

2 CAPÍTULO**DISEÑO DE LAS VIGAS****ÍNDICE**

2	CAPÍTULO: DISEÑO DE LAS VIGAS.....	191
2.1	INTRODUCCIÓN.....	191
2.2	DISEÑO DE LAS VIGAS SEGÚN LA EHE ADAPTADA.....	193
2.2.1	<i>Rotura por aplastamiento del hormigón</i>	193
2.2.1.1	Datos	194
2.2.1.2	Estado Límite Último	196
2.2.1.2.1	Armadura longitudinal inferior a tracción	196
2.2.1.2.2	Armadura de cortante	199
2.2.1.2.3	Anclaje.....	202
2.2.1.3	Estado Límite de Servicio.....	203
2.2.1.3.1	Cálculo de la flecha	204
2.2.1.3.2	Cálculo de la fisuración	206
2.2.1.3.3	Fibra neutra	208
2.2.1.3.4	Evolución de la curvatura en función del momento	211
2.2.1.4	Croquis de la viga.....	213
2.2.2	<i>Rotura del elemento por tracción de la armadura inferior</i>	214
2.2.2.1	Datos	215
2.2.2.2	Estado Límite Último	217
2.2.2.2.1	Cálculo de la armadura inferior.....	217
2.2.2.2.2	Cálculo de la armadura transversal.....	220
2.2.2.2.3	Anclaje.....	223
2.2.2.3	Estado Límite de Servicio.....	224
2.2.2.3.1	Cálculo de la flecha	224
2.2.2.3.2	Cálculo de la fisuración	227
2.2.2.3.3	Fibra neutra	229
2.2.2.3.4	Evolución de la curvatura en función del momento	232
2.2.2.4	Croquis de la viga.....	234
2.3	COMPROBACIÓN DE LAS VIGAS SEGÚN CÓDIGO ACI	235
2.3.1	<i>Viga diseñada por fallo del hormigón</i>	235
2.3.1.1	Datos	235
2.3.1.2	Estado Límite Último	237
2.3.1.2.1	Comprobación de momento último soportado	237
2.3.1.2.2	Comprobación del cortante último soportado	239
2.3.1.3	Estado Límite de Servicio.....	241
2.3.1.3.1	Evolución de la flecha.....	242
2.3.1.3.2	Evolución de la abertura de fisura	244
2.3.1.3.3	Evolución de la fibra neutra	245
2.3.1.3.4	Evolución de la curvatura	248
2.3.2	<i>Viga diseñada por fallo del FRP a tracción</i>	249
2.3.2.1	Datos	249
2.3.2.2	Estado Límite Último	251
2.3.2.2.1	Comprobación del momento último	251
2.3.2.2.2	Comprobación del cortante último	253
2.3.2.3	Estado Límite de Servicio.....	254
2.3.2.3.1	Evolución de la flecha.....	255
2.3.2.3.2	Evolución de la abertura de fisura	257
2.3.2.3.3	Evolución de la fibra neutra	258
2.3.2.3.4	Evolución de la curvatura	259

2 CAPÍTULO: DISEÑO DE LAS VIGAS

2.1 INTRODUCCIÓN

En este apartado se pretende diseñar los dos tipos de vigas, una por rotura a compresión del hormigón y otra por tracción de la armadura inferior. Pero previamente al diseño de las vigas es necesario conocer todos aquellos condicionantes que pueden influir en su diseño:

- En el laboratorio se dispone de un pórtico de carga con un actuador hidráulico servo-controlado y con una célula de carga extensométrica de 250 kN, con lo cual la capacidad de las vigas ha de ser sensiblemente inferior. Se cree conveniente que a priori se diseñen para una carga última alrededor de la mitad de la registrada por la célula, de esta manera se tendrá un margen de seguridad amplio en vista a que, debido a la variabilidad de las propiedades de los materiales, se pueden alcanzar valores superiores a los esperadas. A priori, éste es el único requisito que hay que cumplir, pudiendo ser las dimensiones de las vigas a libre elección. Al principio se pensó diseñarlas con unas proporciones habitualmente utilizadas en estructuras, es decir, de longitud 5m y sección 0.3m x 0.4m aproximadamente. Pero, posteriormente, esta idea se desechó por varios motivos, y que en el fondo convergen en uno que es el tiempo con el que se cuenta para la elaboración de la campaña experimental. Como se ha dicho en la introducción, hay que tener en cuenta que todas las piezas son elaboradas manualmente, tanto que si son demasiado grandes conllevan un considerable volumen de hormigón que es necesario elaborar. Además, el hormigón se vierte en unos moldes o encofrados, que son los que conforman la viga, y que también hay que fabricar de acuerdo a las medidas elegidas. Todo ello repercute en un tiempo necesario, por no hablar de un esfuerzo enorme, que sobrepasa las pretensiones de este proyecto. Reconsiderando la idea, se acordó que se debería hacer unas vigas algo más pequeñas y si fuera posible reutilizar los propios moldes ya preexistentes en el laboratorio.
- Otro condicionante son las propiedades de los materiales que forman la viga, esto es el hormigón y los refuerzos. La resistencia característica del hormigón puede ser elegida libremente, considerando obviamente unos límites tecnológicos de resistencia máxima entorno a 100MPa. Sin embargo, aquí es importante recordar el estudio sobre la influencia del tipo de hormigón en vigas a flexión armadas con FRP (Véase capítulo 11 del bloque teórico). La conclusión más relevante es que: el aumento del momento resistente (o lo que es lo mismo, paquete de compresión en el hormigón), a medida que se incrementa la resistencia del hormigón, es más fuerte en la región de hormigones convencionales que en la de alta resistencia debido a la mayor fragilidad que presentan. Es más, en este último existe un tramo de 50-80 MPa en el que el beneficio es inapreciable. Con lo cual, desde el punto de vista óptimo, es recomendable el uso de hormigones convencionales menores de 50 MPa. En lo que se refiere a los refuerzos, se ha optado por el tipo de material compuesto de matriz polimérica reforzada con fibra de vidrio (GFRP) suministrado por Schock del tipo ComBAR. Se toman las propiedades y recomendaciones dadas por el fabricante.

En resumen, los requisitos de partida son las siguientes:

Carga máxima soportada por las vigas, inferior a 125 kN
 Dimensiones 2.8m de longitud y sección de 0.2m x 0.25m
 Hormigón de 50MPa o inferior por cuestiones de optimización.
 Refuerzos de GFRP con las propiedades suministradas por fabricante. A continuación se expone un resumen de los datos más relevantes:

Diámetros de barras (mm)	8	12	16	25	32
Área de la sección (cm ²)	0.5	1.13	2.01	4.91	8.04
Tensión última (f_{fk} en N/mm ²)	1500	1350	1300	1200	>1000
Módulo elástico (E_f en N/mm ²)	60000				
Adherencia	Similar acero				
Recubrimiento mínimo (mm)	$\phi + 10\text{mm}$				
Coefficiente de seguridad parcial (γ_m)	1.2 (Propuesto por fabricante)				

Los dos tipos de vigas presentan las mismas dimensiones, sin embargo los modos de rotura buscados son diferentes. La forma de lograr esto es jugando con la cuantía de armadura longitudinal inferior y la resistencia del hormigón. Darse cuenta la extremada resistencia que tienen las barras. Para lograr romperlas es necesario crear en el hormigón un bloque de compresión capaz de equilibrar dicha fuerza, además debido al bajo módulo elástico que presentan promueven una fibra neutra muy alta, luego es necesario recurrir a hormigones de resistencia elevada para conseguir un modo de rotura por tracción de la armadura. Por el contrario, para un modo de rotura por aplastamiento, sólo es necesario recurrir a una cuantía elevada tal que, cuanto menor sea la resistencia del hormigón, menor es la capacidad última de la viga. En cuanto a la armadura transversal, lo idóneo sería que fuera también de GFRP. De hecho lo habitual es que toda la armadura, de una misma pieza, sea del mismo material. Cuando se utiliza un armado a base de FRP en vez de acero, suele ser por alguna razón en concreto, ya sea bien por cuestiones de durabilidad (ambientes agresivos que pueden corroer al acero), facilidad y rapidez constructiva o cualquier ventaja de las que dispone, pero lo que no es lógico es usar sendos materiales conjuntamente. En este experimento no cabe más remedio que utilizar el acero para los estribos. Esto se debe a que las barras de FRP no se pueden deformar para elaborar los estribos, a menos que estas vengan ya doblados de fábrica, lo cual es muy costoso y no es viable para este proyecto. Otra alternativa es el uso de barras con bulbos en los extremos que están hechas para absorber el cortante, pero los diámetros comerciales son muy grandes y no recomendable para la pequeña viga diseñada. Además, en la zona central, donde el cortante es nulo (sólo el debido al peso propio de la viga) se planea dejarlos libre de estribos para no influenciar el desarrollo de las fisuras. Y por último, mencionar la necesidad de una armadura superior a modo de portaestribos. Esta no tiene ninguna función estructural, pero no inhibe que realmente colabore. En parte, para no desaprovechar las barras de GFRP, en parte porque no se comporta bien a compresión y ya que se ha utilizado el acero en los estribos, se prevé usar también acero en las barras superiores portaestribos.

A modo aclaratorio, puesto puede ser útil para comprender mejor el experimento, se analiza los esfuerzos en la pieza sometida a un ensayo de flexión en cuatro puntos. Estos esfuerzos pueden ser divididos en la suma de dos fenómenos, una debido a la aplicación de la carga y otro debido al peso propio. Véase figura siguiente.

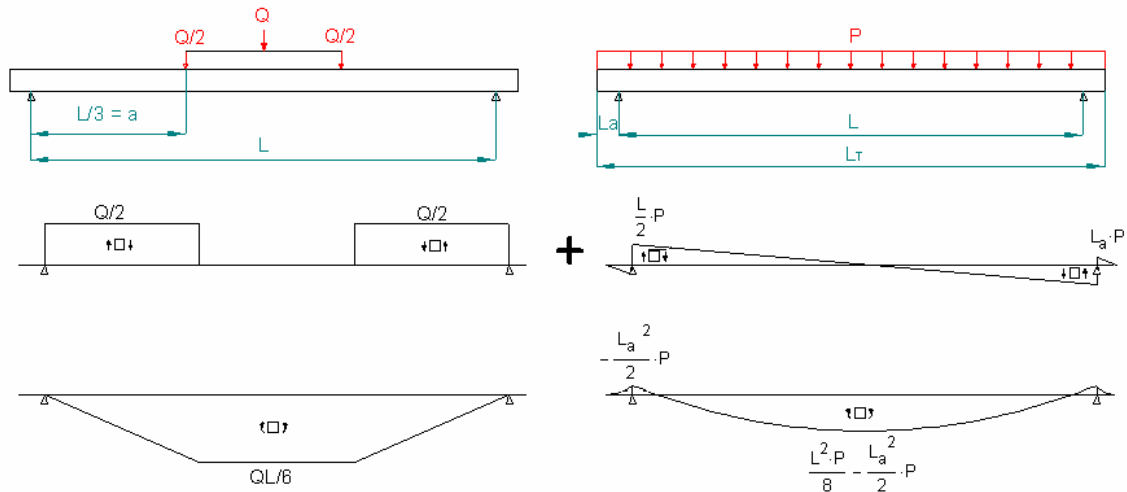


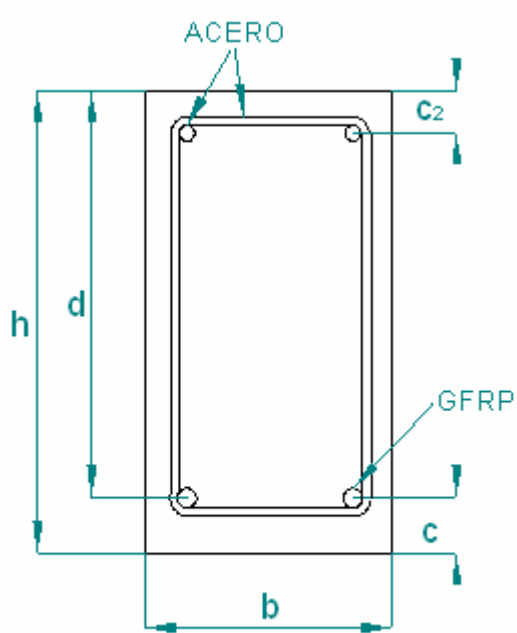
Fig. 2.1: Esfuerzos en la pieza

2.2 DISEÑO DE LAS VIGAS SEGÚN LA EHE ADAPTADA

2.2.1 Rotura por aplastamiento del hormigón

Como se dejaba entrever en la introducción al capítulo, se debe de poner armadura suficiente tal que se supere la cuantía balanceada de la sección. Esta depende directamente de la resistencia del hormigón, con lo cual, cuanto mayor sea su resistencia, mayor cantidad de armadura es necesaria y también mayor es la capacidad de la sección. A priori, no conviene elegir una elevada resistencia, pues puede que la carga última sea demasiado elevada y no se cumpla los requisitos iniciales. Se opta prudentemente por un hormigón HA-30. En lo que refiere a la armadura se opta por barras del 12. En el caso que salgan demasiadas barras o viceversa se cambiará a otro diámetro. Es preciso elegir inicialmente el diámetro porque cada barra tiene unas propiedades diferentes. Cabe mencionar que los experimentos se diseñan para ensayarlos a corto periodo, es decir, no es requerido reducir la resistencia del refuerzo por razones de durabilidad. No obstante, debido a la variabilidad de las propiedades de los materiales, se considera recomendable aplicar los coeficientes de seguridad parcial para el diseño bajo ELU, pero para tener un rango de posibles resultados se decide hacer también un segundo cálculo sin ellos. Sin más demos paso a la formulación.

2.2.1.1 Datos



HORMIGÓN	
$f_{ck} = 30\text{MPa}$	
$\gamma_c = 1.5$	
GFRP	
$f_{fk} = 1350\text{MPa}$	
$E_f = 60\text{GPa}$	
$\eta_{env} = 1$	
$\gamma_m = 1.2$	
ACERO	
$f_{yk} = 400\text{MPa}$	
$E_s = 200\text{GPa}$	
$\gamma_s = 1.15$	

Fig. 2.2: Datos

Geométricos

Altura de la sección	$h = 0.250 \cdot \text{m}$
Ancho de la sección	$b = 0.200 \cdot \text{m}$
Recubrimiento mecánico inferior	$c = 0.037 \cdot \text{m}$
Recubrimiento mecánico superior	$c_2 = 0.034\text{m}$
Canto útil	$d = h - c = 0.213\text{m}$
Longitud de la viga	$L_T = 2.8\text{m}$
Longitud entre apoyos	$L = 2.5\text{m}$
Distancia de apoyos a puntos de cargas	$a = \frac{L}{3} = 0.833\text{m}$

Hormigón

Resistencia característica del hormigón	$f_{ck} = 30\text{MPa}$
Coefficiente de seguridad parcial	$\gamma_c = 1.5$
Resistencia de diseño	$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 20\cdot\text{MPa}$
Resistencia media del hormigón a tracción	$f_{ct,m} = 0.3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 2.896\text{MPa}$
Resistencia media a flexotracción	$f_{ct,m,fl} = \max\left[\left(1.6 - \frac{h}{1000}\right) \cdot f_{ct,m} \cdot f_{ct,m}\right] = 3.91\text{MPa}$
Módulo de deformación secante	$E_{cm} = 8500 \sqrt[3]{(f_{ck} + 8)} = 28.577\text{GPa}$
Deformación ultima	$\epsilon_{cu} = 0.0035$
Deformación de rotura a compresión simple	$\epsilon_{c0} = 0.002$
Factor de profundidad de la fibra neutra	$\lambda = 0.8$
Factor de eficacia a compresión	$\eta = 1$

GFRP

Resistencia característica	$f_{fk} = 1350\cdot\text{MPa}$
Módulo elástico	$E_f = 60000\cdot\text{MPa}$
Coefficiente de seguridad parcial	$\gamma_m = 1.2$
Factor reductor por durabilidad	$\eta_{env} = 1$
(Se toma igual a la unidad porque se considera que el ensayo es a corta duración y las propiedades del material compuesto no se ven reducidas)	
Resistencia de diseño	$f_{fd} = \frac{f_{fk}}{\eta_{env} \cdot \gamma_m} = 1.125 \times 10^3 \cdot \text{MPa}$
Deformación última de diseño	$\epsilon_{fu} = \frac{f_{fd}}{E_f} = 0.019$

Acero

Resistencia característica del acero

$$f_{yk} = 400 \text{ MPa}$$

Módulo elástico

$$E_s = 200000 \text{ MPa}$$

Coeficiente de seguridad parcial

$$\gamma_s = 1.15$$

Resistencia de diseño

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 347.826 \text{ MPa}$$

Armadura superior de portaestribos

Área de armadura superior de acero

$$A_s = \left[2 \cdot \frac{(6 \cdot \text{mm})^2}{4} \cdot \pi \right] = 0.565 \text{ cm}^2$$

Número de barras

$$n_2 = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_{s2} = 6 \text{ mm}$$

2.2.1.2 Estado Límite Último

2.2.1.2.1 Armadura longitudinal inferior a tracción

Primeramente se procede a calcular la cuantía balanceada de la sección, de esta manera se tiene referencia de la cantidad de armadura a partir de la cual se pertenece al dominio 4.

$$\rho_{fb} = \frac{f_{cd}}{f_{fd}} \cdot \left(\eta \cdot \lambda \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} + \frac{A_s \cdot f_{yd}}{U_c} \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_{fu}) \right) = 2.225 \times 10^{-3}$$

$$A_{fb} = \rho_{fb} \cdot b \cdot d = 0.948 \cdot \text{cm}^2 \quad (\text{Área de de GFRP que balancea la sección})$$

Luego tan sólo con una barra del 12 ya sería suficiente para provocar que la sección se encuentre en dominio 4

Siendo:

Capacidad mecánica de la sección

$$U_c = f_{cd} \cdot b \cdot d = 852 \text{ kN}$$

Rendimiento de la armadura superior de acero, suponiendo que se encuentra en dominio 4

$$\text{rend}_{s2}(\epsilon_f)$$

$$\text{rend}_{s2}(\epsilon_f) = \begin{cases} \epsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \left(\frac{\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_f} - \frac{c_2}{d}}{1 - \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_f}} \right) & \text{if } \left[\epsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \left(\frac{\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_f} - \frac{c_2}{d}}{1 - \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_f}} \right) \right] \leq 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Se necesita saber para qué momento se dimensiona la sección de tal manera que se encuentre en dominio 4. Para ello, se va a mostrar de forma gráfica el momento que soportara la sección en función de la deformación del GFRP, suponiendo que la fibra más comprimida del hormigón se encuentra en su estado último de deformación (es decir, se impone el diseño en dominio 4). De esta gráfica se toma un momento tal que el refuerzo experimente una deformación inferior a su deformación límite, pues en este punto la sección podría romper por tracción del refuerzo en vez de compresión del hormigón (sección balanceada). Para asegurarse de esto, se toma un momento en el que las barras desarrollen una deformación inferior al 75% de su deformación última, disponiendo así de un margen de seguridad mínimo, y tal que el momento y por tanto la carga última no exceda de 100kN establecidos inicialmente.

$$M(\epsilon_f) = \lambda \cdot \eta \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_f} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_f} \right) \cdot U_c \cdot d + A_s \cdot f_{yd} \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_f) \cdot d \cdot \left(1 - \frac{c_2}{d} \right)$$

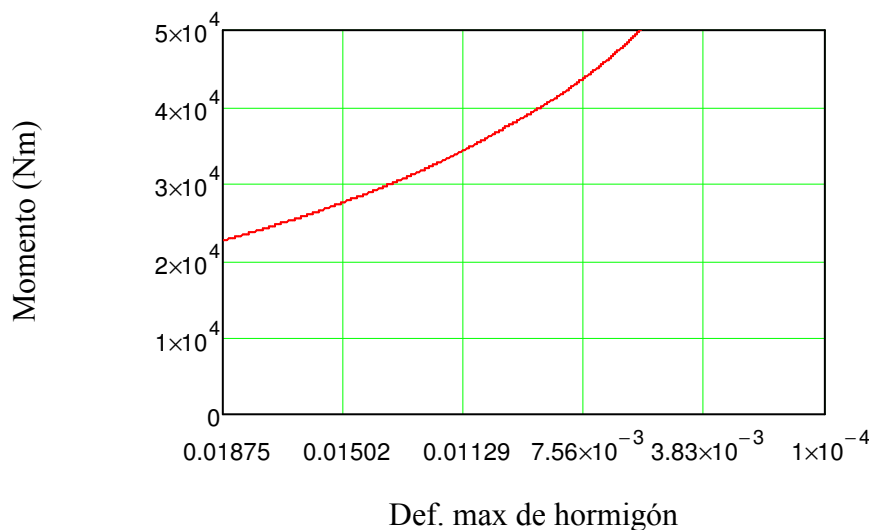


Fig. 2.3: Momento en función de la deformación del GFRP suponiendo que se encuentra en dominio 4

El momento que logra todo lo anterior es:

$$M_d = 31 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

(Momento de diseño)

Con este momento de diseño y planteando el sistema de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones ya es posible deducir el área de refuerzo necesaria a tracción.

$$\left| \begin{array}{l} v_c + \omega_2 \cdot \text{rend}_{s2} = \omega_1 \\ \mu_d = \mu_c + \mu_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Equilibrio de fuerzas)} \\ \text{(Equilibrio de momentos)} \end{array}$$

Siendo:

Resultante de compresión en el hormigón $v_c = \eta \cdot \lambda \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_f + \epsilon_{cu}}$

Capacidad mecánica de la armadura inferior $\omega_1 = \rho_f \cdot \frac{E_f \cdot \epsilon_f}{f_{cd}}$

Capacidad mecánica de la armadura superior $\omega_2 = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{U_c}$

Momento de diseño adimensional $\mu_d = \frac{M_d}{U_c \cdot d}$

Momento adimensional absorbido por el hormigón $\mu_c = v_c \cdot \left(1 - \frac{v_c}{2 \cdot \eta} \right)$

Momento adimensional absorbido por la armadura superior $\mu_2 = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{U_c} \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_f) \cdot \left(1 - \frac{c_2}{d} \right)$

Área necesaria a tracción $A_{f.nec} = 2.148 \text{cm}^2$

Armadura realmente dispuesta a tracción

Numero de barras a tracción $n_1 = 2$

Diámetro de las barras $\phi_f = 12 \text{mm}$

Área dispuesta $A_f = \frac{2 \cdot \phi_f^2}{4} \cdot \pi = 2.262 \text{cm}^2$

Ahora hay que comprobar el momento último soportado por la sección con la armadura real. Para tener una idea del rango de valores sobre el que puede oscilar el momento último se hace un segundo cálculo sin tener en cuenta los coeficientes de seguridad parcial de los materiales.

