

2. DESARROLLO PRELIMINAR.

2.1. CARACTERÍSTICAS Y TIPOLOGÍA DE LA VÍA.

Para definir estructuralmente la red ferroviaria se distinguen los siguientes elementos:

- **Plataforma.** Es el elemento portante sobre el que descansa o se cimenta la estructura. Su naturaleza y características geotécnicas condicionan el diseño de los restantes elementos constitutivos, ya que una plataforma de escasa capacidad portante y sin un drenaje profundo eficaz puede generar un proceso de socavación.
- **Traviesas.** Tienen dos funciones básicas: mantener los raíles con la separación correspondiente y transferir la presión que ejercen los trenes de los raíles al balasto. Es conveniente que los raíles se sujeten con firmeza, pero sin rigidez, ya que un poco de flexibilidad ayuda a que el recorrido sea más suave y reduce el desgaste.
- **Carril.** Las cualidades más importantes son la seguridad y la duración, y se distinguen varios tipos: de cabeza gruesa reversible, de silla y de patín plano.

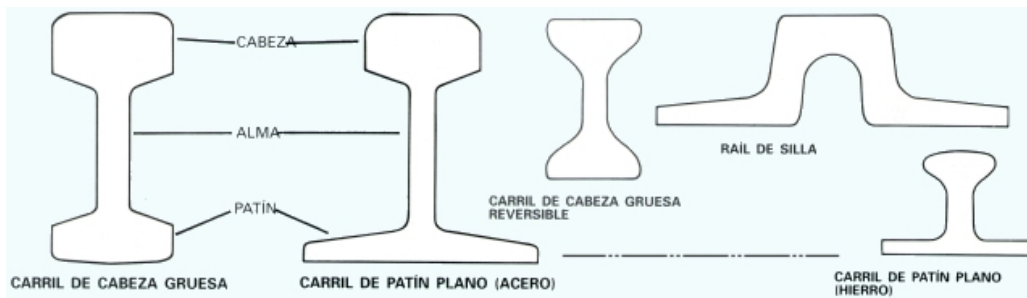


Ilustración 2. 1: Tipos de carriles

- Sistema de sujeción. Está formado por todos los componentes que forman la conexión estructural entre raíles y traviesas. Al presentar mayores cargas dinámicas, conviene que sean muy elásticas y con la mayor superficie de contacto posible. Se suelen clasificar en sujeciones directas, indirectas o mixtas, dependiendo de cómo se encuentre sujeto el carril a la vía. Se muestran a continuación varias imágenes de dispositivos de fijación:

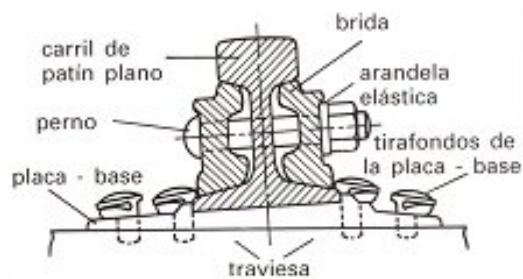


Ilustración 2. 2: Sección transversal de la junta entre los tramos de un carril de patín plano apoyado

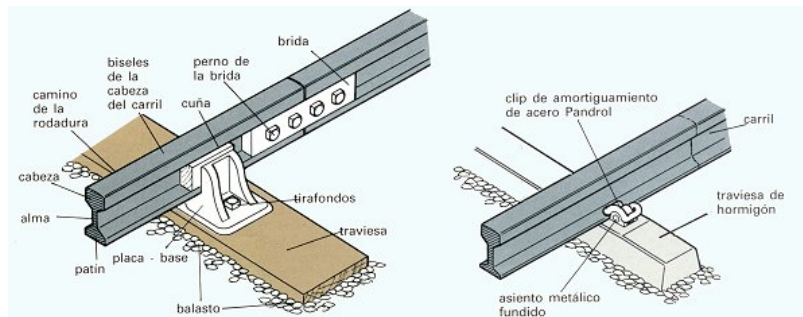


Ilustración 2. 3: Carril de cabeza gruesa mostrando la brida de cuatro pernos (izquierda), y el clip sujeta el carril a la traviesa de hormigón (derecha)

- Elastómeros. Se sitúan entre el raíl y su base de apoyo aunque hay otras soluciones que disponen otros niveles elastoméricos entre el elemento de apoyo del carril y la placa

principal e incluso entre las placas de base y principal, con objeto de aumentar la elasticidad del conjunto y disminuir las cargas dinámicas al paso de los vehículos ferroviarios.

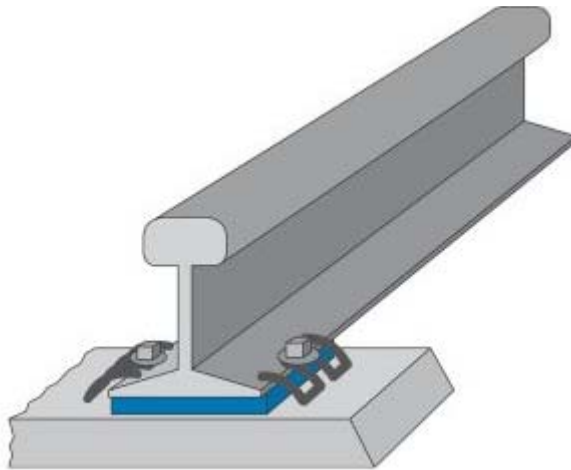


Ilustración 2. 4: Almohadilla bajo raíl

- Elementos intermedios.

