

## 7 CAPÍTULO

## ESTADOS LÍMITE ÚLTIMOS

## ÍNDICE

<b>7</b>	<b>CAPÍTULO: ESTADOS LÍMITE ÚLTIMOS .....</b>	<b>73</b>
7.1	INTRODUCCIÓN .....	73
7.2	ESTADO LÍMITE DE AGOTAMIENTO FRENTE A SOLICITACIONES NORMALES .....	73
7.2.1	<i>Introducción</i> .....	73
7.2.2	<i>Hipótesis de partida</i> .....	74
7.2.3	<i>Dominios de deformación</i> .....	74
7.2.4	<i>Filosofía de diseño</i> .....	76
7.2.5	<i>Cuantías de armadura longitudinal para secciones balanceadas</i> .....	79
7.2.6	<i>Diseño a flexión simple sin sección predeterminada según normativa ACI</i> .....	84
7.2.6.1	Diseño en dominio sobre-reforzado ( $\rho_f \geq \rho_{fb}$ ) .....	85
7.2.6.2	Diseño en dominio bajo-reforzado ( $\rho_f < \rho_{fb}$ ) .....	88
7.2.6.3	Notación .....	92
7.2.7	<i>Diseño a flexión simple con sección dada según normativa ACI</i> .....	93
7.2.7.1	Diseño en dominio sobre-reforzado ( $\rho_f \geq \rho_{fb}$ ) .....	93
7.2.7.2	Diseño en dominio bajo-reforzado ( $\rho_f \leq \rho_{fb}$ ) .....	95
7.2.7.3	Notación .....	98
7.2.8	<i>Diseño a flexión simple sin sección dada según normativa EHE</i> .....	99
7.2.8.1	Diseño en dominio 4 ( $\xi \geq \xi_{lim}$ ) .....	99
7.2.8.2	Diseño en dominio 2 ( $\xi < \xi_{lim}$ ) .....	102
7.2.8.3	Notación .....	105
7.2.9	<i>Diseño a flexión simple con sección dada según normativa EHE</i> .....	106
7.2.9.1	Diseño en dominio 4 ( $\xi \geq \xi_{lim}$ ) .....	107
7.2.9.2	Diseño en dominio 2 ( $\xi < \xi_{lim}$ ) .....	109
7.2.9.3	Notación .....	111
7.2.10	<i>Estudio de hormigones de alta resistencia</i> .....	112
7.2.10.1	Introducción .....	112
7.2.10.2	Estudio .....	112
7.2.10.3	Conclusiones .....	118
7.2.11	<i>Estudio de la influencia del tipo de refuerzo</i> .....	119
7.2.11.1	Introducción .....	119
7.2.11.2	Estudio .....	120
7.2.11.3	Conclusiones .....	128
7.3	ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE ESFUERZO CORTANTE .....	129
7.3.1	<i>Introducción</i> .....	129
7.3.2	<i>Mecanismos de resistencia a cortante</i> .....	129
7.3.2.1	Resistencia del hormigón en la zona de compresión .....	130
7.3.2.2	Rozamiento de los labios de la grieta en el hormigón .....	130
7.3.2.3	Efecto pasador de los refuerzos .....	130
7.3.2.4	Resistencia de armadura a cortante .....	131
7.3.3	<i>Distribución de tensiones cortantes</i> .....	131
7.3.3.1	Sección no fisurada con relación lineal entre tensiones y deformaciones .....	131
7.3.3.2	Sección fisurada con relación lineal entre tensiones y deformaciones .....	134
7.3.3.3	Sección fisurada con relación no lineal entre tensiones y deformaciones .....	136
7.3.4	<i>Variación de la tensión de las armaduras longitudinales debido a la fisuración por esfuerzo cortante</i> .....	138
7.3.4.1	Pieza sin fisuras .....	138
7.3.4.2	Pieza fisurada con armadura de corte .....	139
7.3.5	<i>Decremento de la fuerza de compresión por la fisuración debido al esfuerzo cortante</i> .....	140
7.3.6	<i>Desplazamiento de la sección de cálculo para el cortante</i> .....	141
7.3.7	<i>Principios de cálculo a cortante</i> .....	142
7.3.7.1	Introducción .....	142
7.3.7.2	Resistencia a esfuerzo cortante .....	144

7.3.7.2.1	Esfuerzo cortante resistido por el hormigón.....	144
7.3.7.2.2	Esfuerzo cortante resistido por la armadura de corte .....	146
7.3.7.2.3	Compresión máxima admisible por las bielas.....	146
7.3.7.2.4	General.....	147
7.4	<b>ADHERENCIA, ANCLAJES DE ARMADURAS.....</b>	<b>148</b>
7.4.1	<b><i>Adherencia</i> .....</b>	<b>148</b>
7.4.1.1	Introducción.....	148
7.4.1.2	Métodos de medida de la adherencia .....	149
7.4.1.3	Variables de la adherencia .....	150
7.4.1.4	Tipos de adherencia.....	151
7.4.1.4.1	Adherencia por cortante.....	151
7.4.1.4.2	Adherencia por tracción .....	153
7.4.2	<b><i>Anclajes</i> .....</b>	<b>154</b>
7.4.2.1	Longitud de anclaje según código ACI .....	154
7.4.2.1.1	Prolongación recta .....	154
7.4.2.1.2	En patilla.....	156
7.4.2.2	Adaptación de la EHE .....	157

## **7 CAPÍTULO: ESTADOS LÍMITE ÚLTIMOS**

### **7.1 INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se va a centrar en el análisis de la sección resistente frente a las diferentes solicitaciones a las que se puede ver expuesto el elemento. Particularmente se va a tratar el caso de flexión simple y cortante aplicado para secciones rectangulares. Además se tratará el tema de la adherencia debido a la importancia de este fenómeno en piezas armadas. Los conceptos explicados aquí, sin embargo, puede ser aplicado al análisis y diseño de miembros con otro tipo de formas.

La mayoría de las normativas existentes para el armado de elementos de hormigón con barras de FRP, se suelen basar en la formulación desarrollada para armado convencional con acero debido a la gran similitud que presentan. Normalmente, se parte de esta formulación y de la esencia de la que procede, para adecuarla convenientemente al comportamiento diferencial del FRP (menor módulo elástico y mayor resistencia). Por ende, este documento se va a centrar en el análisis de la adaptación acogida por la normativa Americana y análogamente la posible adaptación de la norma española.

Evidentemente, en este apartado se utilizará las propiedades de diseño de los materiales para las comprobaciones de los ELU. En el caso del código ACI, no se tiene en cuenta el fenómeno de creep (efecto a largo periodo). La comprobación a él como a fatiga se realiza a posteriori bajo las hipótesis de ELS. Por el contrario, la metodología propuesta por el Task Group 9.3 [16], y recomendada en este documento, integra de forma conjunta todos los factores de durabilidad, tal que, una mayor reducción es esperada (especialmente para los GFRP). Esta última metodología es la acogida para la adaptación, propuesta en este documento, de la EHE.

### **7.2 ESTADO LÍMITE DE AGOTAMIENTO FRENTE A SOLICITACIONES NORMALES**

#### **7.2.1 Introducción**

Todos los elementos de hormigón armado están sometidos a algún tipo de solicitación normal (tracción; flexión simple; flexión compuesta; compresión compuesta; compresión), siendo, usualmente, unas de las solicitaciones críticas a la hora del diseño (a ello se debe lo extenso de este apartado). Concretamente, este documento se centra en elementos bajo flexión simple que, dado la extensión y profundidad de su análisis, se cree que no es difícil extrapolarlo al resto de las solicitaciones normales. Por ello, partiendo de la base del hormigón armado convencional, se pretende explicar con todo lujo de detalle, todas las implicaciones que conlleva el armado con FRP. Y por último, a efectos prácticos utilizando la formulación desarrollada, se pensó conveniente la elaboración de dos estudios sobre la influencia de la utilización de los diferentes tipos de FRP y conveniencia de uso de hormigones de alta resistencia.

## 7.2.2 Hipótesis de partida

Como se ha comentado anteriormente el diseño de elementos reforzados interiormente con barras de FRP a flexión es análogo al armado convencional. Datos experimentales avalan que la capacidad ante esfuerzos de flexión puede ser calculada en base a las mismas hipótesis establecidas para el armado con acero. No obstante, como se verá más adelante, la filosofía de diseño será necesario cambiarla para adaptar el diferente comportamiento tenso-deformacional de los FRP. A continuación se muestran dichas hipótesis de partida:

- El agotamiento de la sección se caracteriza por la deformación en determinadas fibras de la sección, definidos en los dominios de deformación.
- La deformación del elemento sigue una ley plana, esto es, la deformación en el hormigón y en el FRP es proporcional a la distancia desde la fibra neutra. Es decir, una sección plana del elemento permanece plana después de su deformada.
- Se supone una adherencia perfecta entre los refuerzos internos y el hormigón. Por ello la deformación de la armadura es igual al del hormigón circundante.
- El diagrama de cálculo de tensión-deformación del hormigón es alguno de los definidos en el capítulo 5. Además, se despreja la resistencia a tracción del hormigón suponiendo que lo absorbe la armadura correspondiente.
- Igualmente el diagrama de cálculo tensión-deformación de las barras de FRP es el definido en el mismo capítulo.
- Para el cálculo de la resistencia de la sección serán de aplicación las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento.

Destacar en este apartado que el código ACI básicamente tiene en cuenta las mismas suposiciones de partida, con la salvedad que añade una adicional para informar de la máxima deformación del hormigón, esta es,  $\epsilon_{cu} = 0.003$ . Lo cual desde el punto de vista de cálculo puede dar lugar a pequeñas diferencias respecto a la EHE.

## 7.2.3 Dominios de deformación

Ahora bien, si nos centramos en los dominios de deformación, al no existir una zona de fluencia del refuerzo y comportándose por tanto lineal elástico hasta la rotura, éstos cambian de la forma siguiente:

- Dominio 1: Sigue siendo el mismo respecto al armado convencional con acero, y corresponde a la tracción de toda la sección donde la recta de deformación pivota al rededor de A (deformación última de rotura de la fibra, esto es, deformación última elástica) sin llegar a comprimir ninguna fibra del hormigón.
- Dominio 2: Corresponde a una flexión simple o compuesta donde seguimos pivotando alrededor de A hasta llegar a la deformación última del hormigón. Sigue siendo definido de igual manera respecto al armado con acero.
- Dominio 3: En el caso de armadura de acero, este dominio se define como la región comprendida por el pivotamiento de la recta de deformación alrededor de B (Deformación última del hormigón) hasta llegar a la deformación última del acero. Normalmente, el diseño de elementos armados con

acero a flexión se hace en este dominio, pues de esta manera se espera un comportamiento dúctil además de aprovechar la máxima resistencia tanto del hormigón como del acero (suponiendo un comportamiento elastoplástico perfecto). Sin embargo, para el caso de armadura compuesta por barras de FRP, este dominio desaparece, o mejor dicho, queda reducido a una recta por converger en un sólo punto el límite elástico y último de deformación. Esta recta es importante desde el punto de vista de diseño pues delimita las dos zonas de trabajos posibles a flexión simple (dominio 2 o 4). Por ello, a la profundidad de la fibra neutra que define la denotaremos especialmente “fibra neutra límite o balanceada”, en base a que consigue balancear la máxima resistencia del hormigón y del refuerzo, siendo el modo de fallo esperado por colapso de sendos elementos.

- Dominio 4: Corresponde con una flexión simple o compuesta. La línea de deformación pivota alrededor de B, estando comprendido el alargamiento del refuerzo entre una deformación nula y la de rotura.
- Dominio 4a: Flexión compuesta, donde la línea de deformación sigue girando alrededor de B de forma que, toda la armadura se encuentran a compresión y existe una pequeña zona de hormigón a tracción.
- Dominio 5: Compresión simple o compuesta, donde toda la sección y los materiales están comprimidos. La línea de deformación pivota al rededor de un punto C que corresponde al límite de deformación por compresión uniforme del hormigón ( $\epsilon_{c0}$ ). En este domini no es conveniente el uso de barras de FRP por la anisotropía que presentan y el mal comportamiento a compresión.

Veamos seguidamente como quedarían los dominios de deformación de forma gráfica:

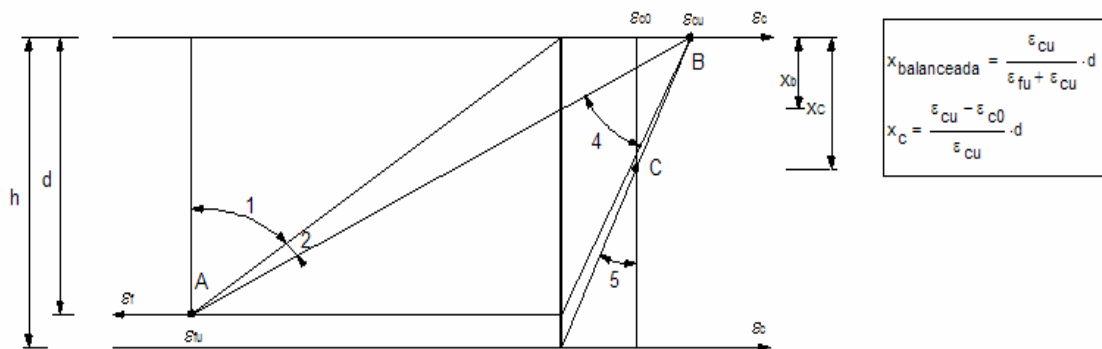


Fig. 7.1: Dibujo de los dominios de deformación

Recordando que este documento se centra en elementos de hormigón armado mediante barras de FRP a flexión simple, los dominios de trabajo posibles son el 2 y el 4. El primero de ellos se caracteriza por llevar al refuerzo interno a la máxima tensión admisible, por el contrario el segundo se distingue por desarrollar, en la fibra más solicita del hormigón, la máxima compresión posible. En el código Americano se habla respectivamente de “under-reinforced” y “over-reinforced” que hace referencia a estos dominios y a la cantidad de armadura dispuesta. Esto es, cuando la sección es pobre en armadura, la armadura necesita alcanzar su máxima tensión a tracción para equilibrar la compresión del hormigón, siendo su posible fallo por rotura del FRP. Sin embargo, si se dispone de un exceso de armadura, el hormigón se ve obligado a desarrollar su máximo rendimiento para compensar la elevada tracción del refuerzo y

siendo su fallo por colapso del hormigón.

### 7.2.4 Filosofía de diseño

En elementos de hormigón armado convencional, normalmente se diseña para que el elemento entre dentro del dominio 3. En este dominio se aprovecha la máxima resistencia del hormigón y del acero ( $f_{cd}$  y  $f_{yd}$  respectivamente), de manera que, cuando la sollicitación es próxima a la máxima admisible se produce una plastificación y fluencia del acero comportándose la sección dúctilmente y avisando del inminente fallo. Es de notar, en este párrafo, que la mayoría de las normas aplican coeficientes de seguridad sobre las propiedades de los materiales. Normalmente suelen ser más restrictivos con el hormigón que con el acero, en parte debido a la mayor variabilidad que presentan, y por otra parte en busca de una rotura dúctil del acero antes que frágil del hormigón.

Además, en el caso de armadura de acero, la máxima elongación elástica es similar al que experimenta el hormigón, por tanto la profundidad de la fibra neutra que balancea la sección (consigue trabajar al máximo rendimiento tanto el acero como el hormigón), es alrededor de la mitad de la sección. Sin embargo, para el caso de los FRP, debido al bajo módulo elástico, no ocurre lo mismo. La deformación elástica límite es bastante alta, con lo que la profundidad de la fibra neutra se reduce sensiblemente y por tanto conlleva una serie de implicaciones:

- Existencia de una pequeña zona de hormigón trabajando a compresión. Si planteamos el equilibrio en la sección (para el caso estudiado de flexión simple), el esfuerzo de compresión de la pequeña zona de hormigón solicitada debe compensar el de tracción del refuerzo, esto unido a que los FRP tienen una buena resistencia (especialmente en los CFRP), implica que en la mayoría de los casos no se llegue al límite resistente del mismo, y por tanto se sitúe en dominio sobre-reforzado. En orden a predecir la facilidad para pertenecer al dominio mencionado, se muestra la siguiente figura. En ella se plotea las tensiones que se desarrolla en diferentes tipos de refuerzo en función de la cuantía geométrica de armadura establecida para un hormigón ordinario de 30 MPa. Se entiende que, a partir de tensiones inferiores a su resistencia límite el área dispuesta es mayor que la necesaria, y mientras que el hormigón trabaja a su máximo rendimiento, el refuerzo trabaja con un margen de resistencia.

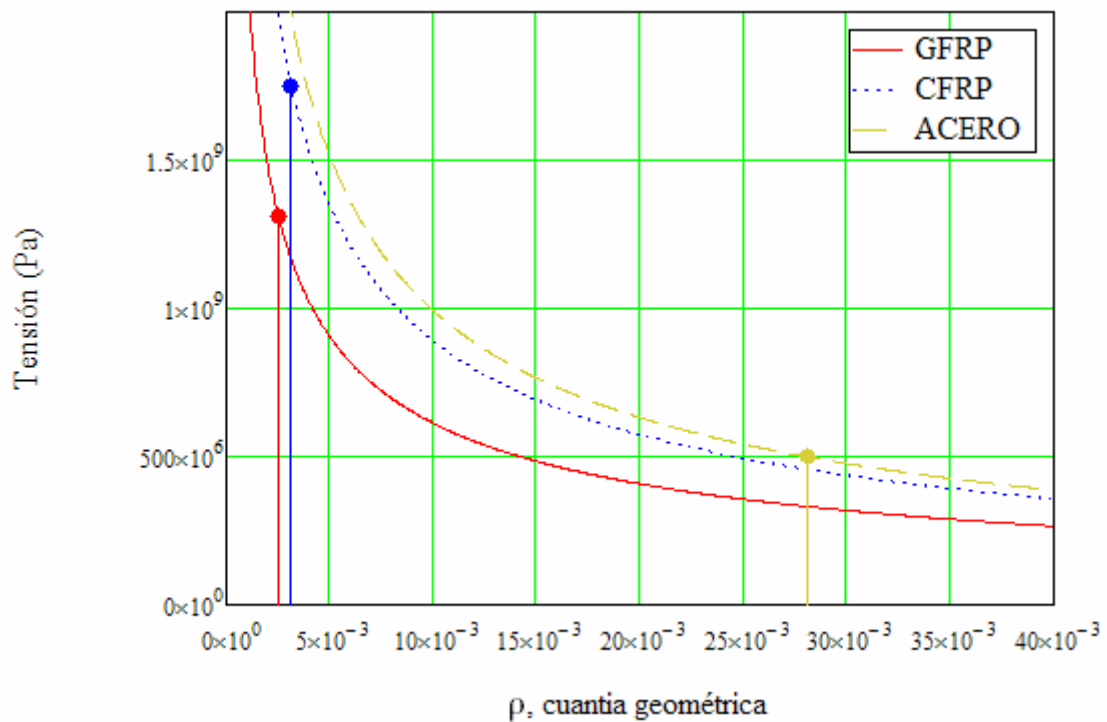


Fig. 7.2: Tensión de la armadura en función de la cuantía geométrica armada.

En esta gráfica se puede ver que para el caso de acero es necesario colocar cuantías superiores al 2.8% para lograr que se trabaje en dominio 4. No obstante, en los FRP con cuantías relativamente bajas ya es suficiente para conseguirlo. Esto es, aún con poca armadura de FRP, es fácil que la sección esté sobre-reforzado.

- Fuerte gradiente de deformaciones en el hormigón que puede repercutir en un descenso de las propiedades mecánicas de éste. Es decir, se produce una fuerte variación de deformaciones a medida se profundiza en la sección hasta conseguir una deformación nula para una relativa escasa profundidad de fibra neutra. El siguiente dibujo ejemplifica muy bien este fenómeno:

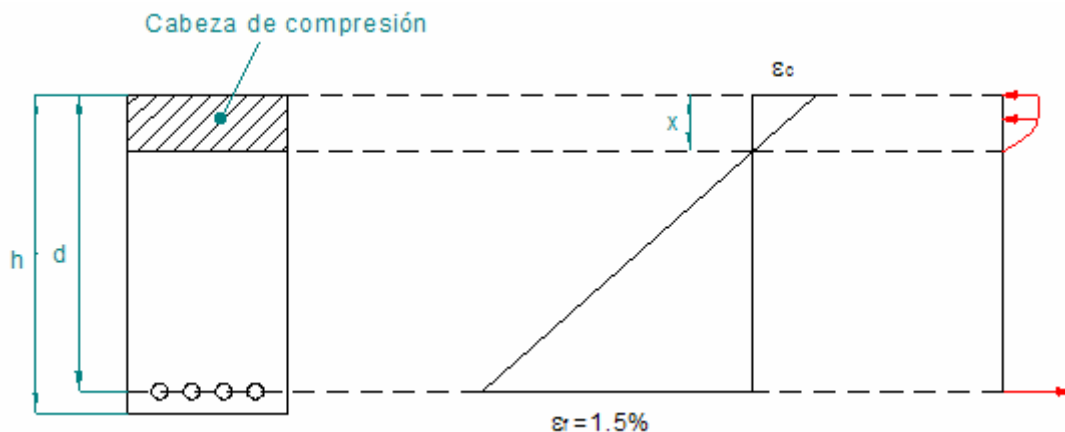


Fig. 7.3: Comportamiento de una sección armada con FRP.

Para un caso genérico de barras de FRP con una deformación última del 1.5% y

un hormigón convencional, la profundidad de la fibra neutra que balancea la sección se encuentra entorno al 19% del canto útil.

- Escaso rendimiento de la sección, entendiéndose como tal, la capacidad de la sección de absorber momento. Esto es, al ser la cabeza de compresión tan pequeña, el momento resistente se vuelve pequeño. Una forma de aumentarlo es utilizando hormigones de alta resistencia o bajando la fibra neutra a cambio de perder rendimiento del refuerzo interno.
- Grandes flechas y aberturas de fisuras debido a las excesivas elongaciones de las barras de FRP. Desde el punto de los Estado Límites de Servicio no es admisible por lo que en la mayoría de los casos el diseño más restrictivo depende de éste y no de los Estados Límites Últimos. Por lo tanto, habitualmente es necesario sobre-reforzar la sección para que no se produzcan largas elongaciones que conlleva fuertes flechas y fisuras. No obstante, desde el punto de vista de durabilidad, las fisuras no implican un deterioro de las armaduras que obliguen a restringirlas como en el caso del acero, pero es normal que las mayorías de las normas impongan límites estéticos más permisibles.

Datos experimentales (Nanni; Jaeger, Mufti and Tadros; Theriault and Benmokrane; Etc.) indican que cuando los refuerzos de FRP se rompen a tracción, el fallo es repentino y encabeza a un colapso del miembro. Sin embargo una más progresiva pérdida de capacidad portante con un mayor factor de deformabilidad es observado cuando el elemento falla por compresión del hormigón. Esto unido a que elementos bajo-reforzados desarrollan grandes flechas y fisuras conlleva a que el modo o filosofía de diseño más adecuada para este tipo de elementos sea la consecución de rotura por compresión del concreto antes que rotura de los refuerzos. Esto es, mientras que en el acero el dominio de diseño habitual es el 3, en el caso de los FRP el más idóneo, por todo lo dicho anteriormente, se convierte en el 4. No hay que olvidar que, aunque este modo de fallo para esta clase de elementos es relativamente más progresivo, sigue siendo un fallo frágil y rápido, por lo que la mayoría de las normativas imponen grandes factores de seguridad. Concretamente para del código ACI, este factor de seguridad es progresivamente más restrictivo a medida que se acerca al dominio bajo-reforzado. Algunos autores citan que una forma de conseguir una mayor ductibilidad de la sección es colocar armadura de acero a compresión. No obstante, detractores explican que es una incongruencia colocar armaduras de acero en elementos reforzados internamente con FRP, pues precisamente la misión de éste es sustituir y salvaguardar las limitaciones del acero, como en los casos de durabilidad para ambientes fuertemente corrosivos. Otra discusión se abre con el uso de hormigones de alta resistencia. Gracias a las excelentes propiedades mecánicas que tienen los FRP y a la escasa profundidad de la fibra neutra con una cabeza de compresión pequeña, cabe pensar que el uso de este tipo de hormigones es adecuado para sacarle todo el partido posible a este tipo de refuerzos y obtener un mejor rendimiento de la sección. En contra puede decirse que estos hormigones son más frágiles y rompen para unas deformaciones menores con lo cual la cabeza de compresión se vuelve aún más pequeña. En capítulos posteriores se hará un análisis más detallado sobre este tema.



### 7.2.5 Cuantías de armadura longitudinal para secciones balanceadas.

En resumen a todo lo dicho anteriormente, básicamente existen dos modos o filosofía de diseño, uno por rotura a compresión del hormigón, que es la más deseada, y otra por rotura a tracción de la fibra. En relación con la armadura colocada, el modo de fallo puede ser analizado por comparación de la cuantía de FRP frente a la cuantía balanceada de la sección (esto es, una cuantía donde el aplastamiento del hormigón y rotura de la fibra puede ocurrir simultáneamente). Debido a la falta de fluencia del FRP, la cuantía balanceada puede ser determinada por equilibrio de fuerzas en la sección, de modo que se alcance el límite resistente del refuerzo y del hormigón. A continuación se va a plantear dicho equilibrio para el caso del código ACI [3] y luego se hará lo mismo para la EHE[8]:

a) ACI:

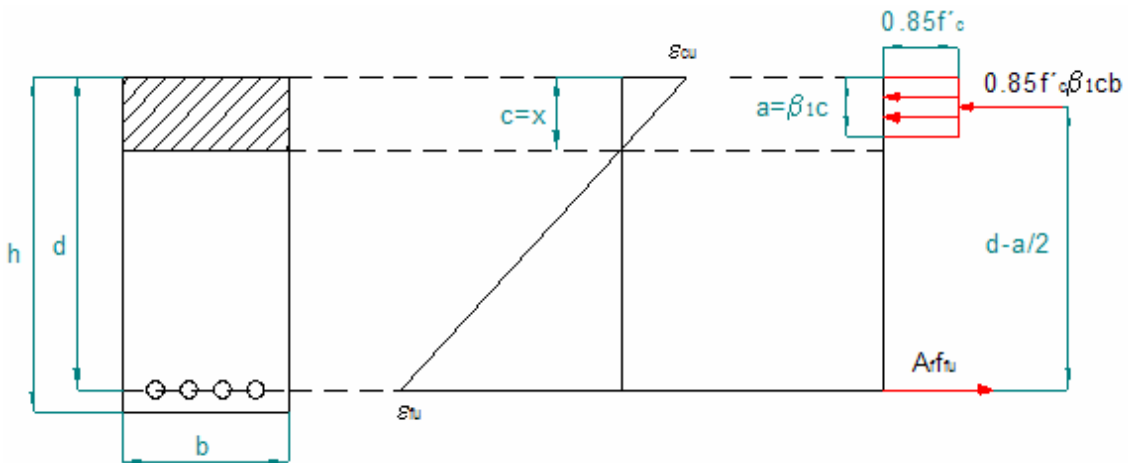


Fig. 7.4: Comportamiento de la sección según el código ACI.

Planteando el equilibrio de fuerzas en la sección se tiene:

$$N_c = A_f \cdot \epsilon_f \cdot E_f \quad (7.1)$$

Normalmente se trabaja con términos adimensionales, tanto que:

$$\nu_c = \frac{A_f}{b \cdot d} \cdot \frac{E_f \cdot \epsilon_f}{f'_c} \quad (7.2)$$

Por último, suponiendo un diagrama rectangular tal y como se explica en el punto 5.2.5.2 y cogiendo la fibra límite o balanceada definida por la máxima resistencia de sendos materiales, la ecuación queda:

$$0.85 \cdot \beta_1 \cdot \xi = \rho_f \cdot \frac{E_f \cdot \epsilon_f}{f'_c} \quad (7.3)$$

$$\xi_{lim} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} \quad (7.4)$$

$$\rho_{fb} = \frac{f'_c}{f_{fu}} \cdot \left( 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} \right) \quad (7.5)$$

b) Para el caso de la EHE se puede proceder de manera análoga:

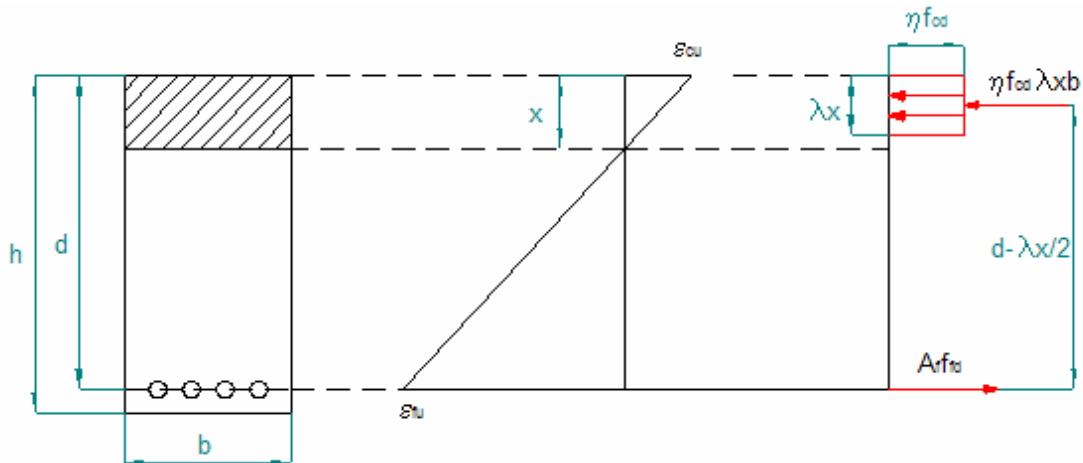


Fig. 7.5: Comportamiento de la sección según la norma EHE.

Partiendo del equilibrio en la sección ya adimensional y particularizando para la situación balanceada se tiene:

$$v_c = \frac{A_f}{b \cdot d} \cdot \frac{E_f}{f_{cd}} \cdot \epsilon_f \quad (7.6)$$

$$\eta \cdot \lambda \cdot \xi = \rho_f \cdot \frac{E_f \cdot \epsilon_f}{f_{cd}} \quad (7.7)$$

Particularizando para:

$$\xi_{lim} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} \quad (7.8)$$

$$\rho_{fb} = \frac{f_{cd}}{f_{fd}} \cdot \left( \lambda \cdot \eta \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} \right) = \lambda \cdot \eta \cdot f_{cd} \cdot \left( \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} \cdot f_{fd} + \frac{f_{fd}^2}{E_f}} \right) \quad (7.9)$$

Realizando dicha comparación se concluye que:

Si la cuantía de la armadura longitudinal es inferior a la balanceada ( $\rho_f < \rho_{fb}$ ), el fallo está gobernado por rotura del refuerzo. Mientras que si ocurre lo contrario ( $\rho_f > \rho_{fb}$ ), el fallo se produce por compresión del hormigón.

Si analizamos más detalladamente la fórmula que define cuantía balanceada, se puede observar claramente que ésta sólo depende de las características de los materiales, es decir, del hormigón y del refuerzo. Notar que, concretamente dependen de las propiedades de diseño y varían sensiblemente respecto a la norma referida. La norma norteamericana no aplica coeficientes de seguridad parcial sobre las propiedades de los materiales y además, para el cálculo de la tensión de diseño del los FRP, no se contempla el efecto del creep. Sin embargo, la adaptación de la EHE, propuesta en este documento, se lleva a cabo con la recomendación del Task Group 9.3 y además si incluye los factores de seguridad parcial. Es decir, los resultados de una y otra norma se espera que sean diferentes, no obstante, si se trabaja con las propiedades características y no con las de diseño el resultado debería ser parejo.

