4. Método de líneas

El método de líneas es un método eficiente para implementar la solución de la ecuaciones en derivadas parciales que aparecen en los flujos de capa límite. Pero tiene un uso más general, ecuaciones en derivadas parciales en capas delgadas, de ahí el nombre, método de líneas. En este proyecto fin de carrera se usará como aplicación de la capa límite sobre el perfil del conjunto perfil motor que se pretende resolver.

Las hipótesis de partida para la capa límite del problemas a resolver son:

1. Laminar
2. Incompresible. Los cambios de densidad de considerarán despreciables. $M = 0$
3. Estacionaria. El tiempo de residencia de las partículas es mucho menor del tiempo característica en el cambio de las condiciones de contorno
4. Fuerza másicas despreciables. $Fr \ll 1$
5. Movimiento cuasi-unidimensional.

Este método usa un sistema de coordenadas curvilíneas a lo largo de la capa delgada que se pretende analizar, siendo un eje paralelo a la frontera (en este caso paralelo al perfil) y el otro eje perpendicular a éste. Debido al previsible rebordeo del borde de ataque se podrían añadir término correspondientes al radio de curvatura del perfil en dicho borde de ataque, pero no se contemplarán debido a que se pueden despreciar y su cálculo es tedioso.

A partir de las ecuaciones que rigen el campo fluido, se puede obtener que los efectos viscosos se reducen a una pequeña capa delgada. En esta pequeña capa delgada los esfuerzos viscosos serán apreciables; igualando órdenes de magnitud de los términos de las ecuaciones de cantidad de movimiento de Navier-Stokes:

$$\rho \overrightarrow{v} \bigtriangledown \overrightarrow{v} \sim \mu \bigtriangledown^2 \overrightarrow{v}$$

$$\rho \frac{U_\infty^2}{L} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re_L}}$$

.

Siendo L la longitud característica del obstáculo y δ el espesor característico de la capa en la cual los efectos viscosos son importantes. Se observa que en el caso de la Aerodinámica, al ser el número de Reynolds mucho mayor que la unidad se tiene que

$$\delta \ll L$$

.

De forma que la capa donde se deben tener en cuenta los efectos viscosos es muy estrecha, de ahí que se pueda proceder al uso del método de líneas obteniendo resultados eficientes.

Las ecuaciones a resolver para la obtención del campo fluido en la capa límite son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{64}$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{65}$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{66}$$

De aquí se pueden despreciar varios términos, para ello se hará un análisis de órdenes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sim\frac{U_\infty}{L^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sim\frac{U_\infty}{\delta^2} \qquad \frac{U_\infty}{L^2}\ll\frac{U_\infty}{\delta^2}$$

De modo que se puede eliminar el término $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Estimando órdenes en la ecuación de cantidad de movimiento se tiene

$$\frac{u}{L}\sim\frac{v}{\delta}\longrightarrow v\sim\left(u\frac{\delta}{L}\right)$$

Si se igualan el término de inercia con el de presión en la ecuación de cantidad de movimiento según la coordenada curvilínea 'y' se obtendrá

$$\rho\frac{v^2}{\delta}\sim\frac{\triangle p_T}{\delta} \qquad \rho\frac{u^2}{L}\sim\frac{\triangle p_L}{L} \qquad \frac{\triangle p_T}{\triangle p_L}\sim\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\ll 1$$

Viendo lo anterior se puede escribir que

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

Que equivale a decir que la presión es constante a lo largo del espesor de la capa delgada.

Finalmente las ecuaciones a resolver serán

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{67}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{68}$$

$$p = p(x) \tag{69}$$

Ecuaciones que quedarán definidas completamente a través de las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{y}{\delta} \to \infty \qquad \begin{cases} p = p_e(x) \\ u = u_e(x, y = 0) \end{cases}$$

$$\frac{y}{\delta} \to 0 \qquad \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \qquad u = u_e(x = 0, y)$$

Para usar este método de líneas es necesario conocer la presión a lo largo de la capa límite, es decir $p(x)$. Como a través del método de paneles se ha calculado el campo potencial, la velocidad y la presión, y además esta última se mantiene constante a lo largo del espesor de la capa delgada y la velocidad al final de la capa límite debe corresponder con la velocidad en la pared dada por el método potencial, es decir en $\frac{y}{\delta} \to \infty$, tal y como se ha planteado en la condición de contorno.