Dependiendo del tipo de vía aparecerán otros elementos característicos de esta, y que se exponen en los siguientes apartados.

2.1.1. Vía balasto.

El balasto se define como la grava o piedra machacada (áridos sueltos) que conforman la capa de asiento de las traviesas en las vías ferroviarias. El balasto de vía aporta estabilidad a la vía férrea, haciendo que permanezca con la geometría dada durante su construcción. Adicionalmente, intenta proporcionar una base drenante lo suficientemente estable como para mantener la alineación de la vía con un mínimo de mantenimiento. Constituye una parte débil de la estructura de la vía férrea, y tiene, en concreto, las siguientes funciones:

- Amortiguar las acciones que ejercen los vehículos sobre la vía al transmitirlas a la plataforma.

- Repartir uniformemente estas acciones sobre dicha plataforma.
- Evitar el desplazamiento de la vía, estabilizándola en dirección vertical, longitudinal y transversal.
- Facilitar la evacuación de las aguas de lluvia.
- Proteger los suelos de la plataforma contra la acción de las heladas.
- Permitir la recuperación de la geometría de la vía mediante operaciones de alineación y nivelación.



Ilustración 2. 5: Balasto de la vía

En la ilustración 2.6 se muestra la sección transversal de una vía de este tipo, compuesta por unos raíles que apoyan en el balasto a través de unas traviesas.

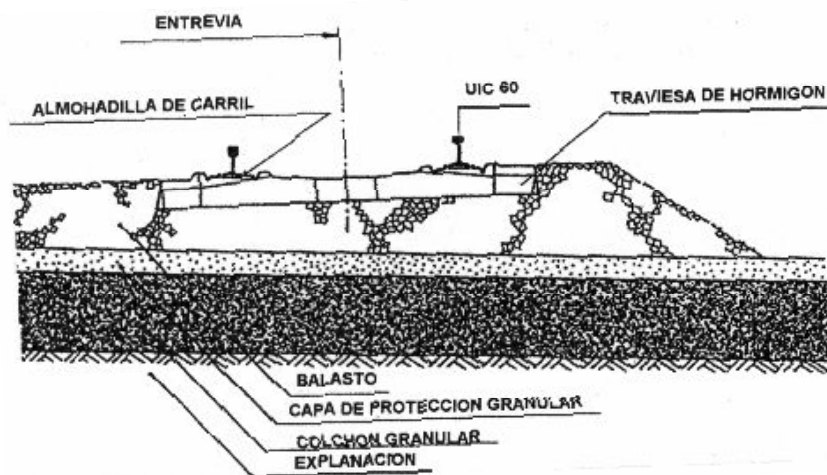


Ilustración 2. 6: Sección transversal de vía balasto

La estructura de la capa de asiento está compuesta por una superior (base) formada por el balasto, y otra inferior (subbase) que puede estar compuesta de grava compactada, arena o geotextil. Las principales funciones de esta subbase son:

- Graduar los efectos hacia la plataforma.
- Evitar el punzonamiento de la plataforma por el balasto.
- Evitar la contaminación del balasto.
- Facilitar el saneamiento, drenaje y protección contra el hielo.
- Posibilitar la independencia en el mantenimiento.

En cuanto a las traviesas, estas pueden ser de madera, de hormigón, y raramente, metálicas. Las funciones y requerimientos generales de estos elementos son:

- Sustentar las fuerzas transmitidas por el raíl y transferirlas todo lo uniformemente que sea posible al balasto.
- Corregir las posibles irregularidades e inclinaciones del raíl.
- Dotar de un adecuado aislamiento eléctrico entre los dos raíles.
- Ser resistentes a las influencias mecánicas y del tiempo durante largos periodos de tiempo.

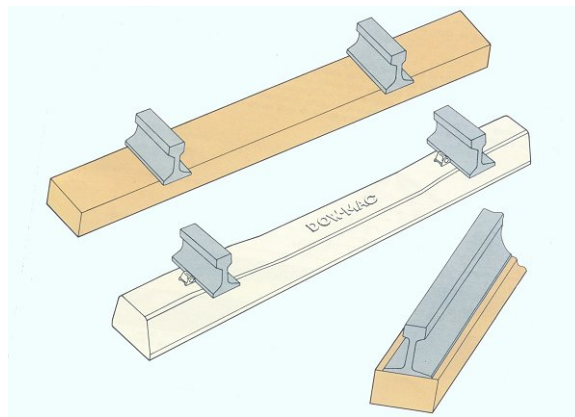


Ilustración 2. 7: Traviesas de madera y de hormigón

2.1.2. Vía placa.

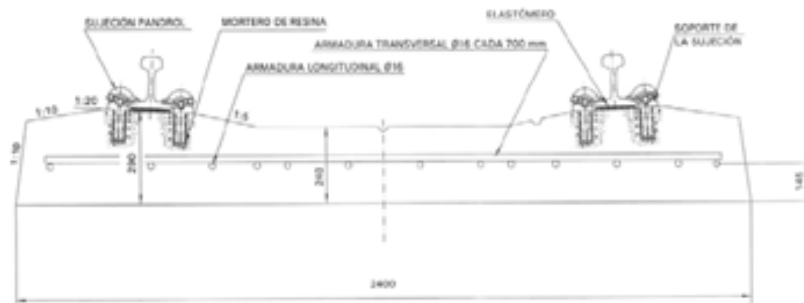
El sistema de vía placa consiste en el apoyo de las vías sobre un material, típicamente asfalto y hormigón, más rígido que el balasto tradicional. En este sistema se distinguen principalmente las siguientes partes: plataforma, placa base, placa principal, sujeciones, raíles, elastómeros y, en su caso, elementos intermedios (ya sea placas metálicas, bloques propiamente dichos, traviesas o losas).