A continuación se muestra unas gráficas que estudia comparativamente la cuantía balanceada en función de las características de los materiales particularizada para cada norma.

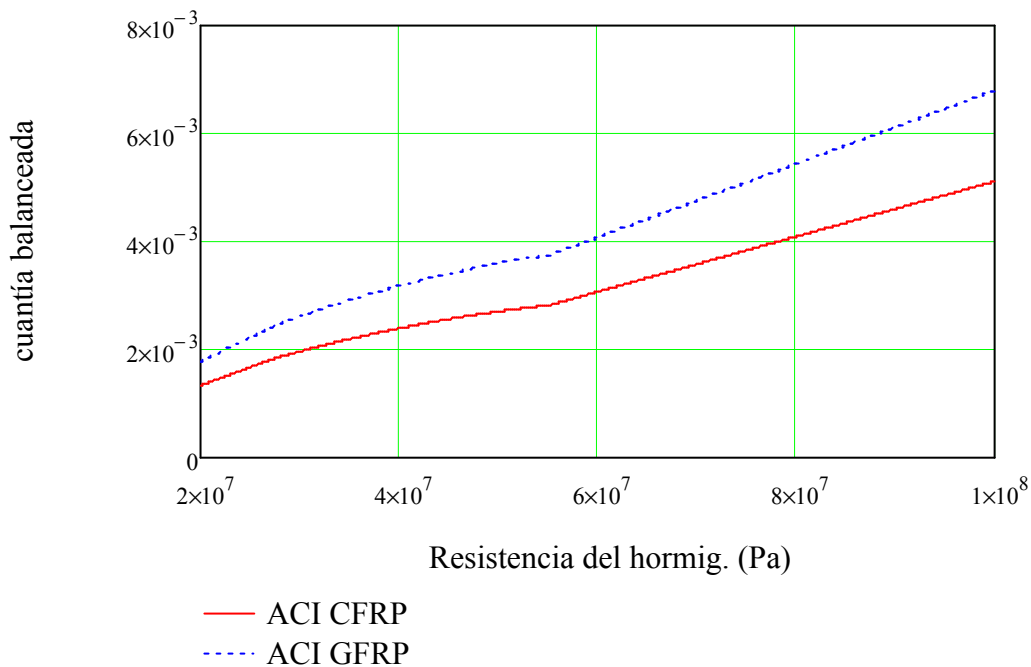


Fig. 7.6: Gráfica comparativa de la cuantía balanceada, en función de las propiedades de los materiales y particularizada para ACI. La resistencia característica del hormigón varía entre 20 y 100 MPa que corresponde con alta resistencia. Los refuerzos utilizados son barras de GFRP y CFRP con 1400 y 2000 MPa de tensión característica última y 44.8 y 120GPa de módulo elástico respectivamente bajo condiciones exteriores húmedas.

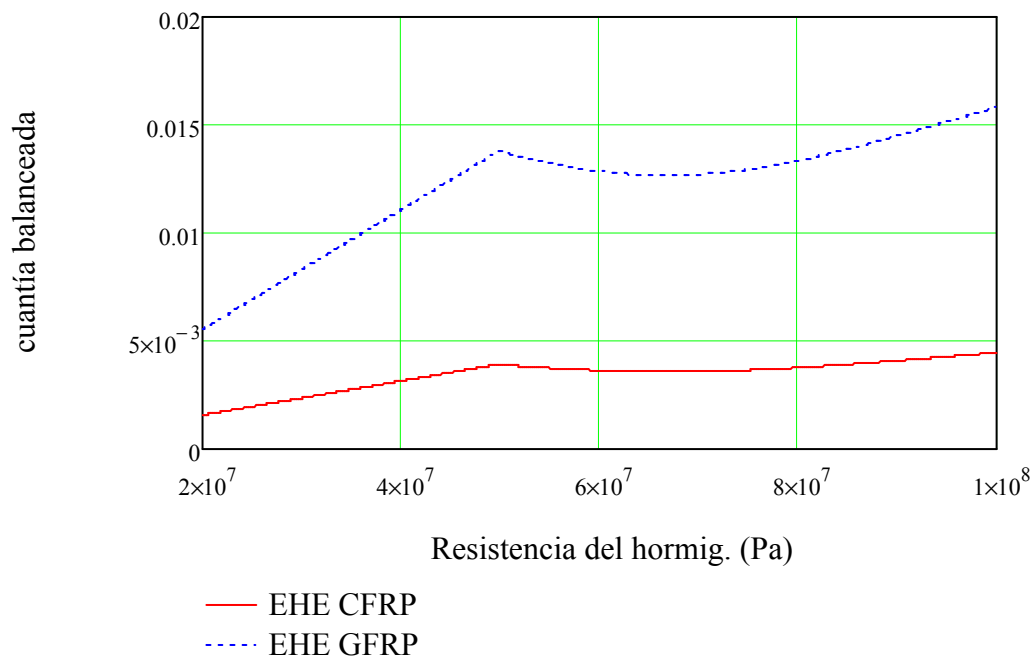


Fig. 7.7: Gráfica comparativa de la cuantía balanceada, en función de las propiedades de los materiales y particularizada para la EHE. La resistencia característica del hormigón varía entre 20 y 100 MPa que corresponde con alta resistencia. Los refuerzos utilizados son barras de GFRP y CFRP con 1400 y 2000 MPa de tensión característica última y 44.8 y 120GPa de módulo elástico respectivamente bajo condiciones exteriores húmedas.

De estas gráficas se pueden extraer varias observaciones:

- Como se cabía esperar, la cuantía que balancea la sección es creciente a medida que se aumenta las propiedades mecánicas del hormigón. Obviamente, cuanto mayor es la resistencia de éste mayor cantidad de armadura es necesaria para equilibrar la máxima compresión del hormigón. No obstante, llama la atención que mientras para el código ACI esta curva es creciente en todo momento, para la EHE, en hormigones de alta resistencia (hormigón con resistencia superior 50 MPa), la curva se estabiliza y deja de crecer. Según esta norma (en base a datos experimentales), el hormigón de alta resistencia se vuelve cada vez más frágil y la deformación última va decreciendo a medida que se gana en resistencia. Esto lleva a que la cabeza de compresión sea cada vez más pequeña y por tanto compense el aumento de compresión del hormigón. Además, a esto hay que unirle un descenso del área de curva que encierra el diagrama tensión-deformación.
- La cuantía balanceada de la sección disminuye cuanto mayor es la resistencia (o mejor dicho, tensión límite de diseño) del refuerzo. Evidentemente es necesaria menor cantidad de armadura a medida que la tensión límite del refuerzo crece. Además también depende de la rigidez del mismo, de manera que, cuanto mayor es la rigidez, mayor debe ser la cuantía balanceada pues la profundidad de la fibra neutra y la cabeza de compresión aumenta. No obstante su influencia es menos acusada respecto a la tensión límite.

- La separación de las curvas correspondientes para cada refuerzo, en cada norma es diferente. Se debe principalmente a la diferente concepción, por parte de cada norma, de las propiedades de diseño (tensión límite de diseño). La metodología propuesta por el Task Group es más restrictiva con los GFRP mientras que sendas normas son muy permisivas con los CFRP.
- Las curvas de cuantía correspondientes al GFRP y CFRP en la normativa ACI son muy próximas. Se debe a que la mayor tensión límite de los CFRP (que tiende a bajar la cuantía necesaria) se compensa con la mayor rigidez que presentan (que por el contrario, tiende a subir la cuantía necesaria). No obstante como la influencia de la tensión es más importante, la curva de cuantía de los CFRP es más mas baja.

Ahora bien, si evaluásemos las propiedades de los materiales tomando sus propiedades características, se puede observar que los resultados de sendas normas son similares. Apareciendo alguna discrepancia en hormigones de media resistencia, entorno a 50 MPa

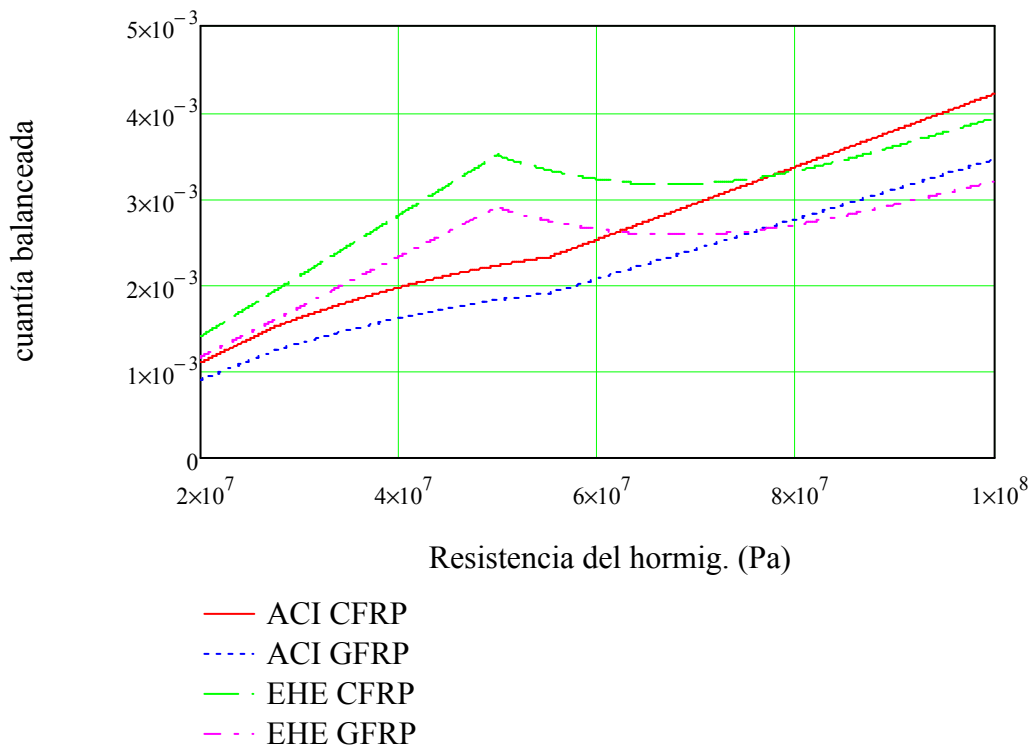


Fig. 7.8: Gráfica de la cuantía balanceada en función de la resistencia del hormigón tomando las propiedades características de los materiales.

Notación:

$N_c$  = Axil de compresión el hormigón.

$v_c$  = Axil de compresión del hormigón adimensional,  $N_c / U_c$ .

$A_f$  = Área de armadura longitudinal a tracción de FRP.

$\epsilon_f$  = Deformación de la armadura.

$\varepsilon_{fu}$  = Deformación última de la armadura.

$\varepsilon_{cu}$  = Deformación última del hormigón.

$E_f$  = Módulo elástico del FRP.

$f_{fu}$  = Resistencia de diseño de la fibra según código ACI

$f_{fd}$  = Resistencia de diseño de la fibra según normativa EHE

$f'_c$  = Resistencia de diseño del hormigón según código ACI.

$f_{cd}$  = Resistencia de diseño del hormigón según normativa EHE.

$\beta_1$  = Coeficiente de profundidad equivalente del diagrama rectangular del hormigón según código ACI.

$\lambda$  = Coeficiente de profundidad equivalente del diagrama rectangular del hormigón según EHE.

$\eta$  = Coeficiente de eficacia en el diagrama rectangular del hormigón según EHE.

$\xi$  = Profundidad de la fibra neutra

$\xi_{lim}$  = profundidad de la fibra neutra que balancea la sección.

$\rho_f$  = cuantía geométrica de la armadura a tracción definida por  $A_f/(b \cdot d)$ .

$\rho_{fb}$  = Cuantía geométrica de la armadura a tracción que balancea la sección.

## 7.2.6 Diseño a flexión simple sin sección predeterminada según normativa ACI

En este apartado se pretende explicar el procedimiento de diseño de una sección rectangular, no definida a priori, sometida a flexión simple. Para ello se parte de todos los datos referentes a las propiedades mecánicas de los materiales que componen el elemento. Y se pretende diseñar la geometría de la sección y área de armadura longitudinal necesaria para asegurar que se cumple los Estados Límites Últimos. En general se debe cumplir que el momento de diseño (proveniente de las cargas convenientemente mayoradas y combinadas) sea mayor o igual que el momento resistente multiplicado por el factor de seguridad. Esto es:

$$M_n \cdot \phi \geq M_u \quad (7.10)$$

Donde:

$M_u$  = Momento de diseño

$M_n$  = Momento nominal resistente

$\phi$  = Factor de seguridad en función de la cuantía de armadura longitudinal inferior discutido en el capítulo 4.

El momento resistente puede ser determinado en base a compatibilidad de deformaciones, equilibrio de fuerzas en la sección y control del modo de fallo. Este último parámetro ha sido tratado en el punto anterior y tiene un fuerte impacto en el procedimiento de cálculo. Existen dos modos de fallos, uno por compresión del hormigón y por rotura a tracción del refuerzo interior, que vienen definido por la cuantía de armadura longitudinal colocada. De modo que se va a estudiar separadamente el caso de sección sobre-reforzada que viene dada por una cuantía superior a la balanceada y el caso de sección bajo-reforzada correspondiente para una cuantía inferior a la balanceada.

**7.2.6.1 Diseño en dominio sobre-reforzado ( $\rho_f \geq \rho_{fb}$ )**

El fallo del miembro es iniciado por el colapso del hormigón debido a que se somete a la máxima compresión y deformación última. En este caso, la distribución de tensión en el hormigón puede ser aproximada por un bloque rectangular definida por una profundidad y una eficacia tal y como se describe en el capítulo 5. Mientras que el refuerzo no llega a desarrollar su máxima capacidad resistente. En base al equilibrio de fuerzas y compatibilidad de deformaciones la formulación puede ser deriva como sigue:

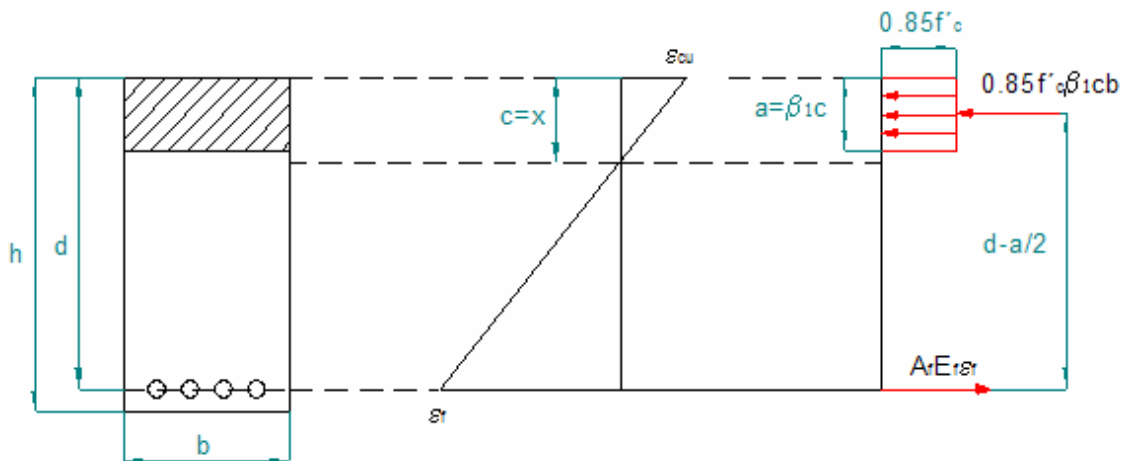


Fig. 7.9: Comportamiento de la sección según el código ACI.

Equilibrio de fuerzas en la sección:

$$N_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_1 \cdot x \cdot b = A_f \cdot \epsilon_f \cdot E_f \quad (7.11)$$

Adimensionado por  $U_c = f'_c \cdot b \cdot d$  queda:

$$v_c = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \xi = \frac{\rho_f \cdot \epsilon_f \cdot E_f}{f'_c} \quad (7.12)$$

Momento resistente:

$$M_n = M_c = N_c \cdot \left( d - \frac{\beta_1 \cdot x}{2} \right) \quad (7.13)$$

Adimensional dividido por  $U_c \cdot d$  queda:

$$\mu_n = \mu_c = v_c \cdot \left( 1 - \frac{\beta_1 \cdot \xi}{2} \right) \quad (7.14)$$

Siendo:

$$x = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_f} \cdot d \quad (7.15)$$

$$\xi = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_f} \quad (7.16)$$

Si de la ecuación (7.12) despejamos la deformación del refuerzo en función de la cuantía de armadura inferior de la sección se tiene que:

$$\varepsilon_f(\rho_f) = \frac{-\varepsilon_{cu} + \sqrt{\varepsilon_{cu}^2 + \frac{4 \cdot 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \varepsilon_{cu} \cdot f'_c}{E_f \cdot \rho_f}}}{2} \quad (7.17)$$

A su vez, si introducimos la ecuación (7.17) en el momento resistente (7.14) y lo dejamos en función de la cuantía de armadura longitudinal se tiene:

$$\mu_n(\rho_f) = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_f(\rho_f) + \varepsilon_{cu}} \left[ 1 - \beta_1 \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{(\varepsilon_f(\rho_f) + \varepsilon_{cu}) \cdot 2} \right] \quad (7.18)$$

De la primera ecuación (7.17) se puede obtener la deformación del refuerzo, y por tanto la tensión de trabajo ( $f_f = \varepsilon_f \cdot E_f$ ), en función de la cuantía de armadura longitudinal. Mientras que de la segunda ecuación (7.18) se obtiene el momento resistente adimensional para la cuantía elegida. Ya sólo faltaría definir los parámetros de la sección (canto útil  $d$ , y anchura  $b$ ) de modo que el momento resistente, minorado por el factor de seguridad  $\phi$ , sea mayor o igual que el momento de diseño:

$$\mu_n(\rho_f) \cdot \phi(\rho_f) \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2 - M_u \geq 0 \quad (7.19)$$

Una forma de obtener estos parámetros es planteado una ecuación de optimización sujeta a una serie de restricciones tal como sigue (7.20):

$$A_f(b, d) = \rho_f \cdot b \cdot d \quad (\text{Área de armadura inferior})$$

Dado

$$d > 0 \quad (\text{Restricciones de los parámetros de la sección})$$

$$b > 0.4d$$

$$\mu_n(\rho_f) \cdot \phi(\rho_f) \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2 - M_d \geq 0 \quad (\text{Restricción del equilibrio de momentos})$$

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \text{Minimizar}(A_f(b, d)) \quad (\text{Función objetivo a minimizar})$$

A modo instructivo, a continuación se muestra gráficamente las dos ecuaciones anteriores (7.17 y 7.18) para un GFRP genérico y hormigón convencional:



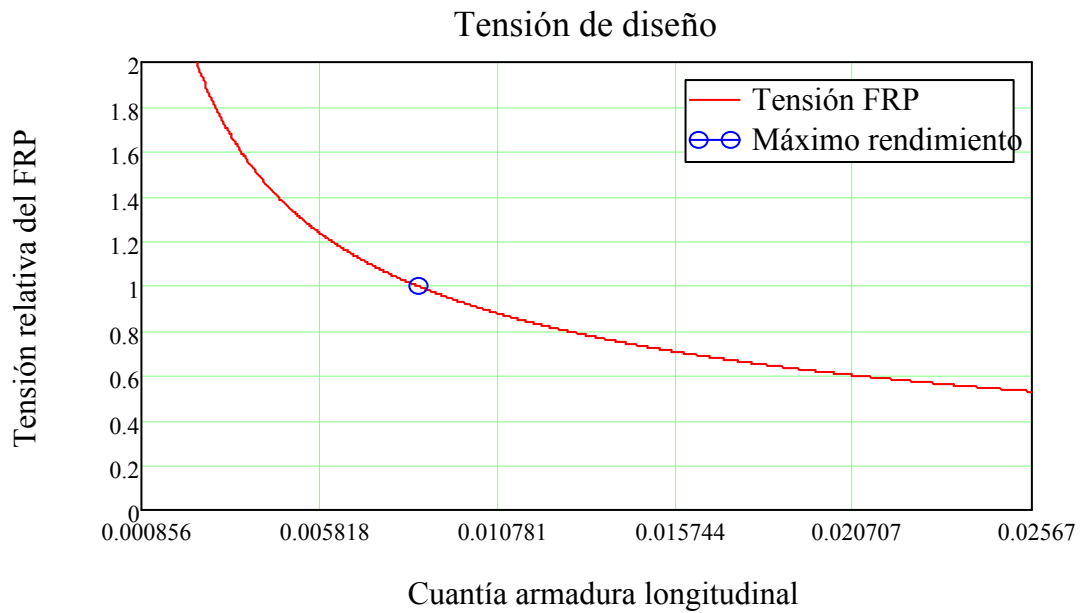


Fig. 7.10: Tensión de diseño para la armadura longitudinal a tracción en función de la cuantía geométrica de la misma.

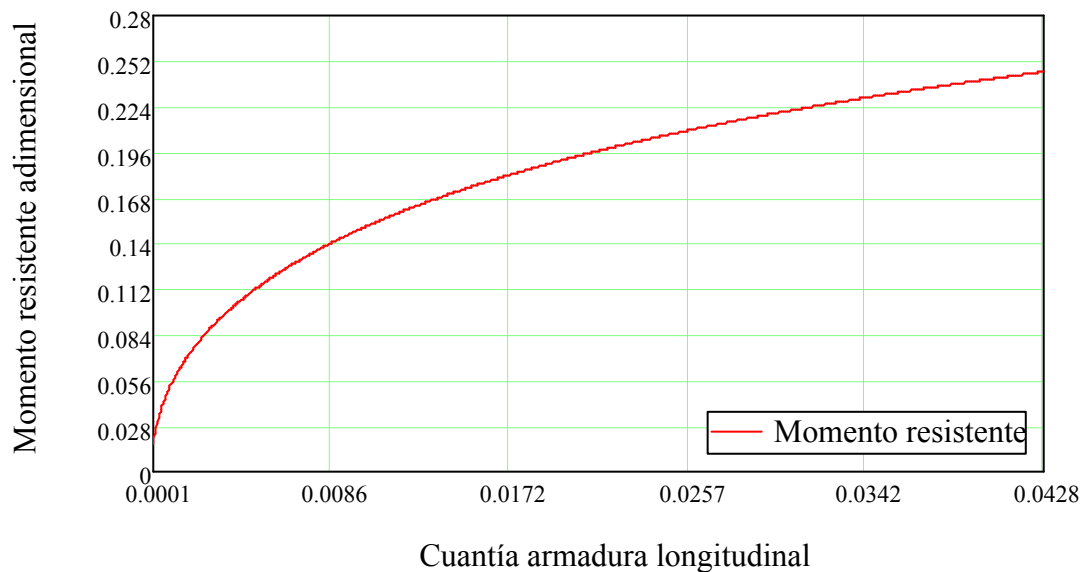


Fig. 7.11: Momento adimensional resistente en función de la cuantía de armadura longitudinal a tracción.

Por tanto, en resumidas cuentas, el modo de proceder sería así:

- Paso 1: Elección de la tensión de trabajo (o lo que es lo mismo, rendimiento de trabajo) a la que se pretende diseñar el refuerzo interno y obtención de la cuantía de armadura longitudinal.
- Paso 2: Obtención del momento resistente adimensional para la cuantía preseleccionada.
- Paso 3: Determinación del factor de seguridad reductor para la cuantía elegida.
- Paso 4: Obtención de los parámetros de la sección en función de los requisitos preestablecidos y área de armadura necesaria.

**7.2.6.2 Diseño en dominio bajo-reforzado ( $\rho_f < \rho_{fb}$ )**

En este tipo de elemento el fallo es iniciado por rotura de la armadura longitudinal a tracción. Mientras que el hormigón no llega a desarrollar su máximo rendimiento y por ende la deformación de la fibra más comprimida no alcanza la deformación última. Para este caso ya no es valido aplicar el diagrama tenso-deformacional rectangular del hormigón tal y como se definió en el capítulo 5. La norma propone buscar un equivalente diagrama rectangular que aproxime la distribución de tensiones en el hormigón, luego es necesario definir unos coeficientes nuevos de eficacia y profundidad de fibra neutra (respectivamente  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ ) que evidentemente varía en función de la deformación de la fibra más comprimida ( $\epsilon_c$ ). Procediendo de igual manera que el punto anterior y utilizando por tanto las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones en la sección, la formulación quedaría tal como se muestra:

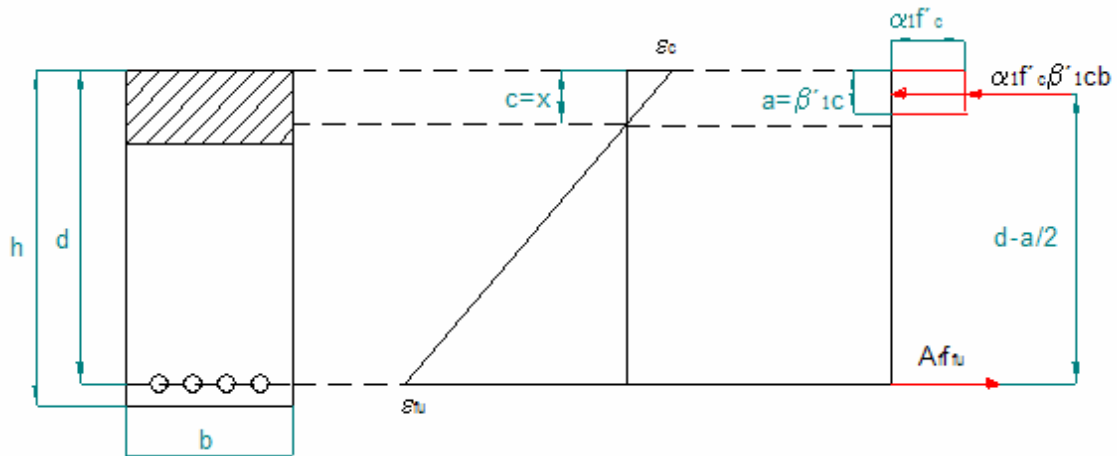


Fig.7.12: Comportamiento de la sección según código ACI

Equilibrio de fuerzas en la sección:

$$N_c = \alpha_1 \cdot f'_c \cdot \beta'_1 \cdot x \cdot b = A_f \cdot f_{fu} \tag{7.21}$$

Adimensional

$$\nu_c = \alpha_1 \cdot \beta'_1 \cdot \xi = \frac{\rho_f \cdot f_{fu}}{f'_c} \tag{7.22}$$

Momento resistente:

$$M_n = M_f = A_f \cdot f_{fu} \cdot \left( d - \frac{\beta'_1 \cdot x}{2} \right) \tag{7.23}$$

Adimensional:

$$\mu_n = \mu_f = \rho_f \cdot \frac{f_{fu}}{f'_c} \cdot \left( 1 - \frac{\beta'_1 \cdot \xi}{2} \right) \tag{7.24}$$

siendo:

$$x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot d \tag{7.25}$$

$$\xi = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \tag{7.26}$$

Si despejamos de la ecuación de equilibrio (7.21) la deformación pésima del hormigón a compresión en función de la cuantía de armadura longitudinal, se tiene:

$$\epsilon_c = -\frac{f_{fu} \cdot \rho_f \cdot \epsilon_{fu}}{f_{fu} \cdot \rho_f - \alpha_1 \cdot \beta'_1 \cdot f'_c} \tag{7.27}$$

Ahora si introducimos esta última expresión en la ecuación del momento resistente (7.24), se tiene:

$$\mu_n(\rho_f) = \rho_f - \frac{\rho_f^2}{2 \cdot \alpha_1} \tag{7.28}$$

Análogamente, de la primera ecuación (7.27) se puede obtener la cuantía necesaria para un rendimiento específico del hormigón. Y a su vez, para esa cuantía seleccionada se tiene un momento resistente adimensional (7.28) que multiplicado por el factor de seguridad y el área de la sección útil, debe ser mayor que el demandado (7.29) y de aquí obtener por tanto los parámetros de la misma. No obstante hay que recordar, que tanto la eficacia como el coeficiente de profundidad de fibra neutra, son dependiente de la deformación pésima del hormigón y por tanto se complica la formulación. La normativa, tomando conciencia de ello, tiende a simplificarlo y por tanto toma dichos coeficientes constantes y del lado de la seguridad.

$$\mu_n(\rho_f) \cdot \phi(\rho_f) \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2 - M_u \geq 0 \tag{7.29}$$

Ahora bien, ya que se dispone del diagrama parábola rectangular del hormigón, se puede desarrollar una formulación más exacta. Nuevamente se parte de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos tal que ahora queda:

Nota aclaratoria: En la formulación que sigue es necesario definir una variable de integración de la deformación del hormigón. Para que no haya confusión con la deformación pésima del hormigón  $\epsilon_c$ , esta variable de integración se define con un apóstrofe adicional, esto es,  $\epsilon'_c$ .

Equilibrio de fuerzas

$$N_c = b \cdot \frac{d \cdot \epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot \frac{\int_0^{\epsilon_c} f_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c}{\epsilon_c} = A_f \cdot f_{fu}$$

Fibra neutra Tensión media

$$(7.30)$$

Adimensional

$$\nu_c = \frac{1}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_c} f_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c}{f'_c} = \rho_f \cdot \frac{f_{fu}}{f'_c} \quad (7.31)$$

Momento resistente

$$M_n = \frac{b \cdot d}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_c} f_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c}{\varepsilon_c} \cdot \left( 1 - \frac{CG(\varepsilon_c) \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \right) \cdot d \quad (7.32)$$

Axil de compresión
Brazo mecánico

Adimensional

$$(7.33)$$

$$\mu_n = \frac{1}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_c} f_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c}{f'_c} \cdot \left( 1 - \frac{CG(\varepsilon_c) \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \right)$$

Siendo:

$$x = \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \right) \cdot d \quad (7.34)$$

$$\xi = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \quad (7.35)$$

$$CG(\varepsilon_c) = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_c} \varepsilon_c \cdot f_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon_c}{\varepsilon_c \cdot \left( \int_0^{\varepsilon_c} f_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon_c \right)} \quad (7.36)$$

Si se opera con la ecuación de equilibrio de fuerzas adimensional (7.31), se puede despejar la cuantía longitudinal inferior en función de la deformación pésima del hormigón. Esto es:

$$\rho_f(\varepsilon_c) = \frac{1}{f_{fu} \cdot (\varepsilon_{fu} + \varepsilon_c)} \cdot \int_0^{\varepsilon_c} f_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c \quad (7.37)$$

Luego elegido un rendimiento del hormigón, esto es, la deformación pésima del hormigón en la cara superior a compresión, se puede obtener la cuantía longitudinal necesaria y, además, el momento adimensional resistente. Por tanto, sólo quedaría averiguar los parámetros de la sección tal que el momento resistente multiplicado por el factor de seguridad sea mayor que el demandado.

$$\mu_n(\varepsilon_{ca}) \cdot \phi(\rho_f) \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2 - M_d \geq 0 \quad (7.38)$$

Para ello se puede plantear una ecuación de optimización tal como sigue (7.39) :

$$A_f(b, d) = \rho_f \cdot b \cdot d \quad (\text{Área del refuerzo inferior en función de los parámetros de la sección})$$

Dado

$$d > 0 \quad (\text{Restricciones de los parámetros de la sección})$$

$$b > 0.4d$$

$$\mu_n(\varepsilon_{ca}) \cdot \phi(\rho_f) \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2 - M_d \geq 0 \quad (\text{Restricción del equilibrio de momentos})$$

$$\text{Minimizar}(A_f(b, d)) \quad (\text{Función objetivo a minimizar})$$

A modo instructivo, a continuación se muestra dos posibles gráficas de diseño en la que se muestran la cuantía longitudinal en función de la deformación del hormigón y el momento resistente adimensional en función de la deformación del hormigón.

