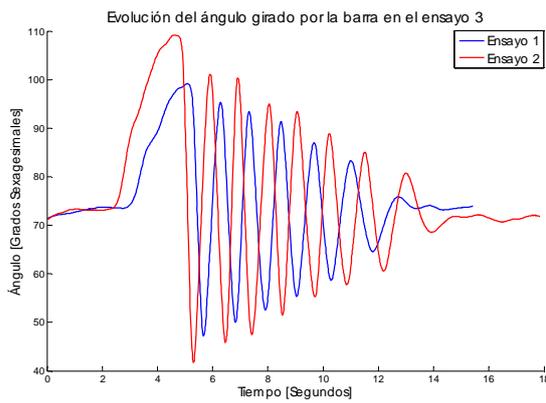
Ensayo cuadro 1



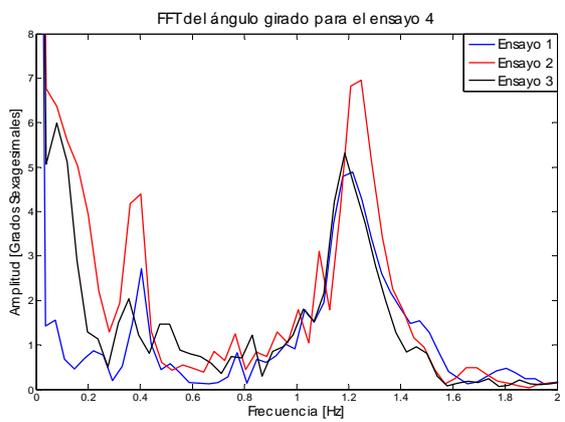
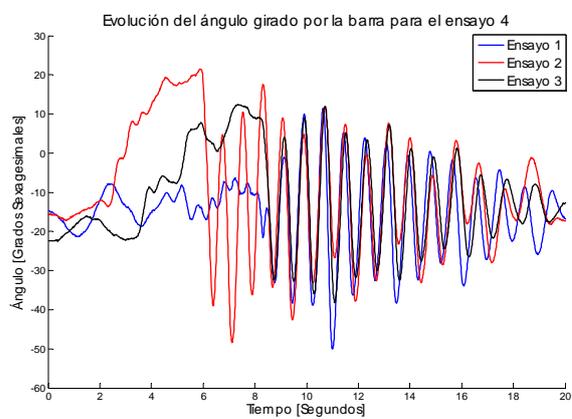
Ensayo cuadro 2



Ensayo cuadro 3



Ensayo cuadro 4



Para cada uno de los ensayos anteriores, se obtuvo la media de las frecuencias a las que la amplitud de la *FFT* era máxima. Los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla.

	<i>Ensayo 1</i>	<i>Ensayo 2</i>	<i>Ensayo 3</i>	<i>Ensayo 4</i>
Frecuencia [Hz]	0,8003	0,7485	0,8695	1,2160

Tabla 1. Frecuencias obtenidas en los ensayos del cuadro

Aplicando la ecuación (63) es posible obtener los momentos de inercia de cada ensayo respecto al eje de la barra de torsión y con el efecto sobre la inercia de las pesas.

El camino para obtener el momento de inercia que será procesado con posterioridad es el siguiente. En primera instancia, la frecuencia natural promediada se relaciona con un momento de inercia que incluye las pesas añadidas al sólido. De tal modo que tenemos el dato de la inercia del sólido respecto del eje de la barra con la influencia de las masas a cierta distancia de dicho eje. Debido a que consideramos que el centro de gravedad de los sólidos se encuentra en el plano medio de los sólidos, que también contiene a la barra de torsión, para restar la influencia de las pesas basta con hacer uso del Teorema de Steiner para un problema plano.

En ecuaciones, se puede escribir como:

$$I_i^1 = \left(\frac{1}{f_i^2 2\pi} \right)^2 \left[\frac{GI_P}{L} \right] \quad (70)$$

$$I_i^2 = I_i^1 - m_{p,i} r_i^2 \quad (71)$$

Donde I_i^1 es el momento de inercia obtenido a partir de la frecuencia natural del ensayo f_i , $m_{p,i}$ es la masa de las pesas para el ensayo i y r_i es la distancia entre las pesas y el eje de la barra a torsión.

Una vez tenida en cuenta la influencia de la masa de las pesas, es necesario realizar una traslación de ejes. El eje de la barra no pasa por el centro de gravedad del sólido, por lo que es necesario contemplar esa excentricidad mediante el uso nuevamente del Teorema de Steiner.

$$I_i = I_i^2 - m_3 r_{cdg,i}^2 \quad (72)$$

Donde I_i es el momento de inercia del sólido a lo largo del eje de la barra (que tendrá una ubicación vectorial en el sistema de referencia local del sólido) para el ensayo i , m_3 es la masa del sólido, en este caso, la del cuadro, y $r_{cdg,i}$ es la distancia desde la barra de torsión al centro de gravedad del sólido.

En la siguiente tabla se resumen los valores intermedios obtenidos de la aplicación del procedimiento descrito en líneas superiores.

	<i>Ensayo 1</i>	<i>Ensayo 2</i>	<i>Ensayo 3</i>	<i>Ensayo 4</i>
Masa total de las pesas [kg]	3,231	3,231	3,720	3,720
Distancia de las pesas al eje de la barra de torsión [m]	0,37	0,385	0,205	0,17
Distancia de las pesas al cdg [m]	0,2	0,18	0,09	0,16
Momento de inercia con pesas [kgm ²]	1,3579	1,5521	1,1503	1,2160
Momento de inercia sin pesas [kgm ²]	0,9156	1,0732	0,9940	0,4806
Momento de inercia pasando por cdg [kgm ²]	0,6964	0,8957	0,9496	0,3403

Tabla 2. Datos de los ensayos del cuadro

El siguiente paso es la aplicación del sistema de ecuaciones (69). Para tal fin, es imprescindible la localización vectorial del eje de la barra de torsión en el sistema local de coordenadas del sólido 3, definido por el ángulo β del modelo teórico. A partir de lo anterior, podemos obtener los vectores \mathbf{e}_i necesarios mediante un programa de dibujo que permita calcular ángulos. Superponiendo las fotografías tomadas y el sistema de referencia local del cuadro, se obtienen los siguientes vectores unitarios para cada uno de los ensayos.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 &= (0,7964 \ 0 \ -0,6048)^T, \\
 \mathbf{e}_2 &= (-0,4097 \ 0 \ 0,9122)^T, \\
 \mathbf{e}_3 &= (-0,3768 \ 0 \ 0,9263)^T, \\
 \mathbf{e}_4 &= (0,9097 \ 0 \ 0,4153)^T
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

Donde sólo uno de los ensayos 2 y 3 podrá ser tenido en cuenta para el cálculo final de los momentos de inercia en coordenadas locales. El resultado obtenido, tras la resolución del sistema de ecuaciones lineal (69), se ofrece en la siguiente tabla.

	I_{xx} [kgm ²]	I_{xz} [kgm ²]	I_{zz} [kgm ²]
Terna de Ensayos 1, 2 y 4	0,3274	0,0727	0,9049
Terna de Ensayos 1, 3 y 4	0,3215	0,1131	0,9538

Tabla 3. Momentos de inercia del cuadro

Puede apreciarse la incertidumbre de los momentos de inercia final, pudiendo establecerse como resultado final la media de los momentos de cada terna. Las principales fuentes de errores a este respecto son las medidas de ángulos y longitudes realizadas en programas de ordenador (provenientes de fotografías) y laboratorio y la aproximación que se realiza al usar el modelo teórico definido por la ecuación (62). Existen además otros factores que influyen negativamente tales como que el plano de simetría considerado no es real por la influencia de los platos y piñones de la transmisión, huelgos en fijación a la barra de torsión y la dificultad de fijar la sujeción de la junta Cardan al sólido de forma simétrica. Este último aspecto tiene una especial importancia pues de él depende que el momento de inercia obtenido pertenezca al plano de simetría teórico del sólido; cualquier pequeña desviación falsearía los resultados notablemente.

5.3.3.5 Ensayos sobre el manillar

Dada la dificultad de sujeción de la junta Cardan del manillar por su geometría sólo pudieron realizarse dos ensayos distintos. Para poder llevar a cabo la obtención de los momentos se realizó, en base a la experiencia, la siguiente aproximación para el sólido 4:

$$I_{xz} = -I_{zz} \quad (74)$$

La influencia de la inercia del manillar en el comportamiento del sistema será menor que la del cuadro de manera que el error cometido por esta simplificación podrá ser asumido. La ecuación (74) reduce el número de incógnitas de (69) a dos, pudiendo de este modo obtener los momentos de inercia con dos ensayos.

El proceso seguido para el cálculo de los momentos de inercia del sólido 4 es similar, por lo demás, al realizado para el sólido 3. En primer lugar, mostramos las imágenes de cada uno de los ensayos.

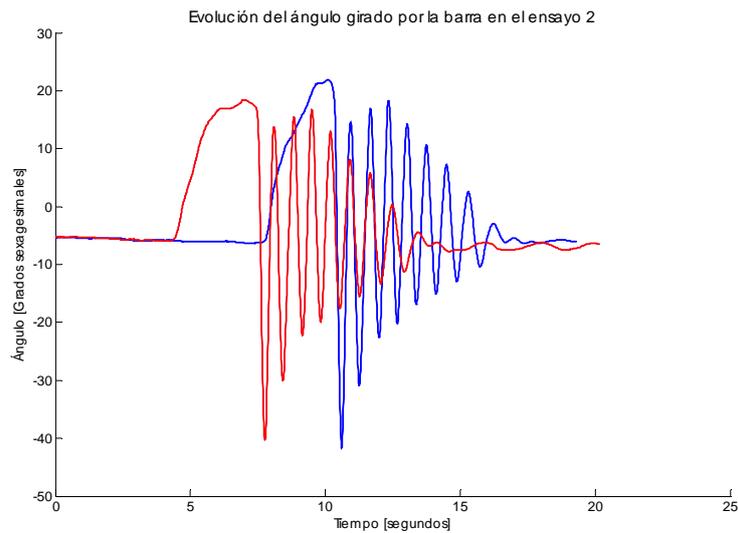


Figura 12. Ensayo 1 del manillar

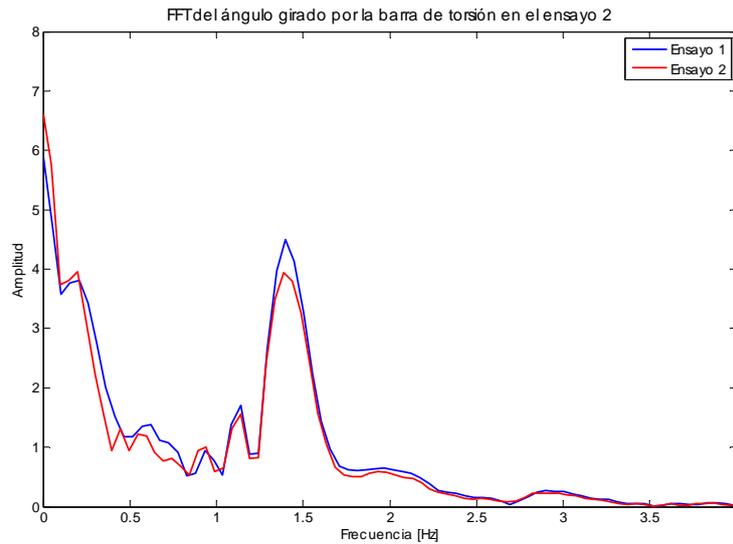


Figura 13. Ensayo 2 del manillar

El siguiente diagrama muestra la evolución del ángulo girado por la barra de torsión para el ensayo 2.