Existen numerosas configuraciones de vía placa, cada una de ellas ha sido desarrollada con una aplicación específica y presentan diferentes sistemas de anclaje y de amortiguamiento. Las principales son:

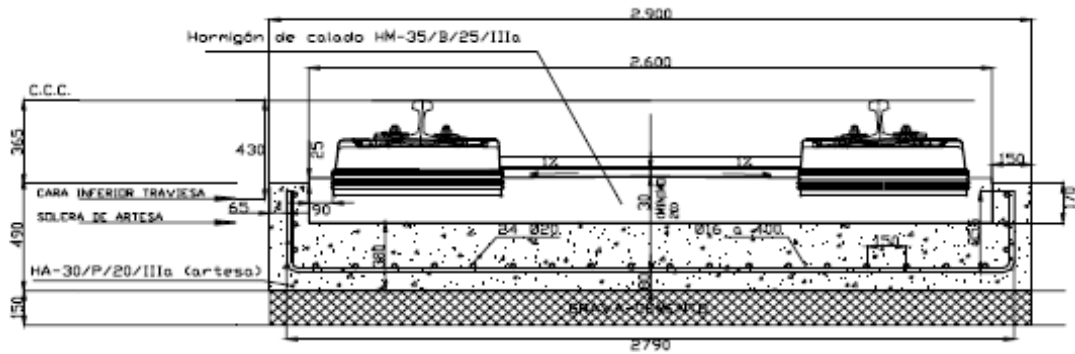
- Sistema de carril embebido.



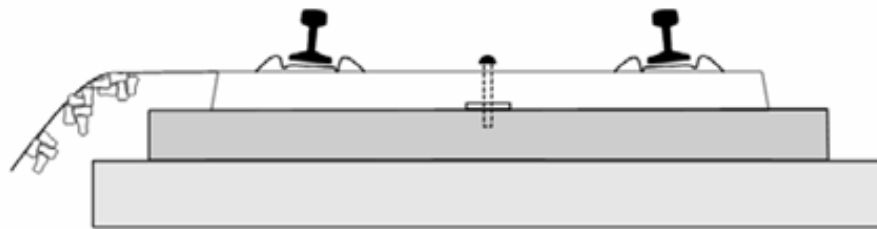
- Sistema de apoyo directo del raíl.



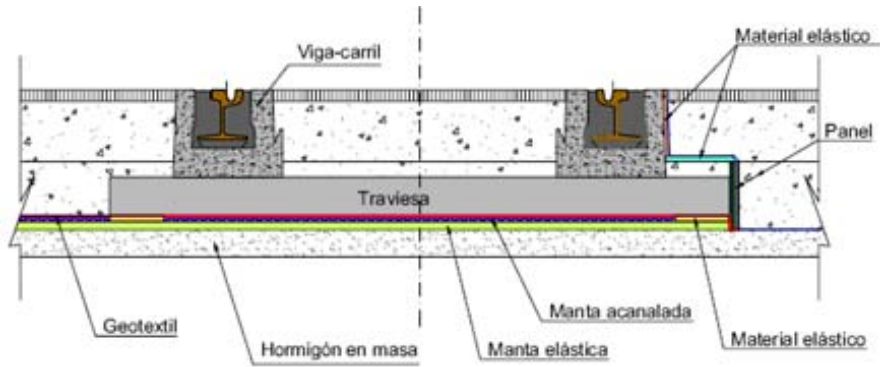
- Sistema de traviesas recubiertas con elastómeros.



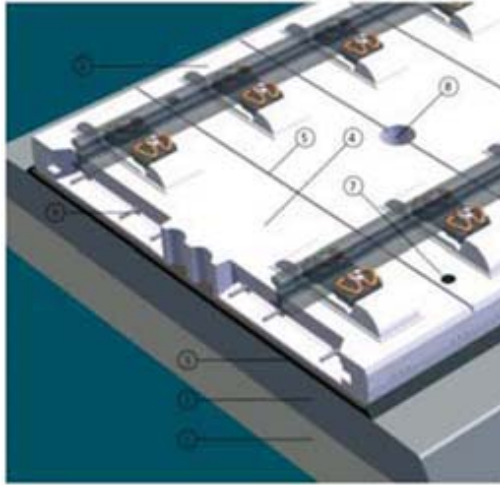
- Sistema de traviesas apoyadas en las losas.