Aplicando de nuevo ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos pero siendo ahora dato la armadura de la sección y variable desconocida el momento resistente último.

$$\left| \begin{array}{l} v_c + \omega_2 \cdot \text{rend}_{s2} = \omega_1 \\ \mu_u = \mu_c + \mu_2 \end{array} \right.$$

Momento último con coeficientes de seguridad $M_{uc} = \mu_u \cdot U_c \cdot d = 31.672 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Momento último sin coeficientes de seguridad $M_{us} = \mu_u \cdot U_c \cdot d = 39.515 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Por lo tanto la carga (Q) que produce el agotamiento por flexión de la pieza, con ayuda del análisis previo de esfuerzos introducido al inicio del capítulo 2, es:

Con coeficientes de seguridad

$$\text{Momento que produce el peso (P)} \quad M_p = \frac{L^2 \cdot P}{8} - \frac{L_a^2}{2} \cdot P = 0.924 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$\text{Carga Q teniendo en cuenta el peso (P)} \quad Q_{fc} = 6 \cdot \frac{M_{uc} - M_p}{L} = 73.798 \text{ kN}$$

Sin coeficientes de seguridad

$$\text{Momento que produce el peso (P)} \quad M_p = 0.924 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$\text{Carga Q teniendo en cuenta el peso (P)} \quad Q_{fs} = 6 \cdot \frac{M_{us} - M_p}{L} = 92.622 \text{ kN}$$

2.2.1.2.2 Armadura de cortante

En este apartado se pretende calcular la armadura transversal necesaria y el cortante de agotamiento de la pieza con la armadura dispuesta. En los tercios extremos de la viga es donde se produce el máxima cortante, siendo en él prácticamente constante, mientras que en el tramo central se puede considerar nulo. A efectos de experimentación, para no influenciar la fisuración, en el tercio central no se dispone de armadura transversal debido a que el despreciable cortante existente puede ser absorbido, sin mucho problema, por el hormigón. Sin embargo, en los tercios extremos, más la mitad de un canto útil hacia el interior de la viga, se dimensiona los estribos para absorber el máximo cortante solicitado por la carga de agotamiento (Q), más el peso propio en los extremos (P) y más un margen de seguridad del 10%, pues la formulación suele ser bastante conservativa.

Máximo cortante de diseño

$$\text{Cortante debido al peso propio} \quad V_p = \frac{L \cdot P}{2} = 1.5 \text{ kN}$$

$$\text{Cortante debido a la carga de agotamiento} \quad V_q = \frac{73.798 \text{ kN}}{2} = 36.899 \text{ kN}$$

$$\text{Cortante de diseño} \quad V_d = 1.1 \cdot (V_p + V_q) = 42.239 \text{ kN}$$

El Estado Límite de Agotamiento por esfuerzo cortante se puede alcanzar, ya sea por agotarse la resistencia a compresión del alma, o por agotarse su resistencia a tracción. En consecuencia, es necesario comprobar que se cumple simultáneamente:

$$V_d \leq V_{u1}$$

$$V_d \leq V_{u2}$$

Donde:

V_d = Esfuerzo cortante de cálculo.

V_{u1} = Esfuerzo cortante de agotamiento por compresión oblicua en el alma.

V_{u2} = Esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alma.

Comprobación por compresión oblicua del alma

Esfuerzo cortante por agotamiento a compresión oblicua en el alma

$$V_{u1} = k \cdot f_{1cd} \cdot d \cdot b \cdot \left[\frac{\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\theta)}}{1 + \left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right)^2} \right] = 255.6 \text{ kN}$$

Siendo:

Coeficiente que depende del esfuerzo axial

$$k = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma'_{cd} = 0 \\ 1 + \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} & \text{if } 0 < \sigma'_{cd} \leq 0.25 \cdot f_{cd} \\ 1.25 & \text{if } 0.25 \cdot f_{cd} < \sigma'_{cd} \leq 0.5 \cdot f_{cd} \\ 2.5 \cdot \left(1 - \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}}\right) & \text{otherwise} \end{cases} = 1$$

Resistencia a compresión del hormigón

$$f_{1cd} = \begin{cases} 0.6 \cdot f_{ck} & \text{if } f_{ck} \leq 60 \cdot \text{MPa} \\ \left(0.9 - \frac{f_{ck}}{200}\right) \cdot f_{ck} & \text{otherwise} \end{cases} = 12 \text{ MPa}$$

Ángulo de las armaduras transversales respecto al eje de la pieza

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Ángulo entre las bielas de compresión Del hormigón y eje de la pieza (el Task Group 9.3 recomienda que se escoja Igual a 45° para el refuerzo con FRP)

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Luego se cumple que $V_d \leq V_{u1}$

Comprobación por tracción del alma

Se suele dividir en suma de dos términos, una debido a la contribución del hormigón y otro a las de las armaduras transversales

Contribución del hormigón [18]:

$$V_{cu} = \left[\frac{0.15}{\gamma_c} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200 \cdot \text{mm}}{d}} \right) \cdot \sqrt{100 \cdot \frac{A_f}{b \cdot d} \cdot \frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\varepsilon \cdot f_{ck} \cdot \text{MPa}^2} \right] \cdot d \cdot b = 18.508 \cdot \text{kN}$$

Siendo:

Área equivalente de acero $A_f \cdot \frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\varepsilon = 1.525 \text{ cm}^2$

Relación entre la máxima deformación permitida en el FRP y la deformación de elástica del acero $\phi_\varepsilon = \frac{0.0045}{0.002} = 2.25$

Contribución de la armadura transversal

$$V_{su}(A_{st.nec}) = z \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\theta)} \right) \cdot A_{st.nec} \cdot f_{yd}$$

Siendo:

Brazo mecánico $z = 0.9 \cdot d = 0.192 \text{ m}$

Luego planteando que la suma de sendas contribuciones debe mayor o igual que la sollicitación de diseño, se puede despejar la armadura transversal necesaria.

$$V_d \geq V_{su} + V_{cu}$$

Área de refuerzo necesaria a cortante por unidad de longitud

$$A_{st.nec} = 3.559 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Separación entre estribos (cumpliendo las condiciones de separación según EHE)

$$s_t = 0.15 \cdot \text{m}$$

Área necesaria de los estribos

$$A'_{st.nec} = s_t \cdot A_{st.nec} = 0.534 \cdot \text{cm}^2$$

Área de estribos realmente dispuesta

Número de ramas

$$n_e = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_e = 6 \text{ mm}$$

Área de armadura dispuesta a cortante por unidad de longitud

$$A_{st} = \frac{A'_{st}}{s_t} = 3.733 \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Aplicando la misma formulación pero conocida la armadura transversal, se puede calcular cuál es la carga de agotamiento por cortante. Igualmente al caso de flexión, para tener un rango de posibles valores se hace un segundo cálculo sin coeficientes de reductores.

Cortante último con coeficientes reductores $V_{uc} = 43.401\text{kN}$

Cortante último sin coeficientes reductores $V_{us} = 56.39\text{kN}$

Luego la carga (Q) de agotamiento por cortante teniendo en cuenta el peso del elemento (P) es:

Con coeficientes de seguridad $Q_{v,c} = (V_{uc} - V_P) \cdot 2 = 83.802\text{kN}$

Sin coeficientes de seguridad $Q_{v,s} = (V_{us} - V_P) \cdot 2 = 109.780\text{kN}$

Como se puede ver estas cargas de agotamiento por cortante son superiores a las de flexión tal como se pretendía en el diseño.

2.2.1.2.3 Anclaje

El anclaje de las barras de FRP debe ser en prolongación recta debido a que no pueden ser dobladas. Según el fabricante, la adherencia de este tipo de barras es comparable a las de acero, pudiendo ser aplicada la normativa convencional.

Cálculo de la tensión de adherencia

$$\tau_{bd} = 2.25 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{f_{ct,k}}{\gamma_c} = 3.041 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Siendo:

Coeficiente relacionado con la calidad de la adherencia.

$$\eta_1 = 1$$

Coeficiente relacionado con el diámetro de la barra

$$\eta_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi_f \leq 32\text{mm} \\ \frac{(132\text{mm} - \phi_f)}{100\text{mm}} & \text{otherwise} \end{cases} = 1$$

Cálculo de la longitud básica de anclaje

$$l_b = \frac{\phi_f \cdot f_{fd}}{4 \cdot \tau_{bd}} = 110.973\text{cm}$$

La longitud básica de anclaje se calcula en base a la tensión máxima de la barra. Obviamente, debido a que este tipo de barras soportan extremadas tensiones, la longitud básica de anclaje es bastante considerable. No obstante, para este caso, gracias a que la viga se encuentra biapoyada, la tensión solicitada a partir del punto que se desea anclar, esto es, a partir de los apoyos, es nula y por tanto teóricamente no se necesitaría longitud de anclaje. Esto no es totalmente cierto, pues debido a la fisuración por cortante de la sección se produce un incremento de tensión en la armadura inferior aproximadamente igual al que provoca el momento demandado en

una sección $z \cdot \cotg(\theta)$ distante de la sección inicial (Véase capítulo 7 del bloque de teoría, “Incremento de tensión en armadura inferior debido a fisuración por esfuerzo cortante”).

Cálculo de la longitud neta de anclaje

$$l_{b.neta} = \beta \cdot l_b \cdot \frac{\sigma_{fd}}{f_{fd}} = 0.133 \text{ m}$$

Siendo:

Coeficiente de forma de la patilla $\beta = 1$

Tracción en la armadura inferior

$$\Delta T = \frac{V_d}{\tan(\theta)} - 0.5 \cdot (V_d - V_{cu}) \cdot \left(\frac{1}{\tan(\theta)} + \frac{1}{\tan(\alpha)} \right) = 30.374 \cdot \text{kN}$$

Tensión a partir de la sección a anclar $\sigma_{fd} = \frac{\Delta T}{A_f} = 134.399 \text{ MPa}$

2.2.1.3 Estado Límite de Servicio

En esta parte del documento se van a calcular y analizar el comportamiento de la pieza antes las cargas de servicio. En concreto se va a estudiar la evolución de la flecha, fisuración y fibra neutra. Recordar que en este estado de comprobación no se reduce las propiedades de los materiales por los coeficientes de seguridad parcial. Además a continuación se recopila los datos adicionales, que se han calculado en el apartado anterior, y son útiles en este punto.

Área de armadura inferior: $A_f = \frac{2 \cdot \phi_f^2}{4} \cdot \pi = 2.262 \text{ cm}^2$

Numero de barras $n_1 = 2$

Diámetro de las barras $\phi_f = 12 \text{ mm}$

Cuantía inferior a tracción $\rho_1 = \frac{A_f}{b \cdot d} = 5.305 \times 10^{-3}$

Área de armadura superior $A_s = \left[2 \cdot \frac{(6 \text{ mm})^2}{4} \cdot \pi \right] = 0.565 \text{ cm}^2$

Numero de barras $n_2 = 2$

Diámetro de las barras $\phi_s = 6 \text{ mm}$

Cuantía superior a compresión $\rho_2 = \frac{A_s}{b \cdot d} = 1.327 \times 10^{-3}$

2.2.1.3.1 Cálculo de la flecha

Debido que el experimento es a corto periodo, sólo se va a calcular la flecha instantánea. Para ello, en primera aproximación, se aplicará la fórmula de resistencia de materiales tomando, tanto el módulo de deformación e inercia de la sección, constantes en toda la pieza. Realmente no es así, porque el diagrama de comportamiento del hormigón es una parábola y el módulo elástico por tanto variable. A igual que la inercia, que varía a lo largo de la pieza según el grado de fisuración. No obstante, las normativas abogan por dicha formulación pues es bastante simple y con suficiente precisión. En el caso de elementos reforzados con FRP parece ser que la inercia equivalente calculada según la fórmula de Branson [14] sobrestima la rigidez de la misma y predice flechas menores de las experimentadas. El código ACI, a lo largo del tiempo, a propuesto varias modificaciones de esta fórmula para corregir este defecto, todas ellas sin falta de controversia por parte de muchos investigadores. En este apartado se van a calcular la flecha con las modificaciones recomendadas por el código ACI y según una última formulación propuesta Bischoff and Scanlon [13].

Módulo de deformación $E_{cm} = 8500 \sqrt[3]{(f_{ck} + 8)} = 28.577 \text{ GPa}$

Inercia Bruta de la sección $I_b = \frac{b \cdot h^3}{12} = 2.604 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

Inercia fisurada de la sección

$$I_f = b \cdot \frac{x^3}{3} + n_f \cdot A_f \cdot (d - x)^2 + n_s \cdot A_s \cdot (x - c_2)^2 = 1.77 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Relación entre el modulo del FRP y del hormigón $n_f = \frac{E_f}{E_{cm}} = 2.1$

Relación entre el módulo del acero y del hormigón $n_s = \frac{E_s}{E_{cm}} = 6.999$

Fibra neutra de la sección (suponiendo un comportamiento lineal)

$$x = d \cdot \left(\sqrt{n_f^2 \cdot \rho_1^2 + 2 \cdot n_f \cdot n_s \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 + 2 \cdot n_f \cdot \rho_1 + n_s^2 \cdot \rho_2^2 + 2 \cdot \frac{c_2}{d} \cdot n_s \cdot \rho_2 - n_f \cdot \rho_1 - n_s \cdot \rho_2} \right) = 0.03 \text{ m}$$

Inercia según fórmula de Branson adaptado por el código ACI 440.1R-03 (valido para sección fisurada)

$$I_e(M_a) = \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \cdot I_b \cdot \beta_d + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_f$$

Momento de fisuración $M_f = f_{ct.m.fl} \cdot W_b = 8.146 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Módulo bruto resistente de la sección $W_b = \frac{b \cdot h^2}{6} = 2.083 \times 10^{-3} \cdot \text{m}^3$

Coeficiente corrector de la fórmula de Branson $\beta_d = \alpha_b \cdot \left(\frac{E_f}{E_s} + 1 \right) = 0.65$

Inercia según fórmula de Branson adaptado por el código ACI 440.1R-06 (valido para sección fisurada)

$$I'_e(M_a) = \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \cdot I_b \cdot \beta'_d + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_f$$

Coeficiente corrector de la formula de Branson $\beta'_d = \frac{1}{5} \cdot \frac{P_1}{P_{fb}} = 0.443$

Inercia equivalente propuesta por Bischoff and Scanlon

$$I''_e(M_a) := \frac{I_f}{1 - \eta_e \cdot \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^2}$$

Siendo:

$$\eta_e = 1 - \frac{I_f}{I_b} = 0.932$$

Se pretende analizar la evolución de flecha en función de la carga, así que hay que distinguir dos estados. Uno sin fisurar donde se toma la inercia bruta de la sección; y otro fisurado en el cual se toma la inercia equivalente calculado mediante los diferentes procedimientos

Flecha utilizando la adaptación dada por el ACI 440.1R-03

$$y_i(Q) = \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I'_e \left(\frac{Q}{6} \cdot L + M_p \right)} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I'_e \left(\frac{Q}{6} \cdot L + M_p \right)} \right] & \text{if } Q \geq Q_f \\ \frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I_b} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I_b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Flecha utilizando la adaptación dada por el ACI 440.1R-06

$$y'_i(Q) := \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I'_e \left(M_{ley} \left(Q, \frac{L}{2} \right) \right)} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I'_e \left(M_{ley} \left(Q, \frac{L}{2} \right) \right)} \right] & \text{if } Q \geq Q_f \\ \frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I_b} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I_b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Flecha utilizando la recomendación dada por Bischoff and Scanlon

$$y''_i(Q) := \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I''_e \left(M_{ley} \left(Q, \frac{L}{2} \right) \right)} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I''_e \left(M_{ley} \left(Q, \frac{L}{2} \right) \right)} \right] & \text{if } Q \geq Q_f \\ \frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I_b} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I_b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

La primera sentencia, en cada una de las ecuación anteriores, equivale a la sección fisurada, por lo que se debe de cumplir que la carga aplicada es mayor que la de fisuración (Q_f Véase a continuación su cálculo). Quedando que la sentencia siguiente equivale al tramo inicial de sección sin fisurar. Hay que notar también, que en cada sentencia se distingue dos sumando, uno es el propio de la flecha debido a la carga Q y el otro debido al peso del elemento (P).

Carga Q de fisuración

$$Q_f = 6 \cdot \frac{M_f - M_p}{L} = 17.334 \cdot \text{kN}$$

Momento debido al peso

$$M_p = 0.924 \text{m} \cdot \text{kN}$$

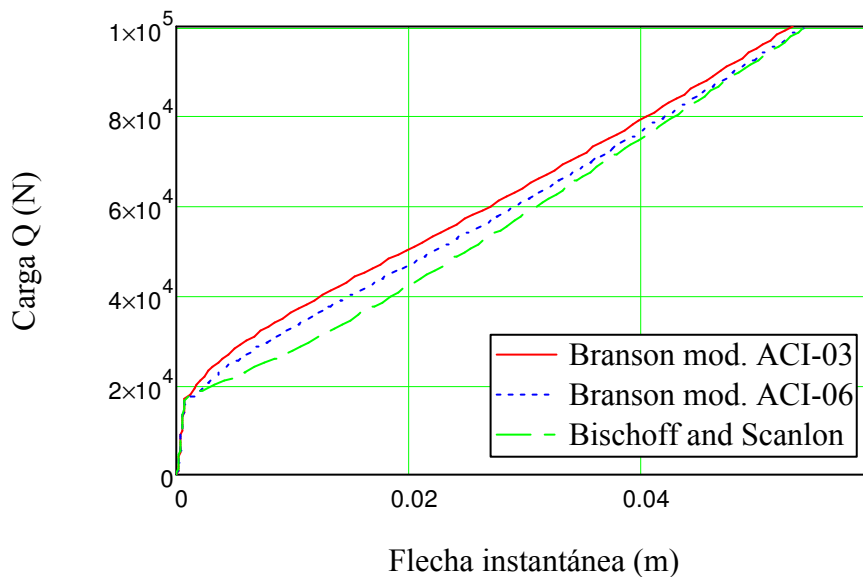


Fig. 2.4: Evolución de la flecha en función de la carga

2.2.1.3.2 Cálculo de la fisuración

En este punto se pretende estudiar la evolución de la abertura de fisura en función de la carga Q . Para ello se puede distinguir dos estados, uno en el que la carga no llega a fisurar la sección y otro en el que sí que se supera dicha carga (Q_f).