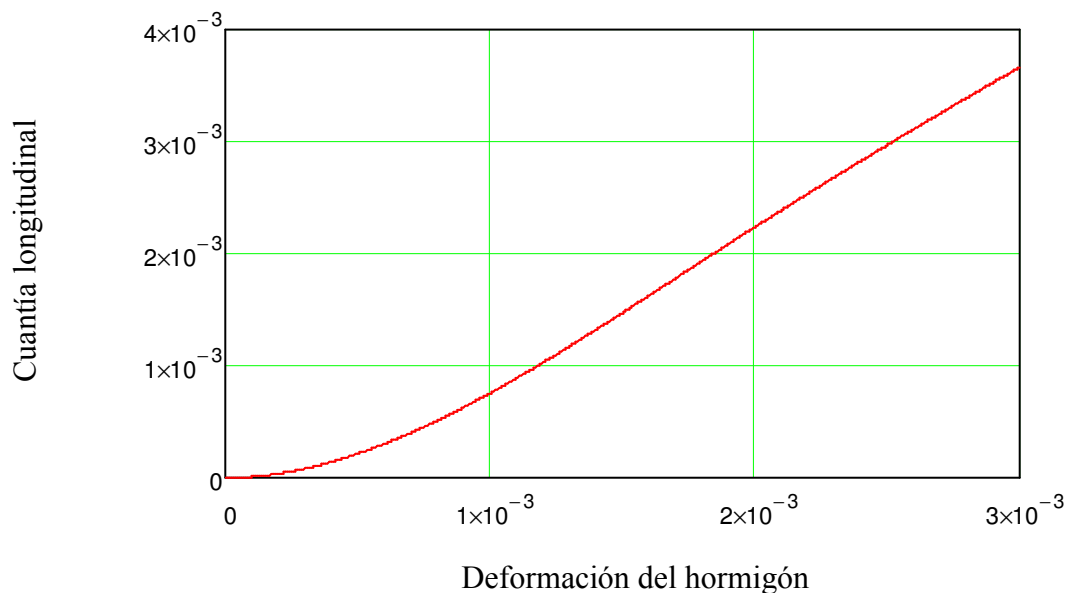


Fig. 7.13: Cuantía longitudinal en función de la deformación del hormigón para un GFRP genérico y hormigón convencional

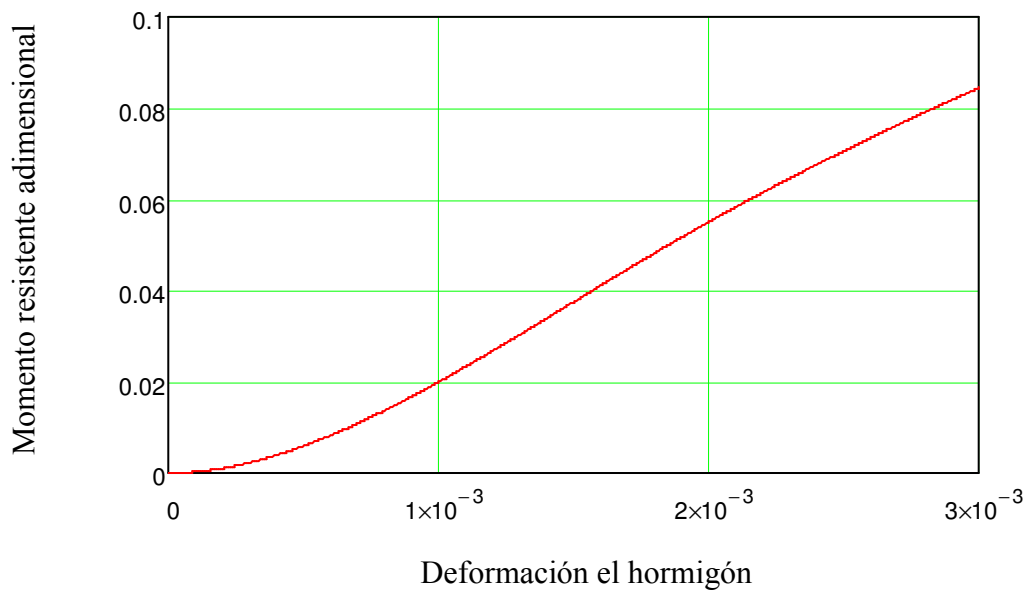


Fig. 7.14: Momento resistente adimensional en función de la deformación del hormigón para un GFRP genérico y hormigón convencional

En resumen, los pasos a seguir para el diseño de una sección no predefinida a flexión simple en dominio 2, son:

Paso 1: Elección de la tensión de trabajo del hormigón y obtención de la cuantía de armadura longitudinal.

Paso 2: Obtención del momento resistente adimensional para la deformación del hormigón establecida.

Paso 3: Obtención de los parámetros de la sección en función de los requisitos preestablecidos y área de armadura necesaria, de manera que el momento resistente sea mayor que el demandado.

### 7.2.6.3 Notación

$N_c$  = Axil de compresión del hormigón.

$v_c$  = Axil de compresión del hormigón adimensional.

$M_c$  = Momento de compresión del hormigón respecto a la armadura inferior.

$\mu_c$  = Momento de compresión del hormigón respecto a la armadura inferior adimensional.

$M_u$  = Momento de diseño.

$M_n$  = Momento resistente.

$\phi$  = Factor de seguridad.

$\rho_f$  = Cuantía geométrica de armadura longitudinal a tracción

$x$  = Profundidad de la fibra neutra.

$\xi$  = Profundidad de la fibra neutra adimensional.

$b$  = Anchura de la sección.

$d$  = Altura del canto útil.

$A_f$  = Área de la armadura inferior a tracción

$\epsilon_f$  = Deformación del refuerzo.

$\epsilon_c$  = Deformación pésima a compresión del hormigón.

$\varepsilon_{cu}$  = Deformación última del hormigón a compresión

$E_f$  = Módulo elástico del refuerzo.

$CG(\varepsilon_c)$  = Centro de gravedad del diagrama parábola rectangular en función de la deformación del hormigón

$f_c$  = Tensión en función de la deformación del hormigón siguiendo el diagrama parábola rectangular

### 7.2.7 Diseño a flexión simple con sección dada según normativa ACI

En este apartado se pretende abordar el diseño de una sección predefinida sometida a flexión simple. Igualmente, se parte de las propiedades de los materiales que conforman el elemento y se desea averiguar el área necesaria de armadura longitudinal para salvaguardar los Estados límites Último por sollicitación normal. Es decir se debe cumplir lo siguiente:

$$M_n \cdot \phi \geq M_u \quad (7.40)$$

Adimensional (dividido por  $U_c \cdot d$ ):

$$\mu_n \cdot \phi \geq \mu_u \quad (7.41)$$

Donde:

$M_u$  = Momento de diseño

$M_n$  = Momento resistente

$\phi$  = Factor de seguridad en función de la cuantía de armadura longitudinal inferior discutido en el capítulo 4

El momento resistente viene definido por las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y modo de fallo en la sección. A continuación se va a particularizar la formulación para cada modo de fallo debido la trascendental importancia que ello conlleva en el diseño.

#### 7.2.7.1 Diseño en dominio sobre-reforzado ( $\rho_f \geq \rho_{fb}$ )

A esta altura del documento ya no sería necesario recordar que para este caso el inicio del colapso de la sección se debe por fallo del hormigón a compresión. Por el contrario el refuerzo no se encuentra sometido a su máxima sollicitación. Planteado las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad la formulación resultaría de la siguiente manera (para simplificar y sin pérdidas de generalidad se tratan las ecuaciones adimensionales como en los puntos anteriores):

Equilibrio de fuerzas en la sección:

$$v_c = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \xi = \frac{\rho_f \cdot \varepsilon_f \cdot E_f}{f'_c} \quad (7.42)$$

Momento resistente:

$$\mu_n = \mu_c = v_c \cdot \left( 1 - \frac{\beta_1 \cdot \xi}{2} \right) \quad (7.43)$$

Siendo:

$$\xi = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_f} \quad (7.44)$$

Haciendo un balance entre el número de ecuaciones y variables se concluye que el problema está cerrado. Como ecuaciones se tienen las definidas por (7.41), (7.42), (7.43) y (7.44), mientras que de incógnitas se asumen  $\mu_n$ ,  $\xi$ ,  $\varepsilon_f$  y  $\rho_f$ . Siendo hallado el resto de variables en función de las explicitadas anteriormente. Es de notar que el sistema de ecuaciones que se forma no es lineal debido a que el coeficiente de seguridad es una función a trozo que depende de la cuantía colocada. Si no se dispone de herramientas de cálculo sofisticadas, una forma de proceder sería recurriendo a un proceso iterativo donde a priori se supone un coeficiente de seguridad. A partir de éste se calcula la cuantía necesaria y se comprueba el coeficiente de seguridad resultante. Si el valor es diferente al tomado en la iteración se vuelve a proceder igual hasta que la diferencia sea aceptable.

Para proceder iterativamente mejor acogernos a las siguientes ecuaciones:

$$v_c = 0.85 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_u}{0.425 \cdot \phi(\rho_f)}} \right) \quad (7.45)$$

$$\rho_f = \frac{v_c^2 \cdot f'_c}{E_f \cdot \varepsilon_{cu} \cdot (0.85 \cdot \beta_1 - v_c)} \quad (7.46)$$

La primera ecuación (7.45) resulta de sustituir la ecuación de equilibrio de fuerzas (7.42) en la ecuación del momento resistente (7.33), aceptando que es igual al momento solicitado dividido por el factor de seguridad, y despejando el axil adimensional de compresión del hormigón. Mientras que la segunda (7.46) se obtiene de sustituir la fibra neutra en función de la deformación del refuerzo en la ecuación de equilibrio de fuerzas y despejando la cuantía en función de axil adimensional de compresión. Si unimos sendas ecuaciones y simplificamos, queda la cuantía longitudinal en función del momento solicitado y por tanto la iteración sólo consiste en un cálculo:



$$\rho_f = \frac{0.85 \cdot f'_c \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_u}{0.425 \cdot \phi(\rho_f)}} \right)^2}{E_f \cdot \varepsilon_{cu} \cdot \left[ \beta_1 - \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_u}{0.425 \cdot \phi(\rho_f)}} \right) \right]} \quad (7.47)$$

### 7.2.7.2 Diseño en dominio bajo-reforzado ( $\rho_f \leq \rho_{fb}$ )

Para este, caso ya es consabido que la rotura de la sección es provocada por un fallo repentino del refuerzo induciendo en el hormigón una deformación inferior a la de colapso. Con lo cual, deja de ser aplicable la aproximación del diagrama tensión deformación por el equivalente diagrama rectangular definido en el capítulo 5. Es necesario ajustar una nueva equivalencia modificando tanto el coeficiente de profundidad de fibra neutra como eficacia (o tensión media) en función de la deformación pésima del hormigón y sus propiedades. Entonces, el análisis se vuelve más complicado por la aparición de nuevas variables y la formulación quedaría tal que así (se dispone las fórmulas de forma adimensionales):

El momento resistente, que debe ser mayor que el demandado dividido por el factor de seguridad:

$$\mu_n = \rho_f \cdot \frac{f_{fu}}{f'_c} \cdot \left( 1 - \frac{\beta'_1(\varepsilon_c, \text{prop}_{\text{hormig.}}) \cdot \xi}{2} \right) \quad (7.48)$$

Donde la profundidad de la fibra neutra puede obtenerse del equilibrio de fuerzas:

$$v_c = \alpha_1(\varepsilon_c, \text{prop}_{\text{hormig.}}) \cdot \beta'_1(\varepsilon_c, \text{prop}_{\text{hormig.}}) \cdot \xi = \rho_f \cdot \frac{f_{fu}}{f'_c} \quad (7.49)$$

Es decir, despejando la fibra neutra en función de la cuantía longitudinal y sustituyendo en el momento resistente:

$$\mu_n = \frac{f_{fu} \cdot \rho_f \cdot (-f_{fu} \cdot \rho_f + 2 \cdot \alpha_1(\varepsilon_c, \text{prop}_{\text{hormig.}}) \cdot f'_c)}{2 \cdot \alpha_1(\varepsilon_c, \text{prop}_{\text{hormig.}}) \cdot f'_c{}^2} \quad (7.50)$$

Siendo:

$$\xi = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \quad (7.51)$$

En vista de la complejidad de los cálculos por las nuevas variables, la norma ACI propone una formulación conservativa para averiguar el momento resistente en función de la cuantía longitudinal. Esta es:

$$\mu_n = 0.8 \cdot \rho_f \cdot \frac{f_{fu}}{f'_c} \cdot \left( 1 - \frac{\beta_1 \cdot \xi_b}{2} \right) \quad (7.52)$$

Siendo:

$$\xi_b = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} \quad (7.53)$$

El comité mantiene que el coeficiente de 0.8 usado in la ecuación (7.52) provee una conservativa y significativa aproximación del momento resistente.

No obstante, a continuación se expone una formulación más exacta aplicando el diagrama parábola rectangular del hormigón. Por simplificación se pone las ecuaciones de forma adimensional:

Nota aclaratoria: En la formulación que sigue es necesario definir una variable de integración de la deformación del hormigón. Para que no haya confusión con la deformación pésima del hormigón  $\epsilon_c$ , esta variable de integración se define con un apóstrofe adicional, esto es,  $\epsilon'_c$ .

Equilibrio de fuerzas

$$v_c = \frac{1}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot \frac{\int_0^{\epsilon_c} f_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c}{f'_c} = \rho_f \cdot \frac{f_{fu}}{f'_c} \quad (7.54)$$

Momento resistente

$$\mu_n = \frac{1}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot \frac{\int_0^{\epsilon_c} f_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c}{f'_c} \cdot \left( 1 - \frac{CG(\epsilon_c) \cdot \epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \right) \quad (7.55)$$

Siendo:

$$\xi = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \quad (7.56)$$

$$CG(\epsilon_c) = 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_c} \epsilon_c \cdot f_c(\epsilon'_c) d\epsilon_c}{\epsilon_c \cdot \left( \int_0^{\epsilon_c} f_c(\epsilon'_c) d\epsilon_c \right)} \quad (7.57)$$

Si se opera con la ecuación de equilibrio de fuerzas adimensional (7.54), se puede despejar la cuantía longitudinal inferior en función de la deformación pésima del hormigón. Esto es:

$$\rho_f(\epsilon_c) = \frac{1}{f_{fu} \cdot (\epsilon_{fu} + \epsilon_c)} \cdot \int_0^{\epsilon_c} f_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c \quad (7.58)$$

Luego, si se tiene en cuenta que el momento resistente, minorado por el factor de seguridad, debe ser mayor que el momento demandado (7.59) se puede despejar la deformación pésima del hormigón. E introduciendo ésta última en la ecuación (7.58) se puede obtener finalmente la cuantía necesaria. No obstante, obtener la deformación del hormigón es sumamente complicado y costoso, a menos que se recurran métodos computerizados. Una forma alternativa es pintando unas gráficas de diseño, tal que, en una se pinte el momento resistente en función de la deformación del hormigón y en otra la cuantía en función, también, de la deformación del hormigón. De esta forma entrando consecutivamente en una con el momento de diseño mayorado por el coeficiente de seguridad, se puede evaluar la deformación del hormigón, que finalmente introducido en la siguiente gráfica se puede obtener la cuantía necesaria.

$$\mu_n(\epsilon_{ca}) \cdot \phi(\rho_f) \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2 - M_d \geq 0 \quad (7.59)$$

A modo instructivo se muestran estas dos gráficas de diseño, para un GFRP genérico y hormigón convencional, antes mencionada:

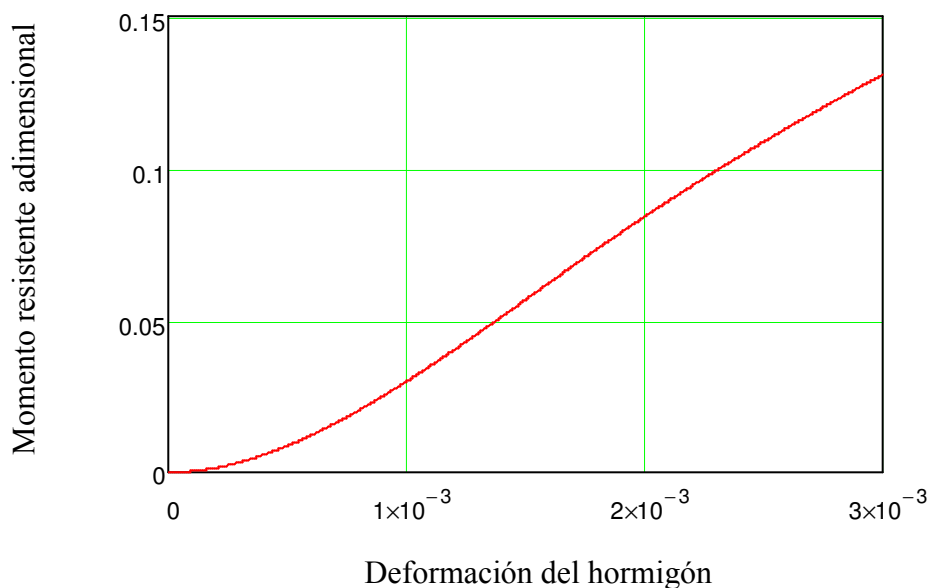


Fig. 7.15: Momento resistente adimensional en función de la deformación pésima del hormigón

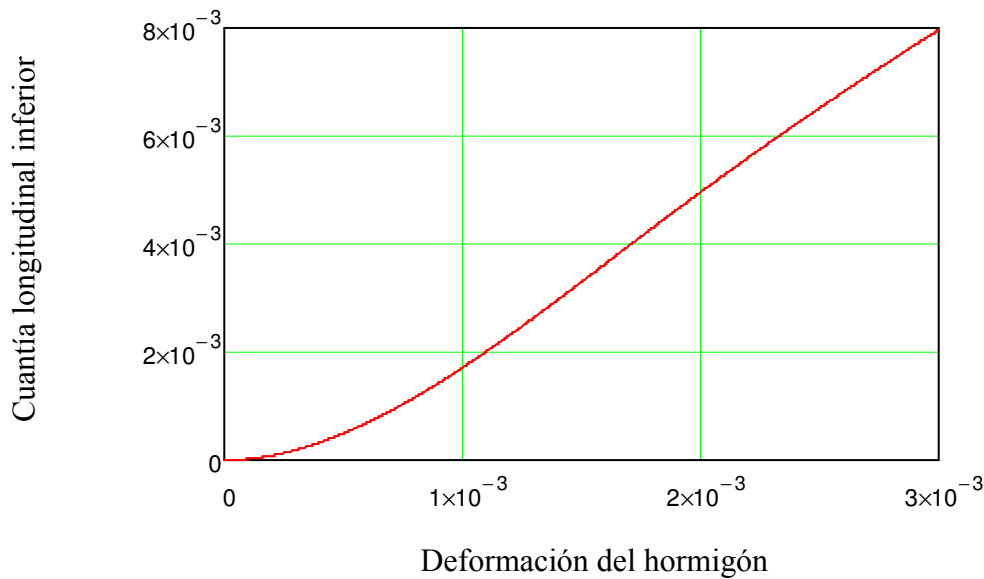


Fig. 7.16: Cuantía longitudinal inferior en función de la deformación pésima del hormigón

### 7.2.7.3 Notación

$N_c$  = Axil de compresión del hormigón.

$v_c$  = Axil de compresión del hormigón adimensional.

$M_c$  = Momento de compresión del hormigón respecto a la armadura inferior.

$\mu_c$  = Momento de compresión del hormigón respecto a la armadura inferior adimensional.

$M_u$  = Momento de diseño.

$M_n$  = Momento resistente.

$\phi$  = Factor de seguridad.

$\rho_f$  = Cuantía geométrica de armadura longitudinal a tracción

$x$  = Profundidad de la fibra neutra.

$\xi$  = Profundidad de la fibra neutra adimensional.

$b$  = Anchura de la sección.

$d$  = Altura del canto útil.

$A_f$  = Área de la armadura inferior a tracción

$\varepsilon_f$  = Deformación del refuerzo.

$\varepsilon_c$  = Deformación pésima a compresión del hormigón.

$\varepsilon_{cu}$  = Deformación última del hormigón a compresión

$E_f$  = Módulo elástico del refuerzo.

$f'_c$  = Resistencia del hormigón a compresión.

$\beta_1$  = Factor de profundidad de la fibra neutra para el diagrama tenso-deformacional rectangular del hormigón

$\beta'_1$  = Factor de profundidad de la fibra neutra para el diagrama equivalente rectangular del hormigón cuando no se alcanza la deformación última. Depende de la deformación del hormigón y sus propiedades. Para el caso en el que se alcance la deformación última su valor es de 0.85

$\alpha_1$  = Eficacia o tensión media del diagrama equivalente rectangular cuando el hormigón no alcanza la deformación última. Depende de la deformación del hormigón

y de sus propiedades. Para el caso en el que se alcance la deformación última su valor es de 0.85

$CG(\varepsilon_c)$  = Centro de gravedad del diagrama parábola rectangular en función de la deformación del hormigón

$f_c$  = Tensión en función de la deformación del hormigón siguiendo el diagrama parábola rectangular

## 7.2.8 Diseño a flexión simple sin sección dada según normativa EHE.

La formulación de la normativa Americana para el armado de miembros de hormigón con barras de FRP se basa en las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de la sección, particularizados para los dos posible dominio de trabajo (sobre-reforzado y bajo-reforzado), de manera que el momento resistente resultante sea mayor que el demandado. Para adaptar la EHE a este tipo de refuerzo, se va a proceder de manera similar teniendo en cuenta las pequeñas diferencias intrínsecas en cuanto a la formulación de dichas normativas se refiere.

En este apartado se pretende diseñar una sección rectangular, no definida a priori, a flexión simple. Como datos de partida se tiene las propiedades de los materiales que se utilizan y las restricciones que se considere oportuno sobre la geometría de la sección. Las incógnitas a resolver son el área de armadura longitudinal a tracción necesaria y los parámetros útiles que definen la sección rectangular (ancho  $b$ , y canto útil  $d$ )

En general se debe de cumplir que:

$$M_n \geq M_d \quad (7.60)$$

Adimensional (dividido por  $U_c \cdot d$ ) :

$$\mu_n \geq \mu_d \quad (7.61)$$

Donde:

$M_n$  = Momento nominal resistente

$M_d$  = Momento de diseño

$\mu_n$  = Momento nominal resistente adimensional

$\mu_d$  = Momento de diseño adimensional

### 7.2.8.1 Diseño en dominio 4 ( $\xi \geq \xi_{lim}$ )

El modo de fallo de la sección es por compresión del hormigón. Es decir, la profundidad de la fibra neutra supera la fibra neutra límite que balancea la sección. O lo que es lo mismo, existe un exceso de cuantía longitudinal superior a la balanceada.

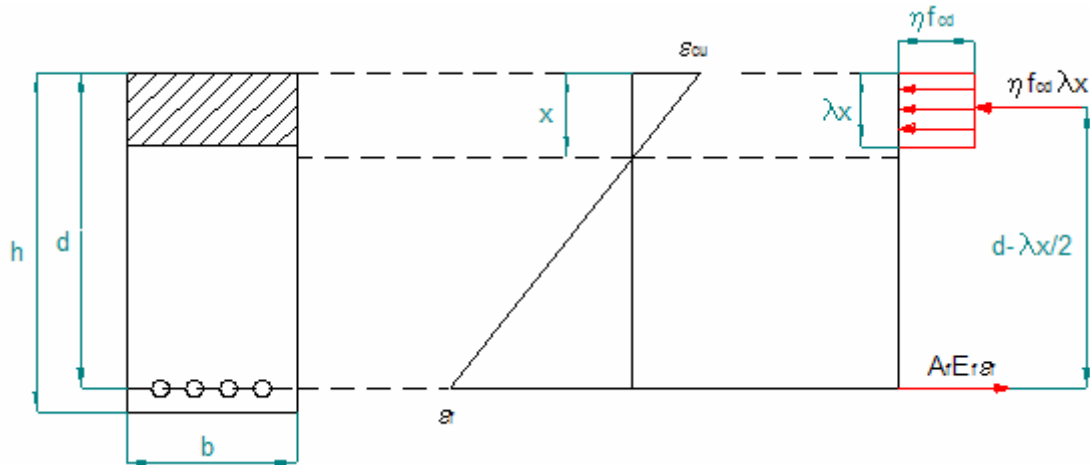


Fig. 7.13: Comportamiento de la sección según normativa EHE  
Recordando la definición de la fibra neutra límite:

$$\xi_{lim} = \left( \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} \right) \quad (7.62)$$

Equilibrio de fuerzas en la sección:

$$N_c = \eta \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot x \cdot b = A_f \cdot E_f \cdot \epsilon_f \quad (7.63)$$

Adimensional (dividido por  $U_c = f_{cd} \cdot b \cdot d$ ):

$$v_c = \eta \cdot \lambda \cdot \xi = \frac{\rho_f \cdot E_f \cdot \epsilon_f}{f_{cd}} \quad (7.64)$$

Momento nominal resistente:

$$M_n = M_c = \eta \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot x \cdot b \cdot \left( d - \frac{\lambda \cdot x}{2} \right) \quad (7.65)$$

Adimensional (dividido por  $U_c \cdot d$ ):

$$\mu_n = \mu_c = \eta \cdot \lambda \cdot \xi \cdot \left( 1 - \frac{\lambda \cdot \xi}{2} \right) \quad (7.66)$$

Siendo:

$$x = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_f} \cdot d \quad (7.67)$$

$$\xi = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_f} \quad (7.68)$$

Análogamente a la forma de proceder de la normativa ACI, si despejamos la deformación de la fibra en función de la cuantía longitudinal de la ecuación de equilibrio adimensional (7.64), se tiene:

$$\epsilon_f(\rho_f) = \frac{-\epsilon_{cu} + \sqrt{\epsilon_{cu}^2 + \frac{4 \cdot \eta \cdot \lambda \cdot \epsilon_{cu} \cdot f_{cd}}{E_f \cdot \rho_f}}}{2} \quad (7.69)$$

Y ahora sustituyendo la ecuación anterior en el momento resistente nominal adimensional (7.66):

$$\mu_n(\rho_f) = \eta \cdot \lambda \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_f(\rho_f) + \epsilon_{cu}} \left[ 1 - \lambda \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{(\epsilon_f(\rho_f) + \epsilon_{cu}) \cdot 2} \right] \quad (7.70)$$

De la primera ecuación (7.69) se puede obtener el rendimiento del refuerzo en función de la cuantía. Mientras que de la segunda (7.70) se tiene el momento resistente adimensional para la cuantía elegida. Ahora sólo falta establecer los parámetros de la sección, teniendo en cuenta los posibles requisitos de partida, de manera que el momento de diseño sea inferior al resistente.

$$\mu_n(\rho_f) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 - M_d \geq 0 \quad (7.71)$$

Luego el área de refuerzo necesaria saldría:

$$A_f = \rho_f \cdot b \cdot d \quad (7.72)$$

Véanse las gráficas de sendas ecuaciones para una mejor interpretación:

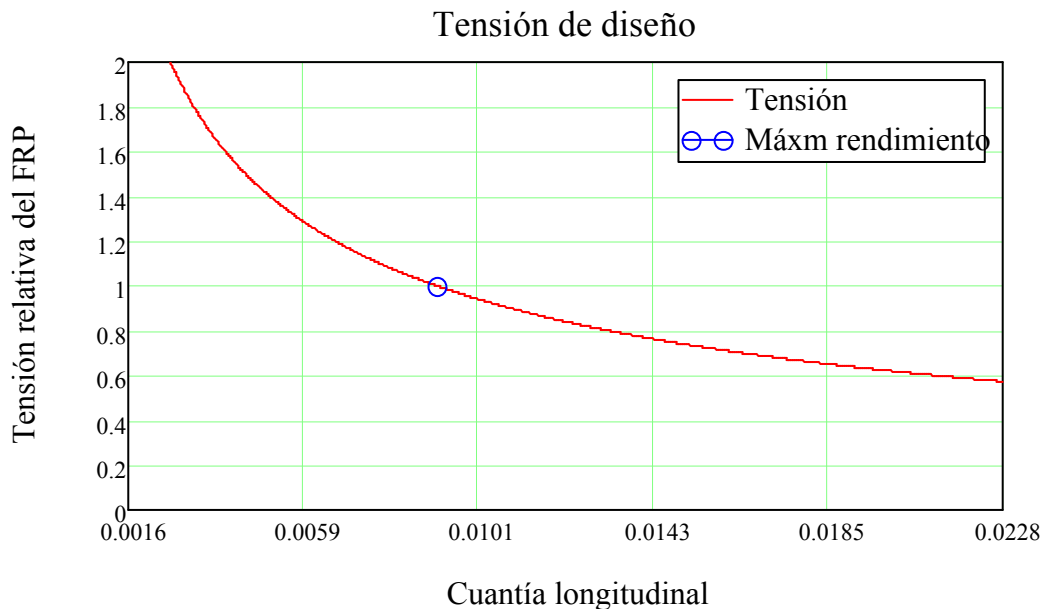


Fig. 7.14: Tensión del refuerzo en función de la cuantía longitudinal para un hormigón convencional y FRP genérico.

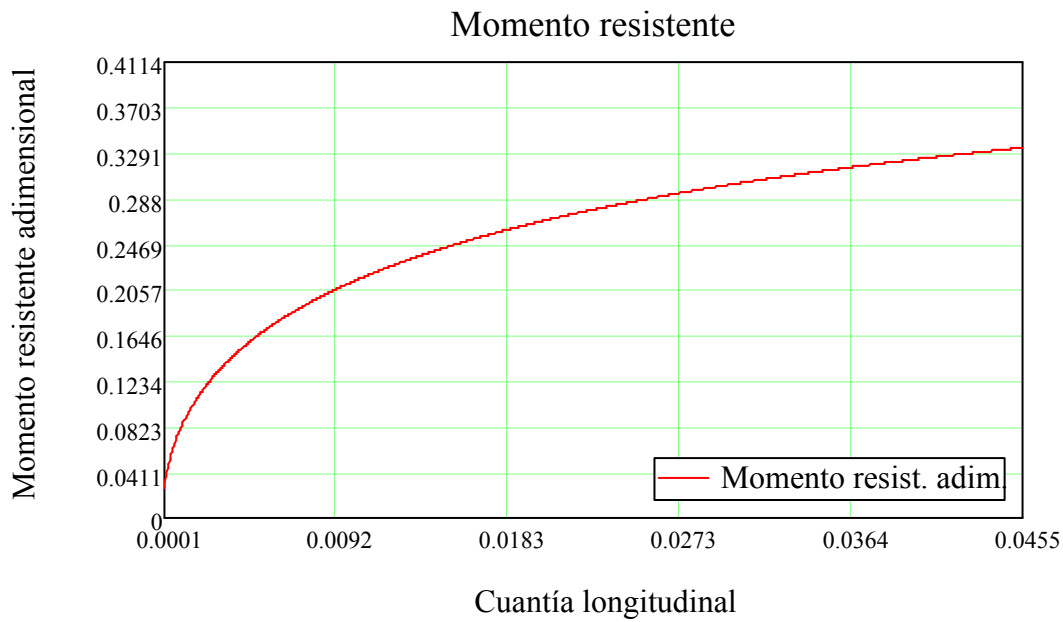


Fig. 7.15: Momento resistente adimensional en función de la cuantía longitudinal para un hormigón convencional y FRP genérico.