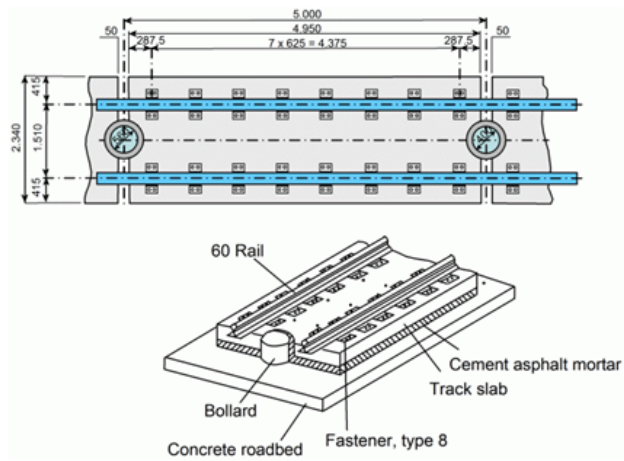
- Sistema de losas flotantes con traviesas.



- Sistema de losa apoyada con mortero no elástico.



- Sistema de losa flotante sin traviesa.



En la siguiente tabla se muestra un resumen del comportamiento de los tipos de placa mencionados:

Tipo de vía	Ruido	Vibraciones	Mantenimiento
Carril embebido	Necesidad de soluciones extras	Buen comportamiento	Muy dilatado en el tiempo
Apoyo directo del raíl	Mal comportamiento	Mal comportamiento	Muy frecuente en el tiempo
Apoyo indirecto del raíl	Mal comportamiento	Necesidad de soluciones extras	Muy frecuente en el tiempo
Bloques recubiertos con elastómeros	Necesidad de soluciones extras	Buen comportamiento	Problemas con las filtraciones de agua
Monolítico con traviesas	Necesidad de soluciones extras	Necesidad de soluciones extras	Posible reemplazo de elementos
Traviesas recubiertas de elastómero	Necesidad de soluciones extras	Buen comportamiento	Problemas con las filtraciones de agua
Traviesa sobre losa	Necesidad de soluciones extras	Necesidad de soluciones extras	Posible reemplazo de elementos
Losa flotante con traviesas	Necesidad de soluciones extras	Buen comportamiento	Posible reemplazo de elementos
Losa sobre mortero no elástico	Necesidad de soluciones extras	Necesidad de soluciones extras	Posible reemplazo de elementos
Losa flotante sin traviesas	Necesidad de soluciones extras	Buen comportamiento	Posible reemplazo de elementos

Tabla 2.1: Resumen del comportamiento de las principales configuraciones en vía placa

2.2. MODELO ANALÍTICO DE CARGA MÓVIL SOBRE LA VÍA PARA SUELO ESTRATIFICADO.

2.2.1. Modelo analítico en vía balasto.

En la figura siguiente se representa un esquema de esta tipología de vía, en la que se incluyen todos los niveles de *pad* que se van a considerar (entre raíles y traviesas, entre traviesas y balasto, y bajo el balasto).

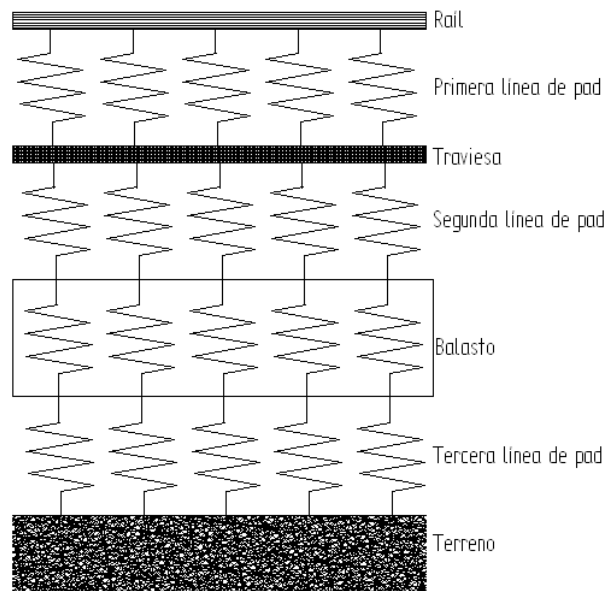


Figura 2. 1: Modelo para vía balasto

Los raíles se modelan como una viga de Euler, las traviesas como un elemento continuo (considerar el carácter discreto al resolver las variables transformadas complicaría demasiado los cálculos), y el balasto será un sistema de resortes con masa. A continuación se muestra el proceso para obtener el sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento de la vía, analizando cada uno de los componentes.

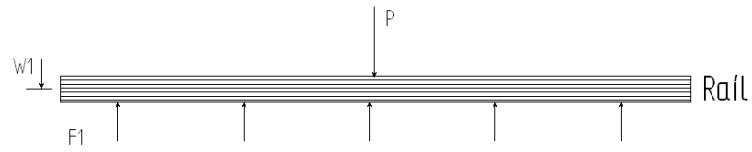


Figura 2. 2: Fuerzas actuantes sobre los raíles

$$E \cdot I_R \cdot \frac{\partial^4 w_1(x,t)}{\partial x^4} + m_R \cdot \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial t^2} = P \cdot \delta(x-ut) - F_1(x,t)$$

Siendo P la carga aplicada sobre el raíl circulando a una velocidad v , $E \cdot I_R$, la rigidez a flexión del raíl y m_R , la masa por unidad de longitud del raíl.