Cálculo de la separación media entre fisuras

$$s_m = 2 \cdot c + 0.2 \cdot s + 0.4 \cdot k_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{\phi_f \cdot A_{\text{ceficaz}}}{A_f} = 164.619 \cdot \text{mm}$$

Distancia entre barras a tracción

$$s = \begin{cases} \frac{b}{n_1} & \text{if } \frac{b}{n_1} \leq 15 \cdot \phi_f \\ 15 \cdot \phi_f & \text{otherwise} \end{cases} = 100 \cdot \text{mm}$$

Coefficiente que representa la influencia del diagrama de tracciones en la sección

$$k_1 = 0.125$$

Coefficiente que considera las propiedades de adherencia de las barras

$$\beta_1 = 1$$

Área de hormigón de la zona de recubrimiento, en donde las barras a tracción influyen de forma efectiva en la abertura de las fisuras.

$$A_{\text{ceficaz}} = \left(c + \frac{\phi_f}{2} + 7.5 \cdot \phi_f \right) \cdot b = 2.66 \times 10^4 \cdot \text{mm}^2$$

Cálculo del alargamiento medio:

$$\epsilon_{fm}(Q) = \frac{\sigma_f(Q)}{E_f} \left[1 - k_2 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{fr}}{\sigma_f(Q)} \right)^2 \right] \quad (\text{Alargamiento en función de la carga } Q)$$

Tensión de servicio de la armadura inferior en la hipótesis de sección fisurada

$$\sigma_f(Q) = \frac{Q \cdot \frac{L}{6} + M_p}{0.8 \cdot d \cdot A_f}$$

Tensión de la armadura en la sección fisurada en el instante en que se fisura el hormigón

$$\sigma_{fr} = \frac{M_f}{0.8 \cdot d \cdot A_f} = 211.535 \cdot \text{MPa}$$

Coefficiente que informa sobre el tipo de carga

$$k_2 = 1$$

Coefficiente que considera las propiedades de adherencia de las barras

$$\beta_2 = 1$$

Cálculo de la abertura de fisura en función de la carga

$$w_k(Q) = \begin{cases} (\beta \cdot s_m \cdot \varepsilon_{fm}(Q)) & \text{if } Q \geq Q_f \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Coeficiente que relaciona la abertura media de fisura con el valor característico

$$\beta = 1.7$$

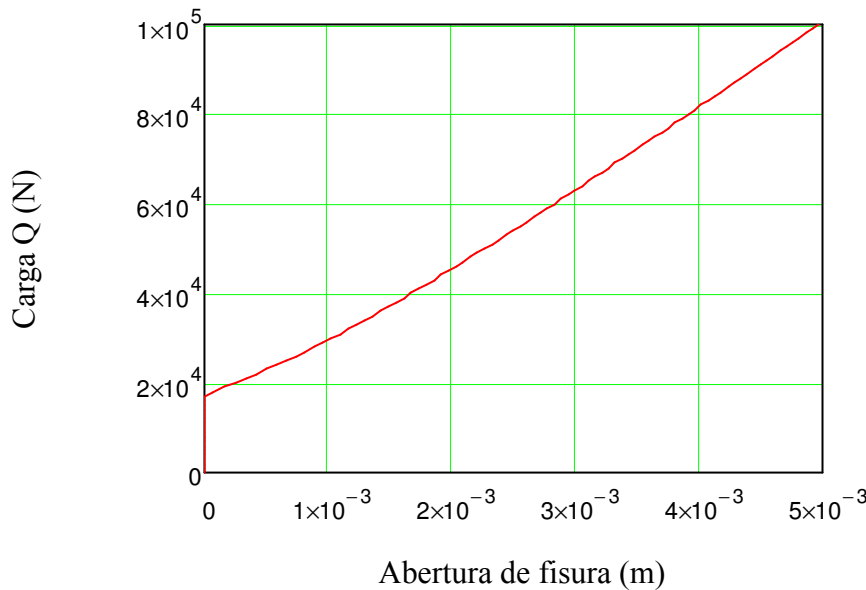


Fig. 2.5: Evolución de la abertura de fisura en función de la carga Q.

2.2.1.3.3 Fibra neutra

En este apartado se pretende estudiar la evolución de la fibra neutra, en la sección central de la viga, en función de la carga aplicada. Se toma como hipótesis inicial que la colaboración del hormigón a tracción es despreciable. Sin embargo, como se verá en la experimentación, esto no es totalmente cierto. Para cargas bajas, la influencia del hormigón a tracción es importante, tanto es así, que inicialmente es capaz de compensar el esfuerzo de compresión del hormigón, localizándose la fibra neutra en la mitad de la sección. Pero a medida que se incrementa la carga y la sección se empieza a fisurar, la capacidad de hormigón a tracción cae rápidamente, y es el refuerzo, ahora, quien absorbe este esfuerzo de tracción, deformándose para incrementar su capacidad y subiendo la fibra neutra. Este fenómeno se explicará y se intentará modelizar en el capítulo de discusión de resultados.

Para este caso simplificado, sin tener en cuenta la colaboración del hormigón a tracción, se utiliza el diagrama parábola-rectangular de hormigón. Para hallar la fibra neutra basta con plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en la sección, donde las incógnitas son las deformaciones tanto del hormigón en la fibra pésima como del refuerzo. Además recordar que se pretende estudiar su evolución, luego es necesario plantear un sistema de ecuaciones parametrizado en función del momento aplicado, tal que se tiene la deformación de la sección, o lo que es lo mismo

la fibra neutra, en función del momento aplicado que se traduce en carga. Véase a continuación la formulación.

Dado

$$A_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_f - A_s \cdot f_{yd} \cdot \text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) = \frac{b \cdot d}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \cdot \int_0^{\varepsilon_{ca}} \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c$$

$$M_a = \frac{d^2 \cdot b}{\varepsilon_f + \varepsilon_{ca}} \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon_{ca} \cdot \text{CG}(\varepsilon_{ca})}{(\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f)} \right] \cdot \int_0^{\varepsilon_{ca}} \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c + A_s \cdot f_{yd} \cdot \text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) \cdot (d - c_2)$$

$$S(M_a) = \text{resolver}(\varepsilon_{ca}, \varepsilon_f)$$

Donde las únicas incógnitas son:

- Deformación del hormigón en la fibra pésima ε_{ca}
- Deformación del refuerzo interno de FRP ε_f

M_a es el momento aplicado y es el parámetro del sistema de ecuaciones

$S(M_a)$ es la solución del sistema de ecuaciones parametrizado.

Recordar:

rend_{s2} es el rendimiento del refuerzo superior de acero tal como se define a continuación.

$$\text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) = \begin{cases} \varepsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \frac{\left(\frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} - \frac{c_2}{d} \right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \right)} & \text{if } \left[\varepsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \frac{\left(\frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} - \frac{c_2}{d} \right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \right)} \right] \leq 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\text{CG}(\varepsilon_{ca})$ es el centro de gravedad del diagrama parábola-rectangular en función de la deformación pésima del hormigón. Se define a continuación.

$$\text{CG}(\varepsilon_{ca}) = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{ca}} \varepsilon_c \cdot \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c}{\varepsilon_{ca} \cdot \left(\int_0^{\varepsilon_{ca}} \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c \right)}$$

Ya sólo falta calcular la carga aplicada para el momento soportado por la sección y la fibra neutra a través de la deformación pésima del hormigón y del refuerzo.

Carga Q para el momento aplicado M_a :

$$Q = (M_a - M_p) \cdot \frac{6}{L}$$

Momento debido al peso de la viga

$$M_p = 0.924m \cdot kN$$

Fibra neutra a partir de la deformación pésima del hormigón y del refuerzo

$$x = \frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_f} \cdot d$$

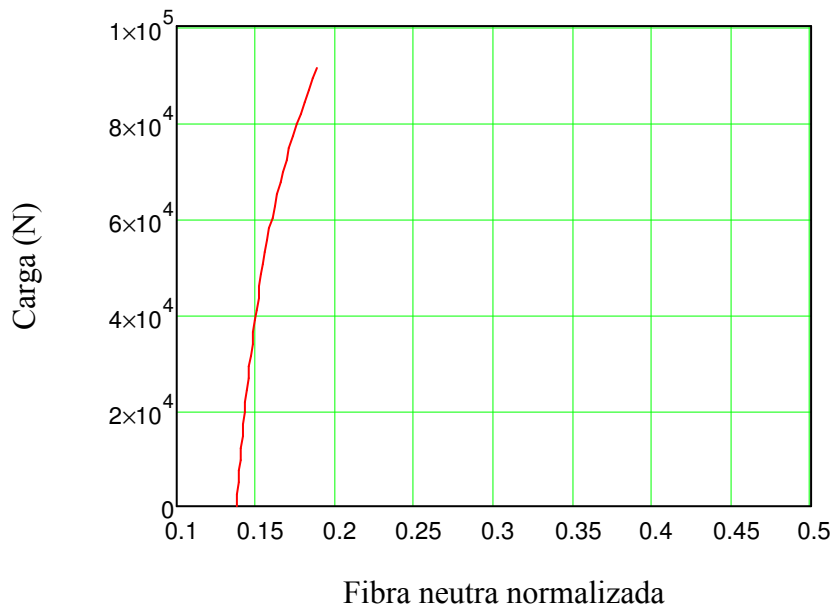


Fig. 2.6: Evolución de la fibra neutra normaliza en función de la carga Q para una sección central de la viga.

Y Puesto que se tiene la deformación pésima de hormigón a compresión en función de la carga aplicada, puede ser interesante representar su evolución.

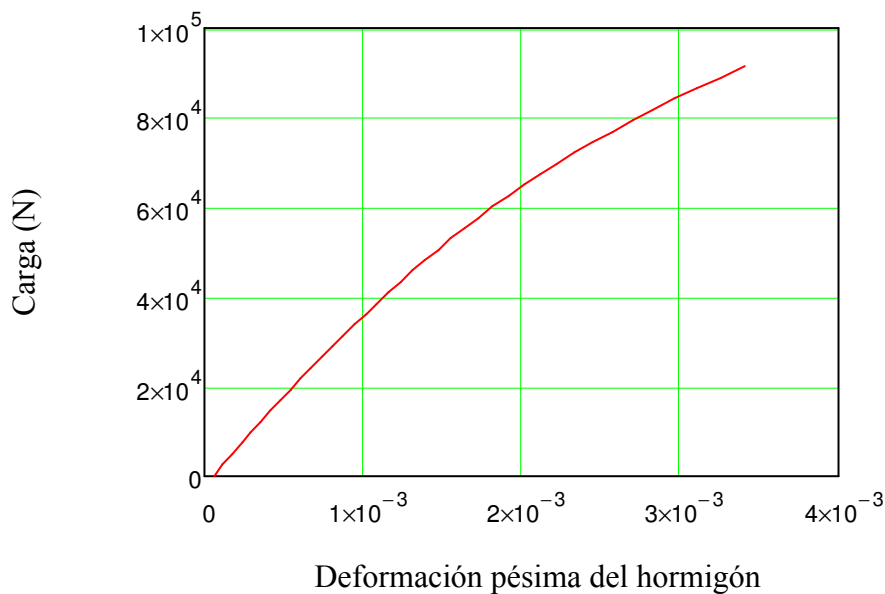


Fig. 2.7: Evolución de la deformación a compresión pésima del hormigón en función de la carga aplicada

2.2.1.3.4 Evolución de la curvatura en función del momento

Otra cuestión relevante es el estudio de la relación momento curvatura. Esta relación depende del producto del módulo de deformación por la inercia de la sección que fue ya calculada en el apartado de flecha instantánea. Luego la formulación general, independiente del método utilizado para calcular la inercia equivalente, es como sigue

$$\chi(M_a) = \begin{cases} \frac{M_a}{E_{cm} \cdot I_e(M_a)} & \text{if } M_a > M_f \\ \frac{M_a}{E_{cm} \cdot I_b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Donde:

M_a es el momento aplicado siendo este un parámetro de la ecuación

$I_e(M_a)$ es la inercia de la sección por los tres métodos propuestos: Branson modificado por ACI 440.1R-03; Branson modificado por ACI 440.1R-06; Bischoff and Scanlon

I_b es la inercia bruta de la sección

E_{cm} es el módulo de deformación secante del hormigón

En la formulación se aprecia dos sentencias condicionales. La segunda de ellas se utiliza cuando el momento aplicado es inferior al de fisuración y por tanto la inercia de la sección corresponde con la bruta. Sin embargo, cuando el momento supera el de fisuración, la inercia de la sección es intermedia entre la bruta y la fisurada completamente. Es en este momento cuando se utiliza la inercia equivalente calculada por los diferentes métodos propuestos. A continuación se muestra una gráfica de la evolución de la curvatura de la sección central en función del momento soportado.

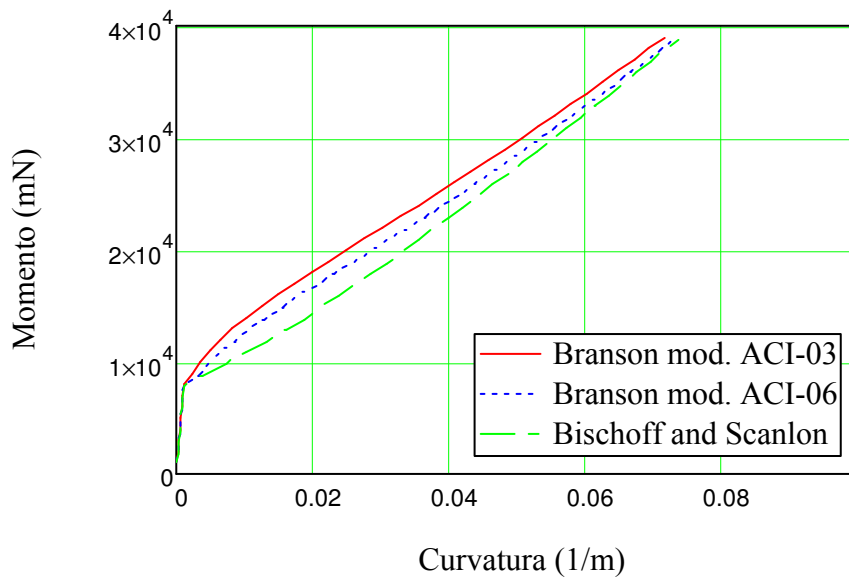


Fig. 2.8: Gráfica momento curvatura para una sección central de la viga

2.2.1.4 Croquis de la viga

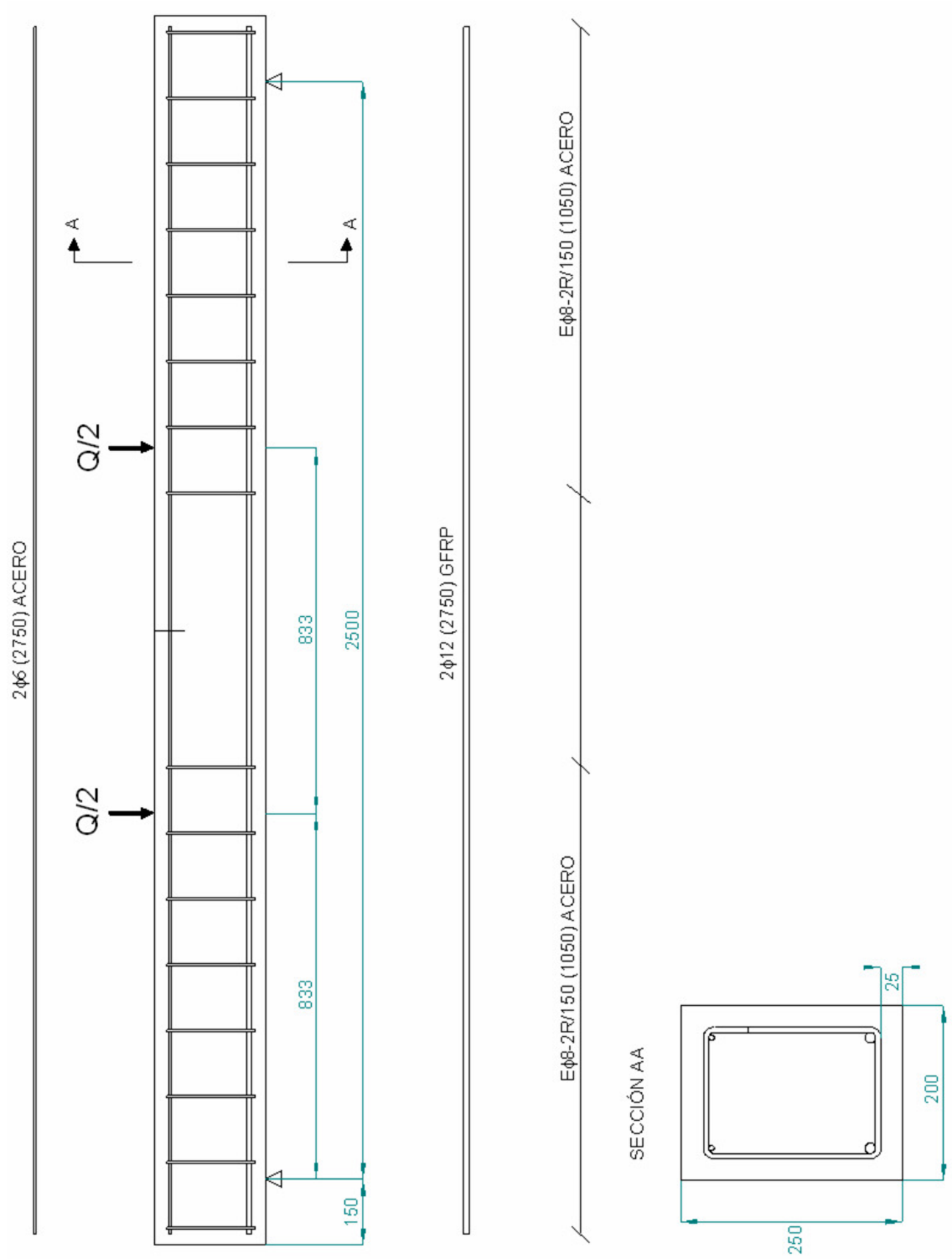


Fig. 2.9: Croquis de la viga por rotura del hormigón

2.2.2 Rotura del elemento por tracción de la armadura inferior

En esta sección se proyecta la viga tal que el fallo sea producido por tracción de la armadura longitudinal inferior de GFRP, con lo cual se debe disponer una cuantía inferior a la balanceada. Para el diseño hay que tener especialmente en cuenta las propiedades de las barras de GFRP. Concretamente, el bajo módulo elástico promueve que la fibra neutra sea muy alta y por tanto el bloque de compresión del hormigón sea muy pequeño. Si unimos además la alta resistencia, el pequeño bloque de compresión del hormigón debe de compensar la fuerza resistida por la armadura inferior, con lo cual, conlleva que se deba colocar muy poca armadura y un hormigón suficientemente resistente para asegurar la rotura del refuerzo a tracción. Sin embargo, aquí es importante recordar el estudio sobre la influencia del tipo de hormigón en vigas a flexión armadas con FRP (Véase capítulo 11 del bloque teórico). La conclusión más relevante es que: el aumento del momento resistente (o lo que es lo mismo, paquete de compresión en el hormigón), a medida que se incrementa la resistencia del hormigón, es más fuerte en la región de hormigones convencionales que en la de alta resistencia debido a la mayor fragilidad que presentan. Es más, en éste último puede llegarse el caso en el que la curva se estabilice y no aumente el momento resistente. Con lo cual, desde el punto de vista óptimo, es recomendable el uso de hormigones convencionales menores de 50 MPa. En cuanto a la armadura inferior, se recomienda que se deba disponer una cuantía mínima. Esto es, se cree conveniente colocar al menos dos barras de diámetro 8 mm para asegurar una adecuada trasferencias de esfuerzos entre el elemento, a través del hormigón, a los refuerzos. Una forma de elegir el tipo de hormigón apropiado, de manera que se cumpla todas las recomendaciones, es estudiar la cuantía balanceada en función del tipo de hormigón. Y por tanto elegir aquel en el que la cuantía balanceada sea algo superior a la mínima recomendada para promover una rotura del refuerzo.

Cuantía longitudinal inferior mínima recomendable $\rho_{f.min} = \frac{1\text{cm}^2}{b \cdot d} = 2.326 \times 10^{-3}$

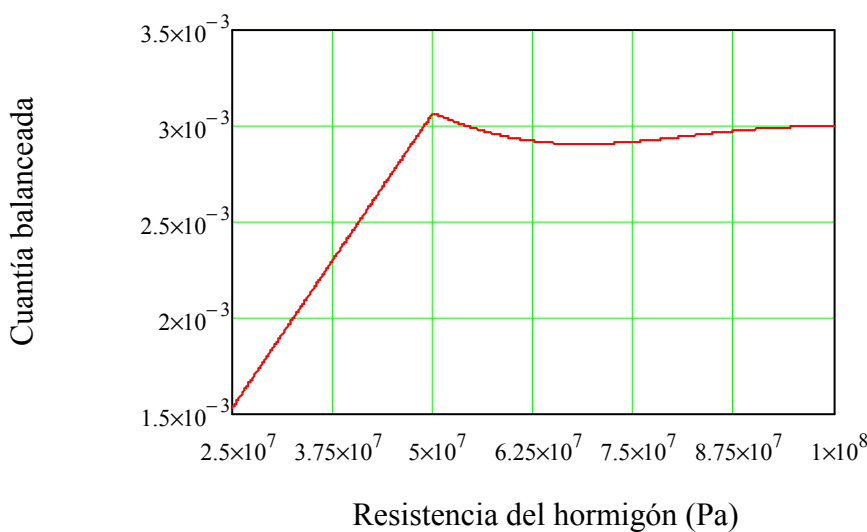


Fig. 2.10: Cuantía balanceada en función del tipo de hormigón

Notar que a partir de 50 MPa la cuantía se estabiliza, esto quiere decir que el paquete de compresiones en el hormigón se estabiliza y por tanto también la cuantía necesaria para compensarlo. También reseñar que con un hormigón HA-50 la cuantía balanceada supera con suficiente holgura la mínima, y es por tanto el tipo de hormigón elegido para esta viga.