La transformada rápida de Fourier de las dos señales anteriores muestra una total concordancia, pudiéndose establecer con facilidad, como en el caso anterior, la frecuencia natural del movimiento. El valor no nulo de la amplitud para una frecuencia de valor cero se debe al valor medio de la señal, que toma como referencia el norte magnético terrestre.



Para el primero de los ensayos anteriores, como se ve en la figura 12, no fue necesaria la fijación de pesas al manillar, por lo que el procedimiento para el cálculo de los momentos de inercia no contempla la influencia de las pesas. Por el contrario, el ensayo 2 (figura 13) sí que requiere tal consideración.

El procedimiento de cálculo de frecuencia natural se realizó para los otros tres ensayos, obteniéndose, de media, los resultados presentes en la próxima tabla.

	<i>Ensayo 1</i>	<i>Ensayo 2</i>
Frecuencia [Hz]	4,659	1,392

Tabla 4. Frecuencias obtenidas en los ensayos del manillar

Aplicando la ecuación (63) es posible obtener los momentos de inercia de cada ensayo respecto al eje de la barra de torsión y con el efecto sobre la inercia de las pesas. En la siguiente tabla se aportan los datos necesarios para la obtención de dichos momentos de inercia y sus valores.

	<i>Ensayo 1</i>	<i>Ensayo 2</i>
Masa total de las pesas [kg]	0	2,246
Distancia de las pesas al eje de la barra de torsión [m]	0	0,17
Distancia de las pesas al cdg [m]	0,015	0,16
Momento de inercia con pesas [kgm ²]	-	0,4488
Momento de inercia sin pesas [kgm ²]	0,0401	0,3839

Momento de inercia pasando por cdg [kgm ²]	0,0394	0,3081
--	--------	--------

Tabla 5. Datos de los ensayos del manillar

Los pasos a seguir vienen dados por las ecuaciones (71) y (72), tomando en la última la masa correspondiente al manillar. La localización del eje de la barra de torsión en el sistema local de coordenadas viene dada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-0,0106 \ 0 \ 0,9999)^T, \\ \mathbf{e}_2 &= (-0,9993 \ 0 \ 0,0376)^T \end{aligned} \quad (75)$$

Los resultados obtenidos, tras resolver el sistema (69), se resumen en la siguiente tabla:

I_{xx} [kgm ²]	I_{xz} [kgm ²]	I_{zz} [kgm ²]
0,3056	-0,0385	0,0385

Tabla 6. Momentos de inercia del manillar

Donde está recogida la simplificación realizada.

Para realizar un tratamiento teórico no lineal del sistema es necesario definir por completo el tensor de inercia de cada uno de los sólidos. Por este motivo, el momento de inercia respecto del eje y , tanto del cuadro como del manillar, se obtendrá mediante ensayos de péndulo, que serán tratados en el apartado posterior.

5.3.4 Momentos de Inercia. Cálculo mediante sujeción pendular

5.3.4.1 Introducción

Para la obtención de momentos de inercia a lo largo de los ejes y del sistema de referencia local de cada uno de los sólidos de la bicicleta se utilizó el mismo conjunto de barra de torsión, junta Cardan y elementos de sujeción que para el cálculo de los mismos mediante la torsión de la barra. En esta ocasión la barra no trabaja a torsión sino a flexión. Las fuerzas generadas por la oscilación del sólido provocan la flexión alternativa de la barra que fue impedida parcialmente en los ensayos mediante la sujeción manual de la misma. Otro de los puntos que dificulta la obtención de buenos resultados en el ensayo es el rozamiento de la junta.

El modelo teórico que describirá el movimiento será el más sencillo posible. Lo aproximaremos mediante el modelo de péndulo plano linealizado, que viene dado por la siguiente ecuación.

$$I'_{y,i} \ddot{\alpha} + m_i g L \alpha = 0 \quad (76)$$

Donde $I'_{y,i}$ es el momento de inercia del sólido i respecto del eje perpendicular a su movimiento que pasa por el eje de la rotación de la junta Cardan, α el ángulo girado alrededor de un eje perpendicular al plano medio del sólido, m_i la masa del sólido i y L la longitud medida desde el eje de la junta Cardan hasta el centro de gravedad del sólido.

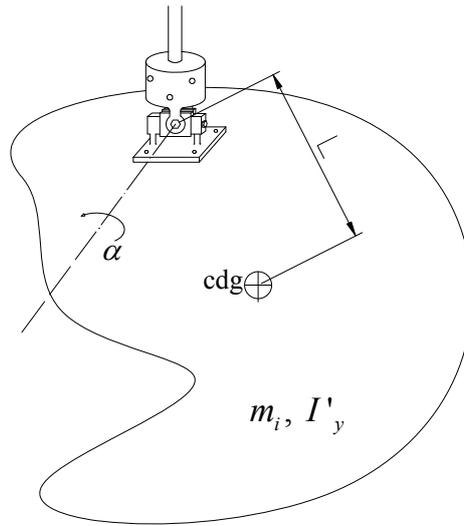


Figura 13. Modelo usado en los ensayos con sujeción pendular

La frecuencia natural del sistema es:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_i g L}{I'_{y,i}}} \quad (77)$$

A partir de la ecuación (77) puede obtenerse el momento de inercia del sólido respecto de un eje vertical a su plano que pasa por el punto de rotación de la junta Cardan. Para conseguir la inercia del sólido será necesaria nuevamente la aplicación del Teorema de Steiner para considerar la excentricidad de la junta respecto del centro de gravedad del sólido. El momento de inercia para cada sólido y plano podrá ser calculado mediante la siguiente expresión:

$$I_{y,i} = I'_{y,i} - m_i r_{cdg,i}^2 \quad (78)$$

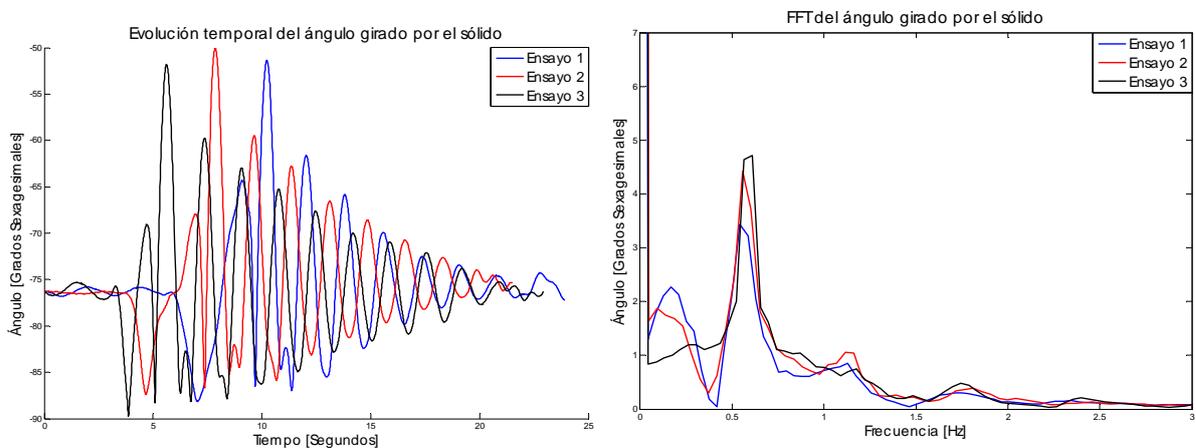
Donde $I_{y,i}$ es el momento de inercia buscado, m_i es la masa del sólido involucrado en el ensayo y $r_{cdg,i}$ es la distancia desde el centro de masa del sólido al eje de la junta.

El modelo descrito será tanto más válido cuanto menores sean los ángulos alcanzados en el movimiento de los sólidos, y será usado para el cálculo de los momentos I_{yy} de cuadro y manillar, y para los tres valores de momento de inercia existentes en el tensor de inercia de las ruedas I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} .

Al observar las gráficas que se presentan a continuación se debe tener presente lo siguiente. Las asimetrías en la evolución temporal del ángulo girado por el sensor se producen porque el ángulo representado no es el ángulo θ de giro considerado en el modelo teórico. Esto se debe a que el ángulo plano girado tiene varias componentes en el sistema de referencia global. No obstante, las frecuencias naturales son las mismas porque, exceptuando desalineamientos al imprimir el desplazamiento angular inicial, las oscilaciones de los ángulos representados tienen la misma frecuencia.

El cálculo de los momentos de inercia mediante el movimiento de péndulo tiene un grado de incertidumbre mayor que los calculados a torsión debido a los factores ya comentados. Sin embargo, los resultados obtenidos son del orden de otros ensayos realizados en elementos análogos [2].

