

## Capítulo 2

# MODELADO DEL PROBLEMA DE CONTACTO

### 2.1. El problema de contacto

En esta sección vamos a presentar la formulación fuerte del problema de contacto cuasi-estático entre sólidos 3D, que presentan contornos “suaves”, un comportamiento elástico y lineal y pequeños desplazamientos y deformaciones, de forma análoga a [16].

#### 2.1.1. El problema elástico

Se considera un sólido elástico, lineal e isótropo, de dominio  $\Omega$  y contorno  $\Gamma$ , definido por un sistema de coordenadas cartesianas  $x_i \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$ . Dicho sólido estará sometido a unas fuerzas de volumen  $b_i$  en  $\Omega$ , unas tracciones  $\bar{t}_i$  prescritas en el contorno y unos desplazamientos  $\bar{u}_i$  sobre  $\Gamma_{\bar{u}}$ . Además, las regiones del contorno serán dos regiones complementarias de  $\Gamma$ .

De esta forma, las incógnitas de nuestro problema serán los campos de desplazamientos  $u_i$ , las deformaciones  $e_{ij}$  y las tensiones  $\sigma_{ij}$ ,

definidas todas ellas en el dominio  $\Omega$ . Para resolver estas incógnitas serán necesarias las siguientes ecuaciones, que además, constituyen el problema elástico;

#### 2.1.1.1. Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio interno son:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.1)$$

Estas ecuaciones, establecen el balance interno de las fuerzas que actúan sobre cualquier subdominio del sólido.

Además, podemos expresarlas de otra forma definiendo el pseudo-vector tensión:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12}\} \quad (2.2)$$

y el operador gradiente simétrico:

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

De manera que podemos reescribir las ecuaciones de equilibrio interno de la siguiente forma:

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (2.4)$$

#### 2.1.1.2. Ecuaciones cinemáticas

Permiten cuantificar la deformación en el sólido, a partir de las variaciones de las distancias relativas entre puntos del mismo, conocidas gracias al campo de desplazamientos  $u_i$ .

Si definimos el pseudo-vector deformación como:

$\mathbf{e}^T = \{e_{11} \ e_{22} \ e_{33} \ 2e_{23} \ 2e_{31} \ 2e_{12}\}$ , donde  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  en  $\Omega$ , las ecuaciones cinemáticas nos quedan de la forma:

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.5)$$

### 2.1.1.3. Ecuaciones constitutivas

Estas ecuaciones modelan el comportamiento como medio continuo de los materiales y se encargan de establecer la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones. Pueden ser escritas de la forma:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}e_{kl} \text{ en } \Omega \quad (2.6)$$

donde  $E_{ijk}$  es el tensor elástico. En notación matricial nos queda:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{e} \quad (2.7)$$

### 2.1.1.4. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno necesarias para cerrar el problema elástico pueden ser de dos tipos:

- Ecuaciones de compatibilidad en el contorno

Definen el valor del campo de desplazamientos en una región del contorno  $\Gamma_u$ ;  $u_i = \bar{u}_i$  sobre  $\Gamma_{\bar{u}}$  o en notación matricial:

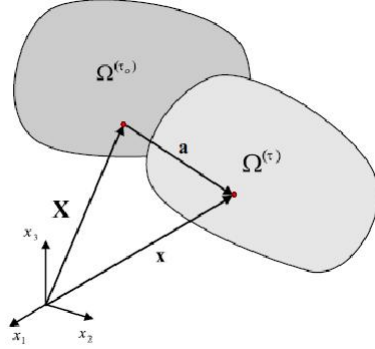
$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sobre } \Gamma_{\bar{u}} \quad (2.8)$$

- Ecuaciones de equilibrio en el contorno

Se definen como  $\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i$  sobre  $\Gamma_{\bar{t}}$ , donde  $n_j$  son las componentes de la normal unitaria externa, de los puntos  $\Gamma_i$ , sobre los que se especifican las tracciones. En notación matricial nos queda:

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sobre } \Gamma_{\bar{u}} \quad (2.9)$$

donde ahora  $\mathbf{t} = \mathbf{P}_n\boldsymbol{\sigma}$ , con:

Figura 2.1: Descripción cinemática del movimiento del sólido  $\Omega$ 

$$\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

### 2.1.2. El problema de contacto

La resolución del problema de contacto, nos va a permitir conocer el conjunto de configuraciones que los sólidos en contacto van tomando en cada instante.<sup>1</sup>