2.2.2.1 Datos

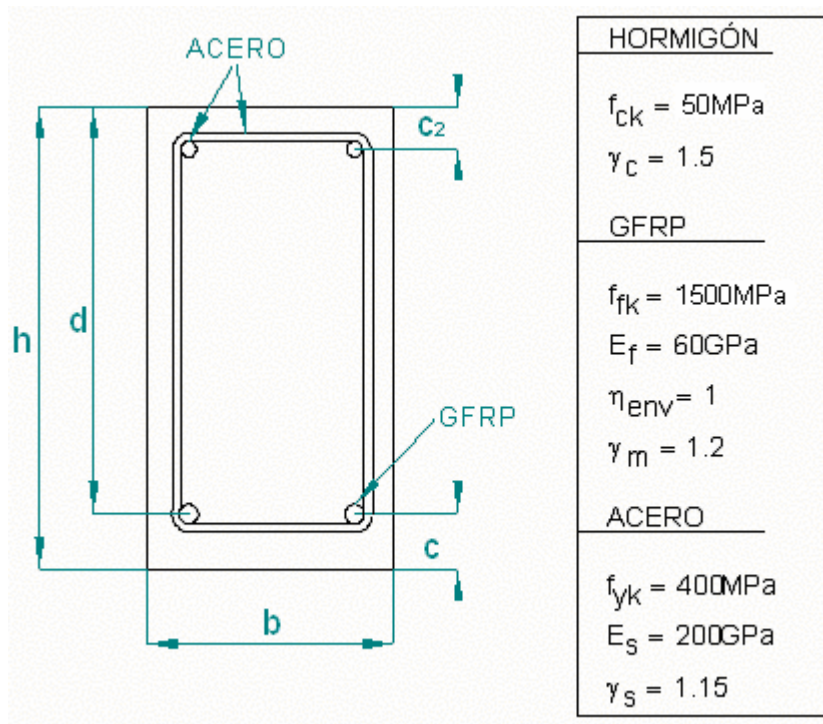


Fig. 2.11: Datos

Geométricos

Altura de la sección	$h = 0.250 \cdot m$
Ancho de la sección	$b = 0.200 \cdot m$
Recubrimiento mecánico inferior	$c = 0.035 \cdot m$
Recubrimiento mecánico superior	$c_2 = 0.034m$
Canto útil	$d = h - c = 0.215m$
Longitud de la viga	$L_T = 2.8m$
Longitud entre apoyos	$L = 2.5m$
Distancia de apoyos a puntos de cargas	$a = \frac{L}{3} = 0.833 m$

Hormigón

Resistencia característica del hormigón	$f_{ck} = 50\text{MPa}$
Coeficiente de seguridad parcial	$\gamma_c = 1.5$
Resistencia de diseño	$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 33.333\text{MPa}$
Resistencia media del hormigón a tracción	$f_{ct,m} = 0.3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 4.072\text{MPa}$
Resistencia media a flexotracción	$f_{ct,m,fl} = \max\left[\left(1.6 - \frac{h}{1000}\right) \cdot f_{ct,m}, f_{ct,m}\right] = 5.497\text{MPa}$
Módulo de deformación secante	$E_{cm} = 8500 \sqrt[3]{(f_{ck} + 8)} = 32.902\text{GPa}$
Deformación última	$\epsilon_{cu} = 0.0035$
Deformación de rotura a compresión simple	$\epsilon_{c0} = 0.002$
Factor de profundidad de la fibra neutra	$\lambda = 0.8$
Factor de eficacia a compresión	$\eta = 1$
Diagrama parábola-rectangular de hormigón	
$\sigma_c(\epsilon_c) = \begin{cases} f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}}\right)^n\right] & \text{si } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c0} \\ f_{cd} & \text{si } \epsilon_c > \epsilon_{c0} \end{cases}$	
Exponente de la parábola	$n = 2$

GFRP

Resistencia característica	$f_{fk} = 1500\text{MPa}$
Módulo elástico	$E_f = 60000\text{MPa}$
Coeficiente de seguridad parcial	$\gamma_m = 1.2$
Factor reductor por durabilidad	$\eta_{env} = 1$
(Se toma igual a la unidad porque se considera que el ensayo es a corta duración y las propiedades del material compuesto no se ven reducidas)	

Resistencia de diseño	$f_{fd} = \frac{f_{fk}}{\eta_{env} \gamma_m} = 1.25 \times 10^3 \cdot \text{MPa}$
Deformación última de diseño	$\epsilon_{fu} = \frac{f_{fd}}{E_f} = 0.021$

Acero

Resistencia característica del acero	$f_{yk} = 400 \text{MPa}$
Módulo elástico	$E_s = 200000 \text{MPa}$
Coefficiente de seguridad parcial	$\gamma_s = 1.15$
Resistencia de diseño	$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 347.826 \cdot \text{MPa}$

Armadura superior de portaestribos

Área de armadura superior de acero	$A_s = \left[2 \cdot \frac{(6 \cdot \text{mm})^2}{4} \cdot \pi \right] = 0.565 \text{cm}^2$
Número de barras	$n_2 = 2$
Diámetro de las barras	$\phi_{s2} = 6 \text{mm}$

2.2.2.2 Estado Límite Último

En este apartado se pretende calcular la armadura de la viga tal que su rotura sea por tracción de las barras inferiores. Por ello, debido a que el hormigón no alcanza la deformación última, el diagrama de comportamiento elegido para estos cálculos es el parábola-rectangular.

2.2.2.2.1 Cálculo de la armadura inferior

Se necesita saber para qué momento se dimensiona la sección de tal manera que se encuentre en dominio 2. Por ello, se va a mostrar, primeramente, el momento que soportaría la sección en función de la deformación del hormigón en la fibra más comprimida, suponiendo que el refuerzo interno se encuentra solicitado a su máxima tensión (Se fuerza el dominio 2). De esta gráfica se tomará un momento tal que la fibra más comprimida del hormigón no llegue a la deformación última, pues en este punto la sección podría romper por compresión del hormigón en vez de tracción del refuerzo interno. Para asegurarse de esto, se tomará el momento en el que la cara superior a compresión experimente una deformación alrededor del 80% de la deformación última. De esta manera se tendrá un margen de seguridad para que rompa certeramente por

tracción sin desaprovechar demasiado la capacidad del hormigón, pues de otra manera necesitaríamos secciones mayores.

$$M(\epsilon_{ca}) = \frac{b \cdot d^2}{\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu}} \cdot \left[1 - \frac{\epsilon_{ca} \cdot CG(\epsilon_{ca})}{(\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu})} \right] \cdot \int_0^{\epsilon_{ca}} \sigma_c(\epsilon_c) d\epsilon_c + A_s \cdot f_{yd} \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_{ca}) \cdot d \cdot \left(1 - \frac{c_2}{d} \right)$$

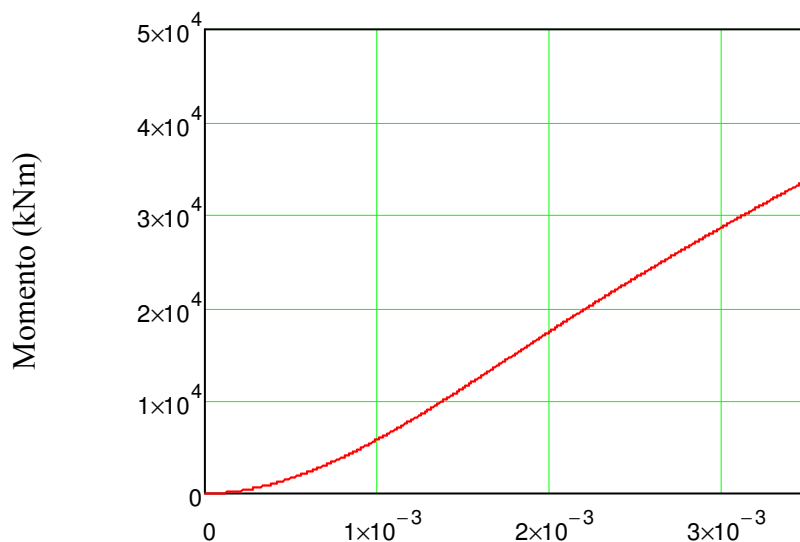
Deformación pésima del hormigón a compresión ϵ_{ca}

Rendimiento del refuerzo superior

$$\text{rend}_{s2}(\epsilon_{ca}) = \begin{cases} \epsilon_{fu} \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \left(\frac{\frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu}} - \frac{c_2}{d}}{1 - \frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu}}} \right) & \text{if } \epsilon_{fu} \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \left(\frac{\frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu}} - \frac{c_2}{d}}{1 - \frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu}}} \right) \leq 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Centro de gravedad del diagrama parábola-rectangular del hormigón

$$CG(\epsilon_{ca}) = 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_{ca}} \epsilon_c \cdot \sigma_c(\epsilon_c) d\epsilon_c}{\epsilon_{ca} \cdot \left(\int_0^{\epsilon_{ca}} \sigma_c(\epsilon_c) d\epsilon_c \right)}$$



Def. máxima de hormigón

Fig. 2.12: Momento resistente de la sección, suponiendo que se encuentra en dominio 2, en función de la deformación pésima del hormigón a compresión.

Por lo tanto el momento que logra lo anteriormente mencionado es:

$$M_d = 28 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \quad (\text{Momento de diseño})$$

Con este momento de diseño, y planteando las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en la sección se puede calcular la armadura inferior necesaria:

$$\left| \begin{array}{l} v_c + \omega_2 \cdot \text{rend}_{s2} = \omega_1 \quad (\text{Equilibrio de fuerzas}) \\ \mu_d = \mu_c + \mu_2 \quad (\text{Equilibrio de momentos}) \end{array} \right.$$

Siendo:

Resultante de compresión en el hormigón $v_c = \frac{1}{f_{cd} \cdot (\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu})} \cdot \int_0^{\epsilon_{ca}} \sigma_c(\epsilon_c) d\epsilon_c$

Capacidad mecánica de la armadura inferior $\omega_1 = \rho_f \cdot \frac{f_{fd}}{f_{cd}}$

Capacidad mecánica de la armadura superior $\omega_2 = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{U_c}$

Momento de diseño adimensional $\mu_d = \frac{M_d}{U_c \cdot d}$

Momento adimensional absorbido por el hormigón

$$\mu_c = \frac{1}{f_{cd} \cdot (\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu})} \cdot \left[1 - \frac{\epsilon_{ca} \cdot \text{CG}(\epsilon_{ca})}{(\epsilon_{ca} + \epsilon_{fu})} \right] \cdot \int_0^{\epsilon_{ca}} \sigma_c(\epsilon_c) d\epsilon_c$$

Momento adimensional absorbido por la armadura superior

$$\mu_2 = \frac{A_s}{U_c} \cdot f_{yd} \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_{ca}) \cdot \left(1 - \frac{c_2}{d} \right)$$

Área necesaria a tracción $A_{f,nec} = 1.097 \text{cm}^2$

Armadura realmente dispuesta a tracción

Número de barras a tracción $n_1 = 2$

Diámetro de las barras $\phi_f = 8 \text{mm}$

Área dispuesta $A_f = 2 \cdot \frac{(8 \text{mm})^2}{4} \cdot \pi = 1.005 \text{cm}^2$

Ahora hay que comprobar cuál es el momento último de la sección con las armaduras dispuesta. Esta comprobación se hace con los coeficientes de seguridad parcial de los materiales y sin ellos. Para ello sólo es necesario plantear de nuevo las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en la sección.

$$\left| \begin{array}{l} v_c + \omega_2 \cdot \text{rend}_{s2} = \omega_1 \\ \mu_u = \mu_c + \mu_2 \end{array} \right.$$

Momento último con coeficientes de seguridad $M_{uc} = \mu_u \cdot U_c \cdot d = 25.641 \text{ m} \cdot \text{kN}$

Momento último sin coeficientes de seguridad $M_{us} = \mu_u \cdot U_c \cdot d = 31.058 \text{ m} \cdot \text{kN}$

Por lo tanto la carga (Q) que produce el agotamiento por flexión de la pieza es:

Con coeficientes de seguridad

Momento que produce el peso (P) $M_p = \frac{L^2 \cdot P}{8} - \frac{L_a^2}{2} \cdot P = 0.924 \text{ m} \cdot \text{kN}$

Carga Q teniendo en cuenta el peso (P) $Q_{fc} = (M_{uc} - M_p) \cdot \frac{6}{L} = 59.321 \text{ kN}$

Sin coeficientes de seguridad

Momento que produce el peso (P) $M_p = 0.924 \text{ m} \cdot \text{kN}$

Carga Q teniendo en cuenta el peso (P) $Q_{fs} = (M_{us} - M_p) \cdot \frac{6}{L} = 72.322 \text{ kN}$

2.2.2.2.2 Cálculo de la armadura transversal

En este apartado se pretende calcular la armadura transversal necesaria y el cortante de agotamiento de la pieza. La disposición de los estribos es igual que la planteada en la viga por rotura a compresión del hormigón. Esto es, se deja libre de estribos el tercio central para no influenciar la fisuración. Los estribos de los tercios extremos se diseñan tal que la carga de agotamiento de estos debe ser superior que la de agotamiento por flexión. Luego, el cortante de diseño se puede establecer como aquel que provoca la carga de agotamiento a flexión, más el cortante debido al peso propio, más un margen de seguridad de un 10% como mínimo.

Máximo cortante de diseño

Cortante debido al peso propio $V_p = \frac{L \cdot P}{2} = 1.5 \text{ kN}$

Cortante debido a la carga Q de agotamiento $V_Q = \frac{59.321 \text{ kN}}{2} = 29.66 \text{ kN}$

Cortante de diseño $V_d = V_p + V_Q = 35 \text{ kN}$

El Estado Límite de Agotamiento por esfuerzo cortante se puede alcanzar, ya sea por agotarse la resistencia a compresión del alma, o por agotarse su resistencia a tracción. En consecuencia, es necesario comprobar que se cumple simultáneamente:

$$V_d \leq V_{u1}$$

$$V_d \leq V_{u2}$$

Donde:

V_d = Esfuerzo cortante de cálculo.

V_{u1} = Esfuerzo cortante de agotamiento por compresión oblicua en el alma.

V_{u2} = Esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alma.

Comprobación por compresión oblicua del alma

Esfuerzo cortante por agotamiento a compresión oblicua en el alma

$$V_{u1} = k \cdot f_{1cd} \cdot d \cdot b \cdot \left[\frac{\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\theta)}}{1 + \left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right)^2} \right] = 430 \text{ kN}$$

Siendo:

Coeficiente que depende del esfuerzo axil $k = 1$

Resistencia a compresión del hormigón $f_{1cd} = 0.6 \cdot f_{cd} = 20 \text{ MPa}$

Ángulo de las armaduras transversales respecto al eje de la pieza $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Ángulo entre las bielas de compresión Del hormigón y eje de la pieza (el Task Group 9.3 recomienda que se escoja igual a 45° para el refuerzo con FRP) $\theta = \frac{\pi}{4}$

Luego se cumple que $V_d \leq V_{u1}$

Comprobación por tracción del alma

Se suele dividir en suma de dos términos, una debido a la contribución del hormigón y otro a las de las armaduras transversales

Contribución del hormigón:

$$V_{cu} = \left[\frac{0.15}{\gamma_c} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200 \cdot \text{mm}}{d}} \right) \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \frac{A_f}{b \cdot d} \cdot \frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\epsilon \cdot f_{ck}} \right] \cdot d \cdot b = 16.817 \text{ kN}$$

Siendo:

Área equivalente de acero

$$A_f \cdot \frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\varepsilon = 0.679 \text{ cm}^2$$

Relación entre la máxima deformación permitida en el FRP y la deformación de elástica del acero

$$\phi_\varepsilon = \frac{0.0045}{0.002} = 2.25$$

Contribución de la armadura transversal

$$V_{su}(A_{st.nec}) = z \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\theta)} \right) \cdot A_{st.nec} \cdot f_{yd}$$

Siendo:

Brazo mecánico

$$z = 0.9 \cdot d = 0.194 \text{ m}$$

Luego planteando que la suma de sendas contribuciones debe mayor o igual que la sollicitación de diseño, se puede despejar la armadura transversal necesaria.

$$V_d \geq V_{su} + V_{cu}$$

Área de refuerzo necesaria a cortante

por unidad de longitud

$$A_{st.nec} = 2.702 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Separación entre estribos (cumpliendo las condiciones de separación según EHE)

$$s_t = 0.15 \cdot m$$

Área necesaria de los estribos

$$A'_{st.nec} = s_t \cdot A_{st.nec} = 0.405 \cdot \text{cm}^2$$

Área de estribos realmente dispuesta

Número de ramas

$$n_e = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_e = 6 \text{ mm}$$

Área de armadura dispuesta a cortante por unidad de longitud

$$A_{st} = \frac{A'_{st}}{s_t} = 3.733 \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Aplicando la misma formulación pero conocido la armadura transversal, se puede calcular cuál es la carga de agotamiento por cortante.

Cortante último con coeficientes reductores

$$V_{uc} = 41.944 \text{ kN}$$

Cortante último sin coeficientes reductores

$$V_{us} = 54.122 \text{ kN}$$

Luego la carga (Q) de agotamiento por cortante teniendo en cuenta el peso del elemento (P) es:

$$\text{Con coeficientes de seguridad} \quad Q_{vc} = (V_{uc} - V_P) \cdot 2 = 80.88 \text{ kN}$$

$$\text{Sin coeficientes de seguridad} \quad Q_{vs} = (V_{us} - V_P) \cdot 2 = 105.244 \text{ kN}$$

Como se puede ver estas cargas de agotamiento por cortante son superiores a las de flexión tal como se pretendía en el diseño.

2.2.2.2.3 Anclaje

El anclaje de las barras de FRP debe ser en prolongación recta debido a que no pueden ser dobladas. Según el fabricante, la adherencia de este tipo de barras es comparable a las de acero, pudiendo ser aplicada la normativa convencional.

Cálculo de la tensión de adherencia

$$\tau_{bd} = 2.25 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{f_{ct,k}}{\gamma_c} = 6.413 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Siendo:

$$\begin{array}{l} \text{Coeficiente relacionado con la calidad} \\ \text{de la adherencia.} \end{array} \quad \eta_1 = 1$$

$$\begin{array}{l} \text{Coeficiente relacionado con el diámetro} \\ \text{de la barra} \end{array} \quad \eta_2 = 1$$

Cálculo de la longitud básica de anclaje

$$l_b = \frac{\phi_f \cdot f_{fd}}{4 \cdot \tau_{bd}} = 46.781 \cdot \text{cm}$$

La longitud básica de anclaje se calcula en base a la tensión máxima de la barra. Obviamente, debido a que este tipo de barras soportan extremadas tensiones, la longitud básica de anclaje es bastante considerable. No obstante, para este caso, gracias a que la viga se encuentra biapoyada, la tensión solicitada a partir del punto que se desea anclar, esto es, a partir de los apoyos, es nula y por tanto teóricamente no se necesitaría longitud de anclaje. Esto no es totalmente cierto, pues debido a la fisuración por cortante de la sección se produce un incremento de tensión en la armadura inferior aproximadamente igual al que provoca el momento demandado en una sección $z \cdot \cotg(\theta)$ distante de la sección inicial (Véase capítulo 7 del bloque de teoría, "Incremento de tensión en armadura inferior debido a fisuración por esfuerzo cortante").

Cálculo de la longitud neta de anclaje

$$l_{b.neta} = \beta \cdot l_b \cdot \frac{\sigma_{fd}}{f_{fd}} = 0.093 \text{ m}$$

Siendo:

Coeficiente de forma de la patilla $\beta = 1$

Tracción en la armadura inferior

$$\Delta T = \frac{V_d}{\tan(\theta)} - 0.5 \cdot (V_d - V_{cu}) \cdot \left(\frac{1}{\tan(\theta)} + \frac{1}{\tan(\alpha)} \right) = 30.113 \text{ kN}$$

Tensión a partir de la sección a anclar

$$\sigma_{fd} = \frac{\Delta T}{A_f} = 299.538 \text{ MPa}$$

2.2.2.3 Estado Límite de Servicio

En esta parte del documento se van a calcular y analizar el comportamiento de la pieza antes las cargas de servicio. En concreto se va a estudiar la evolución de la flecha, fisuración y fibra neutra. Recordar que en este estado de comprobación no se reduce las propiedades de los materiales por los coeficientes de seguridad parcial. Además a continuación se recopila los datos adicionales, que se han calculado en el apartado anterior, y son útiles en este punto.