Las ecuaciones a resolver se pueden simplificar aún más si despejamos de la ecuación de cantidad de movimiento la variable v y procedemos a introducirla en la ecuación de cantidad de movimiento según 'y', quedando ésta de la forma:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p_e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{70}$$

Que es una ecuación en derivadas parciales para u, ya que como se ha comentado anteriormente p_e es conocido a través del método de paneles.

Procederemos a la adimensionalización, para ello las relaciones entre variables dimensionales y adimensionales serán las siguientes:

$$x = c_{\text{perfil}} \hat{x} \qquad y = \sqrt{\frac{\nu c_{\text{perfil}}}{U_\infty}} \hat{y} \qquad u = \hat{u} U_\infty \qquad v = \sqrt{\frac{\nu c_{\text{perfil}}}{U_\infty}} \hat{v} \qquad p = \hat{p} \rho U_\infty^2$$

Denotando las variables adimensionales con $''$. Si se procede a la adimensionalización de la ecuación (70), se obtendrá:

$$\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \int_0^{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{y} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{p}_e}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \tag{71}$$

Que representa la ecuación para la velocidad adimensional según 'x', denotada por $\hat{u}$. Notar que ν es la viscosidad cinemática. De aquí en adelante de representarán las variables adimensionales sin gorro, por simplicidad en la notación.

Las condiciones de contorno para esta única ecuación es:

$$\frac{y}{\delta} \to \infty \qquad u = u_e(x, y = 0)$$

$$\frac{y}{\delta} \to 0 \qquad u = 0$$

$$x = 0 \qquad u = u_e(x = 0, y)$$

4.1. Discretización de las ecuaciones

Se procederá a la discretización de las ecuaciones según la coordenada curvilínea 'y', a través de diferencias finitas, para ello el dominio de integración de dividirá en un número de suficiente de líneas, N, paralelas al eje curvilínea 'x', estas líneas se designarán a través de $y = y_1, y_2, \cdots, y_j, \cdots, y_N$. Se supondrá en el desarrollo hecho en este proyecto que las líneas estarán equiespaciadas una distancia h.

En la coordenada curvilinea 'x' no habrá discretización de manera que quedará un sistema de ecuaciones diferenciales con las siguientes variables dependientes: $u_j(x) = u(x, y_j)$. Con esta discretización se ha conseguido pasar de una ecuación en derivadas parciales para u, (70), a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las distintas u_j, que se procederá a integrar a través de un Runge-Kutta.

Cada u_j corresponde a la velocidad según la coordenada curvilínea 'x' para cada una de las líneas que se ha construido en la discretización. Debido a la discretización hecha en 'y', las derivadas según 'y' se pueden obtener de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x, y = y_j} = \frac{u_{j+1}(x) - u_{j-1}(x)}{2h} \tag{72}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{x, y = y_j} = \frac{u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)}{h^2} \tag{73}$$

Para hallar la integral existente en (70) se recurre a la regla de los trapecios de manera la integral queda de la forma:

$$\int_0^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0{,}5h\frac{du_1}{dx} \qquad (j = 1) \tag{74}$$

$$\int_0^{y_j} \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0{,}5h\frac{du_j}{dx} + \sum_{k=1}^{j-1} h\frac{du_k}{dx} \qquad (j > 1) \tag{75}$$

Finalmente introduciendo (73),(72), (75), (74) en la ecuación (70) y despejando las derivadas según x se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{1}{u_1 - 0{,}25u_2}\left[u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{u_2 - 2u_1}{h^2}\right] \qquad j = 1 \tag{76}$$

$$\frac{du_j}{dx} = \frac{1}{u_j - 0{,}25\left(u_{j+1} - u_{j-1}\right)}\left[u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{du_k}{dx}\right] \qquad j \in [2, N-1] \tag{77}$$

En el sistema anterior se debe tener en cuenta que sobre la última línea $u_N(x) = u_e(x)$.