5.3.4.2 Ensayos sobre el Cuadro



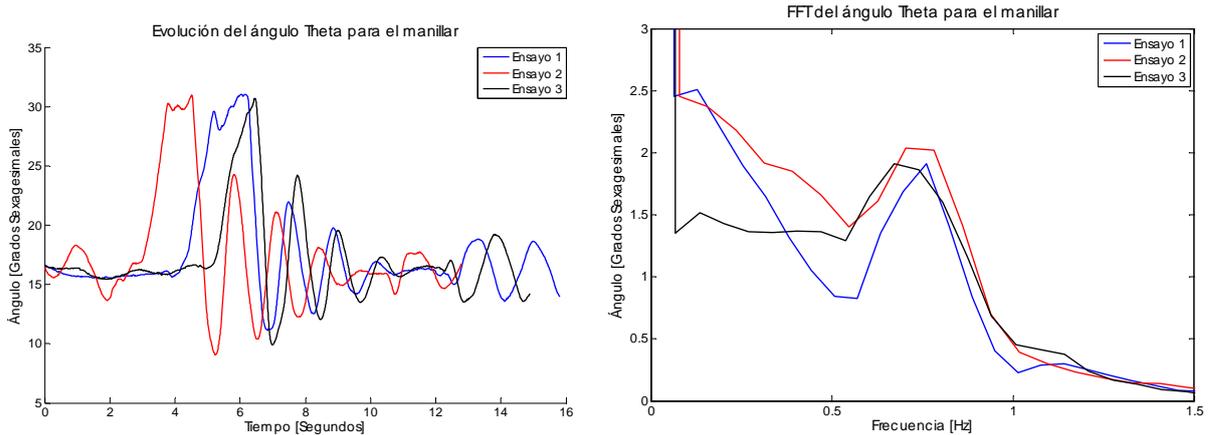
La *FFT* de la gráfica anterior muestra que existe concordancia entre los tres ensayos realizados. Mediante la observación de la evolución en el tiempo de la señal puede discriminarse la frecuencia buscada, siendo ésta la definida por el pico más agudo y de mayor amplitud, cercano a la frecuencia de 0,55 Hz. El cálculo del momento de inercia I_{yy} del cuadro es el siguiente:

$$I'_{y,3} = \frac{m_3 g L}{4\pi^2 f_n^2} = \frac{5,48 \cdot 9,81 \cdot 0,37}{4\pi^2 0,556^2} = 1,6298 \text{ kgm}^2 \quad (79)$$

$$I_{y,3} = 1,6298 - 5,48 \cdot 0,37^2 = 0,8796 \text{ kgm}^2 \quad (80)$$

Donde la frecuencia natural ha sido obtenida como la media de los ensayos válidos y la distancia al centro de gravedad del sólido del eje se midió mediante un flexómetro, modo de proceder extensible al resto de los ensayos con sujeción pendular.

5.3.4.3 Ensayos sobre el Manillar



La transformada de Fourier anterior no muestra un pico muy definido por haber procesado numéricamente toda la longitud del registro, pero puede comprobarse que coincide con la frecuencia real del movimiento oscilatorio. Repitiendo el procedimiento anterior:

$$I'_{y,4} = \frac{m_4 g L}{4\pi^2 f_n^2} = \frac{2,96 \cdot 9,81 \cdot 0,14}{4\pi^2 \cdot 0,6905^2} = 0,216 \text{ kgm}^2 \quad (81)$$

$$I_{y,4} = 0,216 - 2,96 \cdot 0,14^2 = 0,158 \text{ kgm}^2 \quad (82)$$

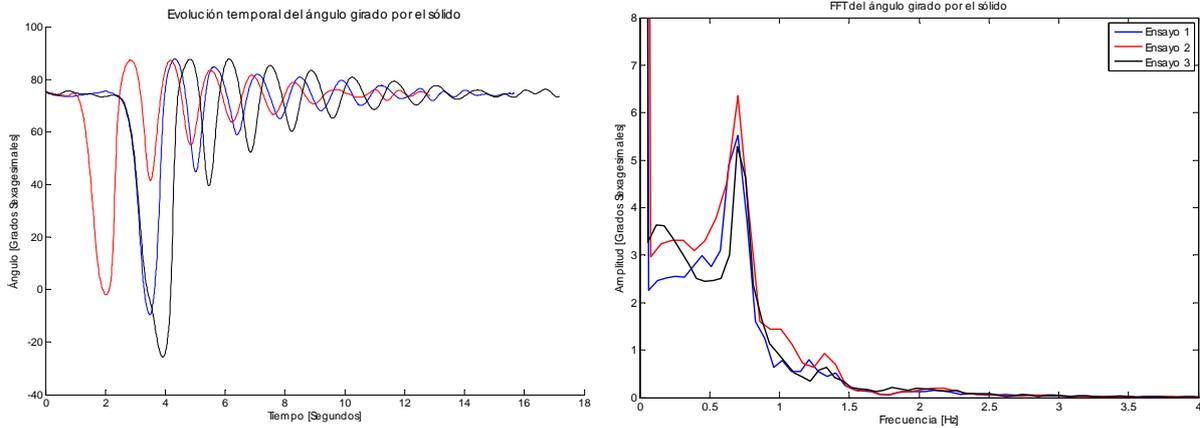
5.3.4.4 Ensayos sobre la Rueda Trasera

La totalidad de los momentos de inercia que caracterizan a una rueda de la bicicleta pueden obtenerse mediante la realización de dos ensayos basados en el movimiento de péndulo. Para ello es necesario considerar la doble simetría teórica de la rueda, de modo que podemos establecer la siguiente expresión:

$$I_{xx} = I_{zz} \quad (83)$$

Los momentos de inercia presentes en la igualdad (83) pueden calcularse mediante la oscilación de las ruedas en un plano perpendicular a su eje de simetría, mientras que el momento I_{yy} se obtiene como en el caso de los sólidos 2 y 3.

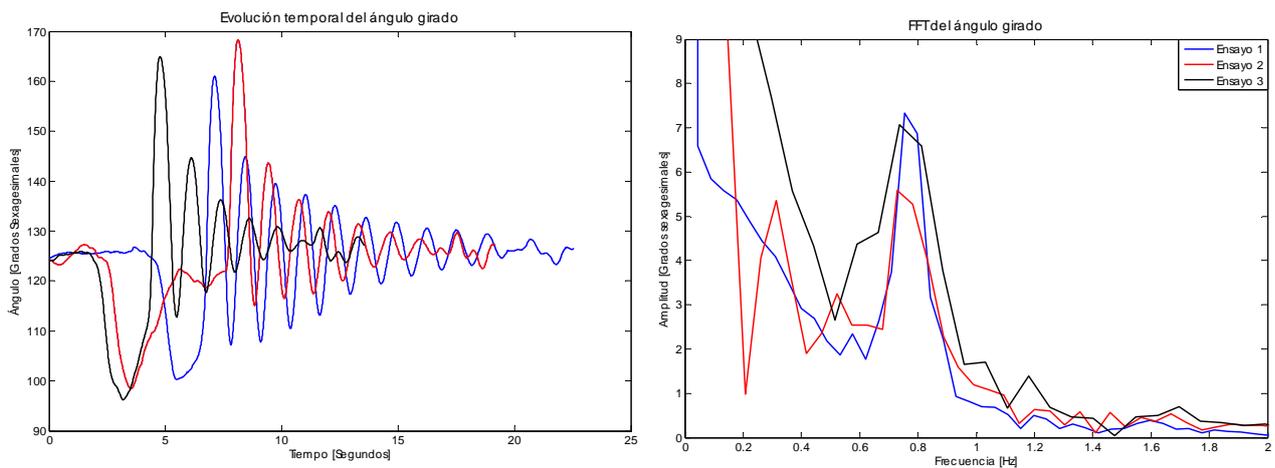
Oscilación en su plano de simetría



$$I'_{y,2} = \frac{m_2 g L}{4\pi^2 f_n^2} = \frac{2,52 \cdot 9,81 \cdot 0,354}{4\pi^2 0,7007^2} = 0,4515 \text{ kgm}^2 \quad (84)$$

$$I_{y,2} = 0,4515 - 2,52 \cdot 0,354^2 = 0,1357 \text{ kgm}^2 \quad (85)$$

Oscilación en plano perpendicular al de simetría

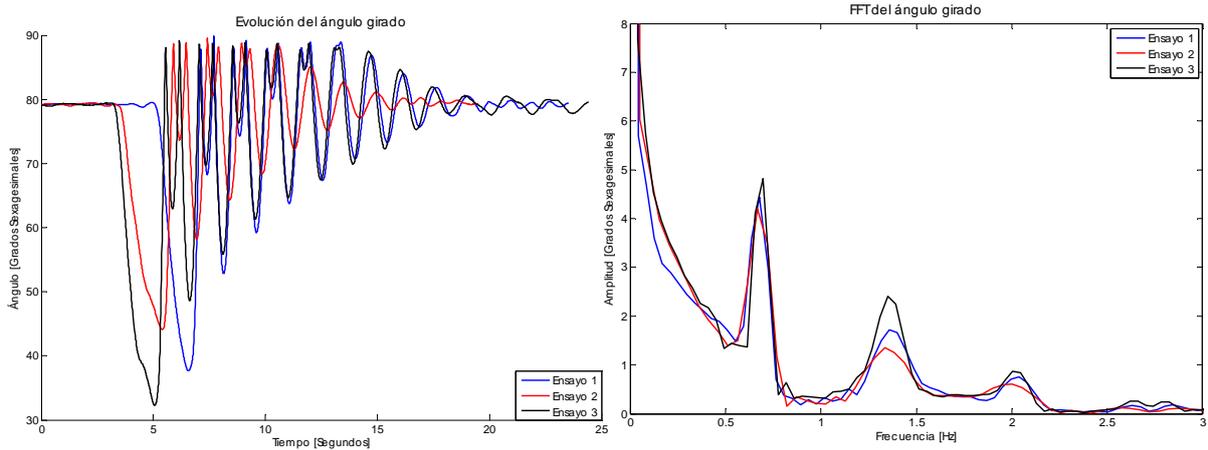


$$I'_{z,2} = I'_{x,2} = \frac{m_2 g L}{4\pi^2 f_n^2} = \frac{2,52 \cdot 9,81 \cdot 0,354}{4\pi^2 0,7405^2} = 0,4042 \text{ kgm}^2 \quad (86)$$

$$I_{z,2} = I_{x,2} = 0,4042 - 2,52 \cdot 0,354^2 = 0,0884 \text{ kgm}^2 \quad (87)$$