Área de armadura inferior	$A_f := n_1 \cdot \frac{\phi_f^2}{4} \cdot \pi = 1.005 \text{ cm}^2$
Número de barras	$n_1 = 2$
Diámetro de las barras	$\phi_f := 8 \text{ mm}$
Cuantía inferior a tracción	$\rho_1 := \frac{A_f}{b \cdot d} = 2.338 \times 10^{-3}$
Área de armadura superior	$A_s = \left[2 \cdot \frac{(6 \text{ mm})^2}{4} \cdot \pi \right] = 0.565 \text{ cm}^2$
Numero de barras	$n_2 = 2$
Diámetro de las barras	$\phi_s = 6 \text{ mm}$
Cuantía superior a compresión	$\rho_2 := \frac{A_s}{b \cdot d} = 1.315 \times 10^{-3}$

2.2.2.3.1 Cálculo de la flecha

Debido que el experimento es a corto periodo, sólo se va a calcular la flecha instantánea. Para ello, en primera aproximación, se aplicará la fórmula de resistencia de materiales tomando, tanto el módulo de deformación e inercia de la sección,

constantes en toda la pieza. Realmente no es así, porque el diagrama de comportamiento del hormigón es una parábola y el módulo elástico por tanto variable. A igual que la inercia, que varía a lo largo de la pieza según el grado de fisuración. No obstante, las normativas abogan por dicha formulación pues es bastante simple y con suficiente precisión. En el caso de elementos reforzados con FRP parece ser que la inercia equivalente calculada según la fórmula de Branson sobrestima la rigidez de la misma y predice flechas menores de las experimentadas. El código ACI, a lo largo del tiempo, a propuesto varias modificaciones de esta fórmula para corregir este defecto, todas ellas sin falta de controversia por parte de muchos investigadores. En este apartado se van a calcular la flecha con las modificaciones recomendadas por el código ACI y según una última formulación propuesta Bischoff and Scanlon.

Módulo de deformación $E_{cm} = 8500 \sqrt[3]{(f_{ck} + 8)} = 32.902 \text{ GPa}$

Inercia Bruta de la sección $I_b := \frac{b \cdot h^3}{12} = 2.604 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

Inercia fisurada de la sección

$$I_f = b \cdot \frac{x^3}{3} + n_f \cdot A_f \cdot (d - x)^2 + n_s \cdot A_s \cdot (x - c_2)^2 = 1.77 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Relación entre el modulo del FRP y del hormigón

$$n_f = \frac{E_f}{E_{cm}} = 2.1$$

Relación entre el módulo del acero y del hormigón

$$n_s = \frac{E_s}{E_{cm}} = 6.999$$

Fibra neutra de la sección (suponiendo un comportamiento lineal)

$$x := d \cdot \left(\sqrt{\eta_f^2 \cdot \rho_1^2 + 2 \cdot \eta_f \cdot \eta_s \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 + 2 \cdot \eta_f \cdot \rho_1 + \eta_s^2 \cdot \rho_2^2 + 2 \cdot \frac{c_2}{d} \cdot \eta_s \cdot \rho_2 - \eta_f \cdot \rho_1 - \eta_s \cdot \rho_2} \right) = 0.02 \text{ m}$$

Inercia según fórmula de Branson adaptado por el código ACI 440.1R-03 (valido para sección fisurada)

$$I_e(M_a) = \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \cdot I_b \cdot \beta_d + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_f$$

Momento de fisuración

$$M_f := f_{ct.m.fl} \cdot W_b = 11.451 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Módulo bruto resistente de la sección

$$W_b := \frac{b \cdot h^2}{6} = 2.083 \times 10^{-3} \cdot \text{m}^3$$

Coefficiente corrector de la fórmula de Branson

$$\beta_d = \alpha_b \cdot \left(\frac{E_f}{E_s} + 1 \right) = 0.65$$

Inercia según fórmula de Branson adaptado por el código ACI 440.1R-06 (valido para sección fisurada)

$$I'_e(M_a) := \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 \cdot I_b \cdot \beta'_d + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3\right] \cdot I_f$$

Coeficiente corrector de la formula de Branson $\beta'_d := \frac{1}{5} \cdot \frac{P_1}{P_{fb}} = 0.143$

Inercia equivalente propuesta por Bischoff and Scanlon

$$I''_e(M_a) := \frac{I_f}{1 - \eta_e \cdot \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^2}$$

Siendo:

$$\eta_e := 1 - \frac{I_f}{I_b} = 0.971$$

Se pretende analizar la evolución de flecha en función de la carga, así que hay que distinguir dos estados. Uno sin fisurar donde se toma la inercia bruta de la sección; y otro fisurado en el cual se toma la inercia equivalente calculado mediante los diferentes procedimientos

Flecha utilizando la adaptación dada por el ACI 440.1R-03

$$y_i(Q) = \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I_e \left(\frac{Q}{6} \cdot L + M_p \right)} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I_e \left(\frac{Q}{6} \cdot L + M_p \right)} \right] & \text{if } Q \geq Q_f \\ \frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I_b} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I_b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Flecha utilizando la adaptación dada por el ACI 440.1R-06

$$y'_i(Q) := \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I'_e \left(M_{ley} \left(Q, \frac{L}{2} \right) \right)} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I'_e \left(M_{ley} \left(Q, \frac{L}{2} \right) \right)} \right] & \text{if } Q \geq Q_f \\ \frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I_b} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I_b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Flecha utilizando la recomendación dada por Bischoff and Scanlon

$$y''_i(Q) := \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I''_e \left(M_{ley} \left(Q, \frac{L}{2} \right) \right)} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I''_e \left(M_{ley} \left(Q, \frac{L}{2} \right) \right)} \right] & \text{if } Q \geq Q_f \\ \frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_{cm} \cdot I_b} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I_b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

La primera sentencia, en cada una de las ecuación anteriores, equivale a la sección fisurada, por lo que se debe de cumplir que la carga aplicada es mayor que la de fisuración (Q_f Véase a continuación su cálculo). Quedando que la sentencia siguiente equivale al tramo inicial de sección sin fisurar. Hay que notar también, que en cada sentencia se distingue dos sumando, uno es el propio de la flecha debido a la carga Q y el otro debido al peso del elemento (P).

Carga Q de fisuración

$$Q_f := 6 \cdot \frac{M_f - M_p}{L} = 25.266 \cdot \text{kN}$$

Momento debido al peso

$$M_p = 0.924 \text{m} \cdot \text{kN}$$

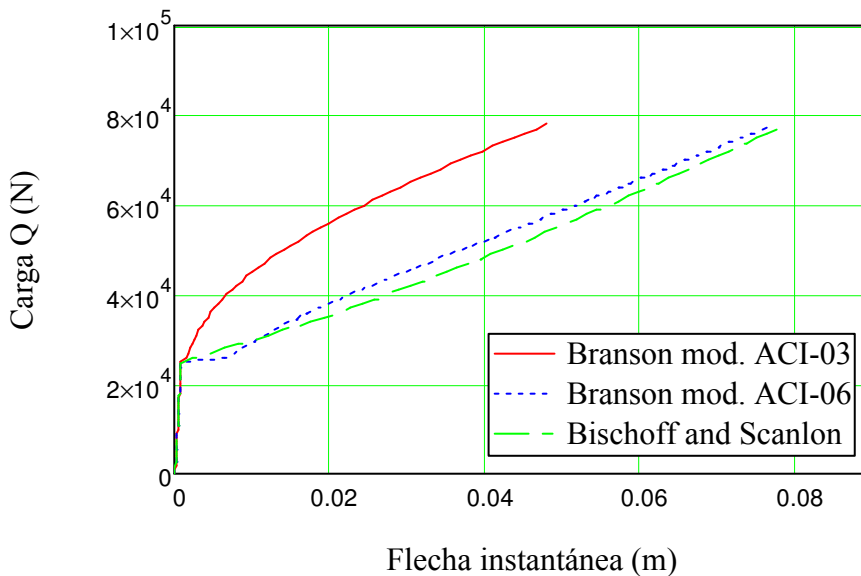


Fig. 2.13: Evolución de la flecha en función de la carga

2.2.2.3.2 Cálculo de la fisuración

En este punto se pretende estudiar la evolución de la abertura de fisura en función de la carga Q . Para ello se puede distinguir dos estados, uno en el que la carga no llega a fisurar la sección y otro en el que sí que se supera dicha carga (Q_f).

Cálculo de la separación media entre fisuras

$$s_m = 2 \cdot c + 0.2 \cdot s + 0.4 \cdot k_1 \cdot \beta_1 \cdot \frac{\phi_f \cdot A_{\text{ceficaz}}}{A_f} = 168.782 \cdot \text{mm}$$

Distancia entre barras a tracción

$$s = \begin{cases} \frac{b}{n_1} & \text{if } \frac{b}{n_1} \leq 15 \cdot \phi_f \\ 15 \cdot \phi_f & \text{otherwise} \end{cases} = 100 \cdot \text{mm}$$

Coefficiente que representa la influencia del diagrama de tracciones en la sección

$$k_1 = 0.125$$

Coefficiente que considera las propiedades de adherencia de las barras

$$\beta_1 = 1$$

Área de hormigón de la zona de recubrimiento, en donde las barras a tracción influyen de forma efectiva en la abertura de las fisuras.

$$A_{\text{ceficaz}} = \left(c + \frac{\phi_f}{2} + 7.5 \cdot \phi_f \right) \cdot b = 1.98 \times 10^4 \cdot \text{mm}^2$$

Cálculo del alargamiento medio:

$$\epsilon_{fm}(Q) = \frac{\sigma_f(Q)}{E_f} \cdot \left[1 - k_2 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{fr}}{\sigma_f(Q)} \right)^2 \right] \quad (\text{Alargamiento en función de la carga } Q)$$

Tensión de servicio de la armadura inferior en la hipótesis de sección fisurada

$$\sigma_f(Q) = \frac{Q \cdot \frac{L}{6} + M_p}{0.8 \cdot d \cdot A_f}$$

Tensión de la armadura en la sección fisurada en el instante en que se fisura el hormigón

$$\sigma_{fr} = \frac{M_f}{0.8 \cdot d \cdot A_f} = 662.266 \cdot \text{MPa}$$

Coefficiente que informa sobre el tipo de carga

$$k_2 = 1$$

Coefficiente que considera las propiedades de adherencia de las barras

$$\beta_2 = 1$$

Cálculo de la abertura de fisura en función de la carga

$$w_k(Q) = \begin{cases} (\beta \cdot s_m \cdot \varepsilon_{fm}(Q)) & \text{if } Q \geq Q_f \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Coeficiente que relaciona la abertura media de fisura con el valor característico

$$\beta = 1.7$$

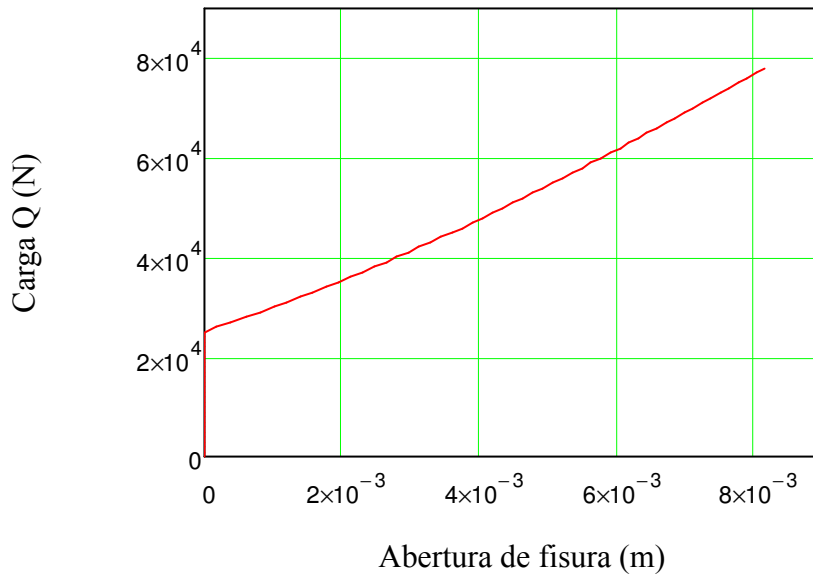


Fig. 2.14: Evolución de la abertura de fisura en función de la carga Q.

2.2.2.3.3 Fibra neutra

En este apartado se pretende estudiar la evolución de la fibra neutra, en la sección central de la viga, en función de la carga aplicada. Se toma como hipótesis inicial que la colaboración del hormigón a tracción es despreciable. Sin embargo, como se verá en la experimentación, esto no es totalmente cierto. Para cargas bajas, la influencia del hormigón a tracción es importante, tanto es así, que inicialmente es capaz de compensar el esfuerzo de compresión del hormigón, localizándose la fibra neutra en la mitad de la sección. Pero a medida que se incrementa la carga y la sección se empieza a fisurar, la capacidad de hormigón a tracción cae rápidamente, y es el refuerzo, ahora, quien absorbe este esfuerzo de tracción, deformándose para incrementar su capacidad y subiendo la fibra neutra. Este fenómeno se explicará y se intentará modelizar en el capítulo de discusión de resultados.

Para este caso simplificado, sin tener en cuenta la colaboración del hormigón a tracción, se utiliza el diagrama parábola-rectangular de hormigón. Para hallar la fibra neutra basta con plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en la sección, donde las incógnitas son las deformaciones tanto del hormigón en la fibra pésima como del refuerzo. Además recordar que se pretende estudiar su evolución, luego es necesario plantear un sistema de ecuaciones parametrizado en función del momento aplicado, tal que se tiene la deformación de la sección, o lo que es lo mismo

la fibra neutra, en función del momento aplicado que se traduce en carga. Véase a continuación la formulación.

Dado

$$A_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_f - A_s \cdot f_{yd} \cdot \text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) = \frac{b \cdot d}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \cdot \int_0^{\varepsilon_{ca}} \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c$$

$$M_a = \frac{d^2 \cdot b}{\varepsilon_f + \varepsilon_{ca}} \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon_{ca} \cdot \text{CG}(\varepsilon_{ca})}{(\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f)} \right] \cdot \int_0^{\varepsilon_{ca}} \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c + A_s \cdot f_{yd} \cdot \text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) \cdot (d - c_2)$$

$$S(M_a) = \text{resolver}(\varepsilon_{ca}, \varepsilon_f)$$

Donde las únicas incógnitas son:

- Deformación del hormigón en la fibra pésima ε_{ca}
- Deformación del refuerzo interno de FRP ε_f

M_a es el momento aplicado y es el parámetro del sistema de ecuaciones

$S(M_a)$ es la solución del sistema de ecuaciones parametrizado.

Recordar:

rend_{s2} es el rendimiento del refuerzo superior de acero tal como se define a continuación.

$$\text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) = \begin{cases} \varepsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \frac{\left(\frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} - \frac{c_2}{d} \right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \right)} & \text{if } \left[\varepsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \frac{\left(\frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} - \frac{c_2}{d} \right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \right)} \right] \leq 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\text{CG}(\varepsilon_{ca})$ es el centro de gravedad del diagrama parábola-rectangular en función de la deformación pésima del hormigón. Se define a continuación.

$$\text{CG}(\varepsilon_{ca}) = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{ca}} \varepsilon_c \cdot \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c}{\varepsilon_{ca} \cdot \left(\int_0^{\varepsilon_{ca}} \sigma_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c \right)}$$

Ya sólo falta calcular la carga aplicada para el momento soportado por la sección y la fibra neutra a través de la deformación pésima del hormigón y del refuerzo.

Carga Q para el momento aplicado M_a :

$$Q = (M_a - M_p) \cdot \frac{6}{L}$$

Momento debido al peso de la viga

$$M_p = 0.924m \cdot kN$$

Fibra neutra a partir de la deformación pésima del hormigón y del refuerzo

$$x = \frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_f} \cdot d$$

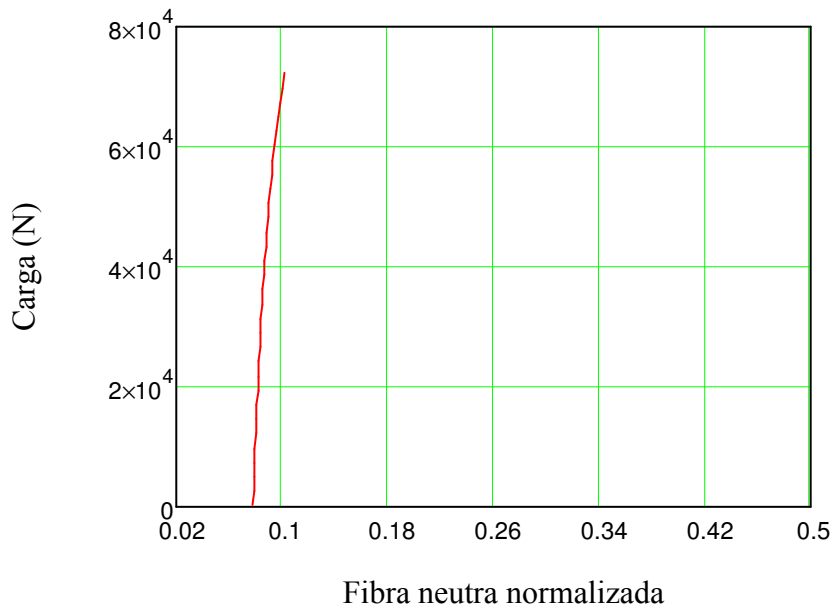


Fig. 2.15: Evolución de la fibra neutra normaliza en función de la carga Q para una sección central de la viga.

Y puesto que se tiene la deformación pésima de hormigón a compresión en función de la carga aplicada, puede ser interesante representar su evolución.

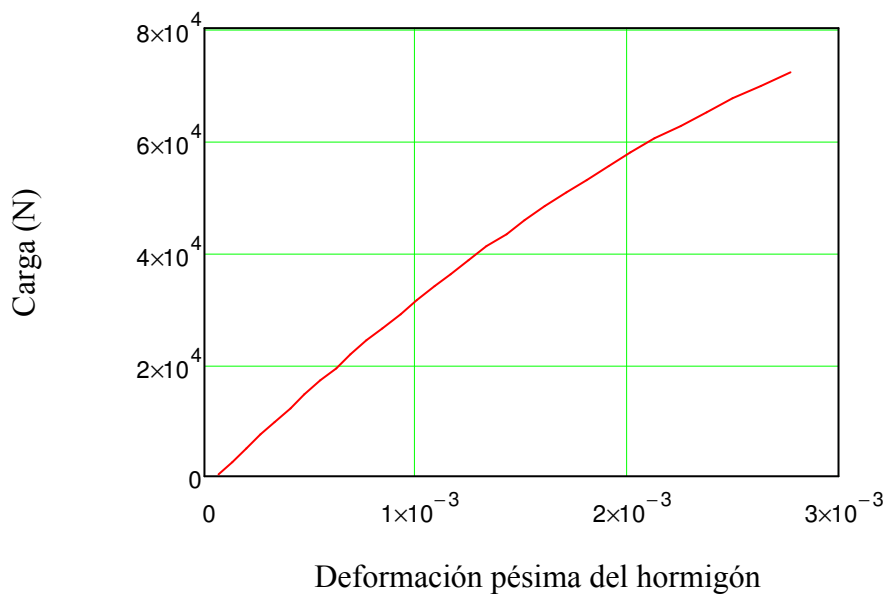


Fig. 2.16: Evolución de la deformación a compresión pésima del hormigón en función de la carga aplicada

2.2.2.3.4 Evolución de la curvatura en función del momento

Otra cuestión relevante es el estudio de la relación momento curvatura. Esta relación depende del producto del módulo de deformación por la inercia de la sección que fue ya calculada en el apartado de flecha instantánea. Luego la formulación general, independiente del método utilizado para calcular la inercia equivalente, es como sigue

$$\chi(M_a) = \begin{cases} \frac{M_a}{E_{cm} \cdot I_e(M_a)} & \text{if } M_a > M_f \\ \frac{M_a}{E_{cm} \cdot I_b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Donde:

M_a es el momento aplicado siendo este un parámetro de la ecuación

$I_e(M_a)$ es la inercia de la sección por los tres métodos propuestos: Branson modificado por ACI 440.1R-03; Branson modificado por ACI 440.1R-06; Bischoff and Scanlon

I_b es la inercia bruta de la sección

E_{cm} es el módulo de deformación secante del hormigón

En la formulación se aprecia dos sentencias condicionales. La segunda de ellas se utiliza cuando el momento aplicado es inferior al de fisuración y por tanto la inercia de la sección corresponde con la bruta. Sin embargo, cuando el momento supera el de fisuración, la inercia de la sección es intermedia entre la bruta y la fisurada complementemente. Es en este momento cuando se utiliza la inercia equivalente calculada por los diferentes métodos propuestos. A continuación se muestra una gráfica de la evolución de la curvatura de la sección central en función del momento soportado.