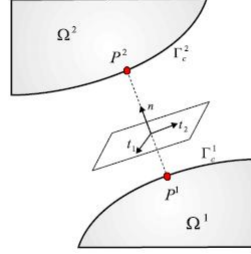
Respecto a un sistema de referencia, la posición de un punto  $P \in \Omega$ , en un determinado instante  $\tau(x)$  se puede expresar como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{a} \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{X}$  es la configuración de referencia ( configuración en el instante  $\tau_0$ ) y  $\mathbf{a}$  es el desplazamiento en el instante  $\tau_a$ . Además, como podemos ver en la (figura 2.1),  $\mathbf{a}$  es suma del desplazamiento del sólido rígido ( $\mathbf{u}_0$ ), más el desplazamiento del punto considerado ( $\mathbf{u}$ ).

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}.$$

<sup>1</sup>Notar que todas las imágenes de este capítulo proceden de [16]

Figura 2.2: Pareja de puntos en contacto  $P^\alpha$ 

### 2.1.2.1. Ecuaciones cinemáticas del contacto

Para conocer si dos sólidos están en contacto en un instante  $\tau$ , se ha de conocer la posición relativa entre ambos cuerpos. Sean dos sólidos  $\Omega^\alpha$   $\alpha = (1, 2)$ , definimos la variable separación  $\mathbf{g}$ , para la pareja de puntos  $(P^\alpha \in \Omega^\alpha, \alpha = 1, 2)$  como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}^T(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) = \mathbf{B}^T(\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1) + \mathbf{B}^T(\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^1) \quad (2.12)$$

siendo  $\mathbf{B}^2$  una matriz de cambio de base, que expresa la separación entre cualquier pareja de puntos  $\mathbf{I} \equiv \{P^1 P^2\}$ , en la base ortonormal local  $\{t_1 t_2 n\}$  asociada a cada pareja  $\mathbf{I}$ , ver figura (2.2). Si dichos puntos están con contacto, el plano tangente a cada superficie de cada sólido en dicho punto es común, y por tanto las rectas normales a dichos planos también son comunes.

Por otra parte, y fijándonos en la figura (2.3), podemos decir que  $\mathbf{X}^\alpha$  es la posición global de referencia de cada punto, y  $\mathbf{a}^\alpha$  su desplazamiento expresado en el sistema global.

Como  $\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{u}_0^\alpha + \mathbf{u}^\alpha$ , la expresión (2.12), queda:

---

<sup>2</sup> $\mathbf{B} = [t_1 t_2 n]$

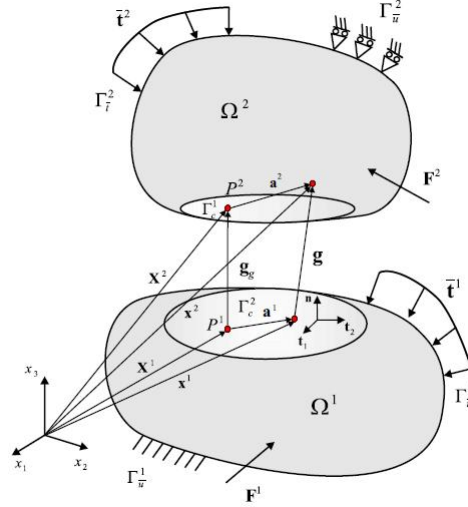


Figura 2.3: Esquema de dos sólidos en contacto

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}^T(\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1) + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}_0^2 - \mathbf{u}_0^1) + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \quad (2.13)$$

donde el primer término es la separación geométrica entre los sólidos en la configuración de referencia ( $g_g$ ) y el segundo la separación debida a los movimientos de sólido rígido ( $g_0$ ). Por tanto, la separación entre una pareja de puntos la podemos expresar:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{go} + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{g}_{go} = \mathbf{g}_g + \mathbf{g}_0$ .

Por último, comentar que en la expresión (2.14) podemos distinguir dos componentes; la separación normal:

$$g_n = g_{go,n} + \mathbf{u}_n^2 - \mathbf{u}_n^1 \quad (2.15)$$

y la separación tangencial:

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{\mathbf{g}_0, t} + \mathbf{u}_t^2 - \mathbf{u}_t^1 \quad (2.16)$$

siendo  $\mathbf{u}_n^\alpha$  y  $\mathbf{u}_t^\alpha$  las componentes normal y tangencial del desplazamiento.