En definitiva los pasos para este tipo de diseño serían:

- Paso 1: Elección de la tensión de trabajo del refuerzo y obtención de la cuantía de armadura longitudinal.
- Paso 2: Obtención del momento resistente adimensional para la cuantía preseleccionada.
- Paso 3: Obtención de los parámetros de la sección en función de los requisitos preestablecidos y área de armadura necesaria, de manera que el momento resistente sea mayor que el demandado.

**7.2.8.2 Diseño en dominio 2 ( $\xi < \xi_{lim}$ )**

El refuerzo interno llega a desarrollar su máxima tensión a tracción mientras que la fibra pésima del hormigón no alcanza la deformación última. Para este caso ya no es aplicable el diagrama tenso-deformacional rectangular y hay que acudir al parábola-rectangular. Como es lógico la formulación se complica, no obstante la filosofía de diseño sigue siendo análoga, donde ahora la variable de elección es el rendimiento del hormigón o lo que es lo mismo, la máxima deformación que se permite. Acudiendo de nuevo a las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad se tiene:



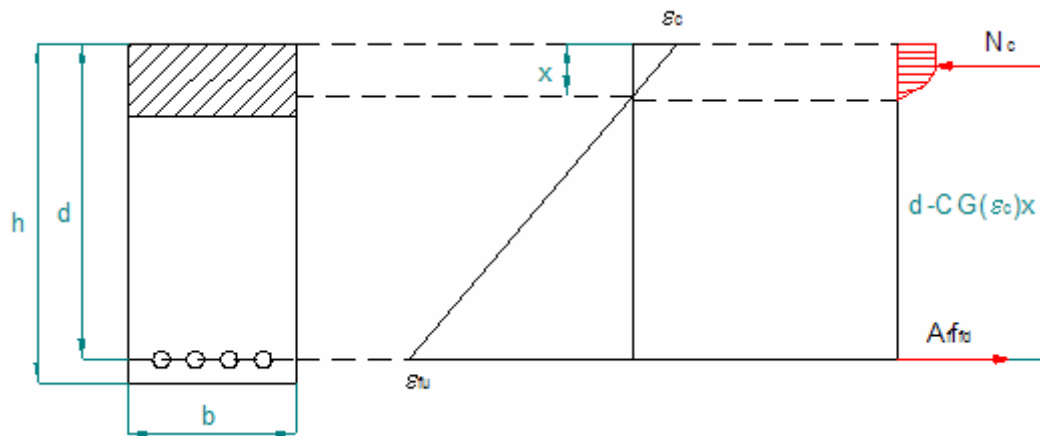


Fig. 7.16: Comportamiento de la sección según normativa EHE

Nota aclaratoria: En la formulación que sigue es necesario definir una variable de integración de la deformación del hormigón. Para que no haya confusión con la deformación pésima del hormigón  $\epsilon_c$ , esta variable de integración se define con un apóstrofe adicional, esto es,  $\epsilon'_c$ .

Equilibrio en la sección:

$$N_c = \frac{\epsilon_c \cdot d \cdot b}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot \frac{\int_0^{\epsilon_c} \sigma(\epsilon'_c) d\epsilon'_c}{\epsilon_c} = A_f \cdot f_{fd} \quad (7.73)$$

Adimensional (dividido por  $U_c$ ):

$$\nu_c = \frac{1}{(\epsilon_c + \epsilon_{fu}) \cdot f_{cd}} \cdot \int_0^{\epsilon_c} \sigma(\epsilon'_c) d\epsilon'_c = \rho_f \cdot \frac{f_{fd}}{f_{cd}} \quad (7.74)$$

Momento resistente:

$$M_n = M_c = \frac{\epsilon_c \cdot d \cdot b}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot \frac{\int_0^{\epsilon_c} \sigma(\epsilon'_c) d\epsilon'_c}{\epsilon_c} \cdot \left( d - \frac{\epsilon_c \cdot d}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot CG(\epsilon_c) \right) \quad (7.75)$$

Adimensional (dividido por  $U_c \cdot d$ ):

$$\mu_n = \mu_c = \frac{1}{(\epsilon_c + \epsilon_{fu}) \cdot f_{cd}} \cdot \int_0^{\epsilon_c} \sigma(\epsilon'_c) d\epsilon'_c \cdot \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot CG(\epsilon_c) \right) \quad (7.76)$$

Siendo:

$$x = \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \right) \cdot d \quad (7.77)$$

$$\xi = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{fu}} \quad (7.78)$$

$$CG(\varepsilon_c) = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_c} \varepsilon'_c \cdot \sigma_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c}{\varepsilon_c \cdot \left( \int_0^{\varepsilon_c} \sigma_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c \right)} \quad (7.79)$$

Operando con la ecuación de equilibrio adimensional (7.74) se puede obtener la cuantía longitudinal en función de la deformación pésima del hormigón. Es decir, se puede obtener la cuantía necesaria una vez decidido el rendimiento de trabajo al que se pretende diseñar el hormigón:

$$\rho_f(\varepsilon_c) = \frac{\int_0^{\varepsilon_c} \sigma_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c}{f_{fd} \cdot (\varepsilon_c + \varepsilon_{fu})} \quad (7.80)$$

Veamos gráficamente como se quedaría para un hormigón y refuerzo de GFRP genérico:

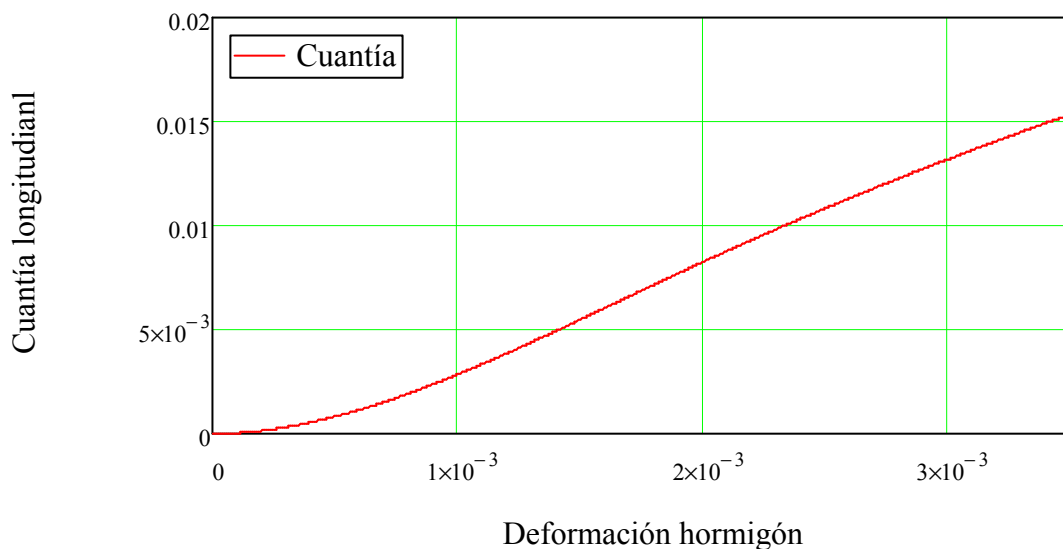


Fig. 7.17: Cuantía longitudinal necesario en función de la deformación del hormigón para hormigón y refuerzo de GFRP genérico.

Elegido la deformación del hormigón y por tanto la cuantía longitudinal, el momento resistente adimensional también queda definido. Ahora falta por calcular los parámetros de la sección de manera que el momento resistente sea mayor que el demandado:

$$\mu_n(\varepsilon_c) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 - M_d \geq 0 \quad (7.81)$$

Luego el área de armadura necesaria sería:

$$A_f = \rho_f \cdot b \cdot d \quad (7.82)$$

Veamos seguidamente una gráfica del momento resistente para un hormigón convencional y refuerzo GFRP genérico:

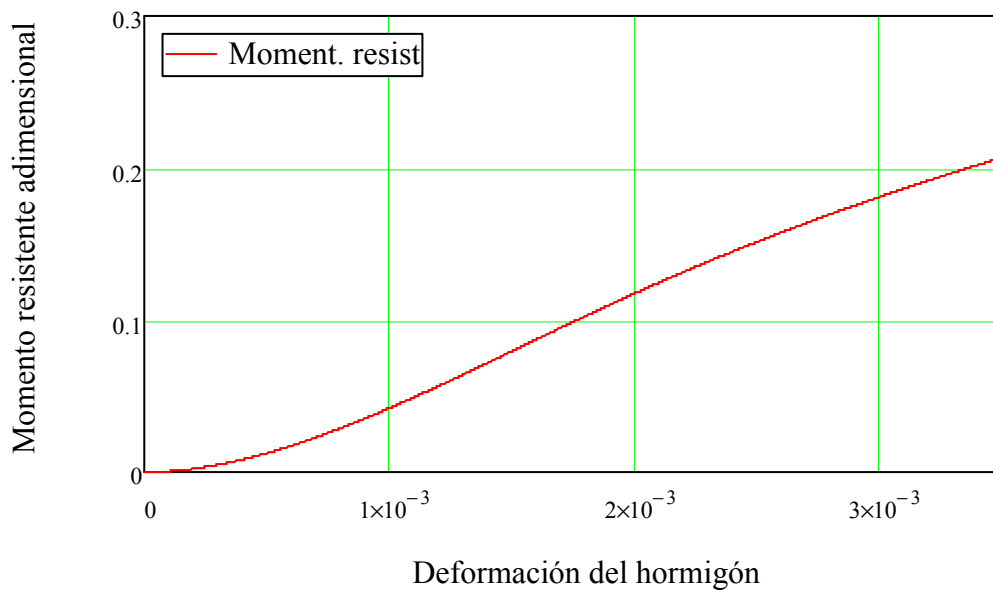


Fig. 7.18: Momento resistente para hormigón y GFRP genérico.

En resumen, los pasos a seguir para el diseño de una sección no predefinida a flexión simple en dominio 2, son:

Paso 1: Elección de la tensión de trabajo del hormigón y obtención de la cuantía de armadura longitudinal.

Paso 2: Obtención del momento resistente adimensional para la deformación del hormigón establecida.

Paso 3: Obtención de los parámetros de la sección en función de los requisitos preestablecidos y área de armadura necesaria, de manera que el momento resistente sea mayor que el demandado.

### 7.2.8.3 Notación

$N_c$  = Axil de compresión del hormigón.

$v_c$  = Axil de compresión del hormigón adimensional.

$M_c$  = Momento de compresión del hormigón respecto a la armadura inferior.

$\mu_c$  = Momento de compresión del hormigón respecto a la armadura inferior adimensional.

$M_d$  = Momento de diseño.

$M_n$  = Momento resistente.

$\mu_n$  = Momento resistente adimensional.

$\rho_f$  = Cuantía geométrica de armadura longitudinal a tracción

$x$  = Profundidad de la fibra neutra.

$\xi$  = Profundidad de la fibra neutra adimensional.

$b$  = Anchura de la sección.

$d$  = Altura del canto útil.

$A_f$  = Área de la armadura inferior a tracción

$\varepsilon_f$  = Deformación del refuerzo.

$\varepsilon_c$  = Deformación pésima a compresión del hormigón.

$\varepsilon_{cu}$  = Deformación última del hormigón a compresión

$\varepsilon_{fu}$  = Deformación última del FRP a tracción

$E_f$  = Módulo elástico del refuerzo.

$f_{cd}$  = Resistencia del hormigón a compresión.

$\lambda$  = Factor de profundidad de la fibra neutra para el diagrama tenso-deformacional rectangular del hormigón

$\eta$  = Coeficiente de eficacia para el diagrama tenso-deformacional rectangular del hormigón

CG = Centro de gravedad del diagrama tenso-deformacional parábola rectangular del hormigón.

### 7.2.9 Diseño a flexión simple con sección dada según normativa EHE

En este apartado se pretende abordar el diseño de elementos de sección rectangular predefinido a flexión simple. Los datos de inicio necesario son las propiedades de los materiales y geometría del elemento. Tal que se pretende calcular el área de armadura longitudinal necesaria para que se cumpla los Estados Límites Últimos.

El procedimiento de diseño o cálculo es el mismo que el especificado en el apartado análogo de diseño según normativa ACI. En resumen, hay que aplicar las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en la sección, particularizado para cada dominio concreto, tal que el momento resistente nominal sea mayor que el demandado. Esto es:

$$M_n \geq M_d \quad (7.83)$$

Adimensional (dividido por  $U_c \cdot d$ ) :

$$\mu_n \geq \mu_d \quad (7.84)$$

Donde:

$M_n$  = Momento nominal resistente

$M_d$  = Momento de diseño

$\mu_n$  = Momento nominal resistente adimensional

$\mu_d$  = Momento de diseño adimensional

### 7.2.9.1 Diseño en dominio 4 ( $\xi \geq \xi_{lim}$ )

En este dominio existe un exceso de armadura, luego la capacidad del refuerzo es superior al del hormigón y el modo de fallo esperado es por compresión del hormigón. En este caso es posible el uso del diagrama rectangular tenso-deformacional para aproximar el comportamiento del hormigón en la sección. Sin pérdida de generalidad a continuación se expone la formulación precisa de forma adimensional:

Equilibrio de fuerzas:

$$v_c = \eta \cdot \lambda \cdot \xi = \frac{\rho_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_f}{f_{cd}} = v_f \quad (7.85)$$

Momento resistente:

$$\mu_n = \mu_c = \eta \cdot \lambda \cdot \xi \cdot \left(1 - \frac{\lambda \cdot \xi}{2}\right) \quad (7.86)$$

Siendo

$$\xi = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_f} \quad (7.87)$$

Con estas ecuaciones y el equilibrio de momentos entre el momento resistente y el demandado, el problema quedaría cerrado. No obstante, sería necesario plantear un sistema de ecuaciones donde, en principio la resolución a mano se volvería tediosa y complicada. Por ello si se unen convenientemente las ecuaciones se puede llegar a una formulación simplificada más asequible para su resolución:

$$v_c = \eta \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_d}{0.5 \cdot \eta}}\right) \quad (7.88)$$

$$\rho_f = \frac{f_{cd} \cdot v_c^2}{E_f \cdot \varepsilon_{cu} \cdot (\eta \cdot \lambda - v_c)} \quad (7.89)$$

La primera ecuación (7.88) resulta de sustituir la ecuación de equilibrio de fuerzas (7.85) en la ecuación del momento resistente (7.86), aceptando que es igual al momento demandado, y despejando el axil adimensional de compresión del hormigón. Mientras que la segunda (7.89) se obtiene de sustituir la fibra neutra adimensional en función de la deformación del refuerzo en la ecuación de equilibrio de fuerzas y despejando la cuantía en función de axil adimensional de compresión. Ahora, el sistema de ecuaciones se convierte en dos ecuaciones aisladas que se resolvería en cascada. Es decir, de la primera ecuación se obtendría el axil adimensional de compresión del hormigón para el momento demandado adimensional, que sustituyéndolo en la segunda ecuación se tendría definitivamente la cuantía longitudinal necesaria. Para más simplificación se podría unir sendas ecuaciones en una y quedar el problema resuelto sólo en función del momento demandado adimensional:

$$\rho_f = \frac{f_{cd} \cdot \left[ \eta \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_d}{0.5 \cdot \eta}} \right) \right]^2}{E_f \cdot \varepsilon_{cu} \cdot \left[ \eta \cdot \lambda - \eta \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_d}{0.5 \cdot \eta}} \right) \right]} \quad (7.90)$$

Veamos a continuación un par de gráficas de diseño rápido:

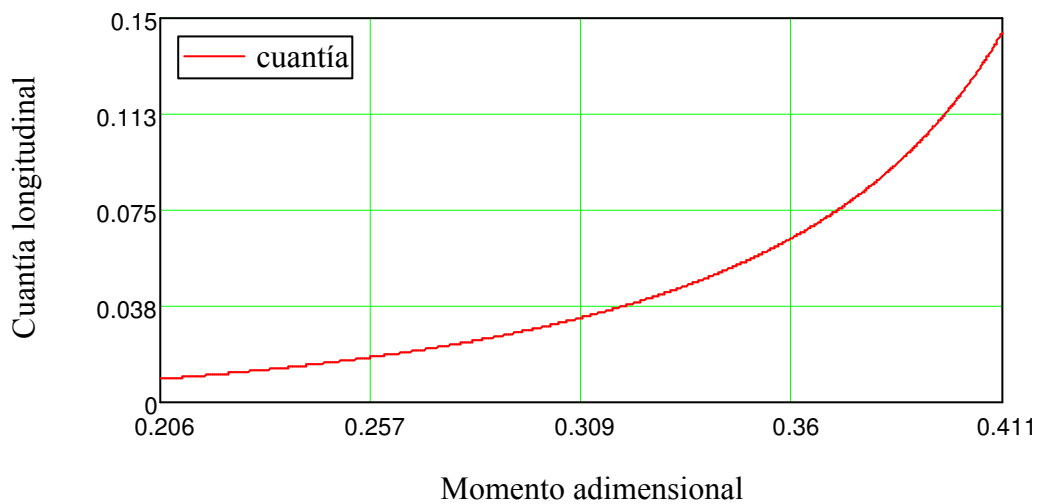


Fig. 7.19: Cuantía longitudinal necesaria en función del momento adimensional demandado para un hormigón y refuerzo de GFRP genérico.

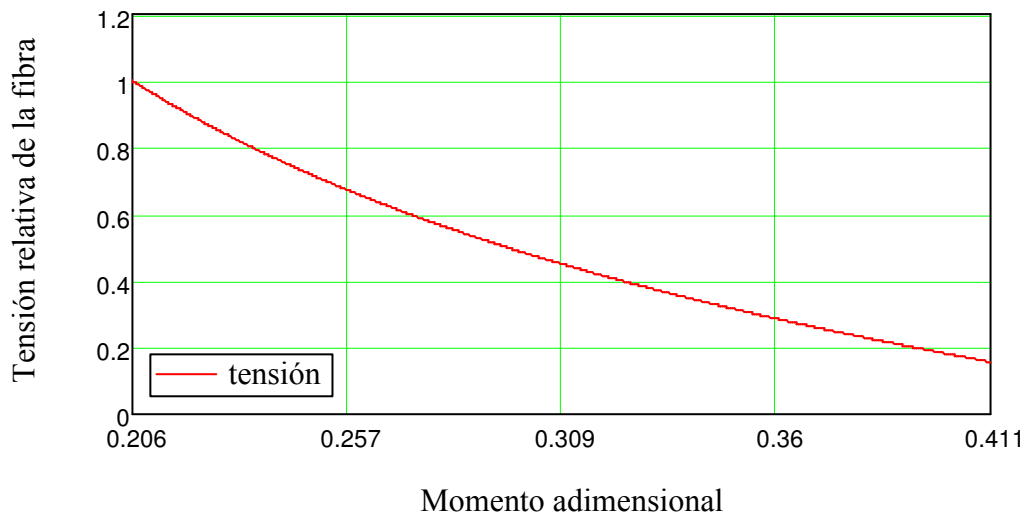


Fig. 7.20: Tensión del refuerzo relativa a su tensión máxima en tanto por uno en función del momento adimensional demandado para un hormigón y refuerzo de GFRP genérico.

Para el diseño de una sección sólo bastaría entrar en la primera gráfica con el momento adimensional demandado y obtener la cuantía necesaria. Para más

información sobre ésta, como su tensión de trabajo, igualmente solo es necesario entrar en la segunda gráfica a partir del momento demandado adimensional. Como conclusión cabe destacar que cuanto mayor es el momento solicitado, mayor cantidad de armadura hay que disponer y menor es el aprovechamiento.

### 7.2.9.2 Diseño en dominio 2 ( $\xi < \xi_{im}$ )

Existe un defecto de refuerzo longitudinal tanto que el hormigón no necesita llegar a desarrollar su máxima capacidad a compresión. La deformación pésima del hormigón no llega a la de rotura, luego no es posible aproximar el comportamiento de éste a través del diagrama rectangular, luego ahora es necesario recurrir al diagrama parábola-rectangular con las complicaciones que ello conlleva. Veamos su formulación:

Nota aclaratoria: En la formulación que sigue es necesario definir una variable de integración de la deformación del hormigón. Para que no haya confusión con la deformación pésima del hormigón  $\epsilon_c$ , esta variable de integración se define con un apóstrofe adicional, esto es,  $\epsilon'_c$ .

Equilibrio de fuerzas:

$$N_c = \frac{\epsilon_c \cdot d}{(\epsilon_c + \epsilon_{fu})} \cdot b \cdot \frac{\int_0^{\epsilon_c} \sigma_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c}{\epsilon_c} = A_f \cdot f_{fd} = N_f \quad (7.91)$$

Momento resistente nominal:

$$M_n = \frac{\epsilon_c \cdot d}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \cdot b \cdot \frac{\int_0^{\epsilon_c} \sigma_c(\epsilon_c) d\epsilon_c}{\epsilon_c} \left[ d - \frac{\epsilon_c \cdot CG(\epsilon_c)}{(\epsilon_c + \epsilon_{fu})} \cdot d \right] \quad (7.92)$$

Siendo:

$$x = \frac{\epsilon_c \cdot d}{\epsilon_c + \epsilon_{fu}} \quad (7.93)$$

$$CG(\epsilon_c) = 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_c} \epsilon'_c \cdot \sigma_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c}{\epsilon_c \cdot \left( \int_0^{\epsilon_c} \sigma_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c \right)} \quad (7.94)$$

Con estas ecuaciones junto con el equilibrio de momentos entre el demandado y el resistente (7.83) el problema quedaría cerrado. Es más, la resolución podría hacerse

en cascada, tal que entrando en el momento resistente y aceptando que es al menos igual al demandado se podría obtener la deformación del hormigón. Si ahora entramos en el equilibrio de fuerzas, se tiene que, con la deformación hallada, ya es conocido el eje de compresión del hormigón y por tanto es fácil despejar la armadura necesaria. No obstante, es obvio que los cálculos se vuelven sumamente complicados a no ser que se recurra a métodos computerizados. Una forma de simplificarlos es recurriendo a gráficas de forma que entrando con el momento demandado podamos obtener el área de armadura longitudinal necesaria. Si se adimensiona la ecuación del momento resistente se tiene que este depende de las propiedades de los materiales y de la deformación del hormigón. E igualmente, si hacemos lo mismo con la ecuación del equilibrio de fuerzas, se tiene que la cuantía necesaria depende de las propiedades de los materiales y de la deformación del hormigón. Por tanto el problema el problema estaría resuelto con dos simples gráficas.

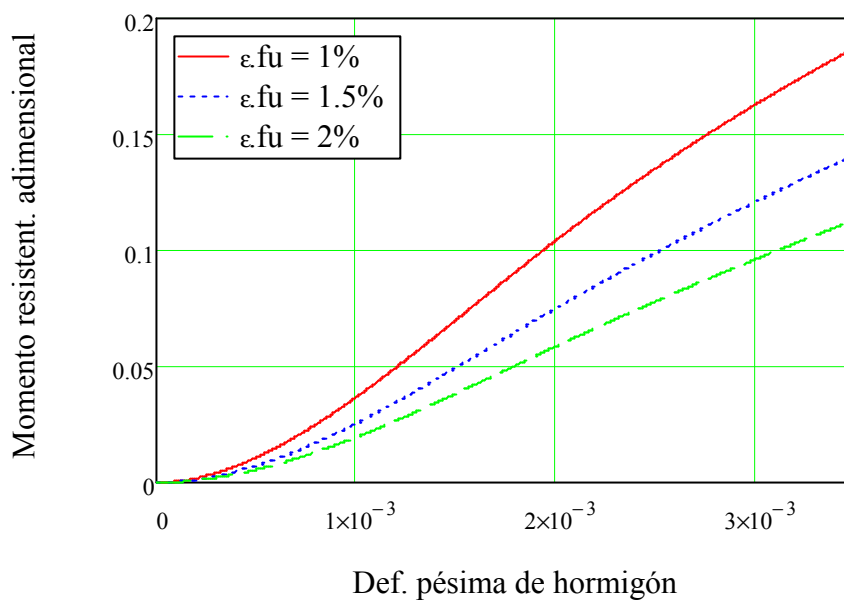
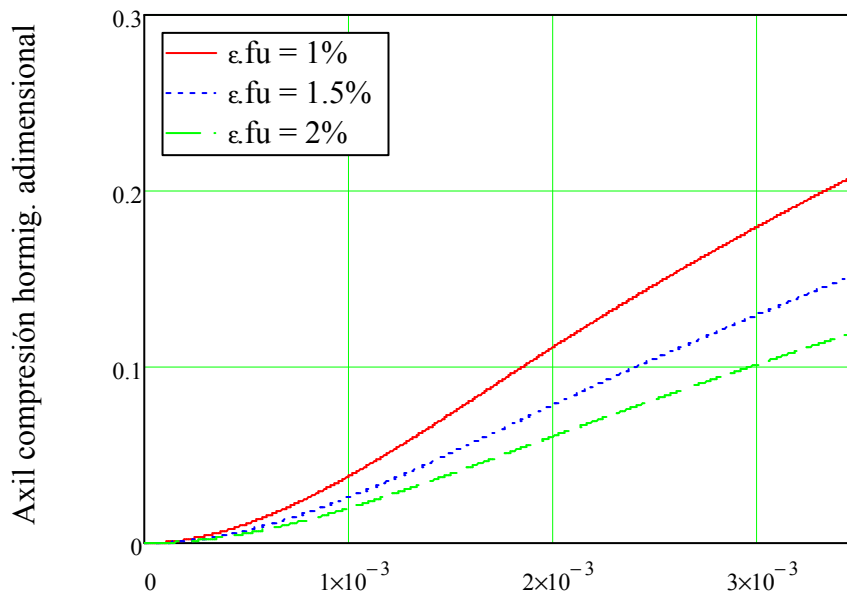


Fig. 7.21: Momento resistente adimensional para un hormigón convencional y diferentes tipos de fibra caracterizadas por su deformación en rotura.





Def. pésima de hormigón

Fig.7.22: Axil de compresión del hormigón adimensional para un hormigón convencional y diferentes tipos de fibras caracterizadas por su deformación en rotura.

Como se cabía esperar, es claro que cuanto mayor es la deformación del hormigón, mayor es el axil de compresión, en parte debido a que la profundidad de la fibra neutra crece, y por otra parte debido a que el área bajo la curva de comportamiento del hormigón también se incrementa. También era de esperar que al aumentar la rigidez del refuerzo, es decir, disminuir la deformación en rotura, el axil de compresión se incrementa debido al aumento de la profundidad de la cabeza de compresión. Por ende, el momento resistente aumenta a medida que se incrementa la deformación de la fibra pésima del hormigón y la rigidez del material.

### 7.2.9.3 Notación

$N_c$  = Axil de compresión del hormigón.

$v_c$  = Axil de compresión del hormigón adimensional.

$M_c$  = Momento de compresión del hormigón respecto a la armadura inferior.

$\mu_c$  = Momento de compresión del hormigón respecto a la armadura inferior adimensional.

$M_d$  = Momento de diseño.

$M_n$  = Momento resistente.

$\mu_n$  = Momento resistente adimensional.

$\rho_f$  = Cuantía geométrica de armadura longitudinal a tracción

$x$  = Profundidad de la fibra neutra.

$\xi$  = Profundidad de la fibra neutra adimensional.

$b$  = Anchura de la sección.

$d$  = Altura del canto útil.

$A_f$  = Área de la armadura inferior a tracción

$\epsilon_f$  = Deformación del refuerzo.

$\epsilon_c$  = Deformación pésima a compresión del hormigón.

$\varepsilon_{cu}$  = Deformación última del hormigón a compresión

$\varepsilon_{fu}$  = Deformación última del FRP a tracción

$E_f$  = Módulo elástico del refuerzo.

$f_{cd}$  = Resistencia del hormigón a compresión.

$\lambda$  = Factor de profundidad de la fibra neutra para el diagrama tenso-deformacional rectangular del hormigón

$\eta$  = Coeficiente de eficacia para el diagrama tenso-deformacional rectangular del hormigón

CG = Centro de gravedad del diagrama tenso-deformacional parábola rectangular del hormigón.

## 7.2.10 Estudio de hormigones de alta resistencia

### 7.2.10.1 Introducción

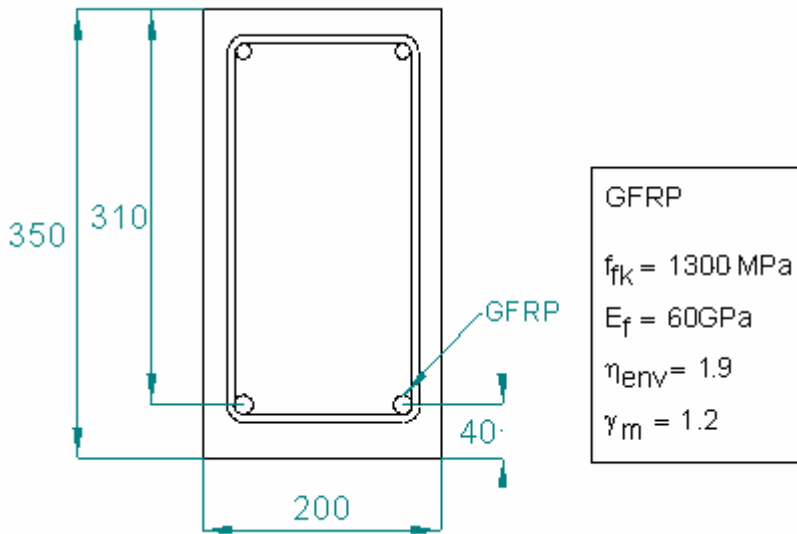
Parece patente que el bajo módulo elástico de los FRP lleva una serie de implicaciones negativas, entre las que cabe resaltar, el escaso rendimiento de la sección (capacidad de la sección de absorber momento) debido a la baja profundidad de la fibra neutra y pequeña cabeza de compresión. Una forma de solventar este problema es bajar la profundidad de la fibra neutra a cambio de perder rendimiento del refuerzo (tensión relativa a tensión límite de diseño). Sin embargo, si se aumentara la resistencia del hormigón, también se conseguiría aumentar la capacidad de la sección sin tener que perjudicar, necesariamente, el rendimiento del refuerzo. Es más, como se ha visto en temas anteriores, al aumentar la resistencia del hormigón implica un aumento de la cuantía balanceada y por tanto es más difícil que exista demasiado sobre-refuerzo.

En base a la idea anterior, se considera lógico estudiar la influencia del tipo de hormigón (especialmente la utilización de hormigones de alta resistencia) en piezas armadas con FRP sometida a flexión simple. Concretamente se parte de una sección y FRP genérico, pudiendo extrapolar los resultados para el resto de los casos. Además se utilizará la formulación correspondiente a la adaptación de la EHE propuesta en este documento.

Nota: Recordar que se entiende por hormigones de alta resistencia, aquellos que poseen una resistencia superior a 50 MPa.

### 7.2.10.2 Estudio

Sea una sección rectangular de dimensiones 350 mm x 200 mm, con un recubrimiento mecánico de 40 mm (recubrimiento geométrico + diámetro de estribos + mitad de diámetro de armadura longitudinal). Armada con barras de GFRP de 1300 MPa de tensión característica última y 60 GPa de módulo elástico. Y suponiendo que se encuentra a la intemperie en un clima típico peninsular, es decir,  $\eta_{env} = 1.9$ .