5.3.4.5 Ensayos sobre la Rueda Delantera

Oscilación en su plano de simetría

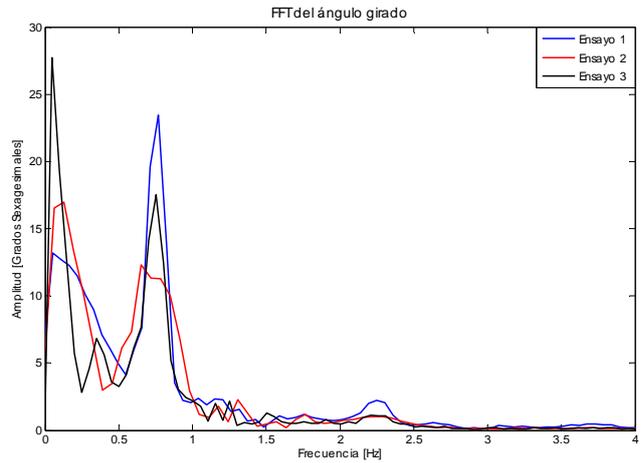
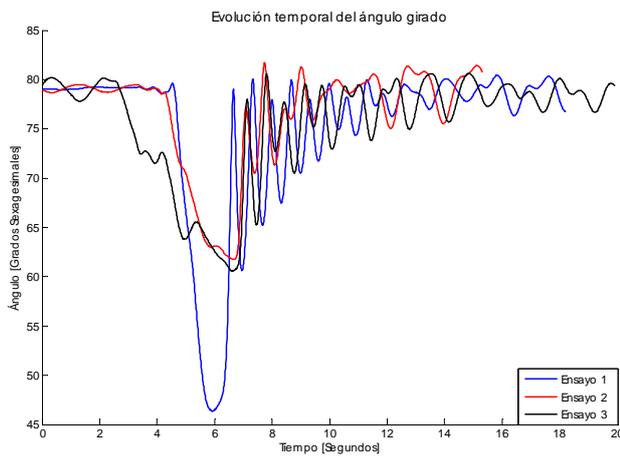


La *FFT* muestra la existencia de tres frecuencias en la señal analizada, correspondientes a los picos presentes a 0.7, 1.4 y 2 Hz. La más baja de ellas se corresponde con el movimiento oscilatorio de péndulo, siendo por tanto aquella que debe tenerse en cuenta para el cálculo de los momentos de inercia. Las frecuencias más altas son oscilaciones dentro de la vibración libre del movimiento de péndulo, producida probablemente por la deficiente inmovilización de la barra de torsión a flexión y a desalineamientos del ángulo inicial (se observa que estas frecuencias desaparecen con el tiempo). A pesar de las deficiencias comentadas, puede apreciarse la proximidad entre frecuencias naturales de los ensayos.

$$I'_{y,5} = \frac{m_2 g L}{4\pi^2 f_n^2} = \frac{1,96 \cdot 9,81 \cdot 0,354}{4\pi^2 \cdot 0,6876^2} = 0,3646 \text{ kgm}^2 \quad (88)$$

$$I_{y,5} = 0,3646 - 1,96 \cdot 0,354^2 = 0,119 \text{ kgm}^2 \quad (89)$$

Oscilación en plano perpendicular al de simetría



Puede observarse que la evolución del ángulo en este caso es notablemente irregular, no obstante, la incertidumbre de su frecuencia natural no parece elevada en cuanto a los resultados de la *FFT*, así que se han dado por buenos los ensayos realizados obteniendo los siguientes resultados:

$$I'_{z,5} = I'_{x,5} = \frac{m_2 g L}{4\pi^2 f_n^2} = \frac{1,96 \cdot 9,81 \cdot 0,354}{4\pi^2 0,7605^2} = 0,2981 \text{ kgm}^2 \quad (90)$$

$$I_{z,5} = I_{x,5} = 0,2981 - 1,96 \cdot 0,354^2 = 0,0525 \text{ kgm}^2 \quad (91)$$

5.3.5 Resumen de los parámetros del sistema

A continuación se detallan los parámetros de que consta el sistema. Todos ellos, salvo la aceleración de la gravedad, describen a la bicicleta. En otras palabras, el comportamiento dinámico y estabilidad del vehículo podrán ser modificados a partir cambios en cada una de las magnitudes que aparecen en la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
V &= \text{variable} & I_{2,xx} &= 0,0884 \text{ kgm}^2 \\
R_t &= 0,3 \text{ m} & I_{2,yy} &= 0,1357 \text{ kgm}^2 \\
R_d &= 0,3 \text{ m} & I_{2,zz} &= 0,0884 \text{ kgm}^2 \\
x_3 &= 0,4198 \text{ m} & I_{3,xx} &= 0,3215 \text{ kgm}^2 \\
y_3 &= 0 \text{ m} & I_{3,yy} &= 0,8796 \text{ kgm}^2 \\
z_3 &= 0,0296 \text{ m} & I_{3,zz} &= 0,9538 \text{ kgm}^2 \\
x_4 &= 0,9582 \text{ m} & I_{3,xz} &= 0,1131 \text{ kgm}^2 \\
y_4 &= 0 \text{ m} & I_{4,xx} &= 0,3056 \text{ kgm}^2 \\
z_4 &= 0,0557 \text{ m} & I_{4,yy} &= 0,158 \text{ kgm}^2 \\
x_5 &= 0,0149 \text{ m} & I_{4,zz} &= 0,0385 \text{ kgm}^2 \\
y_5 &= 0 \text{ m} & I_{4,xz} &= -0,0385 \text{ kgm}^2 \\
z_5 &= -0,3728 \text{ m} & I_{5,xx} &= 0,0525 \text{ kgm}^2 \\
m_2 &= 2,52 \text{ kg} & I_{5,yy} &= 0,119 \text{ kgm}^2 \\
m_3 &= 5,48 \text{ kg} & I_{5,zz} &= 0,0525 \text{ kgm}^2 \\
m_4 &= 2,96 \text{ kg} & & \\
m_5 &= 1,96 \text{ kg} & & \\
& & g &= 9,81 \text{ m/s}^2
\end{aligned} \tag{92}$$

Donde V es la velocidad lineal a la que avanza la rueda trasera, R_t el radio de la rueda trasera, R_d el radio de la rueda delantera, la terna $\langle x_i, y_i, z_i \rangle$ son las coordenadas locales que ubican los centros de gravedad del sólido i en el sistema de referencia apropiado, m_i es la masa del sólido i , e $I_{i,eje}$ el momento de inercia respecto de un determinado eje.

5.4 Ensayos dinámicos

Con objeto de poder contrastar el modelo teórico expuesto con el comportamiento real de la bicicleta, es necesario realizar unos ensayos con la bicicleta monitorizada en los que el vehículo se mueva libremente.

El fundamento teórico de estos ensayos dinámicos se basa en excitar los principales modos de vibración de la bicicleta. Una vez procesados los datos, podrán obtenerse las evoluciones de los ángulos θ y γ que mostrarán un comportamiento oscilatorio, a partir del cual será posible el cálculo de los autovalores del movimiento para la velocidad lineal correspondiente al ensayo en cuestión.

El modo de proceder práctico se resume en las siguientes líneas. La bicicleta objeto de este estudio debe encontrarse equipada con dos sensores que puedan registrar giros, uno de ellos colocado en el sólido 3 y otro en el sólido 4, con una orientación precisa y apropiada para la

posterior transformación de coordenadas. Además, en este caso, la bicicleta consta de un velocímetro que registra la velocidad de avance de la rueda trasera mediante un imán que provoca el envío de una señal por cada giro completo de la rueda. La velocidad medida de este modo, o al menos la velocidad máxima alcanzada, deberá ser registrada para cada ensayo.

La bicicleta, dotada de los equipos electrónicos antedichos y protegida mediante elementos amortiguadores como moldes de poliestireno expandido, debe ser empujada en posición vertical y con la rueda delantera recta hasta una cierta velocidad (generalmente dentro del rango de estabilidad teórico del vehículo) y posteriormente debe ser golpeada en el sillín lateralmente, provocando una oscilación del sistema que podrá ser obtenida tras el procesado de datos. Todo ello es conveniente realizarlo en correspondencia con el modelo teórico descrito en el apartado 3, esto es, deben cuidarse los siguientes aspectos:

- i. El terreno sobre el que rueda la bicicleta deberá ser llano y liso, ya que no se han tenido en cuenta en el modelado las fuerzas que la ausencia de estas características originaría sobre el sistema.
- ii. El impacto sobre el sillín debe ser tal que permita un movimiento oscilatorio en θ y γ suficiente para ser analizado, y que no provoque un ángulo elevado en los mismos, ya que el estudio de la estabilidad se basa en la linealización del sistema en su posición vertical.
- iii. Es recomendable comenzar la adquisición de datos con el vehículo parado y en posición vertical, situación que ayudará en el posible procesado posterior de las aceleraciones registradas y en la comprobación de las transformaciones de coordenadas realizadas.
- iv. Debe prestarse especial atención en la correspondencia entre la velocidad lineal de la rueda trasera y los autovalores calculados para cada ensayo. En este aspecto entran en juego factores como el descenso progresivo de la velocidad durante el movimiento y la dificultad para conocer la velocidad exacta en cada instante de tiempo.

6 Diagramas de continuación

6.1 Introducción

El estudio de la estabilidad de la bicicleta se realiza basándonos en las ecuaciones del movimiento linealizadas en la posición de equilibrio vertical. Se hace necesaria por tanto la linealización de las ecuaciones del movimiento. Este procedimiento puede ser llevado a cabo mediante varios procesos, entre ellos cabe destacar la aplicación de los desarrollos en serie a las ecuaciones del sistema no lineales y el desarrollo de las ecuaciones linealizadas mediante las aplicaciones del Principio de D'Alembert y la conservación del momento lineal y angular [4]. En los programas de MATLAB anejos ha sido utilizado el primero de los anteriores, aplicado a las ecuaciones del movimiento obtenidas mediante las ecuaciones de Lagrange (apartado 3).

Una vez obtenidas las ecuaciones linealizadas, es suficiente con calcular los autovalores del sistema según (59) y (60) para cada valor de la velocidad de avance y determinar la estabilidad del sistema a partir de ellos. La parte real de cada autovalor define la estabilidad del modo, si es negativa el modo es estable a esa velocidad de avance, mientras que si es positiva el modo será inestable. Generalmente existe incertidumbre acerca del comportamiento real de un sistema cuya linealización deriva en la parte real del autovalor nula, sin embargo, este caso carece de interés para nuestro análisis.