### 2.1.2.2. Ley de contacto unilateral. Condiciones de Signorini.

La formulación del problema de contacto desde el punto de vista de la Elasticidad, comienza con el trabajo de Signorini, donde se definen las leyes de contacto unilateral, para el problema de un sólido elástico que entra en contacto, sin fricción, con una superficie rígida. Dichas leyes (resumidas) son:

- Dos cuerpos, cada uno formado por su dominio  $\Omega^\alpha$  y su contorno  $\Gamma^\alpha$ , que entran en contacto, no se interpenetran. Por lo tanto, la superficie de cada sólido se divide en tres regiones según sean de contacto  $\Gamma_c^\alpha$ , con condiciones de contorno en tracciones impuestas  $\Gamma_t^\alpha$  o bien con condiciones de contorno en desplazamientos  $\Gamma_u^\alpha$ . Además, es posible denotar el área de contacto con  $\Gamma_c$ , ya que  $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$ .
- Los sólidos que están en contacto sin cohesionarse entre sí, son separables. Esto hace que para cada pareja de puntos, se cumpla:

$$g_n \geq 0 \text{ y } t_n \leq 0 \quad (2.17)$$

donde  $g_n$  es la separación normal de la pareja de puntos, y  $t_n$  es la tracción normal. Además las tracciones normales que actúan sobre los puntos de la pareja en contacto, poseen el mismo valor y signos contrarios, de acuerdo a la tercera ley de Newton.

- Las variables  $g_n$  y  $t_n$  son complementarias,  $g_n \cdot t_n = 0$ , ya que si estamos en contacto, la separación normal es nula y por tanto aparecerá una tracción normal sobre cada punto de los sólidos para evitar que se interpenetren.

**2.1.2.3. Ley de fricción**

Cuando se produce el deslizamiento de un cuerpo sobre otro, se observa que a dicho movimiento se opone una fuerza tangencial ( $F_t$ ) que aparece en la superficie de contacto. En nuestro caso, para el estudio de problemas de contacto y aunque diversos estudios ofrecen una visión no muy exacta, vamos a usar la ley de Coulomb para modelar el rozamiento, ya que resulta una buena aproximación desde el punto de vista ingenieril.

Coulomb propuso que el valor de la fuerza de rozamiento se podía acotar por un límite llamado límite de fricción ( $f$ ), y que dicho límite era proporcional a la carga normal  $F_n$  a través de una constante  $\mu$ , denominada coeficiente de rozamiento.

$$f = F_n \mu \quad (2.18)$$

Por tanto, a la hora de modelar el fenómeno de fricción en el problema de contacto se considerará que todo punto  $P^\alpha \in \Gamma_c^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) satisface dicha ley. De esta manera, la ley de fricción para cada pareja de puntos se expresa como sigue:

- El módulo de las tracciones tangenciales de contacto satisface la ley de Coulomb:

$$\| \mathbf{t}_t \| \leq \mu | t_n | \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{t}_t$  es la tracción tangencial<sup>3</sup>.

- La velocidad de deslizamiento tangencial y la tracción tangencial satisfacen el principio de máxima disipación de energía:

$$\dot{\mathbf{g}}_t = -\lambda \mathbf{t}_t \quad (2.20)$$

donde  $\lambda$  es un número real positivo que relaciona las tracciones tangenciales y los deslizamientos.

---

<sup>3</sup> $\mathbf{t}_t = \mathbf{B}_t^T \mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_t^T \mathbf{t}^2$



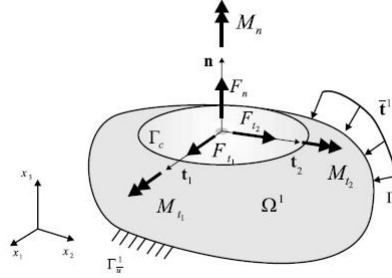


Figura 2.4: Resultante de fuerzas y momentos en la zona de contacto

- Existe una complementareidad de las variables: módulo de la velocidad de deslizamiento tangencial  $\|\dot{\mathbf{g}}_t\|$  y  $(\|\mathbf{t}_t\| = -\mu \|t_n\|)$

**2.1.2.4. Fuerzas de contacto**

Vamos a suponer que  $\Gamma_c$  no posee una gran combadura, que las tracciones pueden referirse a un mismo plano tangente (la base local  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}\}$ , es la misma para todas las parejas de puntos; figura (2.4)). De esta forma, la resultante de fuerzas normales y tangenciales existentes en la superficie de contacto las podamos expresar como:

$$F_n = \int_{\Gamma_c} t_n d\Gamma ; \mathbf{F}_t = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_t d\Gamma \quad (2.21)$$

Además, ambas cargas han de satisfacer la ley de fricción<sup>4</sup>.