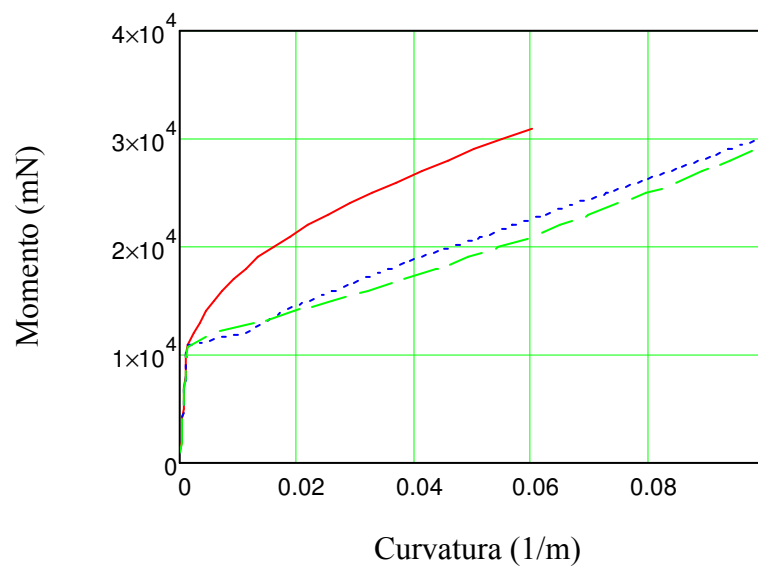


Fig. 2.17: Gráfica momento curvatura para una sección central de la viga

2.2.2.4 Croquis de la viga

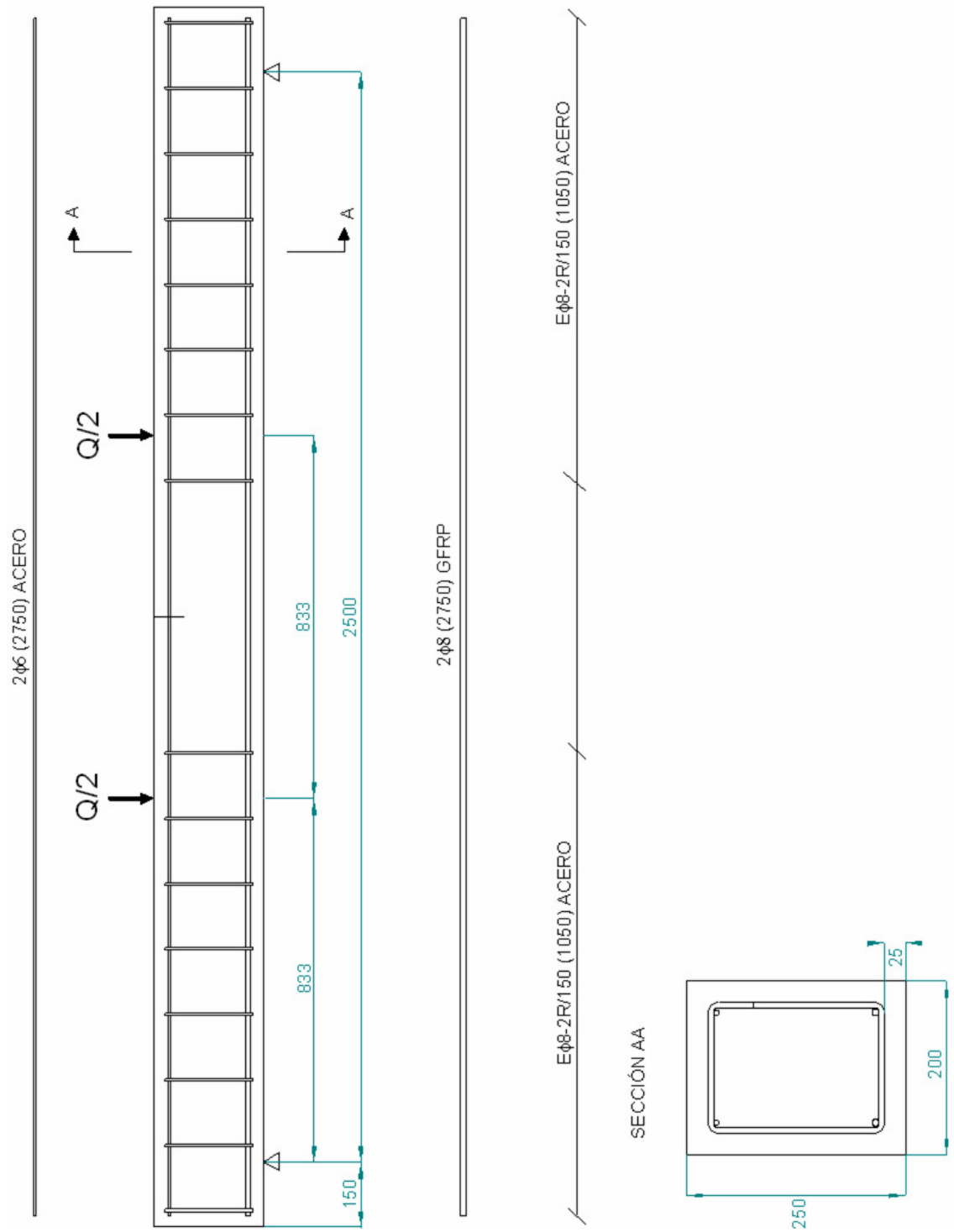


Fig. 2.18: Croquis de la viga por rotura de la armadura inferior a tracción

2.3 COMPROBACIÓN DE LAS VIGAS SEGÚN CÓDIGO ACI

En virtud al diseño hecho según la norma EHE convenientemente adaptada, en este apartado se pretende estimar la capacidad última de las vigas y comportamiento ante cargas de servicio mediante el código ACI. Con lo cual se tomará adicionalmente como datos de inicio la armadura ya calculada en el apartado anterior. La nomenclatura utilizada corresponde con la propia de esta normativa.

2.3.1 Viga diseñada por fallo del hormigón

2.3.1.1 Datos

Geométricos

Altura de la sección	$h = 0.250 \cdot \text{m}$
Ancho de la sección	$b = 0.200 \cdot \text{m}$
Recubrimiento mecánico inferior	$d_c = 0.037 \cdot \text{m}$
Recubrimiento mecánico superior	$d_{c2} = 0.034 \text{m}$
Canto útil	$d = h - d_c = 0.213 \text{m}$
Longitud de la viga	$L_T = 2.8 \text{m}$
Longitud entre apoyos	$L = 2.5 \text{m}$
Distancia de apoyos a puntos de cargas	$a = \frac{L}{3} = 0.833 \text{m}$

Hormigón

Resistencia característica del hormigón (specified compressive strength)	$f'_c = 30 \text{MPa}$
Resistencia a tracción (rupture strength of concrete)	$f_r = 0.62 \cdot \sqrt{f'_c} = 3.396 \text{MPa}$
Módulo de deformación secante (Modulus of elasticity)	$E_c = 4750 \cdot \sqrt{f'_c} = 26.016 \text{GPa}$
Deformación última (ultimate strain)	$\epsilon_{cu} = 0.003$

Deformación de rotura a compresión simple

$$\epsilon_0 = 2 \cdot \frac{0.85 \cdot f'_c}{E_c} = 1.96 \times 10^{-3}$$

Factor de profundidad de la fibra neutra
(Para el diagrama rectangular)

$$\beta_1 = 0.83333$$

Tensión media del diagrama rectangular

$$0.85f'_c$$

Diagrama parábola rectangular

$$f_c(\epsilon_c) = \begin{cases} \left[0.85 \cdot f'_c \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \right] & \text{si } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_0 \\ (0.85 \cdot f'_c) & \text{si } \epsilon_0 < \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \end{cases}$$

GFRPResistencia característica
(Guaranteed tensile strength)

$$f_{fk} = 1350 \cdot \text{MPa}$$

Módulo elástico
(Modulus of elasticity)

$$E_f = 60000 \cdot \text{MPa}$$

Factor reductor ambiental
(environmental reduction factor)

$$C_E = 1$$

(Se toma igual a la unidad porque se considera que no da tiempo a reducir las propiedades del FRP)

Resistencia de diseño
(Design tensile strength)

$$f_{fu} = f'_{fu} \cdot C_E = 1.35 \times 10^3 \cdot \text{MPa}$$

Deformación última de diseño
(Design rupture strain)

$$\epsilon_{fu} = \frac{f'_{fu}}{E_f} \cdot C_E = 0.023$$

AceroLímite elástico del acero
(Yield strength of tension)

$$f_{yk} = 400 \text{MPa}$$

Módulo elástico
(Modulus of elasticity)

$$E_s = 200000 \text{MPa}$$

Armadura inferior de GFRP

Área de armadura inferior de GFRP

$$A_f = \frac{2 \cdot \phi_f^2}{4} \cdot \pi = 2.262 \text{ cm}^2$$

Número de barras a tracción

$$n_1 = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_f = 12 \text{ mm}$$

Armadura superior de portaestribos

Área de armadura superior de acero

$$A_s = \left[2 \cdot \frac{(6 \cdot \text{mm})^2}{4} \cdot \pi \right] = 0.565 \text{ cm}^2$$

Número de barras

$$n_2 = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_{s2} = 6 \text{ mm}$$

Armadura transversal

Área de armadura a cortante

$$A_v = 2 \cdot \frac{(6 \text{ mm})^2}{4} \cdot \pi = 0.565 \cdot \text{cm}^2$$

Número de ramas

$$n_e = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_e = 6 \text{ mm}$$

Separación entre estribos

$$s = 15 \text{ cm}$$

2.3.1.2 Estado Límite Último

2.3.1.2.1 Comprobación de momento último soportado

Antes que nada se procede a calcular la cuantía balanceada de la sección para comprobar el dominio en el que se encuentra:

$$\rho_{fb} = \left(0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} + \frac{A_s \cdot f_y \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_{fu}, \epsilon_{cu})}{b \cdot d \cdot f'_c} \right) \cdot \frac{f'_c}{f_{fu}} = 1.64 \times 10^{-3}$$

Siendo:

$$\text{rend}_{s2}(\epsilon_f, \epsilon_{ca}) = \begin{cases} \epsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_y} \cdot \frac{\left(\frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_f} - \frac{d_{c2}}{d} \right)}{1 - \frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_f}} & \text{if } \left[\epsilon_f \cdot \frac{\left(\frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_f} - \frac{d_{c2}}{d} \right)}{1 - \frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_f}} \right] \leq \frac{f_y}{E_s} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Mientras que la cuantía dispuesta es:

$$\rho_f = \frac{A_f}{b \cdot d} = 5.305 \times 10^{-3}$$

Luego queda patente que la viga se encuentra en dominio sobre-reforzado, esto es, dominio 4. Para obtener el momento último sólo es necesario plantear equilibrio de fuerzas y momentos en la sección, donde las únicas incógnitas es el momento último y la deformación del FRP:

Dado:

$$\frac{\rho_f \cdot E_f \cdot \epsilon_f}{f'_c} - \frac{A_s \cdot f_y \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_f, \epsilon_{cu})}{b \cdot d \cdot f'_c} = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_f + \epsilon_{cu}}$$

$$\mu_u = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_f + \epsilon_{cu}} \cdot \left[1 - \frac{\beta_1 \cdot \epsilon_{cu}}{2 \cdot (\epsilon_f + \epsilon_{cu})} \right] + \frac{A_s \cdot f_y \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_f, \epsilon_{cu})}{b \cdot d \cdot f'_c} \cdot \left(1 - \frac{d_{c2}}{d} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_f \\ \mu_u \end{pmatrix} = \text{resolver}(\epsilon_f, \mu_u) = \begin{pmatrix} 0.013 \\ 0.126 \end{pmatrix}$$

Momento último sin coeficientes de seguridad

$$M_{US} = \mu_u \cdot b \cdot d^2 \cdot f'_c = 34.347 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Momento último con coeficiente de seguridad

$$M_{UC} = \mu_u \cdot b \cdot d^2 \cdot \phi(\rho_f) = 24.043 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Factor de seguridad

$$\phi(\rho_f) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } \rho_f \leq \rho_{fb} \\ \frac{\rho_f}{2 \cdot \rho_{fb}} & \text{if } \rho_{fb} < \rho_f \leq 1.4 \rho_{fb} \\ 0.7 & \text{if } \rho_f > 1.4 \rho_{fb} \end{cases} = 0.7$$

Por lo tanto la carga (Q) que produce el agotamiento por flexión de la pieza es:

Con coeficiente de seguridad

$$\text{Momento que produce el peso (P)} \quad M_p = \frac{L^2 \cdot P}{8} - \frac{L_a^2}{2} \cdot P = 0.924 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$\text{Carga Q teniendo en cuenta el peso (P)} \quad Q_{fc} = (M_{uc} - M_p) \cdot \frac{6}{L} = 55.485 \text{ kN}$$

Sin coeficientes de seguridad

$$\text{Momento que produce el peso (P)} \quad M_p = 0.924 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$\text{Carga Q teniendo en cuenta el peso (P)} \quad Q_{fs} = (M_{us} - M_p) \cdot \frac{6}{L} = 80.215 \text{ kN}$$

Como se puede ver existe una gran discrepancia respecto a los cálculos hechos según la EHE convenientemente adoptada. Esta diferencia es debida principalmente a la baja deformación última del hormigón que toma el código ACI y al coeficiente que informa sobre el cansancio del hormigón (0.85) que reduce la resistencia del hormigón. En el caso de la EHE la deformación última del hormigón es algo menos conservadora siendo su valor de 0.0035, mientras que al coeficiente α_{cc} que informa sobre el cansancio del hormigón recomienda que se tome la unidad. Es más, este factor empieza a tener influencia cuando los niveles de tensión del hormigón debido a cargas de larga duración son elevados. Con lo cual, para un ensayo de rotura no es congruente tomar valores menores de la unidad, y por tanto, parece más acertada la formulación de la EHE.

2.3.1.2.2 Comprobación del cortante último soportado

En este apartado se va a calcular el cortante último soportado por la viga de tres formas diferentes: Guía ACI-03, Guía ACI-06 y la adaptación propuesta por el Task group 9.3 para modificar el código ACI 318-05. Como se verá la versión del 2003 es demasiado conservadora, mientras que la propuesta por el Task group 9.3 [16] (Guadagnini, M., Pilakoutas and Waldron, P.) puede parecer demasiado permisiva, intercalándose la Guía ACI 06 entre ambas. Recordar, como se explicaba en teoría, que el cortante último soportado por estas piezas debe ser menor que en los elementos armados con acero. A continuación se muestra su formulación correspondiente.

Contribución del hormigón

ACI 440.1R-03

Cortante absorbido por el hormigón

$$V_{cf} = \frac{\rho_f \cdot E_f}{90 \cdot \beta_1 \cdot f'_c} \cdot V_c = 5.506 \cdot \text{kN}$$

Siendo:

Cortante absorbido por el hormigón para el caso de armado convencional con acero

$$V_c = \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b \cdot d}{6} = 38.888 \text{ kN}$$

Task Group 9.3

Cortante absorbido por el hormigón

$$V_{cf} = \left(\frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\epsilon \right)^{\frac{1}{3}} \cdot V_C = 34.113 \cdot \text{kN}$$

Siendo:

Cortante absorbido por el hormigón para el caso de armado convencional con acero

$$V_C = \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b \cdot d}{6} = 38.888 \text{kN}$$

Ratio entre máxima deformación permitida del FRP y deformación elástica del acero

$$\phi_\epsilon = \frac{0.0045}{0.002}$$

ACI 440.1R-06

Cortante absorbido por el hormigón

$$V_{cf} = 0.4 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b \cdot c = 13.587 \text{kN}$$

Siendo:

Profundidad de la fibra neutra suponiendo que tanto el hormigón como el refuerzo se comporta elásticamente

$$c = k \cdot d = 0.031 \text{ m}$$

Factor de profundidad de fibra neutra

$$k = \sqrt{\rho_f^2 \cdot \rho_f^2 + 2 \cdot \eta_f \cdot \eta_s \cdot \rho_f \cdot \rho_s + 2 \cdot \eta_f \cdot \rho_f + \eta_s^2 \cdot \rho_s^2 + 2 \cdot \frac{d_c^2}{d} \cdot \eta_s \cdot \rho_s - \eta_f \cdot \rho_f - \eta_s \cdot \rho_s} = 0.146$$

Contribución de la armadura transversal

Cortante absorbido por los estribos de acero

$$V_s = \frac{A_v}{s} \cdot f_y \cdot \sin(\alpha) \cdot d \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)} \right) = 32.12 \cdot \text{kN}$$

Siendo:

Ángulo entre las bielas de compresión del hormigón y el eje de la pieza

$$\beta = \frac{\pi}{4}$$

Ángulo de los estribos respecto al eje de la pieza

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Cortante y carga total soportado por la viga

ACI 440.1R-03

Cortante último sin coeficiente de seguridad

$$V_{us.03} = V_s + V_{cf.03} = 37.626 \cdot \text{kN}$$

Cortante último con coeficiente de seguridad $V_{uc.03} = 0.85 \cdot V_{us.03} = 31.982 \cdot \text{kN}$

Carga total sin coeficiente de seguridad $Q_{vs.03} = (V_{us.03} - V_p) \cdot 2 = 72.852 \text{ kN}$

Carga total con coeficiente de seguridad $Q_{vc.03} = (V_{uc.03} - V_p) \cdot 2 = 61.564 \text{ kN}$

Task Group 9.3

Cortante último sin coeficiente de seguridad $V_{us.TG} = V_s + V_{cf.TG} = 66.233 \cdot \text{kN}$

Cortante último con coeficiente de seguridad $V_{uc.TG} = 0.85 \cdot V_{us.TG} = 56.298 \cdot \text{kN}$

Carga total sin coeficiente de seguridad $Q_{vs.TG} = (V_{us.TG} - V_p) \cdot 2 = 130.065 \text{ kN}$

Carga total con coeficiente de seguridad $Q_{vc.TG} = (V_{uc.TG} - V_p) \cdot 2 = 110.196 \text{ kN}$

ACI 440.1R-06

Cortante último sin coeficiente de seguridad $V_{us.06} = V_s + V_{cf.06} = 45.707 \cdot \text{kN}$

Cortante último con coeficiente de seguridad $V_{uc.06} = 0.85 \cdot V_{us.06} = 38.851 \cdot \text{kN}$

Carga total sin coeficiente de seguridad $Q_{vs.06} = (V_{us.06} - V_p) \cdot 2 = 89.014 \text{ kN}$

Carga total con coeficiente de seguridad $Q_{vc.06} = (V_{uc.06} - V_p) \cdot 2 = 75.302 \text{ kN}$

La carga de rotura por cortante ha de ser mayor que la que predice el código ACI a rotura por flexión. Si se presta atención se puede observar que la única formulación que no la cumple es la correspondiente al ACI.440.1R-03. Como se dijo al inicio del apartado, esta formulación es demasiado conservadora de manera que la contribución del hormigón para elementos armados con FRP es del orden, tan sólo, del 15% respecto a elementos armado con acero. Sin embargo la Guía ACI es algo menos conservadora y toma un 35%, siendo la propuesta por el Task Group 9.3 la menos conservadora de las tres con una contribución del hormigón del 85% respecto al armado con acero.

2.3.1.3 Estado Límite de Servicio

En este apartado se pretende calcular la evolución de la flecha, abertura de fisura, curvatura y profundidad de la fibra neutra. Estos cálculos se harán, igualmente, con la formulación propuesta por la Guía ACI 440.1R-03 y ACI 440.1R-06.

2.3.1.3.1 Evolución de la flecha

Para el cálculo de la flecha, tal como se explica en el bloque de teoría, se va a utilizar la fórmula de resistencia de materiales. Tanto el módulo de deformación como la inercia se van a tomar constante en toda la sección. La inercia se va a calcular según la ecuación de Branson, añadiendo un término corrector que informa sobre la menor rigidez que presentan estos elementos armados con FRP respecto al armado convencional. De hecho este último término es el que diferencia la versión del 2003 respecto a la corrección 2006. En cuanto al módulo se toma el secante del hormigón a una tensión $0.4f_c$.

Inercia bruta de la sección $I_g = \frac{b \cdot h^3}{12} = 2.604 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

Inercia fisurada de la sección $I_{cr} = \frac{b \cdot d^3 \cdot k^3}{3} + n_f \cdot A_f \cdot d^2 \cdot (1 - k)^2 = 1.927 \times 10^{-5} \text{ m}^4$

Factor de profundidad de fibra neutra suponiendo un comportamiento elástico tanto del hormigón como del FRP

$$k = \sqrt{n_f^2 \cdot \rho_f^2 + 2 \cdot n_f \cdot n_s \cdot \rho_f \cdot \rho_s + 2 \cdot n_f \cdot \rho_f + n_s^2 \cdot \rho_s^2 + 2 \cdot \frac{d_c^2}{d} \cdot n_s \cdot \rho_s - n_f \cdot \rho_f - n_s \cdot \rho_s} = 0.146$$

Relación entre el módulo del FRP y hormigón $n_f = \frac{E_f}{E_c} = 2.306$

Relación entre el módulo del acero y hormigón $n_s = \frac{E_s}{E_c} = 7.687$

Momento de fisuración $M_{cr} = f_r \cdot W_g = 7.075 \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$

Módulo resistente de la sección $W_g = \frac{b \cdot h^2}{6} = 2.083 \times 10^{-3} \cdot \text{m}^3$

Inercia equivalente según ACI 440.1R-03

$$I_{e.03}(M_s) = \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^3 \cdot I_g \cdot \beta_{d.03} + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^3\right] \cdot I_{cr}$$

Factor reductor de la inercia equivalente $\beta_{d.03} = \alpha_b \cdot \left(\frac{E_f}{E_s} + 1\right) = 0.65$

Factor que informa sobre la adherencia de las barras $\alpha_b = 0.5$

Inercia equivalente según ACI 440.1R-06

$$I_{e.06}(M_s) = \left(\frac{M_{cr}}{M_s} \right)^3 \cdot I_g \cdot \beta_{d.06} + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_s} \right)^3 \right] \cdot I_{cr}$$

$$\beta_{d.06} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\rho_f}{\rho_{fb}} \right) = 0.574$$

Factor reductor de inercia equivalente

Ya calculada la inercia de la sección, en función del momento aplicado, y sabiendo además el módulo del hormigón, sólo falta aplicar la fórmula de resistencia de materiales para calcular la flecha en función de la carga. Cabe detallar, que la inercia equivalente sólo es aplicable cuando la sección está fisurada, de modo que para una carga menor de la fisuración hay que tomar la inercia bruta. A continuación se expone el cálculo de la flecha según la Guía ACI-03 y ACI-06 respectivamente.

$$\Delta_{i.03}(Q) = \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2)}{48 \cdot E_c \cdot I_{e.03} \left(Q \cdot \frac{L}{6} + M_p \right)} + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_c \cdot I_{e.03} \left(Q \cdot \frac{L}{6} + M_p \right)} \right] & \text{si } Q \geq Q_{cr} \\ \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_c \cdot I_g} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_c \cdot I_g} \right] & \text{si } Q < Q_{cr} \end{cases}$$

$$\Delta_{i.06}(Q) = \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2)}{48 \cdot E_c \cdot I_{e.06} \left(Q \cdot \frac{L}{6} + M_p \right)} + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_c \cdot I_{e.06} \left(Q \cdot \frac{L}{6} + M_p \right)} \right] & \text{si } Q \geq Q_{cr} \\ \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_c \cdot I_g} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_c \cdot I_g} \right] & \text{si } Q < Q_{cr} \end{cases}$$

Siendo:

Momento debido al peso propio

$$M_p = 0.924 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Carga Q que produce la primera fisura

$$Q_{cr} = 6 \cdot \frac{M_{cr} - M_p}{L} = 14.762 \cdot \text{kN}$$

A continuación se muestran unas gráficas con la evolución de la flecha según las dos fórmulas de cálculo explicadas.