Dibujo 7.1

Si planteamos el equilibrio de fuerzas en la sección y despejamos la deformación del refuerzo, se tiene:

$$\epsilon_f(\rho_f, f_{ck}) = \sqrt{\frac{\int_0^{\epsilon_{cu}(f_{ck})} \sigma_c(\epsilon_c, f_{ck}) d\epsilon_c}{4 \cdot \frac{E_f \cdot \rho_f}{2} + \epsilon_{cu}(f_{ck})^2 - \epsilon_{cu}(f_{ck})}} \quad (7.95)$$

Ahora bien, si introducimos la ecuación anterior en el momento resistente:

$$M_n(\rho_f, f_{ck}) = \frac{b \cdot d^2}{(\epsilon_{cu}(f_{ck}) + \epsilon_f(\rho_f, f_{ck}))} \left[ 1 - \frac{\epsilon_{cu}(f_{ck}) \cdot CG(f_{ck})}{(\epsilon_{cu}(f_{ck}) + \epsilon_f(\rho_f, f_{ck}))} \right] \int_0^{\epsilon_{cu}(f_{ck})} \sigma_c(\epsilon_c, f_{ck}) d\epsilon_c \quad (7.96)$$

Con lo cual se tiene el momento resistente de la sección en función de la cuantía longitudinal y de la resistencia del hormigón. Es decir, con la formulación desarrollada se puede estudiar fácilmente la repercusión del tipo de hormigón y de la cantidad de armadura dispuesta en el rendimiento de la sección, que es lo que se pretende en este apartado. Notar, que en la formulación se ha tenido en cuenta el diagrama parábola-rectangular, pues se considera que es más adecuado además de que el diagrama rectangular no es más que una simplificación de éste. A continuación se muestra una gráfica particularizada para el caso concreto planteado y diferentes tipos hormigones.

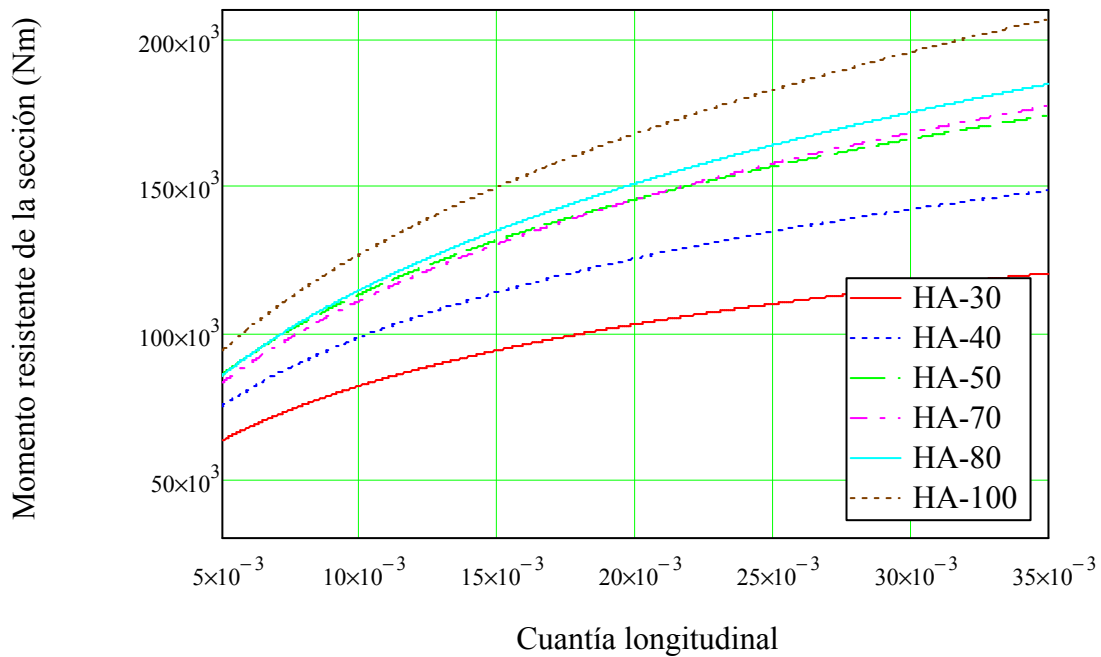


Fig 7.23: Momento resistente de la sección para diferentes tipos de hormigón en función de la cuantía de armadura longitudinal dispuesta.

De esta gráfica se puede extraer varias conclusiones:

- Como era de esperar, cuanto mayor es la resistencia del hormigón, mayor es el momento resistido por la sección. No obstante, ocurre un fenómeno curioso para hormigones de alta resistencia. Mientras que para hormigones convencionales, un salto en la resistencia del hormigón implica un incremento notable en el momento resistente, para los de alta resistencia, ese incremento es a penas perceptible (Fíjese que las curvas de HA-50 y HA-70 prácticamente coinciden). Es más, parece ser que este pequeño incremento de momentos, en hormigones de alta resistencia, es creciente a medida que nos separamos del HA-50. La explicación de este fenómeno se debe a la fragilidad de los hormigones de alta resistencia, concretamente para hormigones de mayor resistencia mayor es la fragilidad. Esto es, la deformación última se reduce, y por tanto la profundidad de la fibra neutra y la cabeza de compresión se vuelve más pequeña, con lo cual, compensa el aumento de la resistencia. Incluso, contrariamente a lo esperable, exista un tramo alrededor del hormigón HA-50 en el que área de bajo la curva de comportamiento tensión-deformación llega a descender.

$$M_n(\rho_f, f_{ck}) = \underbrace{\frac{\varepsilon_{cu}(f_{ck}) \cdot d}{(\varepsilon_{cu}(f_{ck}) + \varepsilon_f(\rho_f, f_{ck}))}}_{\text{profundidad de fibra neutra}} \cdot \underbrace{\int_0^{\varepsilon_{cu}(f_{ck})} \sigma_c(\varepsilon_c, f_{ck}) d\varepsilon_c}_{\text{tensión equivalente}} \cdot \underbrace{b}_{\text{ancho sección}} \cdot \underbrace{\left[ d - \frac{\varepsilon_{cu}(f_{ck}) \cdot CG(f_{ck})}{(\varepsilon_{cu}(f_{ck}) + \varepsilon_f(\rho_f, f_{ck}))} \cdot d \right]}_{\text{distancia entre resultante de fuerzas}}$$

$\int_0^{\varepsilon_{cu}(f_{ck})} \sigma_c(\varepsilon_c, f_{ck}) d\varepsilon_c$       área de curva de comportamiento

**Momento resistente = fuerza x distancia**

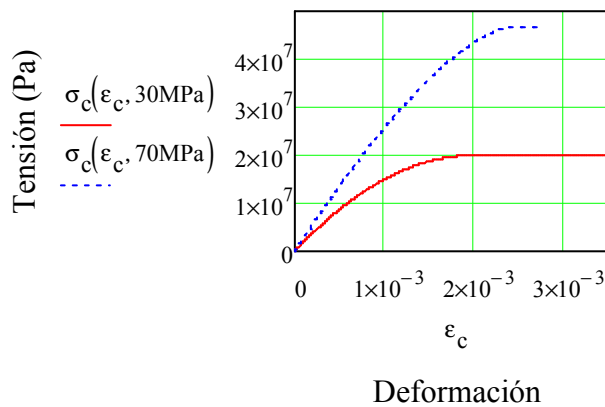


Fig. 7.24: Curva de comportamiento de diferentes hormigones

En esta gráfica se puede observar el incremento de resistencia de los hormigones de alta resistencia pero también la mayor fragilidad que poseen.

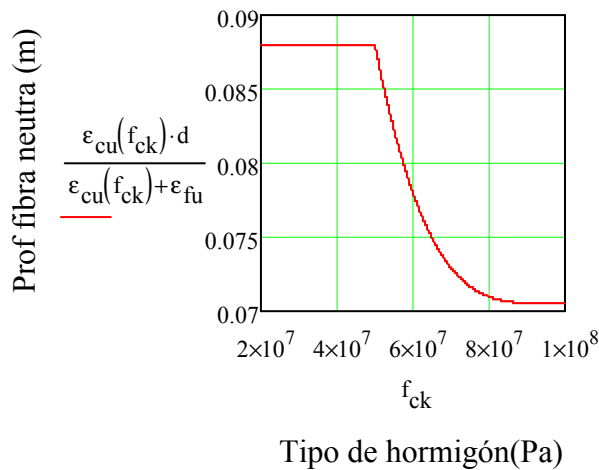


Fig. 7.25: Curva de profundidad de fibra neutra en función del tipo de hormigón.

Como se comentaba anteriormente la profanidad de la fibra neutra desciende para hormigones de alta resistencia hasta estabilizarse a partir de 80MPa.

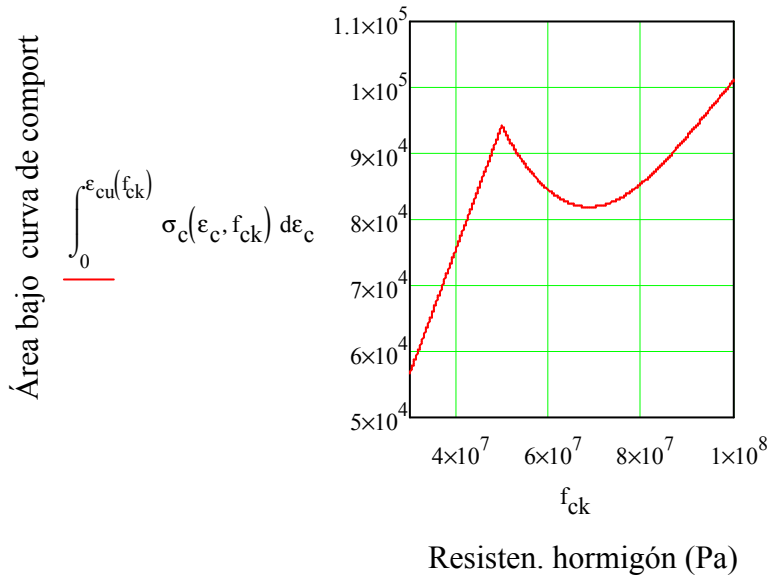


Fig. 7.26: Área bajo la curva de comportamiento en función de su resistencia.

Al contrario de lo que se esperaba, el área bajo la curva disminuye para hormigones de resistencia superior a HA-50. No obstante, lo importante es la tensión equivalente, que se define como la tensión media de la curva de comportamiento, a través de la cual, multiplicada por el área de la cabeza de compresión, se obtiene la fuerza total de compresión del hormigón.

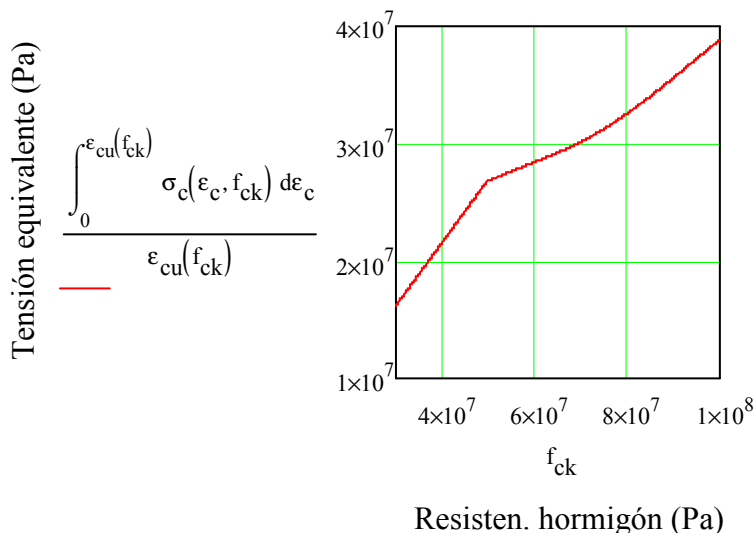


Fig. 7.27: Tensión equivalente en función del tipo de hormigón.

Se puede ver como la tendencia de crecimiento de la tensión equivalente cambia drásticamente a partir del HA-50, sin embargo tiende a recuperarse a

medida que sigue creciendo la resistencia del hormigón. Ahora bien, si unimos la tensión equivalente junto con el área de la cabeza de compresión, se puede estudiar la evolución de la fuerza total de compresión en función del tipo de hormigón, véase la figura siguiente:

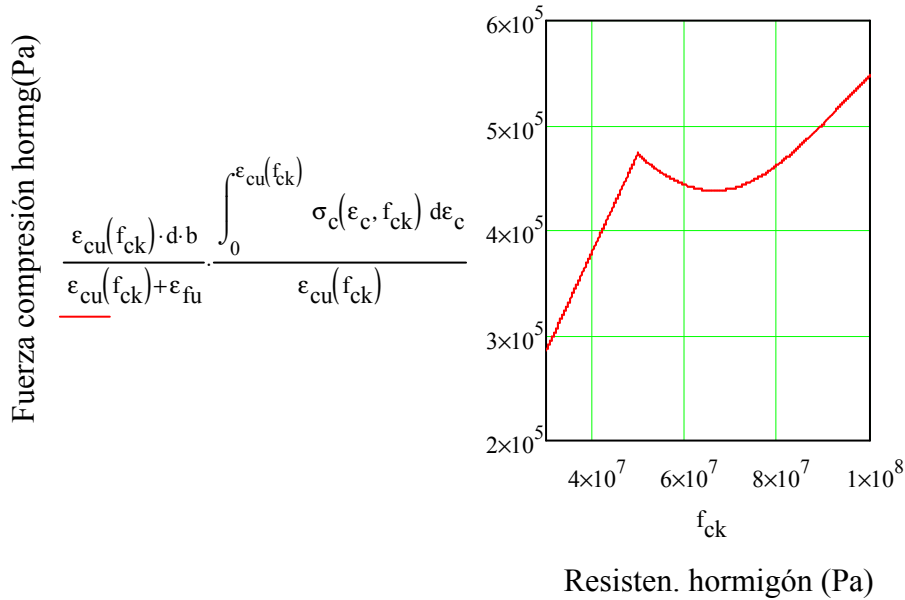


Fig. 7.28: Fuerza total de compresión absorbida por el hormigón en función de la resistencia del mismo.

Existe un tramo en el que el hormigón absorbe una menor fuerza de compresión, que se traducirá en un menor momento resistente. No obstante, la distancia entre resultantes de fuerzas (tracción y compresión) tiende a aumentar a medida que se gana en resistencia, y por tanto paliará este efecto negativo levantando algo el tramo pésimo de la gráfica anterior. Véase a continuación la evolución de la distancia entre resultantes:

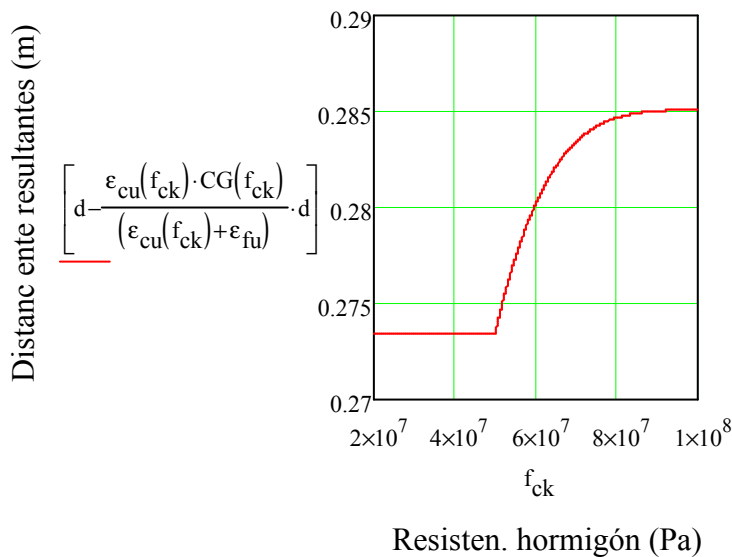


Fig. 7.29: Distancia entre resultantes en función de la resistencia del hormigón.

Por último si integramos todo junto, se puede ver la evolución del momento resistente en función de la resistencia del hormigón, suponiendo que la sección se encuentra balanceada. Un resultado totalmente análogo se obtendría para un rendimiento del refuerzo dado diferente del óptimo, mostrado a continuación.

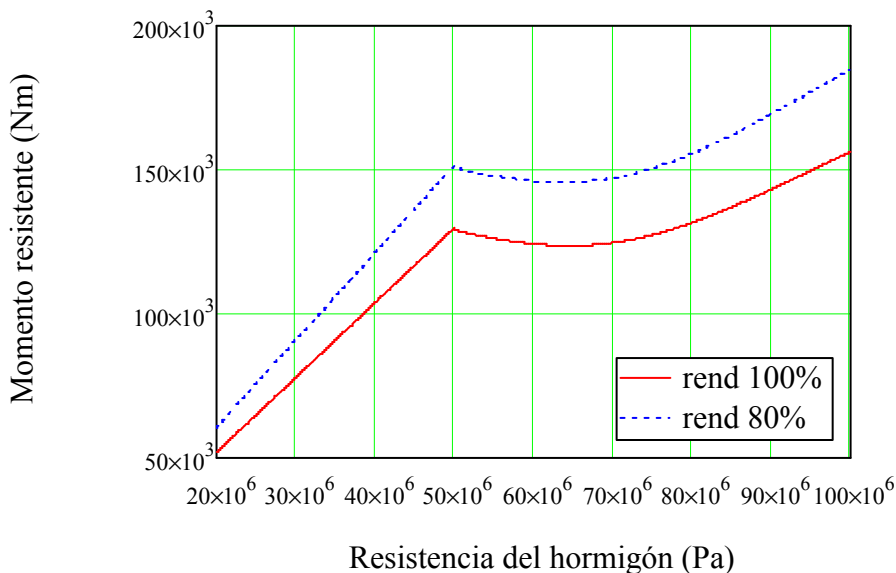


Fig. 7.30: Momento resistente en función del tipo de hormigón para dos rendimientos del refuerzo del 100% y del 80%.

En esta gráfica, arriba mostrada, se puede ver cómo la tendencia de crecimiento del momento resistente se rompe a partir de la utilización de hormigones de alta resistencia debido a la progresiva fragilidad de éstos. De tal manera que existe un rango de próximo al HA-50 en el que se estabiliza, e incluso desciende, recuperándose una vez se recurre a hormigones de extremada resistencia. También se puede apreciar el efecto de variación de la cuantía longitudinal en pro de sobre-reforzar la sección (Fíjese en la traslación vertical de la curva). Este efecto se explica en el punto siguiente.

- El momento resistente aumenta a medida que se coloca mayor cantidad de armadura longitudinal. Con ello se consigue que la deformación de la misma disminuya y por tanto la profundidad de la fibra neutra crezca. Luego la cabeza de compresión es mayor y el momento que absorber también.

### 7.2.10.3 Conclusiones

A lo largo de este documento, se ha manifestado claramente que el bajo módulo elástico y las elevadas deformaciones últimas de los FRP, conllevan un efecto perjudicial en cuanto promueven un bajo rendimiento de la sección. No obstante, se vislumbraba que el posible incremento de la resistencia del hormigón podría mejorarlo de manera notable. Tras este estudio se puede concluir que, necesariamente no tiene por qué ser así. Mientras que, para hormigones convencionales, un aumento de la resistencia sí evidencia un fuerte aumento del rendimiento de la sección, no ocurre lo



mismo para los de alta resistencia, a no ser que se recurra a extremada resistencia (superior a 80 MPa) que si se consigue un sensible beneficio.

Si se analiza detalladamente la curva de momento resistente en función, tan sólo, del tipo de hormigón, se puede diferenciar tres regiones bien claras. La primera de ellas concuerda con los hormigones convencionales, en la que la pendiente de momento resistente frente a resistencia del hormigón es elevada y constante. Desde el punto de vista óptimo, en esta región, sí conviene aumentar las propiedades del hormigón en busca de mayor rendimiento de la sección. A continuación, le sigue una región en la que cambia drásticamente la pendiente de la curva. Corresponde a hormigones de alta resistencia entre 50MPa y 80MPa en el que se estabiliza el momento absorbido e incluso llega a descender levemente. Y por último, a partir de 80MPa, una región en donde empieza a ser beneficioso el uso de hormigones de alta resistencia y la pendiente se recupera progresivamente. Véase figura siguiente para una mejor comprensión.

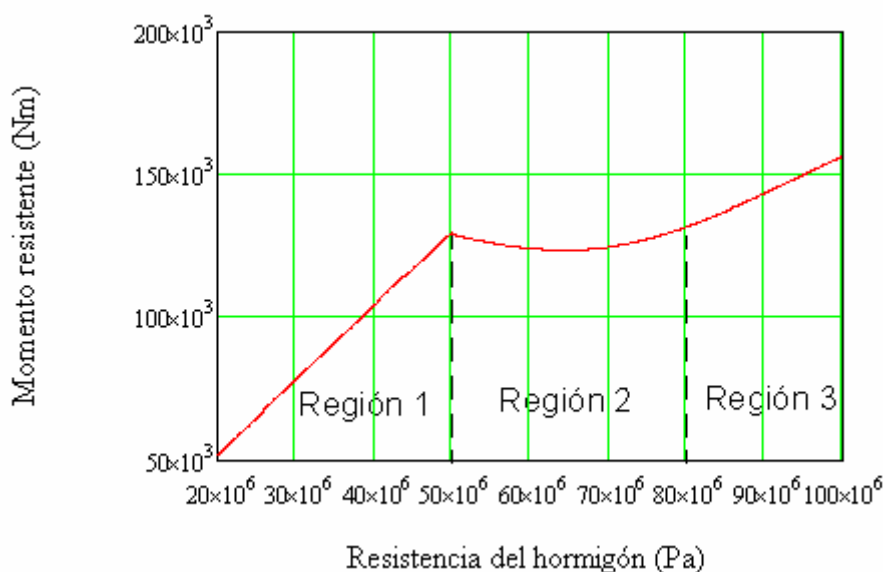


Fig. 7.31: Regiones de la curva de momento resistente frente a resistencia del hormigón

Por último, dado la poca eficacia de los hormigones de alta resistencia, una alternativa viable, para conseguir un mayor momento resistente, es el aumento de la cuantía longitudinal. Con este procedimiento se logra bajar la fibra neutra, aumentar la cabeza de compresión y, desde el punto de vista de servicio, reducir la flecha y fisuración a costa de perder rendimiento del refuerzo. Esto es, se mejora globalmente el comportamiento de la sección en contra de desperdiciar algo de armadura.

## 7.2.11 Estudio de la influencia del tipo de refuerzo

### 7.2.11.1 Introducción

La mayoría de las normativas que desarrollan el diseño de elementos armados con FRP, no son más que una modificación del armado convencional, de manera que, adaptan la formulación para incorporar el comportamiento diferencial de estos

materiales respecto del acero. No obstante, este documento no pretende sólo explicar esta adaptación, sino, también estudiar las implicaciones de las diferentes propiedades de los FRP, y por tanto, conocer las ventajas e inconvenientes de ellos. Concretamente, se cree conveniente tomar como referencia el comportamiento del armado convencional, debido al gran conocimiento que se tiene de él, y analizar las repercusiones de las diferentes propiedades de los FRP. Además, dado los diferentes tipos de FRP que existen en el mercado, este estudio puede ayudar, por consiguiente, a su adecuada elección.

Normalmente los FRP se caracterizan por tener una extraordinaria resistencia, alrededor de 3 a 4 veces la del acero. No obstante, los factores de durabilidad le afectan fuertemente, tanto que, la resistencia de diseño suele reducirse sensiblemente. En particular, para el caso de los GFRP y AFRP esta reducción puede llegar a 1/3 de la resistencia inicial (dependiendo ambiente circundante) y por tanto tener una resistencia de diseño próxima al acero. Por el contrario, es conocido que los CFRP suele afectarles muy poco los factores ambientales, luego, siguen conservando su excelente resistencia. Otra diferencia característica de los FRP es su bajo módulo elástico. Se ha hablado mucho sobre la repercusión de ello y del las elevadas deformaciones últimas que ello conlleva. Para el caso de los GFRP y AFRP suele oscilar entorno a la mitad, incluso inferior, del módulo elástico del acero. Hay que recurrir a los CFRP para conseguir valores próximos al acero, e incluso existen unos de alto módulo elástico que pueden superarlo. Una última, y no menos importante, diferencia hace referencia al comportamiento tenso-deformacional de los FRP. El acero suele presentar un comportamiento elasto-plástico, que se suele modelizar por un comportamiento elasto-plástico perfecto, existiendo una región de fluencia que dota a la sección de ductibilidad. Sin embargo, todos los FRP carecen de esa región de fluencia, siendo su comportamiento lineal elástico hasta la rotura y, por consiguiente, promoviendo una rotura frágil de la sección. En resumidas cuentas, y hablando en términos generales, los FRP se puede dividir en dos grandes bloques: uno con una resistencia de diseño próxima al acero, correspondiente a los GFRP y AFRP; y otro con un módulo elástico cercano al acero, correspondiente a los CFRP.

Teniendo en mente el párrafo anterior, parece lógico que este estudio acoja estos dos bloques de FRP, tomando como referencia, por supuesto, el acero. De esta forma se puede comparar fácilmente el comportamiento de elementos armados con estos materiales y analizar, aisladamente, el efecto de sendas diferencias (alta resistencia y bajo módulo elástico). Recalcar que, este estudio se elabora para elementos a flexión simple tomando la formulación propuesta en este documento (adaptación de la EHE) y el diagrama parábola-rectangular del hormigón. Sin más, demos paso al estudio.

### 7.2.11.2 Estudio

Sea una sección cualquiera armada con tres tipos de refuerzos internos. Como referencia se toma un acero B-500S, y dos FRP genéricos: un GFRP de 1300MPa de resistencia y 60GPa de módulo elástico; y un CFRP de 2000MPa de resistencia y 170GPa de módulo elástico. Se supone que se encuentran expuestos al exterior en un clima típico peninsular. Luego sus coeficientes reductores medioambientales ( $\eta_{env}$ ) son 1.89 y 1.17 respectivamente. La geometría de la sección y tipo de hormigón no es necesario especificar porque se va a estudiar por medio de magnitudes adimensionales. Véase figura siguiente para mejor comprensión.

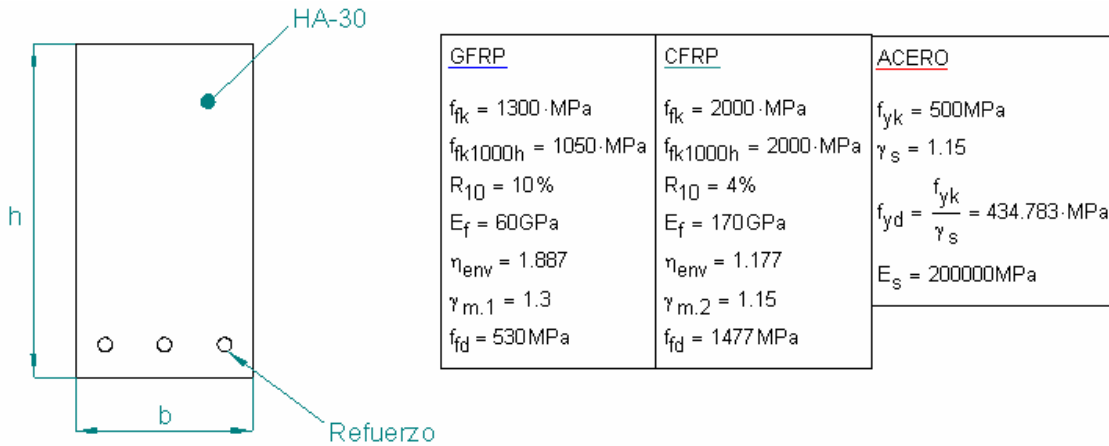


Fig. 7.32: Propiedades de los materiales componente de la sección

Normalmente, en piezas armadas con acero se suele diseñar en dominio 3, mientras para refuerzos de FRP se suele recurrir al dominio 4. No obstante este estudio va a barrer todos los dominios donde la flexión simple es posible. Esto es, dominio 2,3 y 4 para el acero, y 2 y 4 para el FRP. En el dominio 2, tanto para el acero como para los FRP, los refuerzos se encuentran solicitados a sus máximas prestaciones, no siendo necesariamente así para la fibra pésima del hormigón a compresión. A medida que va creciendo el momento, la prestación del hormigón crece, hasta el punto en el que la fibra pésima se ancla en la sollicitación máxima. Llegado a este momento se salta al siguiente dominio, pivotando la recta de deformaciones alrededor de la deformación máxima del hormigón. Para el caso del acero se transcurre primeramente por el dominio 3, correspondiente a la fluencia del material, para luego pasar al dominio 4. Por el contrario, en los FRP, debido a la carencia de esta propiedad, se salta directamente al dominio 4. En este último dominio el refuerzo se encuentra infrasolicitado mientras que el hormigón le ocurre todo lo contrario. Evidentemente para cada uno de estos dominios es ineludible utilizar una formulación diferente que se obtiene del equilibrio de fuerzas y momentos, tal como se ha visto a lo largo de este tema. A continuación se plantea la formulación para los refuerzos de FRP, siendo asumido que se conoce perfectamente para el caso del acero.

Dominio 2:

Si planteamos el equilibrio de fuerzas en la sección se puede obtener la cuantía longitudinal en relación con la deformación de la fibra pésima de hormigón.

$$\rho_f(\epsilon_c) = \frac{\int_0^{\epsilon_c} \sigma_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c}{f_{fd} \cdot (\epsilon_c + \epsilon_{fu})} \tag{7.97}$$

Mientras que el momento resistente adimensional está en función de la deformación del hormigón, que por medio de la relación anterior, también se puede obtener en función de la cuantía longitudinal.

$$\mu_n = \frac{1}{(\varepsilon_c(\rho_f) + \varepsilon_{fu}) \cdot f_{cd}} \cdot \int_0^{\varepsilon_c(\rho_f)} \sigma(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_c(\rho_f)}{\varepsilon_c(\rho_f) + \varepsilon_{fu}} \cdot CG(\varepsilon_c(\rho_f)) \right) \quad (7.98)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mu_n = \rho_f \cdot \frac{f_{fd}}{f_{cd}} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_c(\rho_f)}{\varepsilon_c(\rho_f) + \varepsilon_{fu}} \cdot CG(\varepsilon_c(\rho_f)) \right) \quad (7.99)$$

Dominio 4:

Igualmente si planteamos el equilibrio de fuerzas se puede despejar la deformación del refuerzo en función de la cuantía longitudinal.

$$\varepsilon_f(\rho_f) = \sqrt{\frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma_c(\varepsilon'_c, f_{ck}) d\varepsilon_c}{4 \cdot \frac{E_f \cdot \rho_f}{2} + \varepsilon_{cu}^2 - \varepsilon_{cu}}} \quad (7.100)$$

Introduciendo esta ecuación en el momento resistente adimensional, se tiene éste último en función, a igual que antes, de la cuantía longitudinal.

$$\mu_n = \frac{1}{(\varepsilon_{cu} + \varepsilon_f(\rho_f)) \cdot f_{cd}} \cdot \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma_c(\varepsilon'_c) d\varepsilon'_c \cdot \left[ 1 - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot CG(\varepsilon_{cu})}{(\varepsilon_{cu} + \varepsilon_f(\rho_f))} \right] \quad (7.101)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mu_n = \rho_f \cdot \frac{\varepsilon_f(\rho_f) \cdot E_f}{f_{cd}} \cdot \left[ 1 - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot CG(\varepsilon_{cu})}{(\varepsilon_{cu} + \varepsilon_f(\rho_f))} \right] \quad (7.102)$$

Una vez planteada la formulación, veamos como quedaría, de forma gráfica, el momento resistente adimensional, para cada tipo de refuerzo, en función de la cuantía longitudinal.