**2.1.2.5. Formulación del problema de contacto**

A partir de la formulación del problema elástico, conocidas las ecuaciones cinemáticas y las leyes del problema de contacto podemos

---

<sup>4</sup> $\|\mathbf{F}_t\| \leq \mu \|F_n\|$

presentar en este punto su formulación para el caso cuasi-estático de dos sólidos  $\Omega^\alpha (\alpha = 1, 2)$ , para el instante  $\tau_i$ .

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \mathbf{b}^\alpha = 0$$

$$\mathbf{e}^\alpha = \mathbf{D}\mathbf{u}^\alpha \text{ en } \Omega^\alpha$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{E}^\alpha \mathbf{e}^\alpha$$

$$\mathbf{u}^\alpha = \bar{\mathbf{u}}^\alpha \text{ sobre } \Gamma_{\bar{u}}^\alpha$$

$$\mathbf{t}^\alpha = \bar{\mathbf{t}}^\alpha \text{ sobre } \Gamma_{\bar{t}}^\alpha$$

$$g_n = g_{go,n} + (u_n^2 - u_n^1)$$

$$g_t = g_{go,t} + (\mathbf{u}_t^2 - \mathbf{u}_t^1)$$

$$\Delta g_t = g_t - g_t(\tau_i - 1)$$

$$t_n = \mathbf{B}_n^T \mathbf{t}^1$$

$$t_t = \mathbf{B}^T \mathbf{t}^1$$

$$\text{sobre } \Gamma_c^\alpha \quad (2.22)$$

$$g_n \geq 0, t_n \leq 0 \text{ y } g_n t_n = 0$$

$$\|\mathbf{t}_t\| \leq \mu |t_n| \text{ siendo :}$$

$$\Delta g_t = 0 \text{ si } \|\mathbf{t}_t\| < \mu |t_n|$$

$$\Delta g_t = -\lambda \mathbf{t}_t, \lambda \geq 0 \text{ si } \|\mathbf{t}_t\| = \mu |t_n|$$

## 2.2. Solución del problema de contacto

A continuación y una vez definido el problema a resolver, vamos a presentar la solución del Hertz al problema de contacto normal.

### 2.2.1. Aproximación de semiespacio elástico

En muchos problemas de contacto, las dimensiones de los cuerpos son mucho mayores que la propia zona de contacto ( $\Gamma_c$ ), de manera que según el principio de Saint-Venant, las tracciones de contacto no se ven muy influenciadas por la forma de los cuerpos en las lejanías de  $\Gamma_c$ .

Las hipótesis que se han de satisfacer para que el modelado de los sólidos se pueda realizar mediante un semiespacio elástico son:

- Las dimensiones de características de los cuerpos en contacto han de ser mucho mayores que el tamaño de la zona de contacto.
- Las superficies de contacto han de ser suaves.
- Pequeños desplazamientos y deformaciones.
- Los cuerpos tienen que comportarse elástica y linealmente.
- Los cuerpos han de ser homogéneos e isótropos.

### 2.2.2. Funciones potenciales de Boussinesq y Cerruti

La manera que tradicionalmente se ha utilizado para obtener los campos de tensiones y desplazamientos en un semiespacio elástico, originados por una distribución de tracciones superficiales, han sido las funciones de Boussinesq y Cerruti.

A continuación, y no siendo muy exhaustivos en la deducción de dichas funciones potenciales ya que no es el objetivo final de este proyecto vamos a presentar las mismas. Consideremos el semiespacio elástico ( figura 2.5), donde  $C(\zeta, \eta)$  es un punto genérico de la superficie donde actúan las tracciones  $\{t_x, t_y, t_z\}$  y  $A(x, y, z)$  un punto interno del semiespacio. Además, la separación entre dos puntos se define como

$$r = \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} \quad (2.23)$$

Las funciones potenciales se definen:

$$F_1 = \iint_{\Gamma_c} \{z \ln(r + z) - r\} t_{t_1}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (2.24)$$

$$G_1 = \iint_{\Gamma_c} \{z \ln(r + z) - r\} t_{t_2}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (2.25)$$