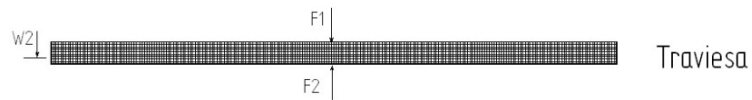


Figura 2. 3: Fuerzas actuantes sobre las traviesas

$$m_s \cdot \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial t^2} - F_1(x,t) = F_2(x,t)$$

Con m_s como la masa por unidad de longitud de las traviesas.

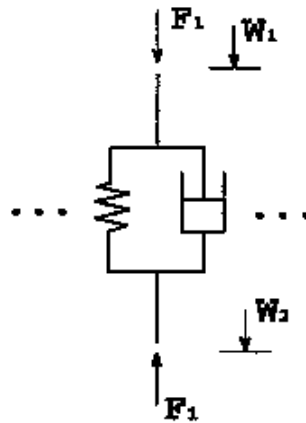


Figura 2. 4: Fuerzas actuantes sobre una línea de pad

$$F_i(x,t) = k_{pi} \cdot [w_i(x,t) - w_{i+1}(x,t)]$$

Donde, k_{pi} es la rigidez de la línea i de *pad* (el amortiguamiento se introduce como la parte compleja a la rigidez en el dominio de las variables transformadas).

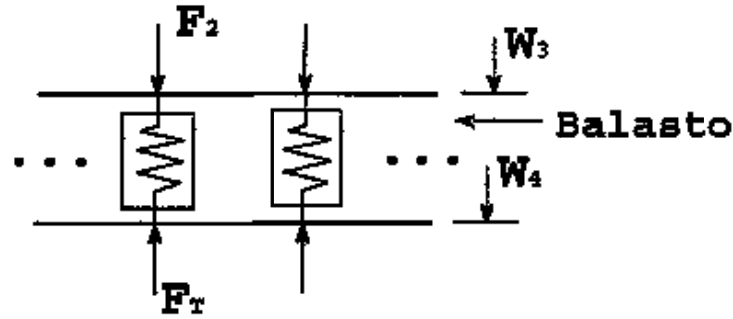


Figura 2. 5: Fuerzas actuantes sobre una línea de pad

$$\frac{m_B}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_3(x,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w_4(x,t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} + k_B \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_3(x,t) \\ w_4(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2(x,t) \\ -F_5(x,t) \end{bmatrix}$$

Siendo m_B la masa por unidad de longitud y k_B la rigidez por unidad de longitud del balasto.

Sustituyendo las expresiones de las líneas de pad que correspondan en las expresiones del raíl, traviesa y balasto, y aplicando la transformada de Fourier para la coordenada espacial x , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E \cdot I_R \cdot \beta^4 \cdot w_1(\beta, t) + m_R \cdot \frac{\partial^2 w_1(\beta, t)}{\partial t^2} + k_{p1} \cdot [w_1(\beta, t) - w_2(\beta, t)] = P \cdot e^{-i\beta vt}$$

$$m_S \cdot \frac{\partial^2 w_2(\beta, t)}{\partial t^2} - k_{p1} \cdot [w_1(\beta, t) - w_2(\beta, t)] + k_{p2} \cdot [w_2(\beta, t) - w_3(\beta, t)] = 0$$

$$\frac{m_B}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_3(\beta, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w_4(\beta, t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} + k_B \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_3(\beta, t) \\ w_4(\beta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p2} \cdot [w_2(\beta, t) - w_3(\beta, t)] \\ -k_{p3} \cdot [w_4(\beta, t) - w_5(\beta, t)] \end{bmatrix}$$

Debido a la forma del término derecho de la primera ecuación, la solución en régimen permanente del sistema de ecuaciones diferenciales será del tipo:

$$w_i(\beta, t) = \widetilde{w}_i(\beta) \cdot e^{-i\beta vt}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 5$$

Por lo tanto, sustituyendo esto en las ecuaciones y teniendo en cuenta que $\omega = -\beta \cdot v$, se llega al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas, que gobierna el comportamiento de la vía balasto:

$$E \cdot I_R \cdot \beta^4 \cdot \widetilde{w}_1(\beta) - \omega^2 \cdot m_R \cdot \widetilde{w}_1(\beta) + k_{p1} \cdot [\widetilde{w}_1(\beta) - \widetilde{w}_2(\beta)] = P$$

$$-\omega^2 \cdot m_S \cdot \widetilde{w}_2(\beta) - k_{p1} \cdot [\widetilde{w}_1(\beta) - \widetilde{w}_2(\beta)] + k_{p2} \cdot [\widetilde{w}_2(\beta) - \widetilde{w}_3(\beta)] = 0$$

$$-\omega^2 \cdot \frac{m_B}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{w}_3(\beta) \\ \widetilde{w}_4(\beta) \end{bmatrix} + \mathbf{k}_B \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{w}_3(\beta) \\ \widetilde{w}_4(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p2} \cdot [\widetilde{w}_2(\beta) - \widetilde{w}_3(\beta)] \\ -k_{p3} \cdot [\widetilde{w}_4(\beta) - \widetilde{w}_5(\beta)] \end{bmatrix}$$

Debido a que se tienen cinco incógnitas ($\widetilde{w}_i(\beta), \forall i = 1, 2, 3, 4, T$) y cuatro ecuaciones, es necesario definir una ecuación más para poder resolver el problema. Dicha ecuación es la que resulta de establecer la interacción entre la vía y el terreno:

$$\widetilde{w}_T(\beta) = H(\beta) \cdot \widetilde{F}_T(\beta)$$

Donde $H(\beta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty Q_{33}(\beta, \gamma) \cdot \frac{\text{sen}(b \cdot \gamma)}{b \cdot \gamma} d\gamma$, y b es la mitad del ancho del balasto.