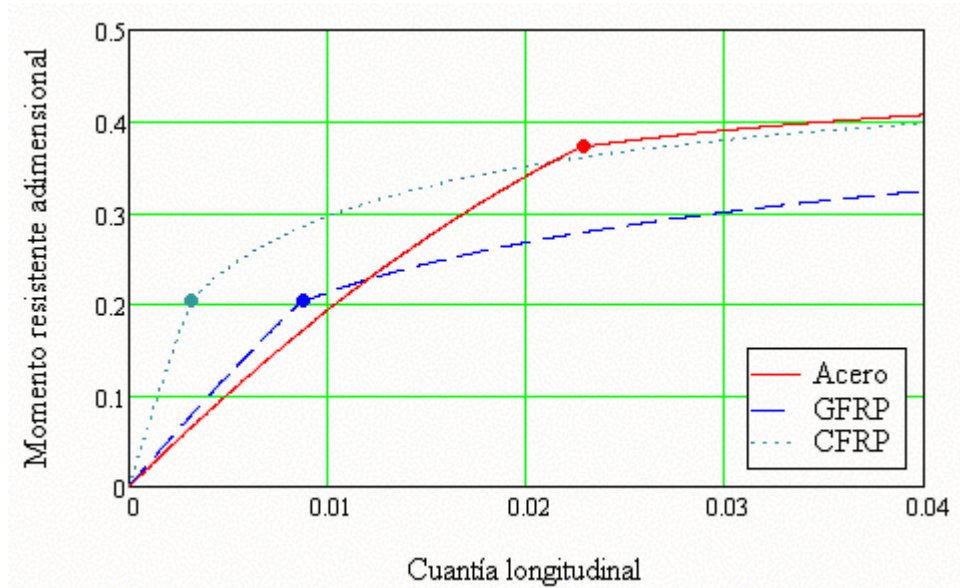


Fig. 7.33: Momento resistente adimensional en función de la cuantía longitudinal para tres tipos de refuerzos internos (Acero, GFRP y CFRP).

Si prestamos atención a esta gráfica se pueden sacar varias implicaciones:

- Para empezar, nótese que las tres curvas presentan la misma tipología. Esto es, inician con tramos aproximadamente lineales, proporcionales a la cuantía longitudinal, y, llegados a puntos determinados, cambian súbitamente las pendientes y formas de la curvas, transformándose más bien en parábolas. Luego cada una de dichas curvas se podría subdividir en dos tramos bien diferenciados separados por puntos determinados. Ahora, hay que explicar por qué las tres curvas presentan esta tipología concreta, y una vez descifrado esto, qué es lo que determina cada uno de los parámetros que define cada tramo, es decir, pendientes y puntos de cambio de región. Esto se explicará consiguientemente.
- Aplicando la razón, se ha mencionado que cada dominio tiene su propia formulación, luego parece lógico pensar que cada zona pertenezca a un dominio establecido. Sin embargo, mientras que en los FRP sólo se contempla dos dominios, en los acero hay tres, tanto que cabría esperarse que su curva describiera tres zonas diferenciadas. Esto hace pensar que dos dominios se comportan igual, prolongando el tramo lineal, y, una vez llegado al dominio sobre-reforzado, cambiando su forma y pendiente. Esto puede explicarse gracias a que únicamente en los dominio 2 y 3 el rendimiento del refuerzo se encuentran al 100% (entendiéndose éste como la fracción entre tensión solicitada y última). Por ello, a medida que se incrementa el momento, obviamente aumenta fuerza de la cabeza de compresión del hormigón, y por equilibrio, la soportada por el refuerzo, que la única forma de conseguirlo es aumentando proporcionalmente el área y cuantía. Pero, una vez pasado al dominio 4, el rendimiento del refuerzo cae paulatinamente a medida que se incrementa el momento. Luego, la cuantía de refuerzo debe incrementarse simultáneamente debido al aumento de la fuerza y decremento del rendimiento de forma parabólica. El mismo razonamiento puede aplicarse a los FRP, con la salvedad que el dominio 3 desaparece (o más bien, converge en un punto) por la carencia de fluencia. Una forma de verificar esta explicación es calculando la

cuantía para la que se balancea la máxima capacidad del hormigón y del refuerzo, esto es, la que delimita el salto al dominio sobre-reforzado, tal que debe de coincidir con el punto singular de cada una de las curvas.

Aplicando equilibrio de fuerzas en la sección, suponiendo que se encuentra balanceada, y despejando la cuantía, se tiene la siguiente formulación independientemente del tipo de refuerzo:

$$\rho_{fb} = \frac{E_{ref}}{f_{ref,d}(E_{ref} \cdot \epsilon_{cu} + f_{ref,d})} \cdot \int_0^{\epsilon_{cu}} \sigma_c(\epsilon'_c) d\epsilon'_c \quad (7.103)$$

Siendo:

$f_{ref,d}$  y  $E_{ref}$  = Tensión de diseño y modulo elástico del tipo de refuerzo en cuestión.

Si introducimos las propiedades de cada refuerzo se tiene:

$$\rho_{fb}(\text{ACERO}) = 0.023 \quad (7.104)$$

$$\rho_{fb}(\text{GFRP}) = 8.671 \cdot 10^{-3} \quad (7.105)$$

$$\rho_{fb}(\text{CFRP}) = 3.147 \cdot 10^{-3} \quad (7.106)$$

Luego, se puede observar que coinciden exactamente, y por tanto la explicación además de razonable está verificada. Cabe recalcar en este punto, una de las implicaciones, de la que ya se ha hablado en temas anteriores, sobre el uso de los FRP, que es su facilidad de promover diseños de secciones sobre-reforzadas. Nótese la pequeña cuantía que es necesaria disponer para que rápidamente se encuentre en dominio 4. Esto se debe principalmente por dos razones, una de ellas por la excelente resistencia y otra por la carencia de fluencia. Sin embargo, esta implicación no es perjudicial, pues el dominio de diseño preferente, de estos refuerzos, es el 4 ya que, como se ha comentado, la rotura del elemento es menos súbita y experimenta menores deformaciones y fisuras.

- Véase ahora la misma gráfica anterior pero con las zonas delimitadas debida a cada dominio:

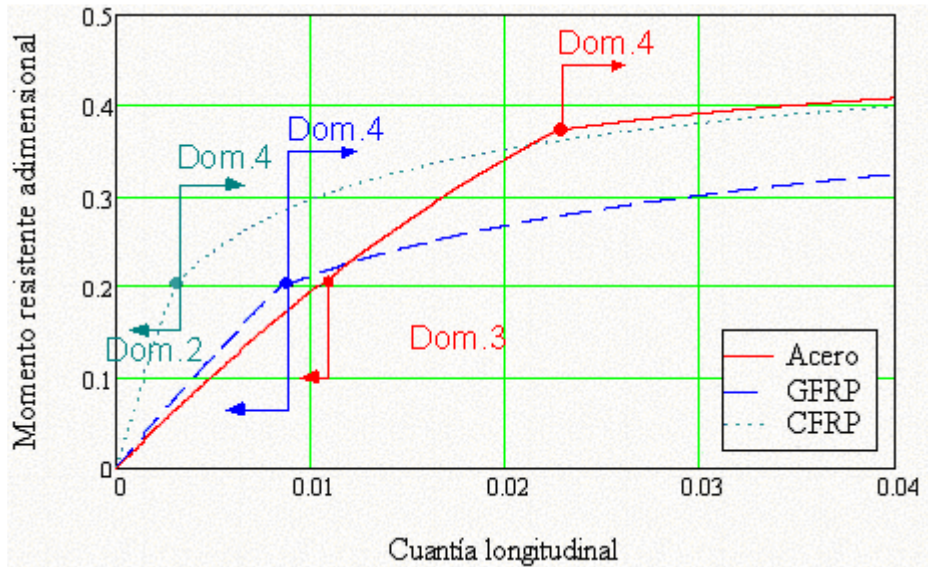


Fig. 7.34: División de la curva de momento resistente según los dominio de deformación, para cada refuerzo.

Analizando con detalle las tres curvas, puede advertirse como la del acero envuelve a sendas curvas, correspondientes a los dos FRP, en tramos diferentes. En el dominio 2, discurre linealmente próxima a la curva del GFRP, mientras que, a partir del dominio 4, sigue parabólicamente, muy cerca a la del CFRP. Estableciéndose el tramo del dominio 3 como uno de transición.

Si se centra en el dominio 2, de la propia formulación (7.99) es fácil derivar que la pendiente de la curva depende fuertemente de la resistencia del refuerzo. El momento no es más que una fuerza por una distancia (adimensionalmente hablando en este caso). Donde la fuerza depende de la resistencia del refuerzo, debido que se encuentra al 100% de su capacidad última, y de la cuantía. Y el brazo mecánico varía muy suavemente con la cuantía (casi constantes). Por lo que, la curva de momento es prácticamente lineal siendo la pendiente proporcional a la resistencia del refuerzo. Luego, como la resistencia del acero y del GFRP son parecidas, entonces, en este dominio, las curvas son similares. Es más, al ser algo superior la resistencia del GFRP, se puede ver como su curva tiene una mayor pendiente. Siguiendo con este razonamiento, dado que el CFRP tiene una excelente resistencia, se puede ver como su pendiente es bastante superior al resto. Véase las siguientes gráficas de la fuerza y brazo adimensional en función de la cuantía para una mejor comprensión:

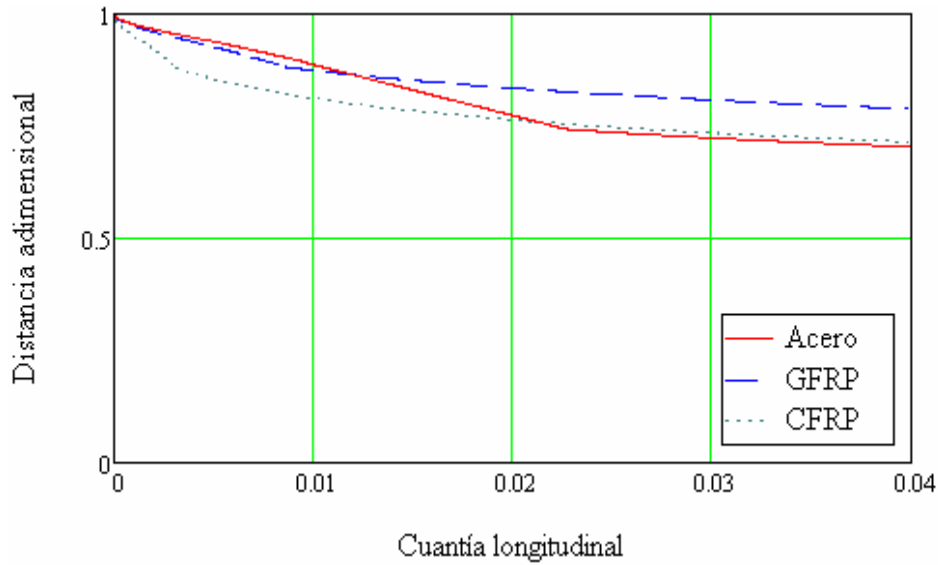


Fig. 7.35: Distancia adimensional entre fuerzas en la sección para cada refuerzo y en función de la cuantía longitudinal.

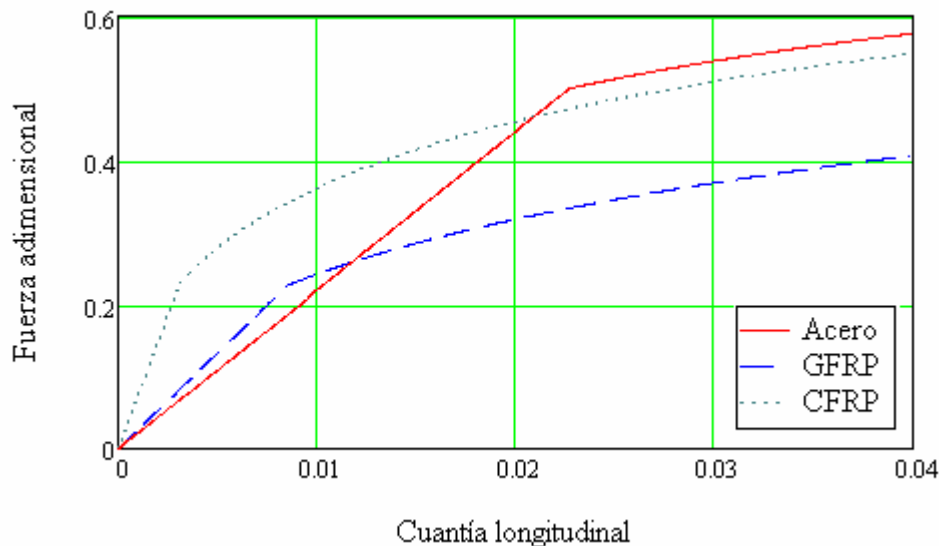


Fig. 7.36: Fuerza del refuerzo adimensional, en función de la cuantía longitudinal y para cada refuerzo.

Por el contrario, en el dominio 4, las curvas de momentos están gobernadas por el módulo elástico del refuerzo. Ahora la tensión de trabajo del refuerzo depende del producto de su deformación por el módulo. Y, por tanto, la fuerza desarrollada es función de su cuantía y, además, de su deformación (fórmula (7.102)). Teniendo en cuenta que, en este dominio, un aumento de momento, y por tanto de fuerza (a sabiendas que el brazo mecánico varía muy levemente), conlleva un decremento de la deformación del refuerzo, la cuantía debe incrementarse de forma parabólica para compensarlo. Este efecto se ve claramente en la figura anterior, donde para un pequeño incremento de la fuerza (o momento) es preciso un aumento considerable de la cuantía. Nótese que el acero posee un módulo muy parecido al CFRP, tanto es así, que las curvas de momento de sendos refuerzos son muy próximas en este dominio. Sin embargo, considerando que el GFRP tiene un módulo bastante inferior, se



puede observar claramente como su curva es sensiblemente más baja.

Por último, el dominio 3 del acero puede entenderse como uno de transición. Esto es, Al principio deja de envolver al GFRP, en el dominio 2, para finalmente aproximarse a la curva de CFRP en el dominio 4. Además presenta una serie de ventajas respecto la resto de los dominios: Como se aprecia en las curvas de momentos (Fig. 7.36) sigue conservando una elevada pendiente debido a que aprovecha la máxima resistencia del refuerzo. Engloba un rango de momento amplios en el que además optimiza la relación momento-cuantía. Y, por si fuera poco, promueve una rotura dúctil de la sección debido a la fluencia del mismo. Lo cual, todo ello le hace que sea el dominio preferente de diseño.

- Una vez analizado y comprendido las formas y diferentes regiones de las que se componen las curvas de momento frente a cuantía, es la hora de comparar las ventajas e inconvenientes de la utilización de cada una de ellas. Para hacer esto vamos a limitar la región de estudio a los dominios preferenciales de diseño, debido a las ventajas que presentan y a su habitual uso. Es decir, en el caso del acero, lo normal es diseñar bajo el dominio 3, mientras que en el caso de los FRP es en el 4. Véase la figura siguiente.

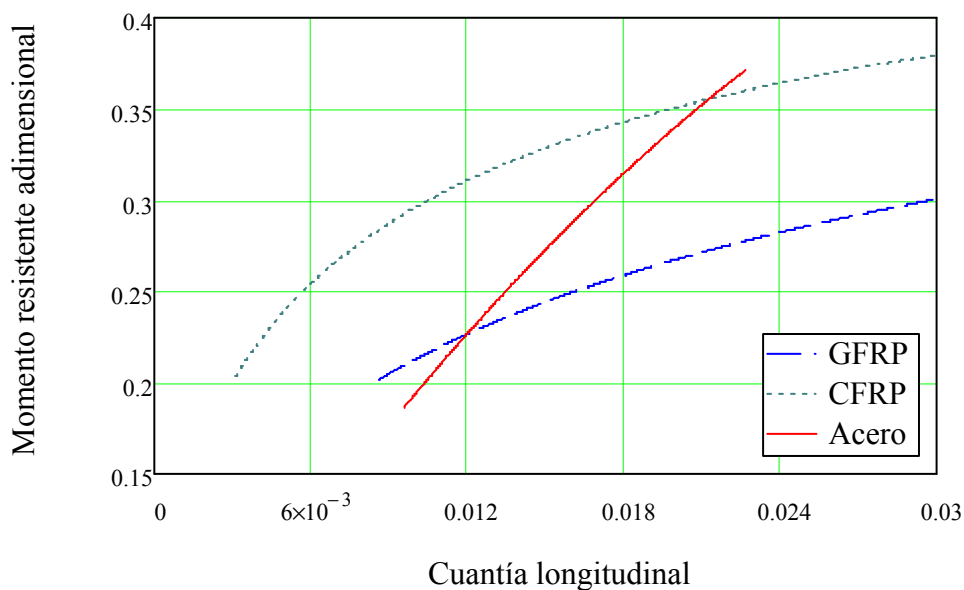


Fig. 7.37: Momento resistente en función de la cuantía longitudinal, para cada uno de los refuerzos internos y en sus respectivos dominios de diseño

Nótese como, sólo por los dominios de diseño, las curvas de los FRP son más planas, debido a que el rendimiento del refuerzo cae paulatinamente a medida que aumenta el momento. Y por tanto un determinado aumento del momento resistente implica un mayor incremento de la cuantía necesaria. Al contrario de lo que sucede con el acero, en el que su curva es prácticamente lineal y con una elevada pendiente, debida a que el rendimiento del refuerzo es óptimo.

Otra peculiaridad que llama la atención es que, aún con la mayor resistencia que poseen los FRP, especialmente el CFRP, el momento resistente máximo que absorbe la sección no es necesariamente mayor. Esto se debe a que en el

dominio 4, lo verdaderamente influyente es el módulo elástico, siendo para el caso de CFRP del orden del acero, mientras que para el GFRP es bastante inferior y por tanto su curva se traslada verticalmente hacia abajo.

Sin embargo, una ventaja que promueve la mayor resistencia de los FRP, concretamente el CFRP, es que necesitan menor cantidad de armadura para soportar el mismo momento (no siendo así para el GFRP pues su resistencia es similar al acero). No obstante, debido a que se encuentra en dominio 4, y el rendimiento del refuerzo cae progresivamente a medida que se aumenta el momento, las diferencias de cuantías necesarias se van menguando.

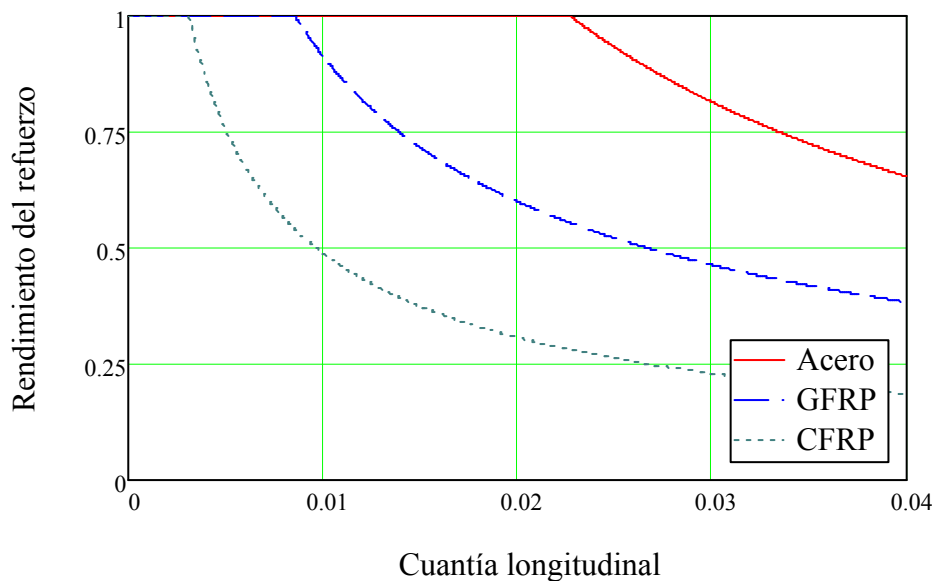


Fig. 7.38: Rendimiento de cada refuerzo interno en tanto por uno, y en función de la cuantía longitudinal.

Por último mencionar, el amplio rango de momentos que cubre la curva diseño del acero (dominio 3) aprovechando en todo ella la máxima capacidad del refuerzo. Mientras que, como se puede ver en la figura anterior, lo rápido que se deteriora el rendimiento de los FRP a medida que se aumenta la cuantía colocada y, por tanto, momento resistente. Es más, si se estableciera como requisito de diseño que al menos se aprovechara la mitad de su resistencia, el rango de momentos que podrían barrer el CFRP y GFRP serían, pobremente, del 55% y del 44% del rango del acero respectivamente.

### 7.2.11.3 Conclusiones

Al inicio de este documento, describiendo las excelentes propiedades de los FRP, concretamente la alta resistencia que poseen (del orden de 3 a 4 veces la del acero), no corrosividad de las armaduras, hacía imaginar una gran batería de beneficios que, junto con la utilización del hormigones de alta resistencia, se conseguiría sacar todo el jugo a estos refuerzos. Pero, después de ver estos estudios, desde el punto de vista estructural, todas las expectativas se vienen abajo. Y más que un excelente sustitutivo del armado convencional, se convierte en una alternativa puntual para determinados casos concretos, como su uso bajo ambientes agresivos donde la durabilidad del

acero puede ser crítica. En resumen, se puede sacar las siguientes conclusiones:

- La alta resistencia de los FRP no implica, necesariamente, una mayor capacidad de la sección para soportar mayores momentos. Más bien promueve que la cantidad de refuerzo, para soportar el mismo momento, sea algo menor. No obstante, debido a que el dominio recomendado de diseño es el 4, esta diferencia de cuantías tiende a reducirse a medida que sea mayor el momento demandado ya que el rendimiento del refuerzo cae progresivamente. Es más, para el caso de los GFRP y AFRP se ha visto que su resistencia de diseño, después de aplicarles sus factores reductores ambientales, son del orden del acero, luego incluso necesitan mayor cantidad de refuerzo que el propio acero.
- La propiedad realmente influyente es el módulo elástico. Esto se debe igualmente a que, el dominio de diseño recomendado es el 4, de manera que, módulos elásticos más elevados provocan curvas de momentos altas y, consiguientemente, mayores capacidades de la sección. Sin embargo, los FRP se caracteriza por tener módulos elásticos discretos. Hay que recurrir a los CFRP para optar a valores similares al acero, o superiores, si se eligen CFRP de alto módulo.
- Por último, mencionar la planeidad que presentan las curvas de momentos frente a cuantía, independientemente del tipo de FRP en la región de diseño recomendada. Lo cual implica un aumento considerable de la cuantía para incrementar algo el momento resistente necesario.

## **7.3 ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE ESFUERZO CORTANTE**

### **7.3.1 Introducción**

El comportamiento a cortante de elementos de hormigón armado es sumamente complicado debido a la a la extraordinaria complejidad de los fenómenos que contemplan. Sin embargo, es reconocido que la resistencia a cortante es determinada principalmente por la contribución de la zona no fisurada del hormigón, el rozamiento a través de la grieta, el efecto pasador de las armaduras, y la contribución de la armadura transversal. El desarrollo de estos mecanismos no se debe tan sólo a las características del hormigón, sino también a las del propio refuerzo interno y del vínculo entre sendos.

Este capítulo se centra en el dimensionamiento a cortante de elementos de hormigón armado longitudinal y transversalmente con barras de FRP y sus diferencias de comportamiento. No obstante, al principio se estudiará unas nociones introductorias de armado a cortante.

### **7.3.2 Mecanismos de resistencia a cortante**

Es conocido que las propiedades de los refuerzos afectan fuertemente a los mecanismos de resistencia a esfuerzo cortante. Los FRP suelen tener un módulo

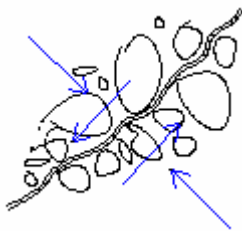
elástico más bajo que el acero, lo que encabeza a mayores flechas, amplias fisuras y área de compresión mas reducidas. Por tanto es de esperar que los fenómenos resistentes se vean perjudicados y reducidos. También hay que tener en cuenta la anisotropía que presentan, siendo poco resistente en dirección transversal. Luego cargas fuera del eje de las fibras puede dañarlas fuertemente y siendo un aspecto especialmente importante en la disposición de los refuerzos transversales.

### 7.3.2.1 Resistencia del hormigón en la zona de compresión

La absorción de esfuerzo cortante de la zona comprimida no fisurada del hormigón es uno de los mecanismos más importantes de resistencia. Como se ha tratado en los puntos anteriores, la zona de compresión viene delimitada por la profundidad de la fibra neutra que depende fuertemente de refuerzo dispuesto y de sus propiedades. En el caso de los FRP, normalmente, debido al bajo módulo elástico, la profundidad de la LN es bastante menor que en los aceros, luego es esperable que la contribución sea menor. No obstante, es observado en las piezas armado con acero, que la contribución del hormigón se reduce drásticamente cuando se llega al límite elástico. Esto se atribuye a que la profundidad de la fibra neutra se reduce rápidamente cuando el acero empieza a fluir. Sin embargo, en los FRP, debido al comportamiento lineal la pérdida de capacidad resistente es más progresiva.

### 7.3.2.2 Rozamiento de los labios de la grieta en el hormigón

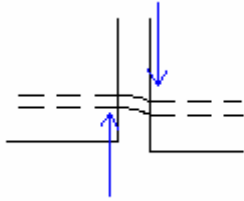
En zonas del elemento que están fuertemente solicitada suele ocurrir que la tracción sobre el hormigón supere la resistencia a flexo-tracción del mismo. Entonces, se producen grietas en el hormigón y una consiguiente redistribución de tensiones, donde particularmente en la interfase de la fisura aparecen unos esfuerzos tangenciales paralela a la misma y debido al rozamiento de sendas caras. Estudios llevados a cabo muestran la dependencia de este fenómeno con el ancho de grieta, tal que, para amplitudes crecientes este fenómeno se deteriora y tiende a desaparecer.



En lo que respecta a los FRP, la anchura de fisura media suele ser varias veces superior a elementos armado con acero bajo las mismas cargas, tanto que una menor contribución es esperada.

### 7.3.2.3 Efecto pasador de los refuerzos

Este mecanismo corresponde con la resistencia a cortante de los refuerzos. Varios estudios han mostrado que la relativa influencia respecto al resto de los mecanismos es muy baja por lo que la mayor parte de las normativas la desprecia.



Cuando los FRP son usados para el refuerzo a flexión, la contribución a cortante por efecto pasador puede ser muy peligrosa, debido principalmente a la escasa rigidez transversal típico de los FRP.

#### 7.3.2.4 Resistencia de armadura a cortante

Cuando el esfuerzo cortante excede de la inherente contribución del hormigón, refuerzos transversales son necesarios para absorber el cortante excedente. El cosido de las inclinadas fisuras y por tanto la transferencias de tracciones a través de las mismas son su cometido.

La filosofía de diseño del refuerzo a cortante con acero es la tensión, de manera que no se debe rebasar el límite elástico. Sin embargo, para el caso de los FRP otro fenómeno se vuelve más relevante, normalmente la elongación. Es decir, mientras que para el acero, la deformación que se produce al nivel del límite elástico no perjudicaba el resto de los mecanismos, en los FRP, debido al bajo módulo elástico, no se puede esperar lo mismo. Tal es el caso, que la mayoría de las normativas restringen la deformación máxima de manera que no se supere una deformación límite. Convenientemente, suelen aceptar que la deformación límite coincide con la deformación elástica del acero y por tanto poder utilizar similares formulaciones.

### 7.3.3 Distribución de tensiones cortantes

Previo al estudio del armadazo a cortante, parece lógico tener una idea de las posible distribuciones de tensiones cortantes bajo diferentes hipótesis. [ J. Calavera]

#### 7.3.3.1 Sección no fisurada con relación lineal entre tensiones y deformaciones

Se considera una pieza sometida a flexión simple, donde las tensiones se suponen suficientemente moderadas como para no rebasar la resistencia a flexotracción del hormigón y que la relación entre tensión-deformacional sea lineal.

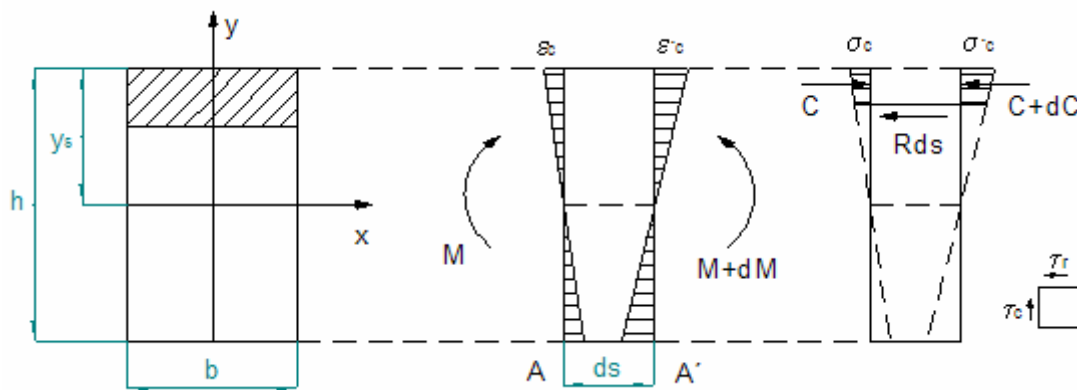


Fig. 7.39: Sección sometida a esfuerzos de flexión

Se define un sistemas de ejes local de la sección cuyo ejes “x” e “y” tienen origen en el c.d.g de la misma tal como se muestran en el dibujo anterior.

De acuerdo con la ley de Navier la tensión normal a la sección A-A se determina:

$$\sigma_c = M \cdot \frac{y}{I} \quad (7.107)$$

Análogamente para la sección A'-A':

$$\sigma'_c = \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \quad (7.108)$$

La fuerza total cortante en la región comprendida entre la cara superior hasta la cota “y”, viene dada por la diferencia de compresiones totales sobre sendas caras en el mismo región de evaluación del cortante. Por tanto se tiene:

$$N_c = \int_y^{y_s} \frac{M \cdot y}{I} \cdot b \, dy \quad (7.109)$$

$$N_c + dN_c = \int_y^{y_s} \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot b \, dy \quad (7.110)$$

Por tanto:

$$dN_c = \int_y^{y_s} \frac{dM}{I} \cdot y \cdot b \, dy = R \cdot ds \quad (7.111)$$

$$R = \frac{dM}{ds \cdot I} \cdot \int_y^{y_s} y \cdot b \, dy = \frac{V}{I} \cdot S(y) \quad (7.112)$$

Donde:

R= cortante total por unidad de longitud en el sentido del eje del elemento.

$S(y)$  = Momento estático de la sección por encima de la cota “y” respecto al c.d.g.

Planteando el equilibrio del cubo diferencial mostrado en el dibujo anterior, se deduce que  $\tau_r = \tau_c$ , luego la tensión tangencial en la cota “y” es:

$$\tau_c = \frac{V \cdot S(y)}{b \cdot l} \quad (7.113)$$

Obsérvese que la tensión máxima coincide con la cota donde el momento estático es máximo, que en el caso de sección rectangular coincide con el c.d.g. Esto es:

$$\tau_c(y) = \frac{V \cdot (y_s^2 - y^2)}{2 \cdot l} \quad (7.114)$$

$$\tau_{c.\max}(0) = \frac{3 \cdot V}{2 \cdot b \cdot h} \quad (7.115)$$

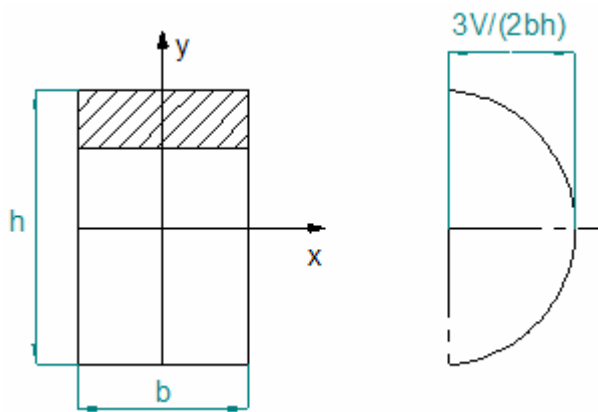


Fig. 7.40: Distribución de tensiones tangenciales en la sección.