Pueden identificarse tres modos distintos en el movimiento. Éstos pueden ser nombrados como zigzagueo (en la literatura anglosajona conocido como *weave*), bamboleo (*wobble*, *capsize*) y *castering*. El último de ellos suele, para los parámetros usuales de la bicicleta, ser estable para todo rango de velocidad, por lo que será excluido de este estudio.

A velocidades suficientemente altas, los modos que principalmente definen el movimiento de una bicicleta son el zigzagueo y el bamboleo. Por el contrario, el modo de *castering* apenas interviene el movimiento ya que, si es excitado, desaparece rápidamente porque su autovalor posee una parte real muy negativa. El modo de bamboleo se corresponde con un autovalor real dominado por la inclinación de los sólidos 2 y 3 (ángulo θ), si este modo es inestable, la bicicleta describe un movimiento de espiral incrementando progresivamente los ángulos θ y γ hasta su caída. El modo de zigzagueo es un movimiento oscilatorio en que el manillar gira describiendo un movimiento sinusoidal alrededor de la dirección de avance, con un ligero desfase con el ángulo de inclinación.

Seguidamente se describirán los principios fundamentales del diagrama de continuación de las ecuaciones linealizadas del sistema para un diseño habitual del vehículo, obtenido tras haber aplicado el procedimiento descrito. Esta labor se realiza numéricamente mediante el programa *BicicletaNum.m* presente en los anexos, y puede observarse en las figuras 14 y 15.

A velocidades de avance cercanas a cero, existen dos pares de autovalores reales. El comportamiento de la bicicleta puede asimilarse con el de un péndulo invertido, representando los autovalores positivos la inestabilidad inherente a la bicicleta a estas velocidades, que suelen comprenderse en el rango de 0 a 0,7 m/s.

A partir del límite superior de este rango, aparece el modo de zigzag de la bicicleta, tras producirse la unión de los autovalores reales correspondientes a ese modo, y la posterior división en dos autovalores complejos. Al comienzo, este modo es inestable hasta que se alcanza una determinada velocidad donde su parte real se hace negativa, definiendo el límite inferior del rango de estabilidad del vehículo v_w . La estabilidad de este modo se gana cuando el par de autovalores complejos conjugados cruza el eje imaginario, describiendo una bifurcación de Hopf.

A velocidades superiores, el modo de bamboleo cruza el eje real en una bifurcación en tridente, definiendo el límite superior del rango de estabilidad v_c . Se concluye por tanto que la bicicleta posee un rango de estabilidad asintótica para velocidades tales que cumplen que $v_w \leq v \leq v_c$. A partir de v_c , el modo de bamboleo se hace inestable, sin embargo, el valor positivo de su autovalor es ligeramente superior a cero, no alcanzando valores superiores para velocidades susceptibles de ser alcanzadas. Este hecho provoca que la bicicleta, a velocidades superiores a v_c , sea controlable mediante la realimentación que ejerce el ciclista en su conducción.

En función de los parámetros de la bicicleta el comportamiento anterior podrá variar cuantitativamente, del mismo modo que pueden obtenerse también diferentes formas del diagrama de bifurcaciones.

6.2 Diagramas de continuación

La influencia cuantitativa de los parámetros del vehículo puede observarse comparativamente en los diagramas de continuación para cada modelo de bicicleta. En la figura 14 se muestra el diagrama de continuación resultante de la aplicación de las expresiones (59) y (60) a los parámetros de la bicicleta del artículo de *Meijaard et al* [1] (en línea continua se representa la parte real de los autovalores, mientras que las discontinuas hacen referencia a la parte imaginaria). Puede verse que el modo de *castering*, descrito por el movimiento de curva tractriz seguido por el punto de contacto de la rueda delantera, es estable para todo el rango de velocidad, estando diferenciado del modo de bamboleo. La región donde todos los autovalores tienen parte real negativa se comprende entre 4,2 y 6,8 m/s. Este resultado discrepa con [1], que sitúa la región de estabilidad entre 4,3 y 6 m/s. La disparidad de resultados puede haber sido

provocada porque, en el desarrollo de las ecuaciones de este trabajo, se ha situado el centro de gravedad del manillar en su eje de rotación, mientras que en [1] existe excentricidad con el eje.

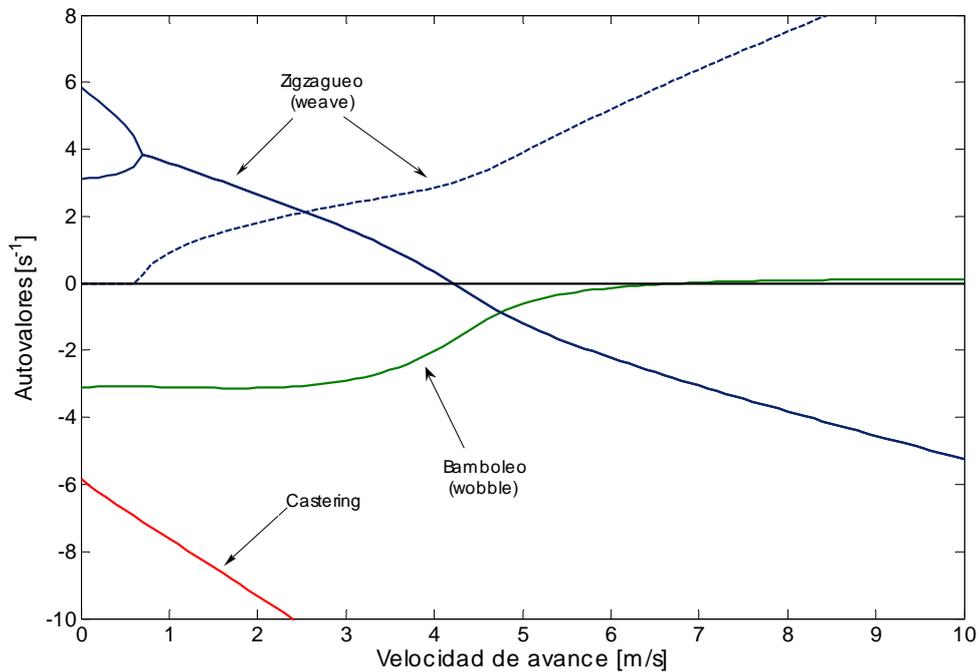


Figura 14. Diagrama de continuación de la bicicleta de [1]

Puede observarse, como se ha comentado, que a bajas velocidades el sistema posee autovalores fuertemente positivos, mientras que a velocidades superiores a la velocidad del límite superior de estabilidad los autovalores son ligeramente positivos. Esto anterior coincide con la experiencia práctica: a bajas velocidades es necesaria una especial atención por parte del conductor para mantener estable el vehículo, mientras que a altas velocidades, este control se realiza con gran facilidad.

La forma del diagrama de bifurcaciones para la bicicleta del laboratorio (tomando los momentos de inercia de la segunda terna de la tabla 3) difiere a bajas velocidades del descrito en el artículo [1] (ver figura 15). El modo de *castering* no aparece hasta una velocidad de 2,5 m/s, compartiendo para velocidades inferiores el mismo autovalor que el modo de bamboleo. También ocurre, como en el caso de la figura 14, que a muy bajas velocidades los autovalores son reales, mostrando una inestabilidad no oscilatoria análoga al problema del péndulo invertido.

El rango de estabilidad se sitúa entre 3,14 y 5,40 m/s. Es por tanto más estable a bajas velocidades, perdiendo la estabilidad a una velocidad más baja. La principal diferencia entre los dos conjuntos de parámetros que conducen a los diagramas presentados es la inclusión de la masa del ciclista en el caso de *Meijaard et al* [1]. Este hecho puede hacer pensar, a pesar de las diferencias geométricas y másicas de los elementos de los dos vehículos, que la dinámica propia

de una bicicleta posee el rango de estabilidad a velocidades más bajas, aumentando estas velocidades cuando se añade inercia al sólido 3.

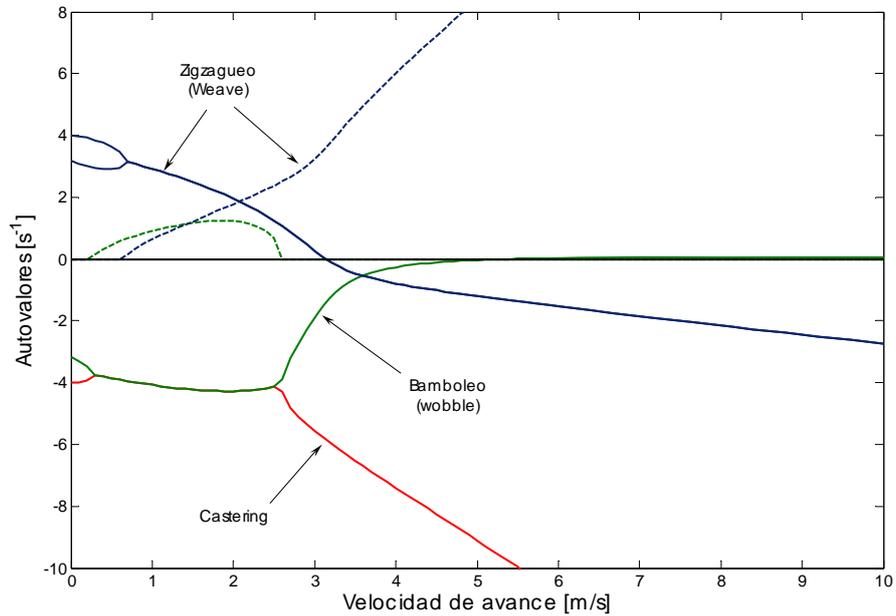


Figura 15. Diagrama de continuación de la bicicleta del laboratorio

En las siguientes dos figuras se encuentran superpuestas las partes reales de los autovalores de los sistemas considerados en este apartado. Puede verse en la figura 16 que, a grandes rasgos, el diagrama de continuación de [1] puede describirse como un desplazamiento hacia el sentido positivo de la velocidad del diagrama obtenido para la bicicleta del laboratorio. Este razonamiento se hace extensible a la diferencia existente entre los rangos de estabilidad de las dos bicicletas.