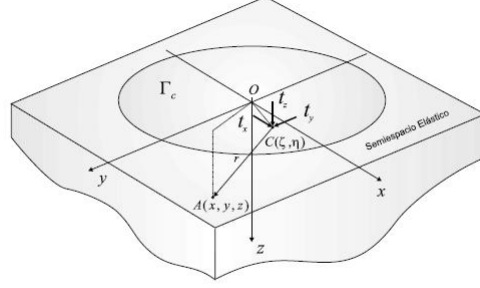


Figura 2.5: Descripción de semiespacio elástico

$$H_1 = \iint_{\Gamma_c} \{z \ln(r + z) - r\} t_n(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (2.26)$$

Además definimos:

$$F_0 = \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad (2.27)$$

$$G_0 = \frac{\partial G_1}{\partial z} \quad (2.28)$$

$$H_0 = \frac{\partial H_1}{\partial z} \quad (2.29)$$

A partir de estas funciones, se puede expresar el campo de desplazamientos  $\{u_x, u_y, u_z\}$  de todo punto  $A(x, y, z)$  en función de las mencionadas funciones, del módulo de rigidez transversal  $G = E/2(1+\nu)$  y de otras funciones definidas como siguen:

$$\psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z} \quad y \quad \psi_0 = \frac{\partial F_0}{\partial x} + \frac{\partial G_0}{\partial y} + \frac{\partial H_0}{\partial z} \quad (2.30)$$

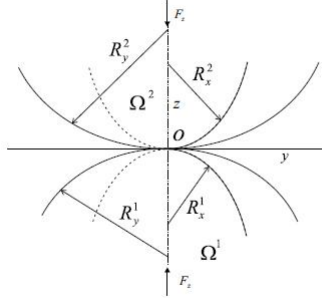


Figura 2.6: Definición de problema de Hertz

### 2.2.3. Solución de Hertz al problema de contacto similar

Vamos a considerar dos paraboloides  $\Omega^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ), de ejes paralelos, que estarán en contacto en el punto O. Además en dicho punto, se sitúa un sistema de coordenadas cartesianas en el que los ejes  $x$  e  $y$  se encuentran en el plano tangente común, el origen O es el punto de tangencia, y el eje  $z$  apunta hacia  $\Omega^2$ . Los radios de curvatura en el plano de  $x$  son  $R_x^1$  y  $R_x^2$  y en el plano de  $y$ ,  $R_y^1$  y  $R_y^2$  (figura 2.6).

Por último, dichos sólidos son comprimidos por una carga  $F_z$  una distancia en dirección normal  $g_{0,n} = u_{0,z}^2 - u_{0,z}^1 < 0$ .

El problema de contacto sin fricción consiste en determinar la región de contacto y la distribución de presiones normales. Para ello, el comportamiento elástico de cada sólido se modela mediante la aproximación de semiespacio elástico. De esta manera, la variable separación normal entre sólidos tendrá una forma:

$$g_n = f(Z^\alpha, g_{0,n}, u_z^\alpha) \tag{2.31}$$

es decir, depende de la separación geométrica de la superficie  $\Omega^\alpha$  al plano tangente, la separación en dirección normal y del desplazamiento elástico normal del semiespacio que aproxima el sólido  $\Omega^\alpha$ .

Conociendo por otra parte la tracción de contacto que actúa so-

bre el sólido  $\Omega^\alpha$  ( $t_z^\alpha$ ) (definida según el sistema  $\{x, y, z\}$ ), se puede calcular el desplazamiento normal  $u_z^\alpha$  a partir del campo de desplazamientos  $\{u_x, u_y, u_z\}$  evaluados en la superficie  $\Omega^\alpha(z = 0)$ .

Para determinar la región de contacto y la distribución de presiones normales, Hertz supone que dicha región es elíptica:

$$\Gamma_c = \{(x, y) : (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1\} \quad (2.32)$$

y que la tracción de contacto es semi-elipsoidal:

$$t_z = -p_0 \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2} \quad (2.33)$$

El valor máximo de la presión  $p_0$  está relacionado con la carga aplicada  $F_z$ , a través de la ecuación de equilibrio sobre  $\Omega^1$ , obteniendo como resultado:

$$F_z = \frac{2}{3} \Pi a b p_0 \quad (2.34)$$

También, operando con las distintas ecuaciones, podemos obtener la separación normal entre los sólidos en función de la distancia de compresión ( $g_{0,n}$ ) y la distribución de presiones normales ( $t_z$ ):

56

$$g_n(x, y) = C_x x^2 + C_y y^2 + g_{0,n} - \frac{1 - \nu}{\Pi G} \iint_{\Gamma_c} \frac{t_z(\zeta, \eta)}{r} d\zeta d\eta \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G^1} + \frac{1}{G^2} \right) \quad y \quad \nu = \frac{G}{2} \left( \frac{\nu^1}{G^1} + \frac{\nu^2}{G^2} \right) \quad (2.36)$$