De acuerdo con las fórmulas clásicas de la teoría de elasticidad, las tensiones en los ejes principales pueden ser obtenidas de:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (7.116)$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (7.117)$$

Y el ángulo de  $\sigma_I$  con la horizontal:

$$\tan(2 \cdot \theta) = 2 \cdot \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \quad (7.118)$$

Donde las tensiones  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  son normales y tangenciales equivalente a las utilizadas anteriormente  $\sigma_c$  y  $\tau_c$

Por último, se muestra de forma visual y gráfica la red de isostáticas de la pieza para una viga simplemente apoyada.

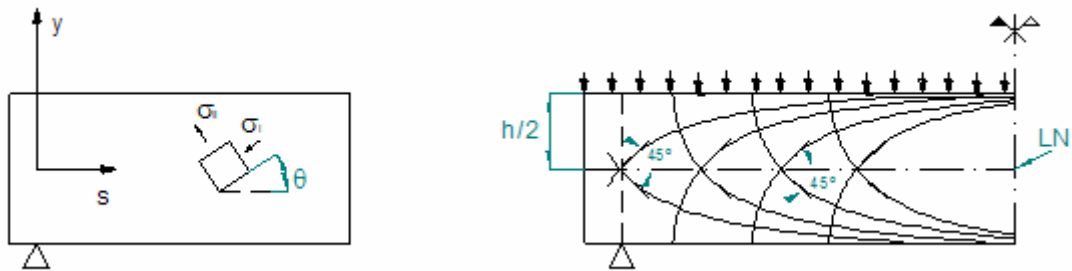


Fig. 7.41: Red de isostáticas de la pieza

Como se puede ver, en la cota  $y = 0$  coincidente con el c.d.g., el ángulo de las tensiones principales forma  $45^\circ$  respecto a la directriz del elemento, siendo las tensiones principales iguales a las tangenciales en valor absoluto.

$$\begin{aligned} \sigma_I &= -\tau_{xy} \\ \sigma_{II} &= \tau_{xy} \\ \theta &= 45^\circ \end{aligned} \quad (7.119)$$

### 7.3.3.2 Sección fisurada con relación lineal entre tensiones y deformaciones

En este caso, se supone que la sección del hormigón está sometida a una flexión tal que la zona de tracción del mismo se encuentra fisurada y no colabora. Ilustrativamente véase la figura siguiente.

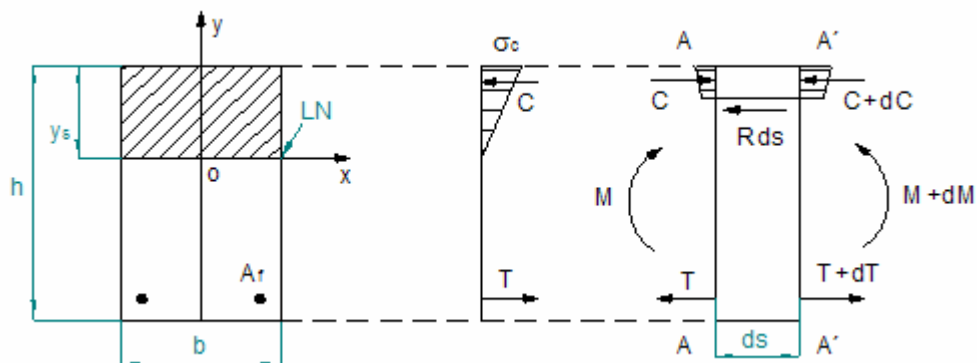


Fig. 7.42: Sección sometida a flexión suponiendo que está fisurada

Siendo OX la fibra neutra de la sección ampliamente comentado en el punto 7.2.5.

La tensión de compresión del hormigón en la rebanada A-A se puede definir nuevamente como:

$$\sigma_c = \frac{M \cdot y}{I_f} \quad (7.120)$$



Análogamente para la rebanada A'-A':

$$\sigma'_c = \frac{(M + dM)}{I_f} \cdot y \quad (7.121)$$

Donde la inercia fisurada y la coordenada “y” se miden respecto al eje OX.

Por tanto, tomando la diferencia de los bloques de compresión en sendas rebanas se puede obtener el cortante total por unidad de longitud paralela a la directriz del elemento:

$$dC = \int_0^{y_s} \frac{M}{I_f} \cdot y \cdot b \, dy = R \cdot ds \quad (7.122)$$

$$S_f(y) \cdot \frac{M}{I_f} = R \cdot ds \quad (7.123)$$

o lo que es lo mismo:

$$R = S_f(y) \cdot \frac{V}{I_f} \quad (7.124)$$

Teniendo en cuenta el equilibrio del cubo diferencial planteado en la figura del punto anterior  $\sigma_r = \sigma_c$

$$\tau_c = \frac{V \cdot S_f(y)}{b \cdot I_f} \quad (7.125)$$

Es evidente darse cuenta que el momento estático crece a media que la cota “y” se aproxima a la fibra neutra. Mientras que para una cota inferior se vuelve constante e igual al máximo. Con lo que la evolución del tensión tangencial se desarrolla de de la misma forma.

Para evaluar la tensión tangencial máxima se puede proceder de la siguiente manera:

$$F = \int_0^{y_s} \frac{M}{I_f} \cdot y \cdot b \, dy = \frac{M}{I_f} \cdot S(0) \quad (7.126)$$

Luego:

$$\frac{M}{F} = z = \frac{I_f}{S(0)} \quad (7.127)$$

Que introduciéndolo en la ecuación (7.109) particularizada para  $y = 0$ , se tiene que la tensión tangencia máxima es:

$$\tau_{c.max} = \frac{V}{b \cdot z} \quad (7.128)$$

Si ahora transformamos las tensiones tangenciales según la sección de la pieza en las tensiones según los ejes principales se tiene:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (7.129)$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (7.130)$$

Y el ángulo de  $\sigma_I$  con la horizontal:

$$\tan(2 \cdot \theta) = 2 \cdot \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \quad (7.131)$$

Tanto que, tomando conciencia de la consideración inicial de fisuración de la zona del hormigón traccionado, la tensión normal por debajo de la fibra neutra, inclusive ella misma, se vuelve nula y por tanto la tensión en ejes principales es igual a la tensión tangencial cortante en valor absoluto. Con lo cual:

Para  $y \leq 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_I &= -\tau_{xy} \\ \sigma_{II} &= \tau_{xy} \\ \theta &= 45^\circ \end{aligned} \quad (7.132)$$

Veamos seguidamente la red de isostáticas de una pieza de sección rectangular simplemente apoyada:

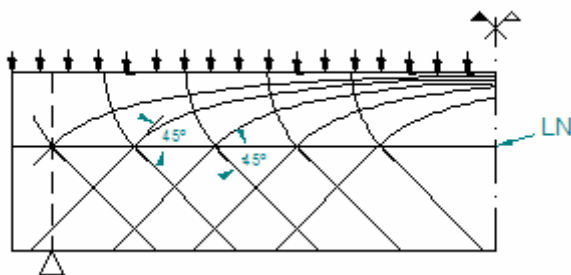


Fig. 7.43: Red de isostáticas

### 7.3.3.3 Sección fisurada con relación no lineal entre tensiones y deformaciones.

Los casos anteriores corresponden a zonas con momentos flectores débiles, donde a lo sumo se producía fisuraciones en las regiones traccionadas del hormigón. Sin embargo en zonas con altos momentos, no sólo se da este fenómeno, sino que además en las regiones de compresión presentan un comportamiento no lineal tenso-deformacional. Hasta ahora este comportamiento se ha modelado por medio de diagramas parábola-rectangular incluso rectangular. No obstante, este tipo de diagramas fue creado y optimizado para el análisis de flexión y no para obtener los

cortantes por medio de restar zonas de sus áreas pues carecen de la suficiente precisión. Esto se ve con claridad en la rebanada siguiente. Donde se supone que en ambas rebanadas se llega a la zona rectangular del diagrama.

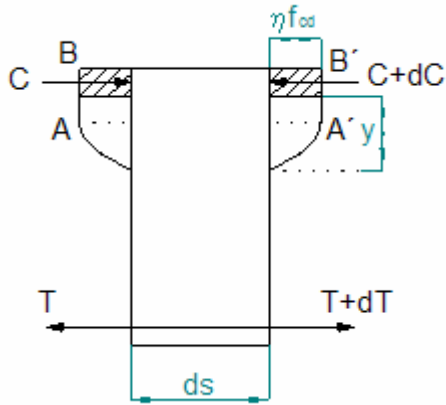


Fig. 7.44: Rebanada

$$R = \frac{dC}{ds} \quad (7.133)$$

Para un valor de "y" por encima de A y A' respectivamente:

$$C = C + dC \quad (7.134)$$

$$dC = 0 \quad (7.135)$$

y de ello se tendría:

$$R = 0 \quad (7.136)$$

Caso que es imposible si el  $V \neq 0$ , pues existiría una variación de M y por tanto  $dC \neq 0$ . Tal es así que en el sentido estricto, para cotas superiores a la fibra neutra no puede calcularse el valor de R y por tanto tampoco la tensión tangencial. Sin embargo para cotas inferiores a la fibra neutra, inclusive ella, la situación puede escribirse de la siguiente manera:

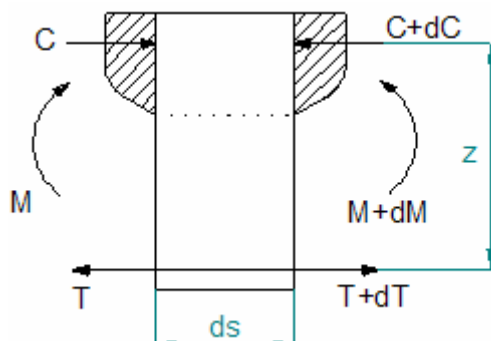


Fig. 7.45: Rebanada

$$R = \frac{dC}{ds} = \frac{\frac{dM}{z}}{ds} = \frac{1}{z} \frac{dM}{ds} = \frac{V}{z} \quad (7.137)$$

Y por tanto la tensión tangencial:

$$\tau_c = \frac{V}{z \cdot b} \quad (7.138)$$

### 7.3.4 Variación de la tensión de las armaduras longitudinales debido a la fisuración por esfuerzo cortante

#### 7.3.4.1 Pieza sin fisuras

Se supone una pieza sometida a un conjunto de cargas tal que  $P_d$  es la resultante actuante en la parte del elemento considerado. Además se supone que está apoyada y sin fisurar [ J. Calavera]. Véase la figura siguiente.

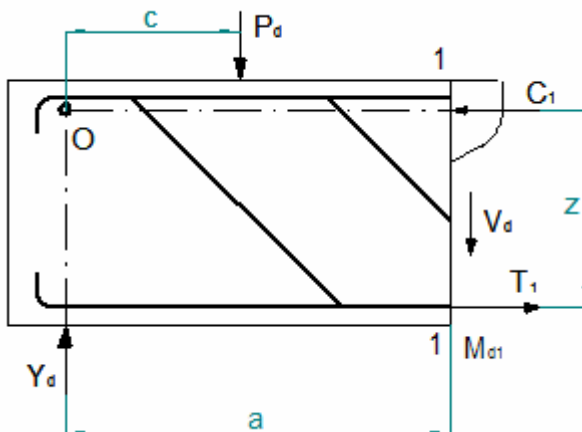


Fig. 7.46: Pieza apoyada sometida a conjunto de cargas

Tomando momentos respecto a la intersección de la resultante de compresiones en el hormigón y recta vertical que pasa por el apoyo O, se tiene:

$$T_1 \cdot z = V_d \cdot a + P_d \cdot c \quad (7.139)$$

$$M_{d1} = T_1 \cdot z = V_d \cdot a + P_d \cdot c \quad (7.140)$$

Donde  $M_{d1}$  es el momento en la sección 1-1.

Por tanto, mientras que no aparezcan fisuraciones la tracción en la armadura longitudinal se corresponde con la debida al momento actuante en dicha sección.

**7.3.4.2 Pieza fisurada con armadura de corte**

Ahora se supone que en la pieza se produce una grieta que pasa por el punto A, y armada con armadura transversal. Véase la figura siguiente.

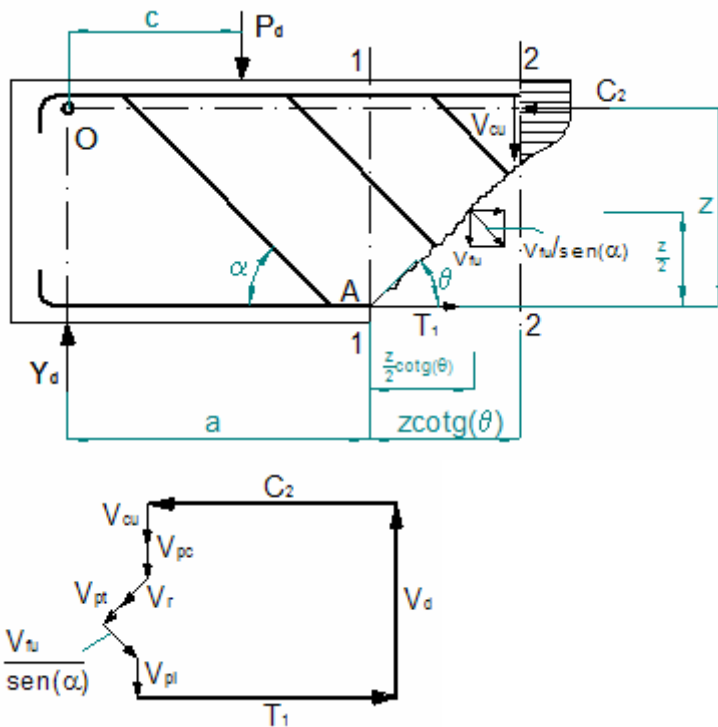


Fig. 7.47: Pieza con grieta que pasa por el punto A

La resistencia a corte se puede entender como la suma vectorial de los siguientes sumandos:

- $C_2$  = Resultante del bloque de compresiones en la sección 2-2
- $V_{cu}$  = Resistencia a corte del hormigón en la zona comprimida
- $V_{pl}$  = Efecto pasador de la armadura a longitudinal a tracción
- $V_{pc}$  = Efecto pasador de la armadura a longitudinal a compresión
- $V_r$  = Rozamiento entre labios de la grieta
- $V_{fu}$  = Resistencia a corte de la armadura transversal
- $V_{pt}$  = Efecto pasador de la armadura transversal
- $T_1$  = Tracción de la armadura longitudinal en la sección 1-1

Normalmente el efecto pasador y rozamiento de los labios de hormigón tienen una influencia menor que el resto de los mecanismos. En la práctica, las diversas normativas los engloban en el valor adoptado por  $V_{cu}$ . Además, se suele sustituir el esfuerzo cortante resistido por la armadura transversal  $V_{fu}$ , por una única fuerza localizada a una distancia  $z/2$  de la armadura de tracción.

Volviendo a tomar momento respecto a O se tiene:

$$T_1 \cdot z = V_{fu} \cdot \left( a + \frac{z}{2} \cdot \cotg(\theta) \right) - V_{fu} \cdot \cotg(\alpha) \cdot \frac{z}{2} + V_{cu} \cdot (a + z \cdot \cotg(\theta)) + P_d \cdot c$$

$$(7.141)$$

$$T_1 \cdot z = a \cdot (V_{fu} + V_{cu}) + P_d \cdot c + V_{fu} \cdot \frac{z}{2} \cdot (\cotg(\theta) - \cotg(\alpha)) + V_{cu} \cdot z \cdot \cotg(\theta) \quad (7.142)$$

Considerando:

$$V_d = V_{cu} + V_{fu} \quad (7.143)$$

Entonces:

$$T_1 \cdot z = a \cdot V_d + P_d \cdot c + V_{fu} \cdot \frac{z}{2} \cdot (\cotg(\theta) - \cotg(\alpha)) + V_{cu} \cdot z \cdot \cotg(\theta) \quad (7.144)$$

Y teniendo en cuenta (7.140)

$$T_1 \cdot z = M_{d1} + z \cdot \left[ V_{fu} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cotg(\theta) - \cotg(\alpha)) + V_{cu} \cdot \cotg(\theta) \right] \quad (7.145)$$

Si ahora hacemos la siguiente simplificación:

$$\lambda = \frac{V_{fu}}{V_d} = \frac{V_d - V_{cu}}{V_d} \quad (7.146)$$

y

$$k'_t = \cotg(\theta) - \frac{\lambda}{2} \cdot (\cotg(\alpha) + \cotg(\theta)) \quad (7.147)$$

Se tiene:

$$T_1 \cdot z = M_{d1} + V_d \cdot z \cdot k'_t \quad (7.148)$$

Donde  $V_d$  es el cortante en la sección 1-1

Es decir, la tracción de la armadura longitudinal en la sección 1-1, corresponde con el momento flector en una sección  $z \cdot k'_t$  distante de ésta. Además, puede deducirse fácilmente que la translación es más importante cuanto menor es el papel en la absorción del esfuerzo cortante, alcanza el máximo para armadura transversal nula e igual a:

$$T_1 \cdot z = M_{d1} + V_d \cdot z \cdot \cotg(\theta) \quad (7.149)$$

### 7.3.5 Decremento de la fuerza de compresión por la fisuración debido al esfuerzo cortante

Volviendo a la figura del punto anterior (7.47) y tomando equilibrio en la dirección horizontal, se tiene:

$$T_1 + V_{fu} \cdot \cotg(\alpha) - C_2 = 0 \quad (7.150)$$

Expandiendo la expresión teniendo en cuenta el punto anterior:

$$C_2 = \frac{M_{d1} + V_d \cdot k'_t \cdot z}{z} + \lambda \cdot V_d \cdot \cotg(\alpha) \quad (7.151)$$

$$C_2 \cdot z = M_{d1} + V_d \cdot z \cdot (k'_t + \lambda \cdot \cotg(\alpha)) \quad (7.152)$$

Si ahora definimos el factor  $k'_c$ :

$$k'_c = k'_t + \lambda \cdot \cotg(\alpha) = \cotg(\theta) - \frac{\lambda}{2} \cdot (\cotg(\theta) - \cotg(\alpha)) \quad (7.153)$$

Luego la expresión queda:

$$C_2 \cdot z = M_{d1} + V_d \cdot z \cdot k'_c \quad (7.154)$$

Es decir, la compresión en la sección 2-2, corresponde al momento en la sección 1-1 desplazada una distancia  $z \cdot k'_c$ . Para una mejor comprensión, se puede entender al contrario, es decir, el debido al momento en la sección 2-2 retrasado un distancia  $z \cdot k''_c$ . Esto es:

$$k''_c = \cotg(\theta) - k'_c = \frac{\lambda}{2} \cdot (\cotg(\theta) - \cotg(\alpha)) \quad (7.155)$$

Luego cuanto menor sea el papel de la armadura transversal, menor es el retraso hasta el punto de un retraso nulo para ausencia de ésta. Igualmente ocurriría para ángulos de inclinación de fisuras y estribos idénticos.

### 7.3.6 Desplazamiento de la sección de cálculo para el cortante

Se designa  $P_1$  como la resultante de las acciones exteriores hasta la sección 1-1, y  $P_2$  el que actúa desde esta sección hasta la 2-2.

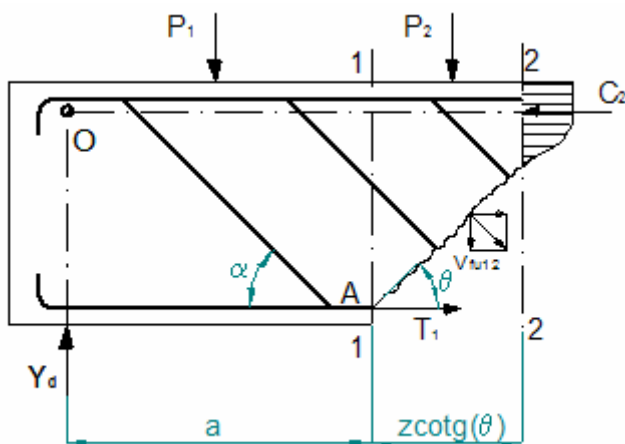


Fig. 7.48: Pieza con grieta desde el punto A

$$Y_d - (P_1 + P_2) = -V_{d2} = -V_{cu} - V_{fu1z} \quad (7.156)$$

y por tanto:

$$V_{f12} = V_{d2} - V_{cu} \quad (7.157)$$

Esto es, la armadura en una sección 1-1 debe calcularse con el esfuerzo cortante en una sección 2-2 desplazada  $z \cdot \cotg(\theta)$ . Igualmente, de la fig. 7.48 puede deducirse que la comprobación de la compresión de las bielas también ha de hacerse en una sección a la misma distancia. *Por tanto, a efectos de cálculo de cortante ha de tomarse una sección 2-2 desplazada  $z \cdot \cotg(\theta)$  de 1-1.*

## 7.3.7 Principios de cálculo a cortante

### 7.3.7.1 Introducción

La mayor parte de las normativas se basan en el método de las bielas y tirantes para el cálculo a cortante de vigas. Como se muestra en la figura 7.50, se compone de una celosía con bielas de compresión formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal y tirantes con inclinación  $\alpha$ , de manera que, la fuerza  $F_s$ , la resultante de compresión de la biela y el esfuerzo rasante en el plano AB deben estar en equilibrio formando un triángulo vectorial tal como se indica en la figura. Esta analogía de cálculo permite calcular elementos a sollicitación cortante con una precisión suficiente

En lo que se refiere a los FRP, el comportamiento de estos materiales difiere sensiblemente del acero, luego la filosofía de diseño debería ser diferente. No obstante, si asumimos una adecuada adherencia entre las barras y el hormigón, y además mantenemos la misma deformación longitudinal ( $\varepsilon_f = \varepsilon_s$ ) y la misma fuerza desarrollada ( $F_f = F_s$ ), entonces este diseño, por definición, encabeza a los mismos resultados seguros del acero. Lo bueno de esta idea es que permite definir un área equivalente de acero y se puede seguir aplicando los mismos principios de cálculo. [16]

$$F_f = \varepsilon_f \cdot A_f \cdot E_f = \varepsilon_s \cdot A_s \cdot E_s \quad (7.158)$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_s \quad (7.159)$$

$$A_{s.eq} = A_f \cdot \frac{E_f}{E_s} \quad (7.160)$$

Muchos investigadores y algunos códigos, en concreto el JSCE, han utilizado esta principio para evaluar la contribución del hormigón a cortante. Explican que de esta forma se tiene en cuenta la diferente rigidez relativa del refuerzo longitudinal de manera que, si el módulo elástico es menor respecto del acero, mayores elongaciones son esperadas y por tanto los mecanismos de resistencia son perjudicados en proporción a la relación entre ellos.



Mientras que, en lo que concierne a la armadura transversal, la cantidad de armadura de FRP es determinada por un control en deformación a diferencia del acero que es por tensión. Es necesario establecer una deformación límite de manera que no provoque un perjuicio sobre el resto de los mecanismos de resistencia a cortante. Este valor inicialmente se establece igual a la deformación elástica del acero, esto es entre 0.2% y 0.25%, debiendo promover los mismos resultados seguros. No obstante en base a evidencias experimentales, diferentes investigadores han propuesto valores más altos de esta deformación verificando que no conlleva perjuicio en los diferentes mecanismos. En base a ello la máxima tensión que puede desarrollar la armadura transversal puede ser computada como sigue.

$$\sigma_f = \epsilon_f \cdot E_f \tag{7.161}$$

Concretamente investigaciones llevadas a cabo por Guadagnini et al (2003) [18] muestran que el límite de la deformación puede establecerse sobre el 0.45%. Mientras que el código ACI, algo más conservativo, acepta válido una deformación máxima del 0.4%. Además añade que la fórmula relativo a lo contribución del hormigón, asumiendo el principio de modificación del área equivalente de acero, suele llevar a resultado demasiados conservativos. Por lo que propone un coeficiente multiplicador ( $\phi_\epsilon$ ) que informa sobre los diferentes niveles de deformación permitida para sendos refuerzos longitudinales, esto es FRP (0.45%) y acero (0.2%), de manera que la nueva área equivalente que propone queda tal como sigue:

$$\begin{aligned} \epsilon_f &= 0.0045 \\ \epsilon_s &= 0.002 \end{aligned} \tag{7.162}$$

$$A_{s.eq} = A_f \cdot \frac{E_f}{E_s} \cdot \frac{\epsilon_f}{\epsilon_s} = A_f \cdot \frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\epsilon \tag{7.163}$$

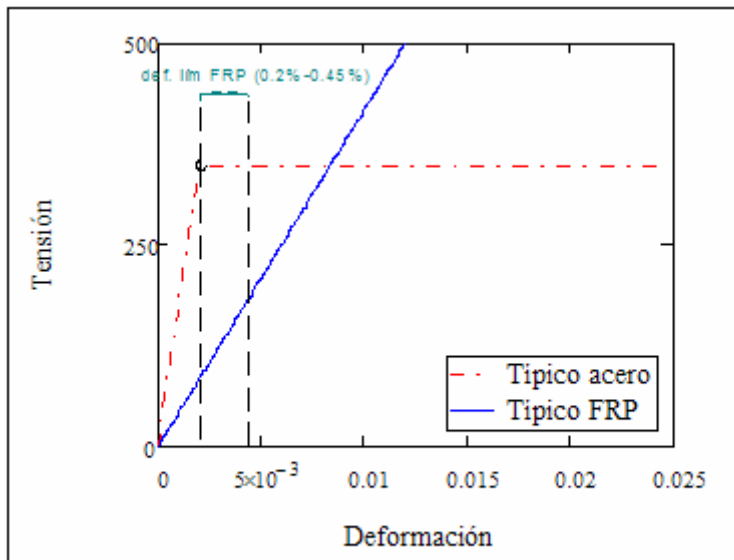


Fig. 7.49: Límite de deformación de la armadura transversal de FRP por cortante.

### 7.3.7.2 Resistencia a esfuerzo cortante

Normalmente la mayoría de los códigos suelen recoger dos mecanismos de resistencia a cortante. Uno de ellos es la contribución del hormigón, que suele englobar la resistencia de la zona comprimida y rozamiento entre fisuras. Siendo el restante la resistencia de la armadura a corte sin incluir el efecto pasador.

La formulación para el cálculo de la resistencia a cortante se puede elaborar en base a lo siguiente:

Sea un trozo de viga entre dos fisuras consecutivas tal como se indica en la figura siguiente.

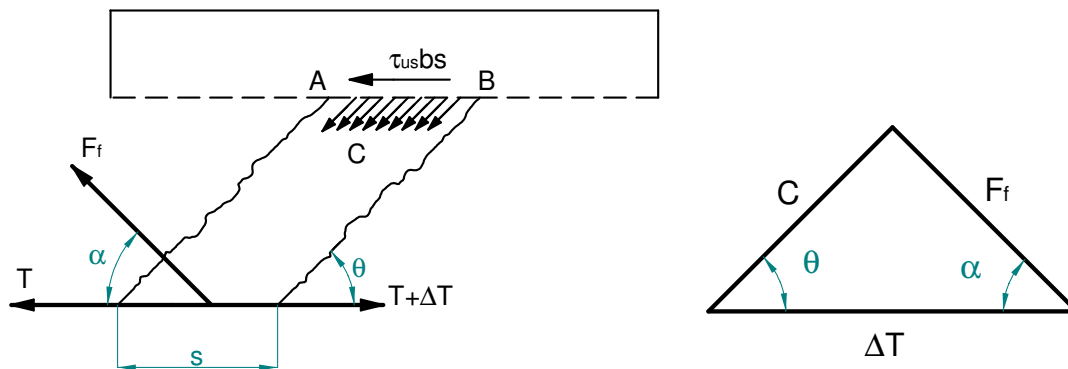


Fig. 7.50: Trozo de viga entre dos fisuras y triángulo de fuerzas

#### 7.3.7.2.1 Esfuerzo cortante resistido por el hormigón

De acuerdo con la EHE en elementos lineales el esfuerzo cortante resistido por el hormigón viene dado por la fórmula de base experimental:

$$V_{cu} = \left( \frac{0.15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck}} \right) \cdot d \cdot b_0 \quad (7.164)$$

Siendo:

$$\xi = \left( 1 + \sqrt{\frac{200 \cdot \text{mm}}{d}} \right) \quad (7.165)$$

Que adaptándola al caso de FRP con las asunciones anteriores y por tanto introduciendo el área de acero equivalente, o lo que es lo mismo, la cuantía de acero equivalente:

$$V_{cu} = \left( \frac{0.15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_f \cdot \frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\epsilon \cdot f_{ck}} \right) \cdot d \cdot b_0 \quad (7.166)$$

El coeficiente  $\xi$  recoge el fenómeno, contrastado por la experimentación, de que la resistencia unitaria a corte  $V_{cu}/(d \cdot b_0)$  crece al reducirse el canto.

Mientras que de acuerdo con la normativa ACI, según el comité 440.1R-03, la

contribución del hormigón usando FRP como principal refuerzo puede ser evaluada como se muestra abajo. La ecuación propuesta tiene en cuenta igualmente la rigidez axial del FRP ( $A_f \cdot E_f$ ) comparado con el acero ( $A_s \cdot E_s$ ).

$$V_{c,f} = \frac{A_f \cdot E_f}{A_s \cdot E_s} \cdot V_c \quad (7.167)$$

o lo que es lo mismo:

$$V_{c,f} = \frac{\rho_f \cdot E_f}{\rho_s \cdot E_s} \cdot V_c \quad (7.168)$$

Siendo  $V_c$  la contribución del hormigón para una pieza armada convencionalmente con acero:

$$V_c = \frac{\sqrt{f'_c} \cdot b \cdot d}{6} \quad (7.169)$$

Donde  $A_s$  ( $\rho_s$ ) es la armadura de acero necesaria para resistir el mismo momento que la sección armada con FRP.

A efectos prácticos, el comité propone que el valor de la cuantía de acero puede ser cogido como  $0.375 \cdot \rho_b$ . Considerando un típico acero de 400 MPa la ecuación puede ser expresada como sigue:

$$V_{c,f} = \frac{\rho_f \cdot E_f}{90 \cdot \beta_1 \cdot f'_c} \cdot V_c \quad (7.170)$$

Mientras que el Task Group 9.3 (Guadagnini *et al.* (2003) [18]) propone una modificación de la contribución del hormigón como sigue:

$$V_{c,f} = \left( \frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\epsilon \right)^{\frac{1}{3}} \cdot V_c \quad (7.171)$$

Más tarde el código ACI 440.1R-06 rectificó la formulación propuesta anteriormente en vista a que era demasiado restrictiva. Esta formulación supone un cambio notable respecto a la anterior, calculando ahora la contribución del hormigón en función de la profundidad de la fibra neutra.

$$V_{c,f} = 0.4 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b \cdot c \quad (7.172)$$

Siendo:

$$c = k \cdot d \quad (7.173)$$

$$k = \sqrt{2 \cdot \rho_f \cdot \eta_f + (\rho_f \cdot \eta_f)^2} - \rho_f \cdot \eta_f \quad (7.174)$$

Donde  $c$  es la profundidad de la fibra neutra suponiendo que la sección se comporta elásticamente.