Finalmente el sistema de ecuaciones lineal que define el modelo de vía balasto con travesía continua es, escrito en forma matricial, el siguiente:

$$\begin{bmatrix} EI_R \beta^4 - \omega^2 m_R + k_{p1} & -k_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{p1} & k_{p1} + k_{p2} - m_S \omega^2 & -k_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{p2} & -\omega^2 \frac{m_B}{3} + k_B + k_{p2} & -\omega^2 \frac{m_B}{6} - k_B & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \frac{m_B}{6} - k_B & -\omega^2 \frac{m_B}{3} + k_B + k_{p3} & -k_{p3} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{p3} & k_{p3} + \frac{1}{H(\beta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_1(\beta) \\ \widetilde{w}_2(\beta) \\ \widetilde{w}_3(\beta) \\ \widetilde{w}_4(\beta) \\ \widetilde{w}_T(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En apartados posteriores se explicará la obtención de la función $H(\beta)$ y la carga aplicada P aplicada sobre un raíl.

2.2.2. Modelo analítico en vía placa.

En la figura siguiente se muestra un esquema del modelo en vía placa con tres niveles de pad:

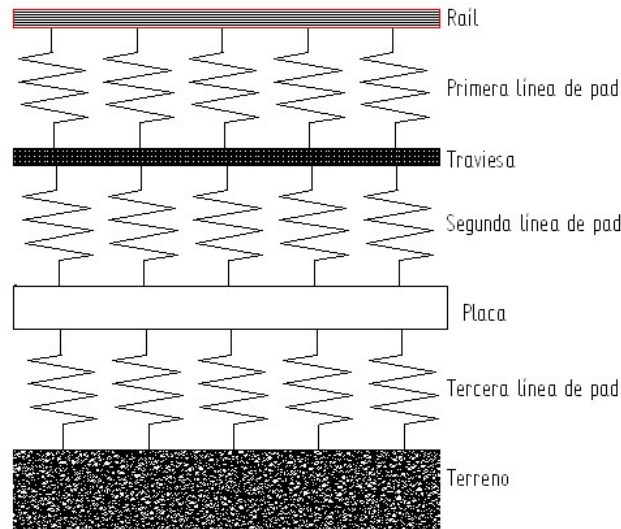


Figura 2. 6: Modelo para vía placa

En este caso el esquema de cálculo es el mismo, únicamente cambia la capa de balasto por una placa, que se modela como una viga de Euler, al igual que los raíles. Así que para evitar repeticiones, se muestra el comportamiento de la placa para, mostrar a continuación el sistema de ecuaciones resultante.

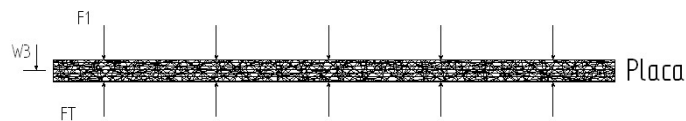


Figura 2. 7: Fuerzas actuantes sobre la placa

$$E \cdot I_P \cdot \frac{\partial^4 w_3(x, t)}{\partial x^4} + m_P \cdot \frac{\partial^2 w_3(x, t)}{\partial t^2} = F_2(x, t) - F_T(x, t)$$

Tomando como $E \cdot I_P$ la rigidez a flexión de la placa y m_P la masa por unidad de longitud de la placa.

Las ecuaciones en el dominio de la frecuencia son las siguientes:

$$E \cdot I_R \cdot \beta^4 \cdot \widetilde{w}_1(\beta) - \omega^2 \cdot m_R \cdot \widetilde{w}_1(\beta) = P - \widetilde{F}_1(\beta), \text{ para el raíl.}$$

$$\widetilde{F}_1(\beta) = k_{p1} \cdot [\widetilde{w}_1(\beta) - \widetilde{w}_2(\beta)], \text{ para el primer nivel de } pad.$$

$$-\omega^2 \cdot m_S \cdot \widetilde{w}_2(\beta) - \widetilde{F}_1(\beta) = -\widetilde{F}_2(\beta), \text{ para las traviesas.}$$

$$\widetilde{F}_2(\beta) = k_{p2} \cdot [\widetilde{w}_2(\beta) - \widetilde{w}_3(\beta)], \text{ en la segunda línea de } pad.$$

$$E \cdot I_P \cdot \beta^4 \cdot \widetilde{w}_3(\beta) - \omega^2 \cdot m_P \cdot \widetilde{w}_3(\beta) = \widetilde{F}_2(\beta) - \widetilde{F}_T(\beta), \text{ en la placa.}$$

$$\widetilde{F}_T(\beta) = k_{p3} \cdot [\widetilde{w}_3(\beta) - \widetilde{w}_T(\beta)], \text{ para la tercera línea de } pad.$$

$$\widetilde{w}_T(\beta) = H(\beta) \cdot \widetilde{F}_T(\beta), \text{ para la interacción vía-terreno.}$$