Por último, para cerrar el problema se impone la condición de no interpenetración:

$$\blacksquare \quad g_n = 0 \text{ en } \Gamma_c$$

---


$${}^5 C_x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_x^1} + \frac{1}{R_x^2} \right)$$

$${}^6 C_y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_y^1} + \frac{1}{R_y^2} \right)$$

- $g_n > 0$  exterior de  $\Gamma_c$

### 2.2.3.1. Contacto entre dos esferas

Vamos a considerar dos esferas de radio  $R^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) ( $R_z^1 = R_y^1 = R^1$  y  $R_z^2 = R_y^2 = R^2$ ) que son comprimidas una distancia  $g_{0,n} < 0$  con una fuerza  $F_z$ . El problema presenta simetría de revolución, por lo que la zona de contacto es una región circular de radio  $a$ . De esta manera, la distribución de presiones normales será:

$$t_z = -p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (2.37)$$

siendo  $r$  una coordenada radial. Además, la carga aplicada será  $F_z = \frac{2}{3}\Pi a^2 p_0$ , y la separación normal entre los sólidos:

$$g_n(r) = C_r r^2 + \frac{(1 - \nu)\Pi p_0}{4aG} (2a^2 - r^2) + g_{0,n} \quad (2.38)$$

donde  $C_r = \frac{1}{2R}$  y  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R^1} + \frac{1}{R^2}$ .

Para obtener las expresiones que relacionan el radio de la circunferencia de contacto ( $a$ ), el valor máximo de la presión normal ( $p_0$ ) y la carga aplicada ( $F_z$ ), evaluamos (2.38) en  $r = 0$  y  $r = a$ , sabiendo además que  $g_n = 0 \forall r \in \Gamma_c$ :

$$a = \left(\frac{3(1 - \nu)F_z R}{4G}\right)^{1/3} \quad (2.39)$$

$$g_{0,n} = -\left(\frac{9(1 - \nu)^2 F_z^2}{16RG^2}\right)^{1/3} = -\frac{a^2}{R} \quad (2.40)$$

$$p_0 = \frac{3F_z}{2\Pi a^2} = \left(\frac{6F_z^2 G^2}{(1 - \nu)^2 \Pi^3 R^2}\right)^{1/3} \quad (2.41)$$

### 2.2.3.2. Contacto entre dos cilindros

El problema de contacto entre dos cilindros de longitud infinita, radios  $R^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) y ejes paralelos al eje  $y$  que son comprimidos

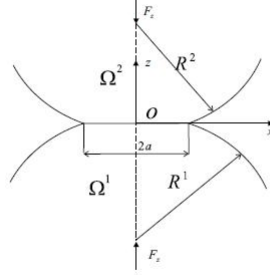


Figura 2.7: Zona de contacto cilindro-cilindro

por una fuerza por unidad de longitud  $F_z$ , es un problema de deformación plana. Ahora la zona de contacto es una banda infinita de ancho  $2a$  paralela al eje  $y$ , y los radios de curvatura toman los valores  $R_y^\alpha = \infty$ ,  $R_x^1 = R^1$ , y  $R_x^2 = R^2$  (figura 2.7).

La distribución de presiones normales por unidad de longitud se expresa:

$$t_z = -p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (2.42)$$

siendo la resultante vertical por unidad de longitud de la distribución de tracciones:

$$F_z = \frac{\Pi a p_0}{2} \quad (2.43)$$

El cálculo de la separación normal entre los dos cilindros es un tanto más laborioso que en el caso anterior y no se va a detallar; simplemente comentar que partiendo de  $g_n = Z^2 - Z^1 + g_{0,n} + u_z^2 - u_z^1$  operamos sobre el gradiente de dicha  $g_n$  para que desaparezca la distancia de compresión  $g_{0,n}$ .

La relación que existe entre el semiancho de la banda de contacto ( $a$ ), el valor máximo de la presión normal ( $p_0$ ), y la fuerza de



compresión ( $F_z$ ), se obtiene imponiendo que  $\frac{dg_n}{dx} = 0 \forall x \in \Gamma_c$ . De este modo llegamos a:

$$p_0 = \sqrt{\frac{F_z G}{\Pi(1 - \nu)R}} \quad (2.44)$$

$$a = \sqrt{\frac{4(1 - \nu)F_z R}{\Pi G}} \quad (2.45)$$