7.3.7.2.2 Esfuerzo cortante resistido por la armadura de corte

Tanto el código ACI como la EHE se basan en la metodología de bielas y tirantes. Siguiendo con la figura siguiente, la fuerza  $F_f$ , la resultante de compresión de la biela y el esfuerzo rasante en el plano AB deben de estar en equilibrio formando un triángulo vectorial. Teniendo en cuenta que  $\Delta T = \tau_{fu} \cdot b \cdot s$ , se tiene:

$$\frac{F_f}{\text{sen}(\theta)} = \frac{\tau_{fu} \cdot b \cdot s}{\text{sen}(\theta + \alpha)} \quad (7.175)$$

Siendo:

$$\tau_{fu} = \frac{V_{fu}}{z \cdot b} \quad (7.176)$$

Luego:

$$\frac{F_f}{s} = \frac{V_{fu} \cdot \text{sen}(\theta)}{z \cdot (\text{sen}(\theta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\alpha))} \quad (7.177)$$

Operando y sustituyendo  $F_f = A_{st} \cdot \epsilon_f \cdot E_f$ , donde  $A_{st}$  es el área de armadura transversal dispuesta en la longitud  $s$ .

$$V_{fu} = z \cdot \frac{A_{ft}}{s} \cdot \epsilon_f \cdot E_f \cdot (\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cotg}(\theta)) \quad (7.178)$$

El código ACI limita la deformación del refuerzo al menor valor de 0.4% y la deformación que desarrolla la tensión límite de doblado, sin embargo el Task Group 9.3 [Guadagnini et al (2003)] es más permisivo y la limita a 0.45%.

Tensión límite de doblado:

$$f_{fb} = \left( 0.05 \cdot \frac{r_b}{d_b} + 0.3 \right) \cdot f_{fu} \quad (7.179)$$

$$\epsilon_{fb} = \frac{f_{fb}}{E_f} \quad (7.180)$$

Donde:

$r_b$  = radio de doblado  
 $d_b$  = Diámetro de la barra.

7.3.7.2.3 Compresión máxima admisible por las bielas

Por último, ya solo falta comprobar la compresión máxima admisibles de las bielas. Para ello seguiremos igualmente la Fig. 7.50 donde la resultante de compresiones debe estar en equilibrio con  $F_f$  y la tensión rasante debido al cortante total ( $V_d = V_{cu} +$

$V_{fu}$ ) en el plano AB.

$$\frac{C}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\tau_d \cdot b \cdot s}{\text{sen}(\theta + \alpha)} \quad (7.181)$$

Sustituyendo:

$$C = \sigma_c \cdot b \cdot s \cdot \text{sen}(\theta) \quad (7.182)$$

$$\tau_d = \sigma_c \cdot \text{sen}^2(\theta) \cdot (\text{cotg}(\alpha) + \text{cotg}(\theta)) \quad (7.183)$$

Donde  $\sigma_c$  es la tensión de compresión del hormigón en la biela comprimida. Además teniendo en cuenta:

$$\tau_d = \frac{V_d}{z \cdot b} \quad (7.184)$$

$$V_d = z \cdot b \cdot \sigma_c \cdot \text{sen}^2(\theta) \cdot (\text{cotg}(\alpha) + \text{cotg}(\theta)) \quad (7.185)$$

La EHE propone que para evitar daños por microfisuración la tensión de compresión de las bielas no debe superar:

$$\sigma_c \leq K \cdot f_{1cd} \quad (7.186)$$

Siendo:

$$f_{1cd} = 0.6 \cdot f_{cd} \quad \text{para } f_{ck} \leq 60\text{MPa}$$

$$f_{1cd} = \left(0.9 - \frac{f_{ck}}{200}\right) \cdot f_{cd} \quad \text{para } f_{ck} > 60\text{MPa} \quad (7.187)$$

y

$$K = 1 \quad \text{sin esfuerzo axil}$$

$$K = 1 + \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} \quad \text{para } 0 \leq \sigma'_{cd} \leq 0.25 \cdot f_{cd} \quad (7.188)$$

Donde:

$f_{1cd}$  = Resistencia a compresión del hormigón de las bielas

$K$  = Coeficiente que depende del esfuerzo axil aplicado.

#### 7.3.7.2.4 General

Haciendo un compendio de lo tratado en este punto, el estado límite último se puede dar tanto por agotamiento a compresión oblicua, como por agotamiento de resistencia a tracción. Por lo tanto, es necesario comprobar las siguientes situaciones límites:

- Colapso de las bielas de compresión:

$$V_d \leq z \cdot b \cdot K \cdot f_{1cd} \cdot \sin^2(\theta) \cdot (\cotg(\alpha) + \cotg(\theta)) \quad (7.189)$$

Aceptando la nomenclatura de la EHE:

$$V_d \leq V_{u1} \quad (7.190)$$

- Agotamiento por tracción del alma:

$$V_d \leq V_{cu} + V_{fu} \quad (7.191)$$

Aceptando la nomenclatura de la EHE:

$$V_d \leq V_{u2} \quad (7.192)$$

Donde:

$V_d$  = Esfuerzo cortante de cálculo

$V_{u1}$  = Esfuerzo cortante de agotamiento por compresión oblicua

$V_{u2}$  = Esfuerzo cortante de agotamiento por tracción del alma

Nota: Ha de mencionarse en este apartado que tanto que código ACI como el Task Group propone que se toma como ángulo de inclinación de las fisuras para elementos armado con FRP  $\theta = 45^\circ$ .

## 7.4 ADHERENCIA, ANCLAJES DE ARMADURAS

### 7.4.1 Adherencia

#### 7.4.1.1 Introducción

La adherencia es la principal responsable de la existencia del hormigón estructural. Gracias a ella es posible la transferencia de tensiones entre éste y el refuerzo de forma que las debilidades del hormigón (en concreto los esfuerzos de tracción) son absorbidas por los refuerzos.

Normalmente el término de adherencia se asocia al fenómeno de unión entre el hormigón y el refuerzo. No obstante, encierra una complejidad de mecanismos que es complejo de modelizar tal que es comúnmente analizada empíricamente. A continuación se detallan algunos de los mecanismos que la forman:

- Adhesión entre hormigón y acero debida a las acciones moleculares en la superficie de contacto.
- Rozamiento
- Resistencia a corte movilizada por el anclaje en el hormigón de las irregularidades superficiales del FRP
- Compresión ejercida por el hormigón sobre los resaltos de las barras en el caso de barras corrugadas.

En lo que se refiere a este documento se centrará únicamente para el caso de barras corrugadas.

#### 7.4.1.2 Métodos de medida de la adherencia

Debido a la complejidad del fenómeno y a la gran variedad de variables que lo define, la mayoría de las normas recurre a ensayos para poder analizar el fenómeno de adherencia. Existen diversos métodos de ensayo pero ninguno de ellos ha sido universalmente aceptado. Cabe destacar tres de los más comunes:

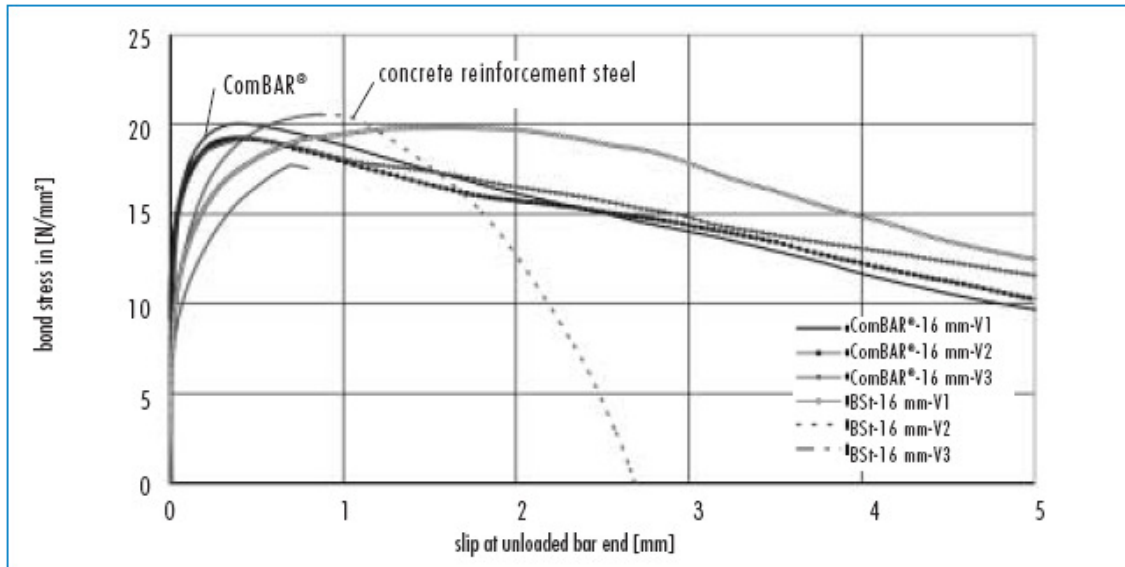
- Pull out test: Consiste en analizar la adherencia en base a la tracción de una barra embebida en una probeta de hormigón.
- Beam test RILEM-CEB: Es el método utilizado por la EHE y CEB. Consiste en ensayos directos sobre barras de refuerzo embebidas en vigas sometidas a flexión simple.
- Beam test ACI: Es el método utilizado por el código norteamericano. Es análogo al método anterior donde la morfología del ensayo varía sensiblemente.

Sin embargo debe de tenerse claro que estos métodos no deben ser usados para obtener las tensiones de cálculo de adherencia, ya que las condiciones reales de recubrimiento, posición, transmisión de cargas, armadura transversal, etc., de las barras de las piezas son diferentes y muy variables. Las tensiones se han establecido, no sólo en base a los ensayos mencionados, sino también a las investigaciones de laboratorio sobre piezas reales y en la experiencia práctica de uso. No obstante, estos métodos son especialmente útiles, para establecer requisitos comparativos de nuevos tipos de barra y superficies, en base a la experiencia acumulada mediante su aplicación a las diferentes barras.

Estudios llevados a cabo sobre los FRP mediante ensayos de pull out, han mostrado que existe una gran similitud respecto al acero para barras corrugadas del mismo diámetro. Esto ha llevado a que la mayoría de las normativas apliquen los mismos principios a este tipo de materiales con algunas adaptaciones que se verán a lo largo de este tema.

A continuación se muestra ensayos comparativos de pull out elaborados por COMBAR sobre barras de GFRP y acero de diámetro 16 mm [27]:

Una prueba de pull-out ejecutada sobre un cubo de hormigón de 150 mm, de acuerdo con las recomendaciones del RILEM RC 6. El desplazamiento al final de la barra no cargada fue ploteado como una función de la carga. La resistencia de compresión del hormigón era superior a  $40 \text{ N/mm}^2$



RILEM-test,  $d_s = 16 \text{ mm}$  mit  $5 d_s$  embedded length: comparison

Los resultados de las series de la prueba son:

- El modo de fallo es, al igual que en una barra de acero, extracción de la barra del bloque de hormigón. Las corrugas de la barra están en gran parte intactas.
- Como en el caso de refuerzos de acero, altas tensiones de adherencias son observados.
- No se observan diferencias significativas ante el deslizamiento de la parte final de la barra de Schöck ComBAR® y barras de acero. La máxima tensión de adherencia registrada está en intervalo de 0,4 a 0,6  $\text{mm}$  de deslizamiento.
- Aunque la tensión de adherencia es mayor para el mismo deslizamiento, la tensión en la que aparece el *Splitting* es más bajo que para barras de acero.

#### 7.4.1.3 Variables de la adherencia

La capacidad de una barra para desarrollar grandes valores de adherencia depende de muchas variables, a continuación se describen las más importantes:

- El diámetro: La fuerza que desarrolla una barra es proporcional área de la misma y por tanto del diámetro al cuadrado, mientras que la fuerza de adherencia depende del perímetro. Consecuentemente, la adherencia en barras de mayor sección es más crítica.
- Tensión límite: cuanto mayor sea el límite elástico mayor será la fuerza necesaria para llegar al estado límite y por tanto mayor la adherencia que debe desarrollarse.
- Resistencia del hormigón: Es comúnmente aceptado y comprobado que la adherencia se incrementa al obtener hormigones de mayor resistencia.
- Geometría superficial: Unos de los principales mecanismos de adherencia de las barras corrugadas se debe al anclaje mecánico de las estrías o resaltos. No obstante suele provocar un estado tensional en el hormigón tal como se muestra en la figura siguiente y puede llegar a avivar fenómenos indeseados como *splitting*. Es decir, fisuraciones en el hormigón debido a tracciones radiales que comprometen la adherencia de las barras. Normalmente este fenómeno es evitado disponiendo de espesores de recubrimientos apropiados.



Estudios llevados a cabo sobre barras de GFRP han concluido que este tipo de fenómenos son menos propicios respecto al acero debido a una reducción del ángulo  $\alpha$  mostrado en la figura.

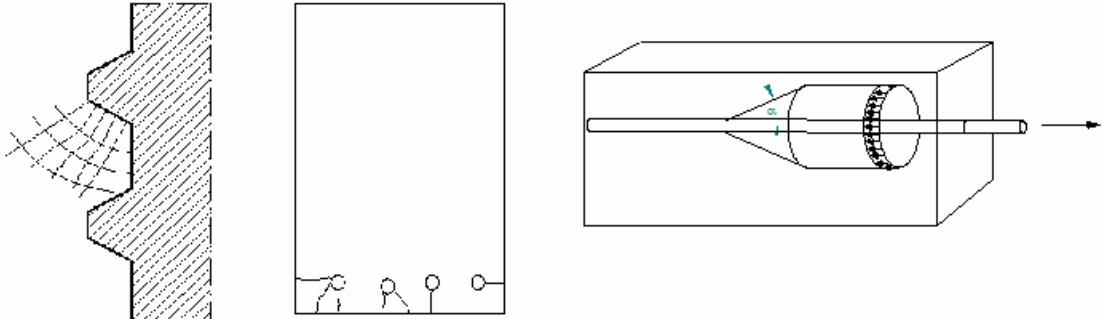


Fig. 7.51: Tensiones sobre el hormigón y fenómeno de splitting.

- Recubrimiento de hormigón: como se acaba de explicar, cuanto mayor sea el recubrimiento de las barras menor es la probabilidad de que aparezca el splitting.
- Armadura transversal: La presencia de armadura transversal próxima a las barras longitudinales reduce el riesgo de la aparición de este tipo de fisuras por tracción radial.
- Retracción del hormigón: Suele provocar compresiones radiales a la barra mejorando la adherencia.
- Posición de las barras durante el hormigonado: Tiene una influencia notable sobre la adherencia, tanto que la mayoría de las normas suele distinguir entre dos posibilidades: buena adherencia; o deficiente adherencia. El efecto perjudicial se debe a la acumulación, bajo las barras, de una mezcla débil de cemento agua y aire que moviliza una adherencia insatisfactoria. Este efecto se intensifica para barras dispuesta horizontalmente en zonas altas del elemento rica en agua. Por el contrario, para barras situadas verticalmente o incluso horizontalmente pero en zonas de mucha profundidad bajo la superficie, gozan de una adecuada adherencia.

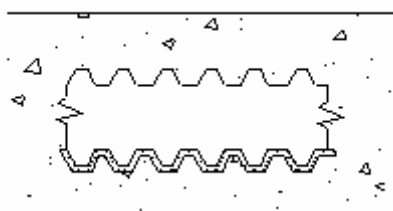


Fig. 7.52: deficiente adherencia

#### 7.4.1.4 Tipos de adherencia

##### 7.4.1.4.1 Adherencia por cortante

Este tipo de adherencia es la que se produce a lo largo todo el refuerzo interno cuando la pieza está sometida a flexión. A ella se debe la existencia del hormigón armado

como elemento estructural tal como se conoce hoy día. La carencia de este tipo de adherencia conllevaría a un cambio sustancial de la forma de trabajar de estos elementos. En este caso la armadura longitudinal trabajaría como un tirante anclado en los extremos y tensión constante mientras que el brazo mecánico  $z$  se iría trasladando para absorber la variación de momento a lo largo de la pieza. Normalmente a este fenómeno se le identifica como efecto arco. [J. Calavera]

Para explicar este tipo de adherencia se parte de una pieza sometida a flexión simple. Concretamente se cogerá una rebanada diferencial  $ds$ , tal como se muestra abajo.

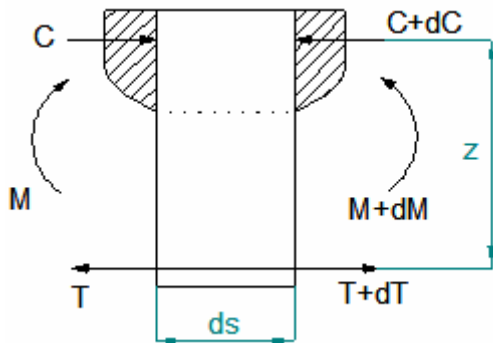


Fig. 7.53: Rebanada

$$dM = z \cdot dT \quad (7.193)$$

Considerando que las barras son del mismo diámetro por simplicidad:

$$dM = z \cdot \tau_b \cdot n \cdot u \cdot ds \quad (7.194)$$

Esto es:

$$\frac{V}{z \cdot n \cdot u} = \tau_b \quad (7.195)$$

Particularizado para el caso límite:

$$\frac{V_d}{z \cdot n \cdot u} = \tau_{bd} \quad (7.196)$$

Donde:

$\tau$  = Adherencia barra-hormigón

$\tau_{bd}$  = Adherencia barra-hormigón en consideraciones de diseño

$n$  = Número de barras longitudinales a tracción.

$u$  = Perímetro de cada barra.

Es obvio que la adherencia que necesita la barra debe de ser menor que la adherencia límite  $\tau_{bd,lim}$  y por tanto ha de comprobarse que a lo largo de todo el refuerzo no se supere. Normalmente esta comprobación sólo es necesaria en los puntos más críticos que suelen coincidir con los apoyos en el que el cortante suele ser elevado.

7.4.1.4.2 Adherencia por tracción

Es el tipo de adherencia responsable del anclaje final de las armaduras a tracción. De hecho, a partir de ella es posible determinar la longitud de anclaje necesaria. Muchos códigos se basan en ella para su determinación como el código ACI o el Eurocódigo.

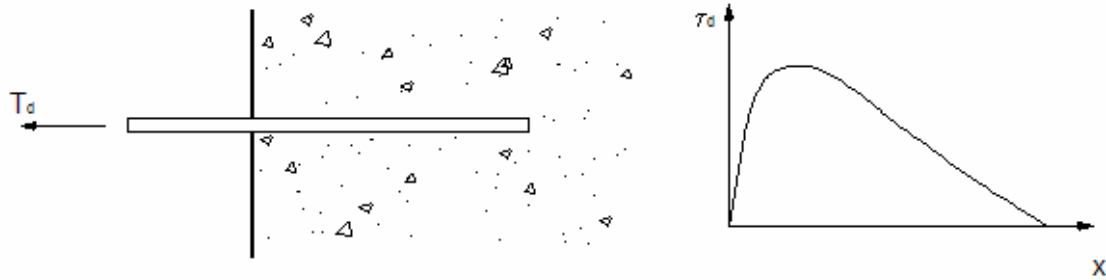


Fig. 7.54: Adherencia por tracción

Aceptando una tensión media de adherencia se tiene:

$$T_d = A_f \cdot f_{fd} = l_b \cdot \tau_{db} \cdot \pi \cdot \phi \tag{7.197}$$

$$A_f = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} \tag{7.198}$$

$$l_b = \frac{\phi \cdot f_{fd}}{4 \cdot \tau_{db}} \tag{7.199}$$

A continuación se muestra unas tablas con los resultados concretos de adherencias de las barras de GFRP de la marca comercial COMBAR [27] comparativamente con los de acero propuesto por el EC2.

Tabla 7.1: Valores de la adherencia para barras de GFRP proporcionados por COMBAR

maximum bond strength	$f_b$	12 - 25 N/mm <sup>2</sup>	acc. RILEM RC 6 (depending on concrete compressive strength)
design bond strength	$f_{bod}$	2.3 N/mm <sup>2</sup> 3.0 N/mm <sup>2</sup> 3.7 N/mm <sup>2</sup>	C 20/25 C 30/37 C 40/50

Tabla 7.2: Valores de cálculo de adherencia barras corrugadas de acero proporcionados por el Eurocódigo 2 [6] en N/mm<sup>2</sup>

$f_{ck}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50
Barras de alta adherencia cuando $\varnothing \leq  32 $ mm o mallazo soldado hecho de alambres corrugados	1,6	2,0	2,3	2,7	3,0	3,4	3,7	4,0	4,3

### 7.4.2 Anclajes

Las armaduras tienen la misión de absorber parte de los esfuerzos al que esta solicitado el elemento (normalmente de tracción) gracias a la adherencia con el hormigón. Es decir, a lo largo de la pieza se produce una transferencia de esfuerzos del hormigón a las barras de forma que, en cada sección se encuentra sometido a unas tensiones determinadas. Por tanto en las extremidades de las barras existen unos esfuerzos que por equilibrio es necesario transmitirlos nuevamente al hormigón. Normalmente, la manera de conseguirlo es prolongando las barras y anclarlas por adherencia.

En base a los conceptos ya desarrollado sobre adherencia, este punto se centra en el cálculo de la longitud de anclaje de las barras corrugadas de FRP. En el sentido estricto, este cálculo debería de ser hecho tal como se explica en el punto 8.4.1.4. No obstante, la formulación de cada normativa puede variar en base a la experimentación desarrollada.

En los puntos siguientes se desarrolla el procedimiento de cálculo propuesto por el código ACI y la análoga adaptación de la normativa EHE propuesta en este documento.

#### 7.4.2.1 Longitud de anclaje según código ACI

##### 7.4.2.1.1 Prolongación recta

Sea el equilibrio de tensiones mostrado en la fig.: siguiente, donde la longitud de la barra corresponde con la longitud básica. La fuerza sobre la barra debe de ser resistido por la tensión media de adherencia. El equilibrio puede ser escrito tal como sigue:

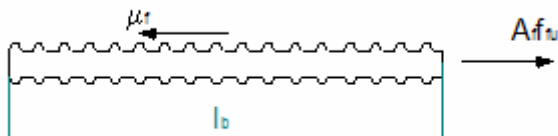


Fig. 7.55: Longitud de anclaje en barra corrugada

$$\frac{\pi \cdot \phi^2}{4} \cdot f_{fu} = l_b \cdot \mu_f \cdot \pi \cdot \phi \tag{7.200}$$

Reordenando:

$$l_b = \frac{\phi \cdot f_{fu}}{4 \cdot \mu_f} \quad (7.201)$$

Investigaciones sobre la longitud de anclaje muestran que, en general, la tensión de adherencia media puede ser expresada como sigue:

$$\mu = \frac{K_1 \cdot \sqrt{f'_c}}{\phi} \quad (7.202)$$

Sustituyendo:

$$l_b = \frac{K_2 \cdot \phi^2 \cdot f_{fu}}{\sqrt{f'_c}} \quad (7.203)$$

Muchos investigadores han intentado averiguar el valor de  $K_2$  para cada tipo de FRP. Pleimann ha propuesto valores de 1/19.4 y 1/18 para GFRP y AFRP respectivamente. Faza and GagaRao propuso el valor general de 1/16.7. Mientras que estudios hechos por Saadatmannesh and Tao propuso un valor de 1/21.3 para GFRP. (nota: estos valores corresponden a las unidades utilizadas por el código ACI)

Paralelamente, diversos estudios propusieron formulaciones con base empírica donde el modo de fallo descartaba el efecto de splitting., Saadatmeshes, Ehsani and Tao [21] y Gao, Benmokrane and Tighiouart, propusieron la siguiente ecuación:

$$l_b = \frac{\phi \cdot f_{fu}}{K_3} \quad (7.204)$$

Donde  $K_3$  adquiere un valor aproximado de 2700 respecto a unidades del código ACI.

Para S.I. de unidades:

$$l_b = \frac{\phi \cdot f_{fu}}{18.5} \quad (7.205)$$

Para calcular la longitud neta de anclaje es necesario particularizar una serie de variable que afectan a la adherencia:

- Factor de modificación por posición:

Como ya se ha mencionado, el emplazamiento de la barra durante el hormigonado es una variable que afecta fuertemente a la adherencia. El aire, el agua y las partículas finas migran a la parte superior del elemento y depósitos de hormigón débil se forman bajo las barras de refuerzo. El código ACI consiguientemente habla de "top reinforcement" que usualmente se refiere a barras horizontales dispuesta en la mitad superior o a una distancia superior a 12 in. (305 mm) de la superficie inferior. Investigaciones llevadas a cabo sobre barras de FRP en posición de mala adherencia muestran que un factor de 1.3 ha de ser tenido en cuenta para la longitud neta de anclaje.

- Factor de modificación por recubrimiento de hormigón:

El recubrimiento de hormigón tiene un importante impacto sobre el mecanismo de

fallo. Cuando el recubrimiento es menor de 2 veces el diámetro, el fenómeno de splitting puede ocurrir, con la consiguiente pérdida de adherencia.

El comité del código ACI propone que el recubrimiento para barras de FRP no debe ser menor del diámetro de la barra, donde un factor de 1.5 debe ser aplicado sobre la longitud básica de anclaje para este caso. Por el contrario, para recubrimientos superiores a dos veces el diámetro, no requieren corrección, debiéndose interpolar para casos intermedios.

- Factor corrector por tensión:

Cuando la tensión real que solicita la barra es inferior a la de diseño, esto es, cuando se dispone de un área de refuerzo superior a la requerida a partir de la sección de anclaje, un factor corrector de  $A_{f.req}/A_{f.prov}$  puede ser aplicado para obtener la longitud neta.

Recopilando los factores explicados, la longitud neta de anclaje puede ser expresada en función de la longitud básica tal como sigue:

$$l_d = k_m \cdot l_b \cdot \frac{A_{f.req}}{A_{f.prov}} \quad (7.206)$$

Siendo:

Para "top reinforcement":

$$k_m = 1.3 \quad (7.207)$$

Para resto de los casos:

$$k_m = \begin{cases} 1 & \text{si } c > 2\phi \\ \frac{4\phi - c}{2\phi} & \text{si } \phi \leq c \leq 2\phi \end{cases} \quad (7.208)$$

#### 7.4.2.1.2 En patilla

El comité ACI informa, que no debe aplicarse la misma base de cálculo respecto al anclaje en patilla del acero debido a las diferencias de comportamiento de los materiales, y en especial la anisotropía de los FRP. Se decanta más bien por una formulación empírica en base a experimentos realizados sobre este tipo de anclaje y los FRP.

Saadatmanesh, Ehsani, and Tao [21] estudiaron y realizaron múltiples ensayos sobre el anclaje en patilla de GFRP. Propusieron que la longitud básica de anclaje debería ser calculada de la siguiente manera:

$$l_{bh} = \frac{K_4 \cdot \phi}{\sqrt{f'_c}} \quad (7.209)$$

Concretamente el comité ACI recomienda la siguiente formulación para el cálculo de la longitud básica de anclaje en patilla:

$$l_{bh} = \begin{cases} 165 \cdot \frac{\phi}{\sqrt{f_c}} & \text{si } f_{fu} \leq 520 \text{MPa} \\ \frac{f_{fu}}{3.1} \cdot \frac{\phi}{\sqrt{f_c}} & \text{si } 520 \text{MPa} < f_{fu} < 1040 \text{MPa} \\ 330 \cdot \frac{\phi}{\sqrt{f_c}} & \text{si } f_{fu} \geq 1040 \text{MPa} \end{cases} \quad (7.210)$$

Donde, si el recubrimiento de hormigón en el plano de doblado es superior a 6.4 cm. y la prolongación recta de la patilla es mayor de 5 cm., otro factor reductor puede ser aplicado de 0.7.

Además, se recomienda que el valor de la longitud básica de anclaje en patilla y la longitud de la patilla deban ser mayor que 23 cm. y  $12\phi$  respectivamente. Para evitar el fallo por cortante del refuerzo, el radio de doblado debe ser mayor que  $3\phi$ . Estos valores están basados en los estudios de Saadatmanesh, Ehsani, and Tao.

Donde:

$l_b$  = Longitud básica de anclaje en prolongación recta.

$l_{bh}$  = Longitud básica de anclaje en patilla

$l_d$  = Longitud neta de anclaje en prolongación recta

$\phi$  = Diámetro de la barra de FRP

$c$  = Recubrimiento del refuerzo.

$\mu_f$  = Coeficiente de adherencia barras-hormigón

$A_{f,req}$  = Área de refuerzo requerido por cálculo a partir de la sección de anclaje

$A_{f,prov}$  = Área de refuerzo dispuesto a partir de la sección de anclaje

$K_i$  = Coeficientes experimentales

#### 7.4.2.2 Adaptación de la EHE

En este apartado se va a exponer el cálculo de la longitud de anclaje adaptado para barras de FRP. Para ello se calculará inicialmente la longitud básica mediante la fórmula propuesta seguidamente. Y posteriormente se afectará por unos coeficientes para obtener la longitud neta:

$$l_b = \frac{\phi \cdot f_{fd}}{4 \cdot \tau_{db}} \quad (7.211)$$

Siendo el valor de la adherencia constante y *obtenida de los datos del fabricante* (hay que cerciorarse que el valor tomado es el de diseño como los mostrados en la tabla anterior). No obstante, este valor debe de ser corregido por un factor que informa sobre el estado de la adherencia en función de la posición, tal como se describe en la norma EHE:

$$\tau_{db} = \eta \cdot \tau_{fb} \quad (7.212)$$

$$\begin{aligned} \eta &= 1 && \text{para posición I} \\ \eta &= 0.7 && \text{para posición II} \end{aligned} \quad (7.213)$$

Definiéndose:

- Posición I: Buena adherencia; para barras que durante el hormigonado forman un ángulo, con respecto a la horizontal, comprendido entre 45° y 90°. O para barras con un ángulo menor de 45° que se sitúe en la mitad inferior de la sección o a una distancia igual o superior a 30 de la cara superior.
- Posición II: Mala adherencia; para barras que no cumplen los requisitos anteriores.

Para el cálculo de la longitud neta se parte de la básica aplicando los siguientes factores de corrección:

- Factor de corrección por armadura superabundante: Cuando el área de armadura dispuesta es superior a la necesaria por cálculo, a partir de la sección a anclar, se puede aplicar un factor reductor ( $A_{f.nec}/A_{f.real}$ ) debido a que la tensión de trabajo es inferior al límite.
- Factor por forma del anclaje: Si la forma del anclaje es diferente de la recta, un factor reductor puede ser aplicado debido a un efecto adicional de anclaje mecánico. En este documento sólo se admite la disposición recta o en patilla. Para este último caso, si el recubrimiento del hormigón perpendicular al plano de doblado es superior a  $3\phi$ , se puede reducir en  $\beta = 0.7$ .

Longitud neta de anclaje:

$$l_{b.neto} = \beta \cdot l_b \cdot \frac{\sigma_f}{f_{fd}} = \beta \cdot l_b \cdot \frac{A_{f.nec}}{A_{f.real}} \quad (7.214)$$

Donde:

$l_b$  = Longitud básica de anclaje en prolongación recta.

$l_{b.neto}$  = Longitud neta de anclaje en prolongación recta.

$\phi$  = Diámetro de la barra de FRP

$\tau_{bd}$  = Adherencia barra-hormigón en consideraciones de diseño

$\tau_{tb}$  = Adherencia barra-hormigón sin tener en cuenta la posición de las barras

$\eta$  = Factor corrector de la adherencia por posición de las barras.

$A_{f.nec}$  = Área de refuerzo requerido por cálculo a partir de la sección de anclaje

$A_{f.real}$  = Área de refuerzo dispuesto a partir de la sección de anclaje

$\sigma_f$  = Tensión a la que se encuentra solicitada la barra a partir de la sección a anclar.

$\beta$  = Factor corrector de la longitud neta por forma del anclaje.