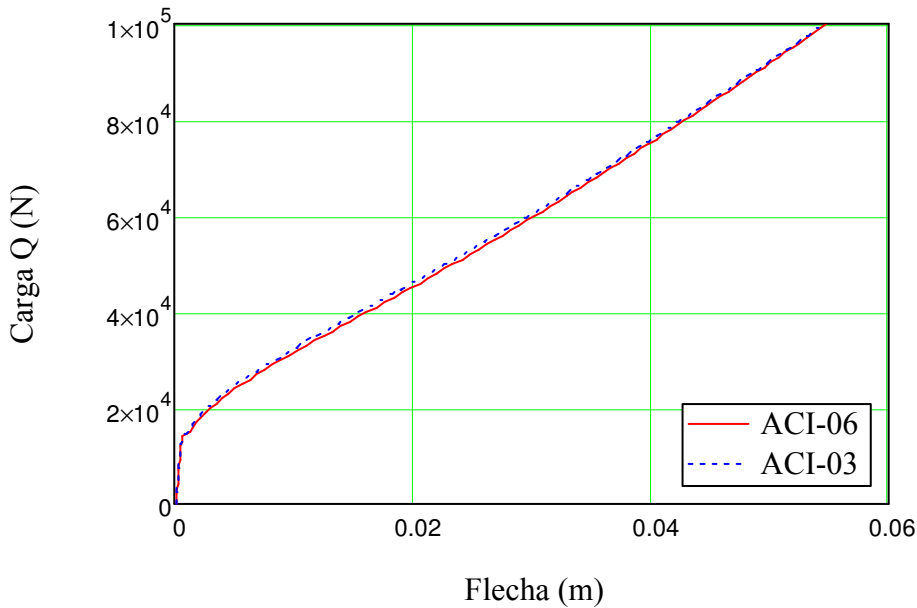


Fig. 2.19: Evolución de la flecha en función de la carga

2.3.1.3.2 Evolución de la abertura de fisura

Análogo al apartado anterior, se va a calcular la abertura de fisura según los dos procedimientos descritos por el código ACI en la publicación del 2003 y del 2006. Respectivamente la primera se base en las ecuaciones propuestas por Gergely and Lutz [23] y la segunda en Frosch [24].

ACI 440.1R-03

Evidentemente para que se produzca la fisuración se debe aplicar una carga superior a la que produce la primera fisuración, con lo cual para cargas menores la viga esta exentas de fisuras.

Abertura de fisura

$$w_{03}(Q) = \begin{cases} \left(\frac{2.2 \cdot \beta \cdot k_b \cdot f_f(Q)}{E_f} \cdot \sqrt[3]{d_c \cdot A_e} \right) & \text{if } Q \geq Q_{cr} \\ 0 & \text{if } Q < Q_{cr} \end{cases}$$

Tensión de las armaduras inferiores

$$f_f(Q) = \frac{Q \cdot \frac{L}{6} + M_p}{A_f \cdot d \cdot \left(1 - \frac{k}{3}\right)}$$

Relación entre la distancia de la fibra neutra al punto más traccionado de la sección y la distancia de la fibra neutra al centro del refuerzo

$$\beta := \frac{h - k \cdot d}{d \cdot (1 - k)} = 1.203$$

Área efectiva a tracción dividida por el número de barras traccionadas

$$A_e := \frac{2 \cdot d_c \cdot b}{n_1} = 7.4 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Coeficiente que toma en consideración la adherencia de las barras de FRP respecto de las de acero.

$$k_b = 1.2$$

ACI 440.1R-06

Abertura de fisura

$$w_{06}(Q) = \begin{cases} \left[2 \cdot \frac{f_f(Q)}{E_f} \cdot \beta \cdot k_b \cdot \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \right] & \text{if } Q > Q_{cr} \\ 0 & \text{if } Q < Q_f \end{cases}$$

Separación media entre barras a tracción

$$s := \frac{b}{n_1} = 0.1 \text{ m}$$

Resto de variables idénticas al ACI-03

A continuación se muestra una gráfica con la representación de sendas curvas en función de la carga Q aplicada.

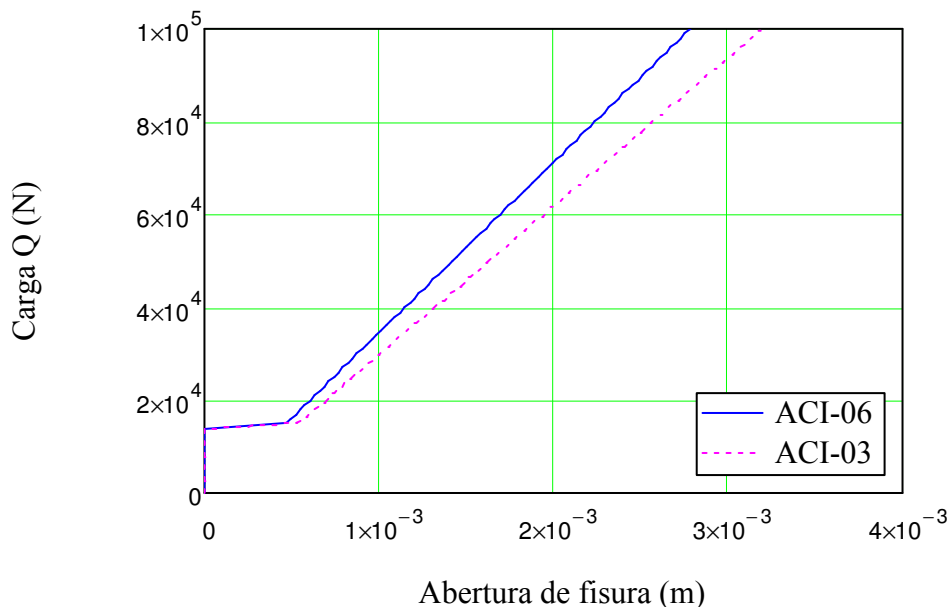


Fig. 2.20: Evolución de la abertura de fisura

2.3.1.3.3 Evolución de la fibra neutra

En este apartado se pretende estudiar la evolución de la fibra neutra en función de la carga aplicada. En la formulación desarrollada aquí se va a suponer despreciable la colaboración del hormigón a tracción. No obstante, como se verá en los experimentos, para cargas bajas esto no es totalmente cierto. Existe una notable influencia del hormigón a tracción de manera que inicialmente la fibra neutra parte del centro de la sección pero rápidamente se fisura y pierde su influencia. Remarcar que en esta formulación es necesario utilizar el diagrama parábola rectangular del hormigón. Para

obtener la fibra neutra basta con plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos. Siendo el momento soportado un parámetro del sistema de ecuaciones. Véase a continuación esta formulación.

Ecuaciones de equilibrio

Dado

$$A_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_f - A_s \cdot f_y \cdot \text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) = \frac{b \cdot d}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \cdot \int_0^{\varepsilon_{ca}} f_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c$$

$$M_s = \frac{d^2 \cdot b}{\varepsilon_f + \varepsilon_{ca}} \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon_{ca} \cdot \text{CG}(\varepsilon_{ca})}{(\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f)} \right] \cdot \int_0^{\varepsilon_{ca}} f_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c + A_s \cdot f_y \cdot \text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) \cdot (d - d_{c2})$$

$$S(M_s) = \text{resolver}(\varepsilon_{ca}, \varepsilon_f)$$

Donde las únicas incógnitas son:

- Deformación del hormigón en la fibra pésima ε_{ca}
- Deformación del refuerzo interno de FRP ε_f

M_s es el momento aplicado y es el parámetro del sistema de ecuaciones

$S(M_s)$ es la solución del sistema de ecuaciones parametrizado.

Recordar:

rend_{s2} es el rendimiento del refuerzo superior de acero tal como se define a continuación.

$$\text{rend}_{s2}(\varepsilon_f, \varepsilon_{ca}) := \begin{cases} \varepsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_y} \cdot \frac{\left(\frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} - \frac{d_{c2}}{d} \right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \right)} & \text{if } \left[\varepsilon_f \cdot \frac{E_s}{f_y} \cdot \frac{\left(\frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} - \frac{d_{c2}}{d} \right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{ca} + \varepsilon_f} \right)} \right] \leq 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\text{CG}(\varepsilon_{ca})$ es el centro de gravedad del diagrama parábola-rectangular en función de la deformación pésima del hormigón. Se define a continuación.

$$\text{CG}(\varepsilon_{ca}) := 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{ca}} \varepsilon_c \cdot f_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c}{\varepsilon_{ca} \cdot \left(\int_0^{\varepsilon_{ca}} f_c(\varepsilon_c) d\varepsilon_c \right)}$$

Ya sólo falta calcular la carga aplicada para el momento soportado por la sección y la fibra neutra a través de la deformación pésima del hormigón y del refuerzo.

Carga Q para el momento aplicado M_a :
$$Q = (M_a - M_p) \cdot \frac{6}{L}$$

Momento debido al peso de la viga
$$M_p = 0.924m \cdot kN$$

Fibra neutra a partir de la deformación pésima del hormigón y del refuerzo

$$x = \frac{\epsilon_{ca}}{\epsilon_{ca} + \epsilon_f} \cdot d$$

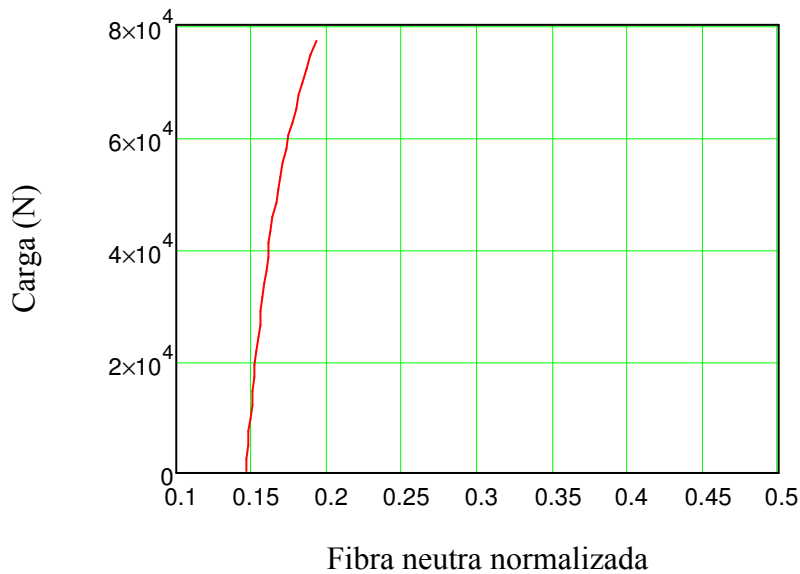
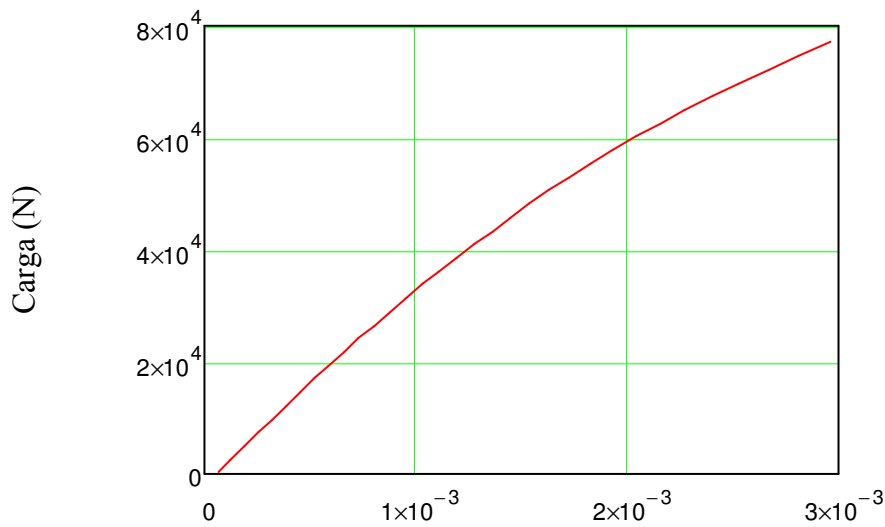


Fig 2.21: Evolución de la fibra neutra en función de la carga Q aplicada

Además, es instructivo mostrar también la deformación del hormigón en la cara superior a compresión en función de la carga aplicada



Deformación pésima del hormigón

Fig. 2.22: Evolución de la deformación pésima del hormigón a compresión

2.3.1.3.4 Evolución de la curvatura

La evolución de la curvatura se puede estudiar aplicando los mismos principios que los aplicados para predecir la flecha del elemento. Es decir, se supone que tanto la inercia como el módulo de deformación son constantes en toda la pieza, y por tanto, basto tan sólo utilizar la fórmula de resistencia de materiales para evaluarla. El cálculo de la inercia de la sección es idéntico que en el caso de la flecha, siendo el módulo de deformación el módulo secante del hormigón a una tensión de $0.4f'_c$. Con lo cual a continuación se muestra la formulación tanto para la Guía ACI 440.1R-03 y ACI 440.1R-06.

Curvatura según ACI-03

$$\chi_{03}(M_s) := \begin{cases} \frac{M_s}{E_c \cdot I_{e.03}(M_s)} & \text{if } M_s > M_{cr} \\ \frac{M_s}{E_c \cdot I_g} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Curvatura según ACI -06

$$\chi_{06}(M_s) := \begin{cases} \frac{M_s}{E_c \cdot I_{e.06}(M_s)} & \text{if } M_s > M_{cr} \\ \frac{M_s}{E_c \cdot I_g} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Véanse sendas gráficas representadas para este caso en concreto.

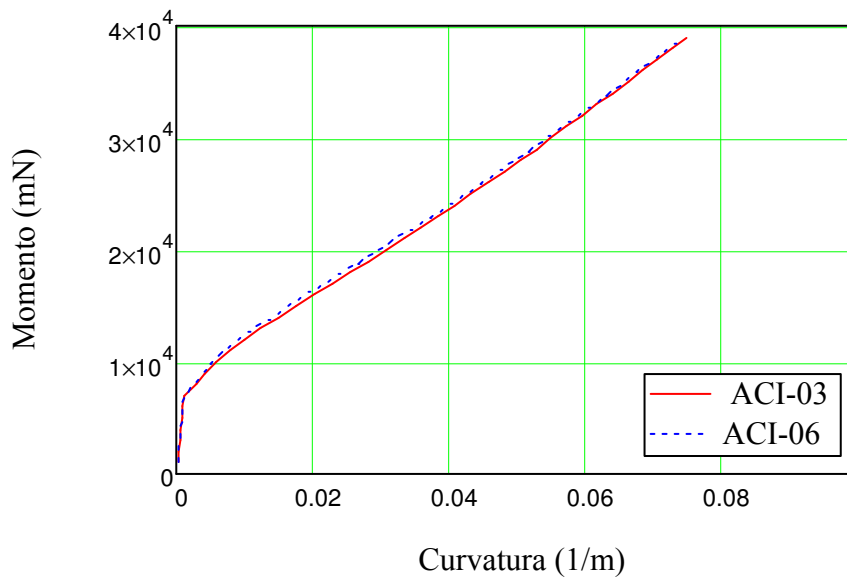


Fig. 2.23: Evolución de la curvatura en función de la carga

2.3.2 Viga diseñada por fallo del FRP a tracción

En este apartado se pretende comprobar la carga última que provoca el fallo, el modo de fallo y el comportamiento de la viga ante cargas de servicio.

2.3.2.1 Datos

Geométricos

Altura de la sección	$h = 0.250 \cdot m$
Ancho de la sección	$b = 0.200 \cdot m$
Recubrimiento mecánico inferior	$d_c = 0.035 \cdot m$
Recubrimiento mecánico superior	$d_{c2} = 0.034m$
Canto útil	$d = h - d_c = 0.215m$
Longitud de la viga	$L_T = 2.8m$
Longitud entre apoyos	$L = 2.5m$
Distancia de apoyos a puntos de cargas	$a = \frac{L}{3} = 0.833m$

Hormigón

Resistencia característica del hormigón
(specified compressive strength)

$$f'_c = 50\text{MPa}$$

Resistencia a tracción
(rupture strength of concrete)

$$f_r = 4.384\text{MPa}$$

Módulo de deformación secante
(Modulus of elasticity)

$$E_c = 4750\sqrt{f'_c} = 33.588\text{GPa}$$

Deformación última
(ultimate strain)

$$\epsilon_{cu} = 0.003$$

Deformación de rotura a compresión simple

$$\epsilon_0 = 0.00253$$

Factor de profundidad de la fibra neutra
(Para el diagrama rectangular)

$$\beta_1 = 0.85 - 0.05 \cdot \left(\frac{f'_c - 27.6\text{MPa}}{6.9\text{MPa}} \right) = 0.688$$

Tensión media del diagrama rectangular

$$0.85f'_c$$

Diagrama parábola rectangular

$$f_c(\epsilon_c) = \begin{cases} \left[0.85 \cdot f'_c \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \right] & \text{si } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_0 \\ (0.85 \cdot f'_c) & \text{si } \epsilon_0 < \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \end{cases}$$

GFRP

Resistencia característica
(Guaranteed tensil strength)

$$f'_{fu} = 1500\text{MPa}$$

Módulo elástico
(Modulus of elasticity)

$$E_f = 60000 \cdot \text{MPa}$$

Factor reductor ambiental
(environmental reduction factor)

$$C_E = 1$$

(Se toma igual a la unidad porque se considera que no da tiempo a reducir las propiedades del FRP)

Resistencia de diseño
(Design tensil strength)

$$f_{fu} = f'_{fu} \cdot C_E = 1.5 \times 10^3 \cdot \text{MPa}$$

Deformación última de diseño
(Design rupture strain)

$$\epsilon_{fu} = \frac{f_{fu}}{E_f} \cdot C_E = 0.025$$

Acero

Límite elástico del acero
(Yield strength of tension)

$$f_{yk} = 400\text{MPa}$$

Módulo elástico
(Modulus of elasticity)

$$E_s = 200000\text{MPa}$$

Armadura inferior de GFRP

Área de armadura inferior de GFRP

$$A_f = \frac{n_1 \cdot \phi_f^2}{4} \cdot \pi = 1.005 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Número de barras a tracción

$$n_1 = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_f = 8\text{mm}$$

Armadura superior de portaestribos

Área de armadura superior de acero

$$A_s = \left[2 \cdot \frac{(6 \cdot \text{mm})^2}{4} \cdot \pi \right] = 0.565 \text{ cm}^2$$

Número de barras

$$n_2 = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_{s2} = 6\text{mm}$$

Armadura transversal

Área de armadura a cortante

$$A_v = 2 \cdot \frac{(6\text{mm})^2}{4} \cdot \pi = 0.565 \cdot \text{cm}^2$$

Número de ramas

$$n_e = 2$$

Diámetro de las barras

$$\phi_e = 6\text{mm}$$

Separación entre estribos

$$s = 15\text{cm}$$

2.3.2.2 Estado Límite Último

2.3.2.2.1 Comprobación del momento último

Antes que nada hay que comprobar el modo de fallo, esto es, la cuantía dispuesta en relación con la cuantía que balancea la sección.

$$\rho_{fb} = \left(0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} + \frac{A_s \cdot f_y \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_{fu}, \epsilon_{cu})}{b \cdot d \cdot f'_c} \right) \cdot \frac{f'_c}{f_{fu}} = 1.837 \times 10^{-3}$$

Siendo la cuantía longitudinal dispuesta

$$\rho_f = \frac{A_f}{b \cdot d} = 2.338 \times 10^{-3}$$

Con lo cual la cuantía colocada es superior a la balanceada y por tanto la sección se encuentra sobre-reforzada, contradiciendo la predicción de la EHE. Si se presta atención a la formulación de sendas normativas existe un cúmulo de pequeñas diferencias que provoca esta incompatibilidad de predicción de fallo. Para empezar, el coeficiente de 0.85 que reduce la resistencia del hormigón por cansancio debido a cargas de larga duración, para un ensayo de rotura, no es lógico que se aplique, puesto que es una carga alta pero de muy corta duración. De hecho, la EHE a priori considera que se debe tomar igual a la unidad, a menos que el diseñador considere que se puede dar este efecto, debiéndose reducir a lo sumo un 25% la resistencia. Además, una de las suposiciones de partida es que la deformación última del hormigón es de 0.3%, lo cual realmente es una deformación demasiado conservativa, siendo tomado por la mayoría de las normativas, inclusive la EHE, igual 0.0035 para hormigones convencionales. Y por último, el coeficiente de profundidad de la fibra neutra β_1 empieza a decrecer para una resistencia del hormigón muy baja (27MPa) y rápidamente, a 55MPa, alcanza el mínimo valor. Todo ello conlleva a que sendas normativas predigan fallos diferentes. Siguiendo el razonamiento anterior, cabría pensar que la predicción de la EHE es más acertada. El hecho de que se haya producido esta controversia no ha sido por simple casualidad, sino se ha diseñado ha drede para que ocurra. De esta manera, una vez que se tenga los resultados de los experimentos, se podrá corroborar si realmente la predicción de la EHE es la más adecuada.