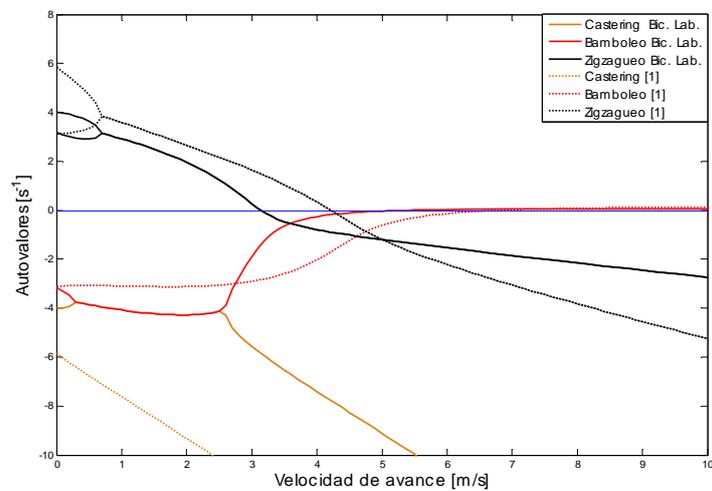


Figura 16. Comparación de autovalores de ambas bicicletas

La figura 17 muestra con detalle el cruce de los autovalores con el eje que marca el valor nulo de la parte real de los autovalores de los dos sistemas en estudio. En verde, en línea continua, se puede ver el rango de estabilidad del modelado teórico de la bicicleta del laboratorio, mientras que en línea discontinua se ofrece el de la bicicleta de *Meijaard et al.* El modo de zigzag para la bicicleta del laboratorio adelanta el corte con el eje 1 m/s con respecto de la bicicleta de [1]. También ocurre que el modo de bamboleo para la bicicleta no conducida es más inestable a bajas velocidades, haciendo que el sistema pierda su estabilidad 1,5 m/s antes que el otro sistema.

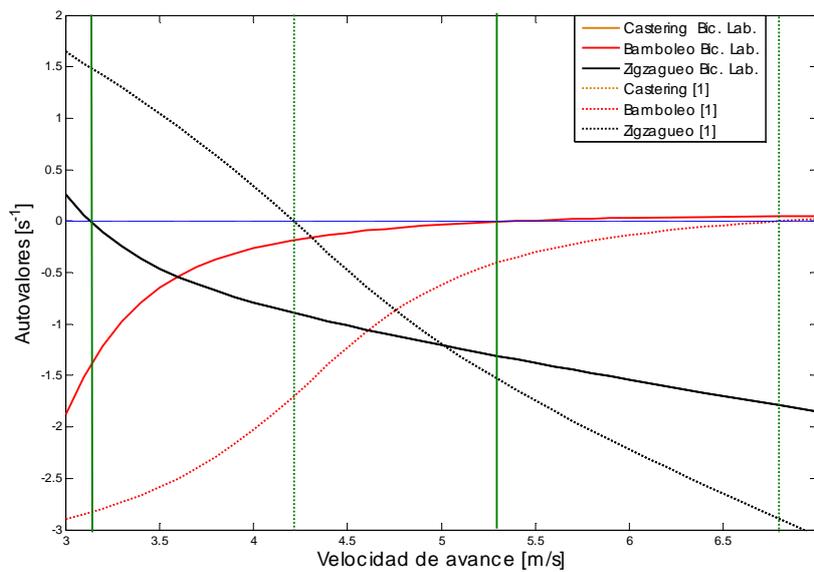


Figura 17. Detalle de la evolución de los autovalores de ambas bicicletas

7 Conclusiones

El estudio y desarrollo de las ecuaciones que modelan el comportamiento mecánico de una bicicleta ponen de manifiesto la riqueza dinámica que posee un sistema tan sencillo como éste. Esta riqueza no sólo proviene de la complejidad de la obtención de sus ecuaciones, desde la selección de las coordenadas hasta la imposición de las restricciones, sino que tiene su sentido más práctico en el estudio paramétrico de su estabilidad.

La validez de las ecuaciones obtenidas a partir del desarrollo teórico presentado puede afirmarse en tanto que presenta un comportamiento análogo al desarrollado por *Meijaard et al* [1].

En cuanto a los ensayos realizados, cabe reseñar la idoneidad de recurrir a modelos teóricos sencillos con el fin de caracterizar las magnitudes de los sólidos que no es posible obtener de manera directa. No obstante, la adecuación práctica del ensayo al modelo teórico utilizado puede resultar una de las tareas más laboriosas del estudio, y merece una especial atención por su importancia en los resultados.

El trabajo realizado pone de manifiesto la importancia de las características de los elementos que componen la bicicleta en cuanto a la dinámica de la misma. Debe, por tanto, tenerse en cuenta la aplicación que un determinado modelo de bicicleta posea para actuar en consecuencia en el diseño de cada uno de los elementos que la compongan.

Se ha comprobado que la bicicleta posee un rango de estabilidad por sus características propias, sin la influencia activa o pasiva de un conductor. Este resultado habría podido ser anticipado por [2], donde se tuvieron en consideración elementos externos al vehículo con una masa no despreciable. En cualquier caso, la influencia de los elementos auxiliares y de la presencia o ausencia pasiva del ciclista no modifica excesivamente el comportamiento, en cuanto a estabilidad, de la bicicleta. Este hecho puede inferirse de la observación de la figura 16, donde se comparan el modelo con la influencia pasiva del conductor y otro sin la misma.

8 Trabajo futuro

Entre las principales mejoras que podrían aplicarse a los ensayos realizados se encuentra la realización de un mayor número de ensayos para la obtención de los momentos de inercia. Pese a que cada ensayo muestra concordancia con el resto de ensayos de la serie, se comprobó que un cambio en la dirección del momento de inercia calculado repercutía en variaciones de alrededor del 6 % de su valor. Por tanto, puede proponerse la realización de un mayor número de ensayos, utilizando para ello sujeciones a tal efecto, y estudiarse la variabilidad de resultados entre ellos.

La principal tarea que completaría este trabajo sería la realización de numerosos ensayos dinámicos en los que pudiese obtenerse una correlación entre los autovalores del movimiento captado por los sensores y la velocidad lineal de la rueda trasera. De este modo podría obtenerse la comparación teórico-experimental para el sistema en estudio. Asimismo, un estudio más detallado y numeroso del modelo teórico, junto con ensayos experimentales si es posible, podría poner de manifiesto la influencia de los parámetros del sistema (90) sobre la estabilidad del vehículo y la influencia de los modos en la dinámica del sistema.

En cuanto al modelo teórico empleado, en función de los resultados experimentales obtenidos, podrían incluirse fuerzas que actuaran sobre el vehículo durante la ejecución de los ensayos. Estas fuerzas podrían ser originadas por el contacto neumático-suelo o por la acción del viento. La integración numérica de las ecuaciones considerando estas fuerzas debería llevar a un modelado más real del problema y a una mejor concordancia con la evolución obtenida de los ensayos, además de ser una comprobación válida de la aproximación lineal.

9 Anexo I. Programas de MATLAB

9.1 Introducción

Este apartado contiene los programas de MATLAB necesarios para obtener las expresiones simbólicas y ecuaciones desarrolladas en el epígrafe 3 y aquéllos mediante los que se han linealizado las ecuaciones del sistema para el posterior cálculo de autovalores. También pueden encontrarse programas que implementan el cálculo de las restricciones y fuerzas del sistema según se ha planteado en la ecuación (47), y que son ejecutados como subrutinas.

9.2 *Bicicleta.m*

```
%%%%%%%%% DEFINICION DE VARIABLES SIMBOLICAS %%%%%%%%%%
```

```
%Coordenadas y sus derivadas
```

```
xc=sym('xc','real');  
yc=sym('yc','real');  
phi=sym('phi','real');  
tet=sym('tet','real');  
psi=sym('psi','real');  
bet=sym('bet','real');  
gam=sym('gam','real');  
eps=sym('eps','real');  
xi=sym('xi','real');
```

```
dxc=sym('dxc','real');  
dyc=sym('dyc','real');  
dphi=sym('dphi','real');  
dtet=sym('dtet','real');  
dpsi=sym('dpsi','real');  
dbet=sym('dbet','real');  
dgam=sym('dgam','real');  
deps=sym('deps','real');  
dxi=sym('dxi','real');
```

```
%%% VECTOR DE COORDENADAS Y DE VELOCIDADES %%%%
```

```
p=[xc;yc;phi;tet;psi;bet;gam;eps;xi];  
dp=[dxc;dyc;dphi;dtet;dpsi;dbet;dgam;deps;dxi];
```

```
% A_tet=sym('A_tet','real');  
% A_phi=sym('A_phi','real');  
% A_psi=sym('A_psi','real');  
% A_bet=sym('A_bet','real');  
% A_gam=sym('A_gam','real');  
% A_eps=sym('A_eps','real');
```

```
%Tiempo  
t=sym('t','real');
```

```

%Velocidad de avance
V=sym('V','real');

%Radio rueda trasera
Rt=sym('Rt','real');
%Radio rueda delantera
Rd=sym('Rd','real');

%Posicion de centros de gravedad
x3=sym('x3','real');
z3=sym('z3','real');
x4=sym('x4','real');
z4=sym('z4','real');
x5=sym('x5','real');
z5=sym('z5','real');

%Parametros de masa e inercia

m2=sym('m2','real');
m3=sym('m3','real');
m4=sym('m4','real');
m5=sym('m5','real');
I2x=sym('I2x','real');
I2y=sym('I2y','real');
I3x=sym('I3x','real');
I3y=sym('I3y','real');
I3z=sym('I3z','real');
I3zx=sym('I3zx','real');
I4x=sym('I4x','real');
I4y=sym('I4y','real');
I4z=sym('I4z','real');
I4xy=sym('I4xy','real');
I4xz=sym('I4xz','real');
I4yz=sym('I4yz','real');
I5x=sym('I5x','real');
I5y=sym('I5y','real');

%Tensores de inercia

I2=[[I2x; 0; 0] [0; I2y; 0] [0; 0; I2x]];
I3=[[I3x; 0; I3zx] [0; I3y; 0] [I3zx; 0; I3z]];
I4=[[I4x;0; I4xz] [0; I4y; 0] [I4xz; 0; I4z]];
I5=[[I5x; 0; 0] [0; I5y; 0] [0; 0; I5x]];

%Aceleracion de la gravedad

g=sym('g','real');

%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% CINEMATICA %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%

%MATRICES DE ROTACION SIMPLE

A_tet=[[1;0;0] [0;cos(tet);sin(tet)] [0;-sin(tet);cos(tet)]];
A_phi=[[cos(phi);sin(phi);0] [-sin(phi);cos(phi);0] [0;0;1]];
A_psi=[[cos(psi);0;-sin(psi)] [0;1;0] [sin(psi);0;cos(psi)]];
A_bet=[[cos(bet);0;-sin(bet)] [0;1;0] [sin(bet);0;cos(bet)]];