De esta manera se define el sistema de ecuaciones que define el problema, en esta ocasión formado por cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Matricialmente el problema queda:

$$\begin{bmatrix} EI_R \beta^4 - \omega^2 m_R + k_{p1} & -k_{p1} & 0 & 0 \\ -k_{p1} & k_{p1} + k_{p2} - m_S \omega^2 & -k_{p2} & 0 \\ 0 & -k_{p2} & EI_P \beta^4 - \omega^2 m_P + k_{p2} + k_{p3} & -k_{p3} \\ 0 & 0 & k_{p3} & k_{p3} + \frac{1}{H(\beta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_1(\beta) \\ \widetilde{w}_2(\beta) \\ \widetilde{w}_3(\beta) \\ \widetilde{w}_T(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En apartados posteriores se explicará la obtención de la función $H(\beta)$ y la carga aplicada P aplicada sobre un raíl.

2.2.3. Función de Green para un suelo estratificado.

Este apartado explica de manera breve la obtención de la función de Green para un terreno estratificado en el dominio de la frecuencia y número de onda. El método expuesto es el que propone X.Sheng [8]:

La función de Green relaciona las cargas aplicadas con los desplazamientos producidos en el terreno.

$$\begin{bmatrix} u_{10}(\beta, \gamma) \\ v_{10}(\beta, \gamma) \\ w_{10}(\beta, \gamma) \end{bmatrix} = [G(\beta, \gamma)] \begin{bmatrix} p_x(\beta, \gamma) \\ p_y(\beta, \gamma) \\ p_z(\beta, \gamma) \end{bmatrix}$$

donde el primer subíndice indica el número de estrato y el segundo advierte de si se trata del límite superior (0) o inferior del estrato (1).

Las ecuaciones que deben cumplirse para cada estrato “j” son las ecuaciones de Lamé en el dominio de la frecuencia y del número de onda.

$$(\lambda_j + \mu_j) \cdot i\beta \cdot \Delta_j + \mu_j \left[\frac{d^2 u_j}{dz^2} - (\beta^2 + \gamma^2 - \kappa_{j2}^2) u_j \right] = 0$$

$$(\lambda_j + \mu_j) \cdot i\gamma \cdot \Delta_j + \mu_j \left[\frac{d^2 v_j}{dz^2} - (\beta^2 + \gamma^2 - \kappa_{j2}^2) v_j \right] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(\lambda_j + \mu_j) \cdot \frac{d\Delta_j}{dz} + \mu_j \left[\frac{d^2 w_j}{dz^2} - (\beta^2 + \gamma^2 - \kappa_{j2}^2) w_j \right] = 0$$

Estas son las ecuaciones de propagación de las ondas de compresión (P) y las de cizalla horizontales (SH) y verticales (SV), donde:

$$\Delta_j = i\beta u_j + i\gamma\gamma_j + \frac{dw_j}{dz}$$

$$\lambda_j = \frac{v_j E_j (1 + i2\eta_j)}{(1 + v_j)(1 - 2v_j)}$$

$$\mu_j = \frac{E_j (1 + i2\eta_j)}{2(1 + v_j)}$$

$$\kappa_{j1}^2 = \frac{\omega^2}{c_{j1}^2}$$

$$\kappa_{j2}^2 = \frac{\omega^2}{c_{j2}^2}$$

$$c_{j1} = \sqrt{\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}}, \text{ velocidad de propagación de las ondas P.}$$

$$c_{j2} = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}, \text{ velocidad de propagación de las ondas S.}$$

La ley de comportamiento en el dominio de la frecuencia y del número de onda es:

$$\tau_{xzz} = \mu_j \left(i\beta w_j + \frac{du_j}{dz} \right) \zeta$$

$$\tau_{yzz} = \mu_j \left(i\gamma w_j + \frac{dv_j}{dz} \right)$$

$$\tau_{xzz} = \left(\lambda_j \Delta_j + 2\mu_j \frac{dw_j}{dz} \right)$$

Aplicando la compatibilidad de desplazamientos y el equilibrio de fuerzas en las interfaces, y teniendo en cuenta las propiedades de un semi-espacio para el estrato n+1, se resuelve el sistema del cual se obtiene la función de Green para un suelo estratificado.

$$[G(\beta(\gamma))] = -[Q]$$

Con la matriz Q definida como:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = \left([R] \cdot [S]^{-1} [T]_{21} - [T_{11}] \right)^{-1} \cdot \left([T]_{12} - [R] \cdot [S]^{-1} [T]_{22} \right)$$

Nota: Para mayor información, consultar [8].

Debido a que en el problema sujeto de estudio en este proyecto sólo se transmiten cargas en dirección perpendicular al terreno:

$$\begin{bmatrix} p_x(\beta\gamma) \\ p_y(\beta\gamma) \\ p_z(\beta\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z(\beta\gamma) \end{bmatrix}$$

Por tanto solo son de interés: Q_{13} , Q_{23} y Q_{33} , que son:

$Q_{13}(\beta,\gamma)$ es una función impar en β y par en γ .

$Q_{23}(\beta,\gamma)$ es una función par en β y impar en γ .

$Q_{33}(\beta,\gamma)$ es una función par en β y par en γ .