Como la sección, según el código ACI, se encuentra sobre reforzada, la formulación que sigue es totalmente idéntica a la del apartado anterior de la viga por rotura del hormigón. Por lo tanto se intentará simplificar lo máximo posible. Si en algún momento surgiera alguna duda es recomendable recurrir al apartado anterior para aclararlo.

De nuevo desarrollando las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en la sección se puede obtener el momento último resistido por la pieza.

$$\left| \begin{array}{l} v_c + \omega_2 \cdot \text{rend}_{s2} = \omega_1 \\ \mu_u = \mu_c + \mu_2 \end{array} \right. \quad \text{Momento último sin coeficiente de seguridad}$$

$$M_{us} = \mu_n \cdot b \cdot d^2 \cdot f'_c = 28.339 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Momento último con coeficiente de seguridad $M_{uc} = M_{us} \cdot \phi(\rho_f) = 18.031 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Carga Q de agotamiento sin coeficiente de seguridad $Q_{fs} = (M_{us} - M_p) \cdot \frac{6}{L} = 65.797 \text{ kN}$

Carga Q de agotamiento con coeficiente de seguridad $Q_{fc} = (M_{uc} - M_p) \cdot \frac{6}{L} = 41.057 \text{ kN}$

2.3.2.2.2 Comprobación del cortante último

Contribución del hormigón

ACI 440.1R-03

Cortante absorbido por el hormigón

$$V_{cf.03} = \frac{\rho_f \cdot E_f}{90 \cdot \beta_1 \cdot f'_c} \cdot V_c = 2.297 \cdot \text{kN}$$

Cortante absorbido por el hormigón para el caso de armado convencional con acero

$$V_c = \left(\sqrt{f'_c} \cdot \frac{b \cdot d}{6} \right) = 50.676 \text{ MPa}$$

Task Group 9.3

Cortante absorbido por el hormigón

$$V_{cf.TG} = \left(\frac{E_f}{E_s} \cdot \phi_\epsilon \right)^{\frac{1}{3}} \cdot V_c = 44.453 \cdot \text{kN}$$

Ratio entre máxima deformación permitida del FRP y deformación elástica del acero

$$\phi_\epsilon = \frac{0.0045}{0.002}$$

ACI 440.1R-06

Cortante absorbido por el hormigón

$$V_{cf.06} = 0.4 \cdot \sqrt{f'_c \cdot \text{MPa}} \cdot b \cdot c = 11.28 \cdot \text{kN}$$

Profundidad de la fibra neutra suponiendo que tanto el hormigón como el refuerzo se comporta elásticamente

$$c = k \cdot d = 0.02 \text{ m}$$

Factor de profundidad de fibra neutra

$$k = \left(\sqrt{n_f^2 \cdot \rho_f^2 + 2 \cdot n_f \cdot n_s \cdot \rho_f \cdot \rho_s + 2 \cdot n_f \cdot \rho_f + n_s^2 \cdot \rho_s^2 + 2 \cdot \frac{d_c^2}{d} \cdot n_s \cdot \rho_s - n_f \cdot \rho_f - n_s \cdot \rho_s} \right) = 0.093$$

Contribución de la armadura transversal

Cortante absorbido por los estribos de acero

$$V_s = \frac{A_v}{s} \cdot f_y \cdot \sin(\alpha) \cdot d \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)} \right) = 32.12 \cdot \text{kN}$$

Siendo:

Ángulo entre las bielas de compresión del hormigón y el eje de la pieza

$$\beta = \frac{\pi}{4}$$

Ángulo de los estribos respecto al eje de la pieza

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Cortante y carga total soportado por la viga

ACI 440.1R-03

Cortante último sin coeficiente de seguridad $V_{us.03} = V_s + V_{cf.03} = 34.718 \cdot \text{kN}$

Cortante último con coeficiente de seguridad $V_{uc.03} = 0.85 \cdot V_{us.03} = 29.511 \cdot \text{kN}$

Carga total sin coeficiente de seguridad $Q_{vs.03} = (V_{us.03} - V_p) \cdot 2 = 67.037 \cdot \text{kN}$

Carga total con coeficiente de seguridad $Q_{vc.03} = (V_{uc.03} - V_p) \cdot 2 = 56.621 \cdot \text{kN}$

Task Group 9.3

Cortante último sin coeficiente de seguridad $V_{us.TG} = V_s + V_{cf.TG} = 76.874 \cdot \text{kN}$

Cortante último con coeficiente de seguridad $V_{uc.TG} = 0.85 \cdot V_{us.TG} = 65.343 \cdot \text{kN}$

Carga total sin coeficiente de seguridad $Q_{vs.TG} = (V_{us.TG} - V_p) \cdot 2 = 151.349 \cdot \text{kN}$

Carga total con coeficiente de seguridad $Q_{vc.TG} = (V_{uc.TG} - V_p) \cdot 2 = 128.287 \cdot \text{kN}$

ACI 440.1R-06

Cortante último sin coeficiente de seguridad $V_{us.06} = V_s + V_{cf.06} = 43.702 \cdot \text{kN}$

Cortante último con coeficiente de seguridad $V_{uc.06} = 0.85 \cdot V_{us.06} = 37.146 \cdot \text{kN}$

Carga total sin coeficiente de seguridad $Q_{vs.06} = (V_{us.06} - V_p) \cdot 2 = 85.003 \cdot \text{kN}$

Carga total con coeficiente de seguridad $Q_{vc.06} = (V_{uc.06} - V_p) \cdot 2 = 71.893 \cdot \text{kN}$

2.3.2.3 Estado Límite de Servicio

Igualmente la formulación tratada aquí es totalmente análoga a la del apartado anterior de la viga por rotura del hormigón. Por ello se intentará simplificar y reducir las ecuaciones.

2.3.2.3.1 Evolución de la flecha

Inercia bruta de la sección $I_g = \frac{b \cdot h^3}{12} = 2.604 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

Inercia fisurada de la sección $I_{cr} := \frac{b \cdot d^3 \cdot k^3}{3} + n_f \cdot A_f \cdot d^2 \cdot (1 - k)^2 = 7.362 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Factor de profundidad de fibra neutra
suponiendo un comportamiento elástico
tanto del hormigón como del FRP

$$k := 0.146$$

Relación entre el módulo del FRP y hormigón

$$n_f := \frac{E_f}{E_c} = 1.786$$

Relación entre el módulo del acero y hormigón

$$n_s := \frac{E_s}{E_c} = 5.955$$

Momento de fisuración

$$M_{cr} = f_r \cdot W_g = 9.133 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Inercia equivalente según ACI 440.1R-03

$$I_{e.03}(M_s) = \left(\frac{M_{cr}}{M_s} \right)^3 \cdot I_g \cdot \beta_{d.03} + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_s} \right)^3 \right] \cdot I_{cr}$$

Factor reductor de la inercia equivalente

$$\beta_{d.03} = \alpha_b \cdot \left(\frac{E_f}{E_s} + 1 \right) = 0.65$$

Factor que informa sobre la adherencia
de las barras

$$\alpha_b = 0.5$$

Inercia equivalente según ACI 440.1R-06

$$I_{e.06}(M_s) = \left(\frac{M_{cr}}{M_s} \right)^3 \cdot I_g \cdot \beta_{d.06} + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_s} \right)^3 \right] \cdot I_{cr}$$

Factor reductor de inercia equivalente

$$\beta_{d.06} := \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\rho_f}{\rho_{fb}} \right) = 0.224$$

Aplicando las ecuaciones de resistencia de materiales para calcular la flecha se tiene:

$$\Delta_{i.03}(Q) = \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2)}{48 \cdot E_c \cdot I_{e.03} \left(Q \cdot \frac{L}{6} + M_p \right)} + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_c \cdot I_{e.03} \left(Q \cdot \frac{L}{6} + M_p \right)} \right] & \text{si } Q \geq Q_{cr} \\ \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_c \cdot I_g} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_c \cdot I_g} \right] & \text{si } Q < Q_{cr} \end{cases}$$

$$\Delta_{i.06}(Q) = \begin{cases} \left[\frac{Q \cdot a \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2)}{48 \cdot E_c \cdot I_{e.06} \left(Q \cdot \frac{L}{6} + M_p \right)} + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_c \cdot I_{e.06} \left(Q \cdot \frac{L}{6} + M_p \right)} \right] & \text{si } Q \geq Q_{cr} \\ \left[\frac{Q \cdot a}{48 \cdot E_c \cdot I_g} \cdot (3L^2 - 4 \cdot a^2) + \frac{5 \cdot P \cdot L^4}{384 \cdot E_c \cdot I_g} \right] & \text{si } Q < Q_{cr} \end{cases}$$

Siendo:

Momento debido al peso propio

$$M_p = 0.924 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Carga Q que produce la primera fisura

$$Q_{cr} = 6 \cdot \frac{M_{cr} - M_p}{L} = 19.703 \text{ kN}$$

A continuación se muestran unas gráficas con la evolución de la flecha según las dos fórmulas de cálculo explicadas.

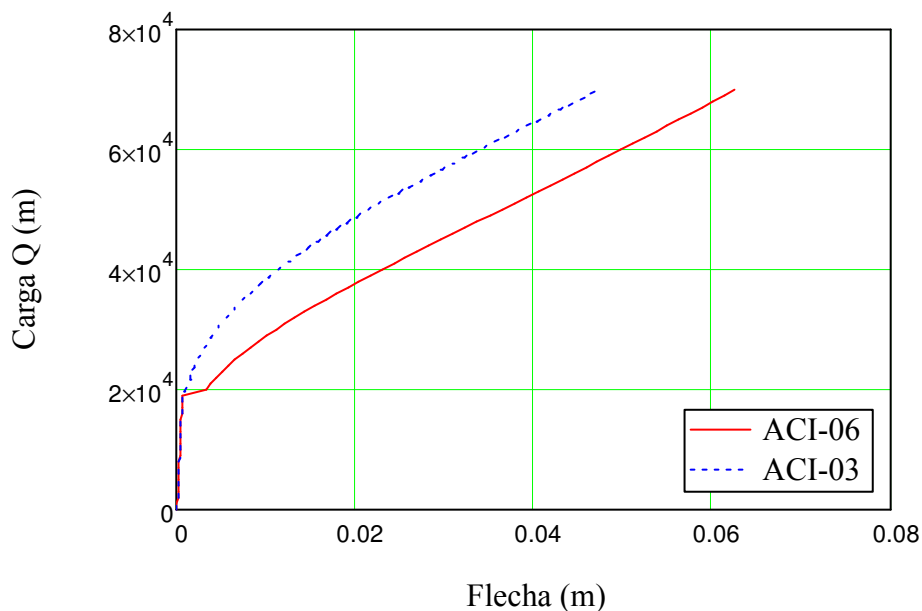


Fig. 2.24: Evolución de la flecha en función de la carga

2.3.2.3.2 Evolución de la abertura de fisura

ACI 440.1R-03

Abertura de fisura

$$w_{03}(Q) = \begin{cases} \left(\frac{2.2 \cdot \beta \cdot k_b \cdot f_f(Q)}{E_f} \cdot \sqrt[3]{d_c \cdot A_e} \right) & \text{if } Q \geq Q_{cr} \\ 0 & \text{if } Q < Q_{cr} \end{cases}$$

Tensión de las armaduras inferiores

$$f_f(Q) = \frac{Q \cdot \frac{L}{6} + M_p}{A_f \cdot d \cdot \left(1 - \frac{k}{3}\right)}$$

Relación entre la distancia de la fibra neutra al punto más traccionado de la sección y la distancia de la fibra neutra al centro del refuerzo

$$\beta = \frac{h - k \cdot d}{d \cdot (1 - k)} = 1.179$$

Área efectiva a tracción dividida por el número de barras traccionadas

$$A_e = \frac{2 \cdot d_c \cdot b}{n_1} = 7 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Coficiente que toma en consideración la adherencia de las barras de FRP respecto de las de acero.

$$k_b = 1.2$$

ACI 440.1R-06

Abertura de fisura

$$w_{06}(Q) = \begin{cases} \left[2 \cdot \frac{f_f(Q)}{E_f} \cdot \beta \cdot k_b \cdot \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \right] & \text{if } Q > Q_{cr} \\ 0 & \text{if } Q < Q_f \end{cases}$$

Separación media entre barras a tracción

$$s := \frac{b}{n_1} = 0.1 \text{ m}$$

Resto de variables idénticas al ACI-03

A continuación se muestra una gráfica con la representación de sendas curvas en función de la carga Q aplicada.

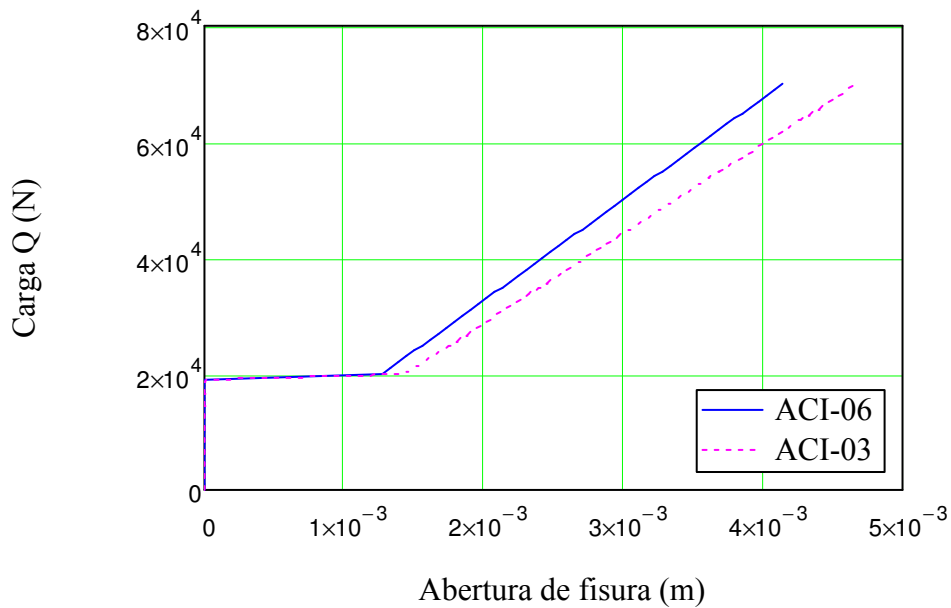


Fig. 2.25: Evolución de la abertura de fisura

2.3.2.3.3 Evolución de la fibra neutra

Planteando las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, siendo el momento un parámetro, se puede obtener la deformación tanto del hormigón como del FRP y por tanto la fibra neutra.

Dado

$$A_f \cdot E_f \cdot \epsilon_f - A_s \cdot f_y \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_f, \epsilon_{ca}) = \frac{b \cdot d}{\epsilon_{ca} + \epsilon_f} \cdot \int_0^{\epsilon_{ca}} f_c(\epsilon_c) d\epsilon_c$$

$$M_s = \frac{d^2 \cdot b}{\epsilon_f + \epsilon_{ca}} \cdot \left[1 - \frac{\epsilon_{ca} \cdot CG(\epsilon_{ca})}{(\epsilon_{ca} + \epsilon_f)} \right] \cdot \int_0^{\epsilon_{ca}} f_c(\epsilon_c) d\epsilon_c + A_s \cdot f_y \cdot \text{rend}_{s2}(\epsilon_f, \epsilon_{ca}) \cdot (d - d_{c2})$$

$$S(M_s) = \text{resolver}(\epsilon_{ca}, \epsilon_f)$$

Donde las únicas incógnitas son:

- Deformación del hormigón en la fibra pésima ϵ_{ca}
- Deformación del refuerzo interno de FRP ϵ_f

M_s es el momento aplicado y es el parámetro del sistema de ecuaciones

$S(M_s)$ es la solución del sistema de ecuaciones parametrizado.

Recordar:

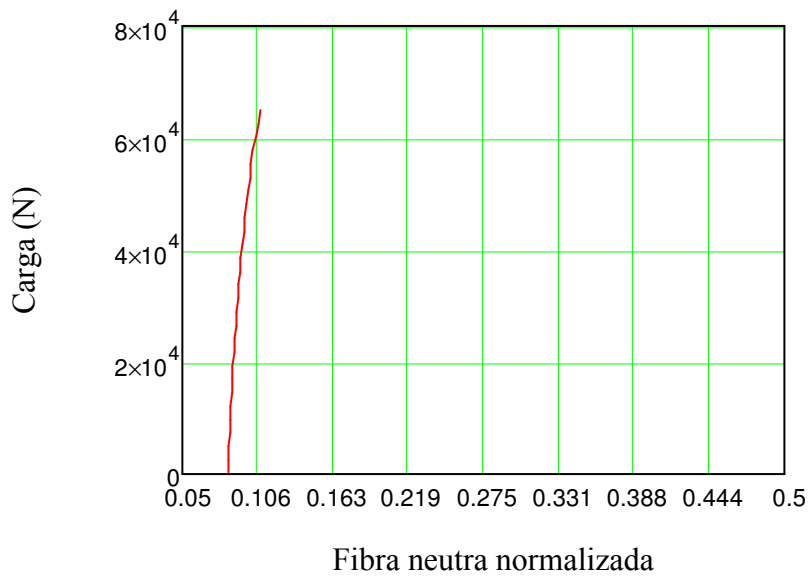


Fig 2.26: Evolución de la fibra neutra en función de la carga Q aplicada

2.3.2.3.4 Evolución de la curvatura

Curvatura según ACI-03

$$\chi_{03}(M_s) := \begin{cases} \frac{M_s}{E_c \cdot I_{e.03}(M_s)} & \text{if } M_s > M_{cr} \\ \frac{M_s}{E_c \cdot I_g} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Curvatura según ACI -06

$$\chi_{06}(M_s) := \begin{cases} \frac{M_s}{E_c \cdot I_{e.06}(M_s)} & \text{if } M_s > M_{cr} \\ \frac{M_s}{E_c \cdot I_g} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Véanse sendas gráficas representadas para esta caso en concreto.

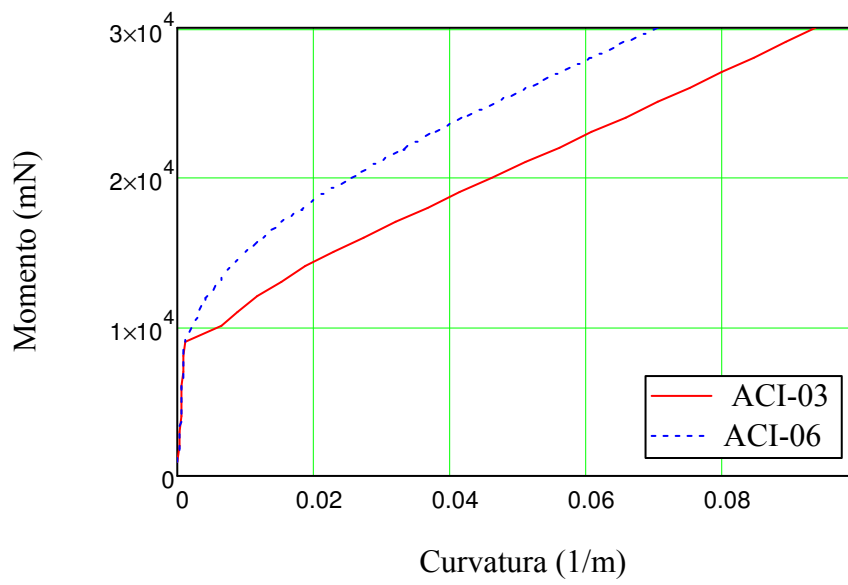


Fig. 2.27: Evolución de la curvatura en función de la carga