```

```
A_eps=[[cos(eps);0;-sin(eps)] [0;1;0] [sin(eps);0;cos(eps)]];
A_gam=[[cos(gam);sin(gam);0] [-sin(gam);cos(gam);0] [0;0;1]];
```

```
%MATRICES DE ROTACION DE LOS SISTEMAS DE REFERENCIA DE LOS SOLIDOS E
INTERMEDIOS
```

```
Ai1=A_phi;
Ai2=A_phi*A_tet;
A2=Ai2*A_psi;
A3=Ai2*A_bet;
A4=A3*A_gam;
A5=A4*A_eps;
```

```
i=[1;0;0];
j=[0;1;0];
k=[0;0;1];
```

```
%MATRICES PARA EL CALCULO DE VELOCIDADES ANGULARES
```

```
G2g=[[0;0;0] [0;0;0] k [Ai1*i] [Ai2*j] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0]];
G3g=[[0;0;0] [0;0;0] k [Ai1*i] [0;0;0] [Ai2*j] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0]];
G4g=[[0;0;0] [0;0;0] k [Ai1*i] [0;0;0] [Ai2*j] [A3*k] [0;0;0] [0;0;0]];
G5g=[[0;0;0] [0;0;0] k [Ai1*i] [0;0;0] [Ai2*j] [A3*k] [A4*j] [0;0;0]];
```

```
G2l=[[0;0;0] [0;0;0] [A2*k] [(A_tet*A_psi)'*i] [A_psi'*j] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0]];
G3l=[[0;0;0] [0;0;0] [A3*k] [(A_tet*A_bet)'*i] [0;0;0] [A_bet'*j] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0]];
G4l=[[0;0;0] [0;0;0] [A4*k] [(A_tet*A_bet*A_gam)'*i] [0;0;0] [(A_bet*A_gam)'*j] [A_gam'*k] [0;0;0]
[0;0;0]];
G5l=[[0;0;0] [0;0;0] [A5*k] [(A_tet*A_bet*A_gam*A_eps)'*i]...
[0;0;0] [(A_bet*A_gam*A_eps)'*j] [(A_gam*A_eps)*k] [A_eps'*j] [0;0;0]];
```

```
%POSICIONES DE LOS CENTROS DE GRAVEDAD EN LOCALES
```

```
rG2=[0 0 Rt]';
rG3=[x3 0 z3]';
rG4=[x4 0 z4]';
rG5=[x5 0 z5]';
```

```
%POSICIONES DE LOS CENTROS DE GRAVEDAD EN GLOBALES
```

```
RG2=[xc yc 0]'+Ai2*rG2;
RG3=RG2+A3*rG3;
RG4=RG2+A3*rG4;
RG5=RG4+A4*rG5;
```

```
%MATRICES PARA EL CALCULO DE VELOCIDADES GLOBALES DE LOS CDG
```

```
H2=jacobian(RG2,p);
H3=jacobian(RG3,p);
H4=jacobian(RG4,p);
H5=jacobian(RG5,p);
```

```
%VELOCIDADES GLOBALES DE LOS CDG
```

```
VG2=H2*dp;
VG3=H3*dp;
VG4=H4*dp;
VG5=H5*dp;
```

```

%%
%%RESTRICCIONES
%%

```

```

%Restricciones de contacto rueda delantera

```

```

RD=RG5+A5*[Rd*cos(xi);0;-Rd*sin(xi)];
RD=simplify(RD); %Salen las 3 componentes distintas de cero=> La tercera componente se iguala a
cero.

```

```

tD=diff(RD,xi);
tD=simplify(tD); %Salen las 3 componentes distintas de cero=> La tercera componente se iguala a cero.

```

```

ResCon=[RD(3) tD(3)]';
CqCon=simplify(jacobian(ResCon,p));
CtCon(1:2,1)=[0 0]';
dCqCondp=simplify(jacobian(CqCon*dp,p)*dp);

```

```

%Restriccion de movilidad

```

```

ResMov=psi-(V/Rt)*t;
CqMov=[0 0 0 0 1 0 0 0 0];
CtMov=-(V/Rt);
dCqMovdp=simplify(jacobian(CqMov*dp,p)*dp);

```

```

%Agrupamos las restricciones holonomas

```

```

Res=[ResCon' ResMov']';
Cq=[CqCon' CqMov']';
Ct=[CtCon' CtMov']';
dCqdp=[dCqCondp' dCqMovdp]';

```

```

%Restricciones de rodadura sin deslizamiento

```

```

w2=G2g*dp;
rG2C=Ai2*[0 0 -Rt]';
VC=VG2+cross(w2,rG2C);
VC=simplify(VC);

```

```

w5=G5g*dp;
rD=A5*[Rd*cos(xi) 0 -Rd*sin(xi)]';
VD=VG5+cross(w5,rD);
VD=simplify(VD);

```

```

ResRod=[VC(1) VC(2) VD(1) VD(2)]';
B=simplify(jacobian(ResRod,dp));
dBdp=simplify(jacobian(B*dp,p)*dp);

```

```

%%
%%ECUACIONES DEL MOVIMIENTO
%%

```

```

J2=(G2l)*I2*G2l;
J3=(G3l)*I3*G3l;
J4=(G4l)*I4*G4l;
J5=(G5l)*I5*G5l;

```

```

%Matriz de masa
M=simplify(m2*(H2)'*H2+J2+m3*(H3)'*H3+J3+m4*(H4)'*H4+J4+m5*(H5)'*H5+J5);

Mdp=M*dp;

%Energia cinetica
T=simplify(0.5*dp'*M*dp);

%Fuerzas de inercia cuadraticas en velocidad
Qv=simplify(-jacobian(Mdp,p)*dp+(jacobian(T,p)'));

P2=[0; 0; -m2*g];
P3=[0; 0; -m3*g];
P4=[0; 0; -m4*g];
P5=[0; 0; -m5*g];

%Fuerzas de gravedad
Qgrav=H2'*P2+H3'*P3+H4'*P4+H5'*P5;

save M.mat M -mat;
save Qv.mat Qv -mat;
save Qgrav.mat Qgrav -mat;

save Res.mat Res -mat;
save Cq.mat Cq -mat;
save Ct.mat Ct -mat;
save dCqdp.mat dCqdp -mat;

save B.mat B -mat;
save dBdp.mat dBdp -mat;

```

9.3 *BicicletaNum.m*

```

Param=Parametros;

%CALCULO DE ECUACIONES LINEALIZADAS Y ESTABILIDAD

if(1)

Vel=0:0.5:10;

for i=1:length(Vel),

    V=Vel(i);

    Param(2)=V; %Sólo se cambia la velocidad.

    [MM,CC,KK]=CalculaMatricesMCK(Param) %Nuevas matrices numéricas para cada velocidad.

    nind=2;

    AA=zeros(2*nind);
    AA(1:nind,nind+1:2*nind)=eye(nind);
    AA(nind+1:2*nind,1:nind)=-MM\KK;
    AA(nind+1:2*nind,nind+1:2*nind)=-MM\CC;

```

```

[Fi,Nu]=eig(AA);

    TodosNu(:,i)=diag(Nu);
end

end

```

9.4 *CalculaMatricesMCK.m*

```

function [MM,CC,KK]=CalculaMatricesMCK(Param);

%Las coordenadas a determinar con las restricciones holónomas son psi, bet y xi

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%COORDENADAS INDEPENDIENTES

tet=0;
gam=0;

dtet=0;
dgam=0;

ddtet=0;
ddgam=0;

pind=[tet gam]';
dpind=[dtet dgam]';
ddpind=[ddtet dddgam]';

%COORDENADAS IGNORABLES

xc=0;
yc=0;
phi=0;
eps=0;

p_ign=[xc yc phi eps];

Ec=EcMov(pind,dpind,ddpind,p_ign,Param);

incr=10^(-6);

for i=1:length(pind),
    pind(i)=pind(i)+incr;
    thet=pind(1);
    gam=pind(2);
    Ec2=EcMov(pind,dpind,ddpind,p_ign,Param);
    KK(:,i)=(Ec2-Ec)/incr;
    pind(i)=pind(i)-incr;
    thet=pind(1);
    gam=pind(2);
end

for i=1:length(pind),

```

```

    dpind(i)=dpind(i)+incr;
    dthet=dpind(1);
    dgam=dpind(2);
    Ec2=EcMov(pind,dpind,ddpind,p_ign,Param);
    CC(:,i)=(Ec2-Ec)/incr;
    dpind(i)=dpind(i)-incr;
    dthet=dpind(1);
    dgam=dpind(2);
end

for i=1:length(pind),
    ddpind(i)=ddpind(i)+incr;
    ddthet=ddpind(1);
    dddgam=ddpind(2);
    Ec2=EcMov(pind,dpind,ddpind,p_ign,Param);
    MM(:,i)=(Ec2-Ec)/incr;
    ddpind(i)=ddpind(i)-incr;
    ddthet=ddpind(1);
    dddgam=ddpind(2);
end

```

9.5 *EcMov.m*

```

function Ec=EcMov(pind,dpind,ddpind,p_ign,Param);

xc=p_ign(1);
yc=p_ign(2);
phi=p_ign(3);
eps=p_ign(4);

tet=pind(1);
gam=pind(2);

dtet=dpind(1);
dgam=dpind(2);

p=zeros(9,1);
dp=zeros(9,1);

p(1)=xc;
p(2)=yc;
p(3)=phi;
p(4)=tet;
p(7)=gam;
p(8)=eps;

%Calcula las coordenadas dependientes

%Estimación inicial
psi=0;
bet=2*pi-(pi/10);
xi=pi/2;

qdep0=[psi bet xi]';
qdep=fsolve(@Restr,qdep0,optimset('jacobian','on'),p,dp,Param);
p(5)=qdep(1); %psi