Debido a la simetría de revolución del problema, resulta muy interesante desde el punto de vista del cálculo, un cambio a coordenadas cilíndricas además permite definir las matrices para $\beta=0$.

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \rho \cdot \cos \phi \\ \gamma = \rho \cdot \sin \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} Q_{13}(\beta, \rho) \\ Q_{23}(\beta, \rho) \\ Q_{33}(\beta, \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{23}(0, \rho) \cdot \cos \phi \\ Q_{23}(0, \rho) \cdot \sin \phi \\ Q_{33}(0, \rho) \end{bmatrix}$$

2.2.4. Función de interacción vía-suelo.

La interacción entre la vía y el suelo está gobernada por la compatibilidad en desplazamientos y el equilibrio de fuerzas en la interfase entre los dos elementos:



Figura 2. 8: Interfase vía-terreno

Particularizando la ecuación de compatibilidad para $y=0$, se tiene:

$$w_T(x, t) = w_{10}(x, y = 0, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{10}(\beta, \gamma, t) e^{i\beta x} d\beta d\gamma,$$

Del equilibrio de fuerzas en la en la interfase vía-terreno:

$$\begin{bmatrix} p_x(x, y, t) \\ p_y(x, y, t) \\ p_z(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{cases} F_T(x, t) / 2b \quad \forall |y| \leq b \\ 0 \quad \forall |y| > b \end{cases} \end{bmatrix}$$

donde $2b$ es el ancho de la zona de contacto.

Aplicando la transformada de Fourier según la coordenada x en la ecuación de compatibilidad y x, y en el equilibrio de fuerzas:

$$w_T(\beta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_T(x, t) e^{-i\beta x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_{10}(\beta, \gamma, t) d\gamma$$

$$\begin{bmatrix} p_x(\beta, \gamma, t) \\ p_y(\beta, \gamma, t) \\ p_z(\beta, \gamma, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\text{sen}(\gamma b)}{\gamma b} F_T(\beta, t) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la relación entre las cargas transmitidas y los desplazamientos del terreno, haciendo uso de la reducción a la solución en régimen permanente, a través de la función de Green es:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{10}(\beta, \gamma) \\ \tilde{v}_{10}(\beta, \gamma) \\ \tilde{w}_{10}(\beta, \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_{13} \frac{\sin(\gamma b)}{\gamma b} \tilde{F}(\beta) \\ -Q_{23} \frac{\sin(\gamma b)}{\gamma b} \tilde{F}(\beta) \\ -Q_{33} \frac{\sin(\gamma b)}{\gamma b} \tilde{F}(\beta) \end{bmatrix}$$

Introduciendo $\tilde{w}_{10}(\beta, \gamma)$ en la ley de compatibilidad en desplazamientos:

$$\tilde{w}_T(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -Q_{33}(\beta, \gamma) \frac{\sin(\gamma b)}{\gamma b} d\gamma \tilde{F}_T(\beta)$$

Definiendo la función $H(\beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{33}(\beta, \gamma) \frac{\sin(\gamma b)}{\gamma b} d\gamma$, se obtiene la relación:

$$\tilde{w}_T(\beta) = H(\beta) \cdot \tilde{F}_T(\beta)$$

Esta función establece la interacción entre la vía y el terreno, permitiendo resolver el problema definido anteriormente.

Para el cálculo de la respuesta del terreno en el dominio de la frecuencia f , basta por reemplazar por un valor equivalente de β tal que:

$$\beta = \frac{2\pi f}{v} \Rightarrow \omega = 2\pi f$$

De manera que los espectros de desplazamientos en frecuencia, son:

$$S_u(x, y, f) = \frac{1}{v} e^{i\beta x} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{10}(\beta, \gamma) e^{i\gamma x} d\gamma \right)$$

$$S_v(x, y, f) = \frac{1}{v} e^{i\beta x} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_{10}(\beta, \gamma) e^{i\gamma x} d\gamma \right)$$

$$S_w(x, y, f) = \frac{1}{v} e^{i\beta x} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\beta, \gamma) e^{i\gamma x} d\gamma \right)$$

Donde la integral representa la transformada inversa de los desplazamientos en el terreno respecto de γ , por lo que no es necesario aplicar transformada también en β para el cálculo de los desplazamientos en el terreno. Esto se debe a que la definición de la carga como carga en movimiento establece una relación directa entre frecuencia y número de onda β en régimen permanente.

2.2.5. Carga aplicada sobre la vía.

Un tren de cargas queda definido como:

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} T_{nk} \cdot \delta[x - (v \cdot t - L_{nk})]$$

donde,

N es el número de vagones.

K_n , el número de ejes del vagón n .

T_{nk} es la carga del eje k del vagón n .

L_{nk} es la distancia desde el eje k del vagón n al frontal del tren.

v es la velocidad a la que se desplaza el tren.

Realizando una transformación de Fourier se llega a la siguiente expresión en la que bastaría introducir la carga n los sistemas ecuaciones descritos en los apartados anteriores para tener en consideración la carga del tren completo.

$$P(\beta, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} T_{nk} \cdot e^{-i\beta(vt-L_{nk})} = \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} T_{nk} \cdot e^{-i\beta \cdot L_{nk}} \right] \cdot e^{-i\beta(vt-L_{nk})}$$

$$P(\beta, t) = \tilde{P}(\beta) \cdot e^{-i\beta vt}$$