```

```

p(6)=qdep(2) %bet
p(9)=qdep(3); %xi

%Calcula las velocidades dependientes

[Res Cq Ct dCqdp]=rHolon(p,dp,Param);
[B dBdp]=rNoHol(p,dp,Param);

D=[Cq' B'];
d=[-Ct' zeros(1,4)]';
Ddep=[D(:,1) D(:,2) D(:,3) D(:,5) D(:,6) D(:,8) D(:,9)];
Dind=[D(:,4) D(:,7)];
dqdep=Ddep\(-Dind*[dtet dgam]' + d);

dxc=dqdep(1);
dyc=dqdep(2);
dphi=dqdep(3);
dpsi=dqdep(4);
dbet=dqdep(5);
deps=dqdep(6);
dxi=dqdep(7);

dp(1)=dxc;
dp(2)=dyc;
dp(3)=dphi;
dp(4)=dtet;
dp(5)=dpsi;
dp(6)=dbet;
dp(7)=dgam;
dp(8)=deps;
dp(9)=dxi;

%Calcula los términos de las ecuaciones del movimiento

[Res Cq Ct dCqdp]=rHolon(p,dp,Param);
[B dBdp]=rNoHol(p,dp,Param);

E(1:2,1:2)=eye(2);
E(3:9,1:2)=-Ddep\Dind;

dDdq=[dCqdp' dBdp'];

F(1:2,1)=zeros(2,1);
F(3:9,1)=-Ddep\dDdq;

[M Qv Qgrav]=MasaFuerzas(p,dp,Param);

orden=[4 7 1 2 3 5 6 8 9];

%Reordena matrices y vectores

for i=1:length(orden),
    Qgrav2(i,1)=Qgrav(orden(i));
    Qv2(i,1)=Qv(orden(i));
    for j=1:length(orden),
        M2(i,j)=M(orden(i),orden(j));
    end
end

Mi=E'*M2*E;

```

$$Q_i = E' * (Q_v^2 + Q_{grav}^2 - M^2 * F);$$

$$E_c = M_i * ddp_{ind} - Q_i;$$

9.6 MasaFuerzas.m

```
function [M,Qv,Qgrav]=MasaFuerzas(p,dp,Param)
```

```
xc=p(1);  
yc=p(2);  
phi=p(3);  
tet=p(4);  
psi=p(5);  
bet=p(6);  
gam=p(7);  
eps=p(8);  
xi=p(9);
```

```
dxc=dp(1);  
dyc=dp(2);  
dphi=dp(3);  
dtet=dp(4);  
dpsi=dp(5);  
dbet=dp(6);  
dgam=dp(7);  
deps=dp(8);  
dxi=dp(9);
```

```
t=Param(1);  
V=Param(2);  
Rt=Param(3);  
Rd=Param(4);  
x3=Param(5);  
z3=Param(6);  
x4=Param(7);  
z4=Param(8);  
x5=Param(9);  
z5=Param(10);  
m2=Param(11);  
m3=Param(12);  
m4=Param(13);  
m5=Param(14);  
I2x=Param(15);  
I2y=Param(16);  
I3x=Param(17);  
I3y=Param(18);  
I3z=Param(19);  
I3zx=Param(20);  
I4x=Param(21);  
I4y=Param(22);  
I4z=Param(23);  
I4xy=Param(24);  
I4xz=Param(25);  
I4yz=Param(26);
```

```

I5x=Param(27);
I5y=Param(28);
g=Param(29);

load M.mat;
load Qv.mat;
load Qgrav.mat;

M=eval(M);
Qv=eval(Qv);
Qgrav=eval(Qgrav);

```

9.7 Parametros.m

```

function Param=Parametros;

%% %% %% %% %% %% %% %% %% %% ASIGNACION DE PARAMETROS %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%
%% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%

betaf=5.96817301822878;
A23(1,1)=cos(betaf);A23(1,2)=-sin(betaf);A23(2,1)=sin(betaf);A23(2,2)=cos(betaf);
t=0;
V=5;
Rt=0.3;
Rd=0.3;
% x3=0.389976
% z3=0.158258

x3=A23(1,:)*[0.389976;0.158258]
z3=A23(2,:)*[0.389976;0.158258]

% x4=0.893746
% z4=0.349845

x4=A23(1,:)*[0.893746;0.349845]
z4=A23(2,:)*[0.893746;0.349845]

% x5=0.129668
% z5=-0.349845

x5=A23(1,:)*[0.129668;-0.349845]
z5=A23(2,:)*[0.129668;-0.349845]

m2=2.52;
m3=5.48;
m4=2.96;
m5=1.96;

I2x=0.0884; %ac
I2y=0.1357; %ac
I3x=0.3215; %ac 0.3274
I3y=0.8796; %ac
I3z=0.9538; %ac 0.9049
I3zx=0.1131; %ac 0.0727
I4x=0.3056; %ac %%%Revisar este momento de inercia
I4y=0.158; %ac
I4z=0.0385; %ac

```

```

I4xy=0; %ac
I4xz=-I4z; %ac
I4yz=0; %ac
I5x=0.0525; %ac
I5y=0.119; %ac
g=9.81;

```

```

Param(1)=t;
Param(2)=V;
Param(3)=Rt;
Param(4)=Rd;
Param(5)=x3;
Param(6)=z3;
Param(7)=x4;
Param(8)=z4;
Param(9)=x5;
Param(10)=z5;
Param(11)=m2;
Param(12)=m3;
Param(13)=m4;
Param(14)=m5;
Param(15)=I2x;
Param(16)=I2y;
Param(17)=I3x;
Param(18)=I3y;
Param(19)=I3z;
Param(20)=I3zx;
Param(21)=I4x;
Param(22)=I4y;
Param(23)=I4z;
Param(24)=I4xy;
Param(25)=I4xz;
Param(26)=I4yz;
Param(27)=I5x;
Param(28)=I5y;
Param(29)=g;

```

9.8 *Restr.m*

```
function [Res,Cqdep]=Restr(qdep,p,dp,Param)
```

```

p(5)=qdep(1); %psi
p(6)=qdep(2); %bet
p(9)=qdep(3); %xi

```

```
[Res Cq Ct dCqdp]=rHolon(p,dp,Param);
```

```
Cqdep=[Cq(:,5) Cq(:,6) Cq(:,9)];
```

9.9 *rHolon.m*

```
function [Res,Cq,Ct,dCqdp]=rHolon(p,dp,Param)
```

```
xc=p(1);
yc=p(2);
phi=p(3);
tet=p(4);
psi=p(5);
bet=p(6);
gam=p(7);
eps=p(8);
xi=p(9);
```

```
dxc=dp(1);
dyc=dp(2);
dphi=dp(3);
dtet=dp(4);
dpsi=dp(5);
dbet=dp(6);
dgam=dp(7);
deps=dp(8);
dxi=dp(9);
```

```
t=Param(1);
V=Param(2);
Rt=Param(3);
Rd=Param(4);
x3=Param(5);
z3=Param(6);
x4=Param(7);
z4=Param(8);
x5=Param(9);
z5=Param(10);
m2=Param(11);
m3=Param(12);
m4=Param(13);
m5=Param(14);
I2x=Param(15);
I2y=Param(16);
I3x=Param(17);
I3y=Param(18);
I3z=Param(19);
I3zx=Param(20);
I4x=Param(21);
I4y=Param(22);
I4z=Param(23);
I4xy=Param(24);
I4xz=Param(25);
I4yz=Param(26);
I5x=Param(27);
I5y=Param(28);
g=Param(29);
```

```
load Res.mat;
load Cq.mat;
load Ct.mat;
load dCqdp.mat;
```

```
Res=eval(Res);
Cq=eval(Cq);
Ct=eval(Ct);
dCqdp=eval(dCqdp);
```

9.10 *rNoHol.m*

```
function [B,dBdp]=rNoHol(p,dp,Param)
```

```
xc=p(1);  
yc=p(2);  
phi=p(3);  
tet=p(4);  
psi=p(5);  
bet=p(6);  
gam=p(7);  
eps=p(8);  
xi=p(9);
```

```
dxc=dp(1);  
dyc=dp(2);  
dphi=dp(3);  
dtet=dp(4);  
dpsi=dp(5);  
dbet=dp(6);  
dgam=dp(7);  
deps=dp(8);  
dxi=dp(9);
```

```
t=Param(1);  
V=Param(2);  
Rt=Param(3);  
Rd=Param(4);  
x3=Param(5);  
z3=Param(6);  
x4=Param(7);  
z4=Param(8);  
x5=Param(9);  
z5=Param(10);  
m2=Param(11);  
m3=Param(12);  
m4=Param(13);  
m5=Param(14);  
I2x=Param(15);  
I2y=Param(16);  
I3x=Param(17);  
I3y=Param(18);  
I3z=Param(19);  
I3zx=Param(20);  
I4x=Param(21);  
I4y=Param(22);  
I4z=Param(23);  
I4xy=Param(24);  
I4xz=Param(25);  
I4yz=Param(26);  
I5x=Param(27);  
I5y=Param(28);  
g=Param(29);
```

```
load B.mat;  
load dBdp.mat;
```

```
B=eval(B);  
dBdp=eval(dBdp);
```

10 Referencias y bibliografía

- [1] Meijaard, J.P., Papadopoulos, Jim M., Ruina, Andy & Schwab, A. L. 2007 Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. *Proc. R. Soc. A* **463**, 1955-1982.
- [2] Kooijman, J.D.G., Schwab, A.L. & Meijaard, J.P. 2008 Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle. *Multibody Syst Dyn* 19: 115-132.
- [3] Escalona Franco, José Luis. 2009. Dinámica de la bicicleta. *Universidad de Sevilla*.
- [4] Schwab, A. L., Meijaard, J.P., Papadopoulos. 2005. Benchmark Results on the Linearized Equations of Motion of an Uncontrolled Bicycle. *KSME International Journal of Mechanical Science and Technology*, 19(1): 292-304.
- [5] Strogatz, Stephen H. 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books.
- [6] Whipple, D.G. 1899. The stability of the motion of a bicycle. *Quart. J. Pure. Appl. Math.* **30**, 312-348.