Para comenzar la integración del sistema por medio de un Runge-Kutta, se debe dar una condición inicial en 'x' para un valor de $x = x_0$ en el cual el perfil de velocidades en la capa límite sea lo más uniforme posible, es decir en zonas donde la capa límite haya crecido lo menos posible.

Las ecuaciones de capa límite serán válidas hasta que se produzca el desprendimiento de la corriente, este viene dado por la siguiente condición $\frac{\partial u(x = x^+, y = 0)}{\partial y} = 0$, donde x^+ es la coordenada curvilínea 'x' del punto de desprendimiento. En términos de la discretización usada esto se puede poner de la forma:

$$\frac{\partial u(x = x^+, y = 0)}{\partial y} = \frac{4u_1 - u_2}{2h} = 0 \tag{78}$$

Una vez producido el desprendimiento $v \sim u$, por lo que las ecuaciones ya no valen.

4.2. Definición y cálculo de los coeficientes de sustentación y resistencia

Una vez obtenidos el punto de desprendimiento y la velocidad u en la capa delgada se podrá calcular los esfuerzos viscosos y el campo de presiones sobre el perfil del conjunto motor perfil.

El coeficiente de resistencia del perfil vendrá dado por dos componentes de resistencias:

1. Resistencia debida a la presión. Como se produce desprendimiento de la corriente, habrá resistencia debida a la presión, de manera que el origen de esta resistencia será viscoso (que es lo que origina el desprendimiento de la capa límite y que no se cumpla la hipótesis de D'Alembert)

2. Resistencia debida a la viscosidad. Como resultado de integrar la componente según x del esfuerzo existente

en la pared del obstáculo.

La resistencia vendrá dada por dos coeficientes C_{d-p} y C_{d-f} Siendo C_{d-p} el coeficiente de resistencia debida a la presión y C_{d-f} el debido al esfuerzo viscoso.

4.2.1. Cálculo de coeficientes de resistencia

Este coeficiente de resistencia vendrá dado por la integral sobre todo el perfil de la presión.

$$C_{d-p} = \frac{\int_{textrmperfil}(p - p_\infty)\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{i}\,dx}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 t_{\text{perf}} c_{\text{perfil}}} \tag{79}$$

donde t es el espesor relativo.

Ecuación que está expresada en términos de variables dimensionales. Expresando en función de las variables adimensionales la ecuación (79) queda de la forma:

$$\begin{aligned} C_{d-p} &= \frac{\int_0^{x_{\text{despr-extr}}}(1-u_e^2)\overrightarrow{n_{\text{extr}}}\,\overrightarrow{i}\,dx}{t_{\text{perf}}} + \frac{\int_0^{x_{\text{despr-intr}}}(1-u_e^2)\overrightarrow{n_{\text{intr}}}\,\overrightarrow{i}\,dx}{t_{\text{perf}}} + \\ &+ \frac{\int_{x_{\text{despr-extr}}}^{x_{\text{final}}}(1-u_e(x_{\text{despr}})^2)\overrightarrow{n_{\text{extr}}}\,\overrightarrow{i}\,dx}{t_{\text{perf}}} + \frac{\int_{x_{\text{despr-intr}}}^{x_{\text{final}}}(1-u_e(x_{\text{despr}})^2)\overrightarrow{n_{\text{intr}}}\,\overrightarrow{i}\,dx}{t_{\text{perf}}} \end{aligned} \tag{80}$$

Donde se ha supuesto que después del desprendimiento la presión será constante y la correspondiente al punto de desprendimiento.

En (80) hay cuatro términos, el primero y el tercero correspondiente a la integral sobre el extradós y el segundo y el cuarto a la integral sobre el intradós.

La contribución debida al esfuerzo de viscosidad vendrá dada por otra integral:

$$C_{d-f} = \frac{\int_{\text{perfil}}\mu\,\overrightarrow{t}\,\overrightarrow{i}\,\frac{\partial u(y=0,x)}{\partial y}dx}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c_{\text{perfil}}} \tag{81}$$

Expresada en términos de las variables dimensionales. Notar que las superficies de adimensionalización elegidas para los dos coeficientes de resistencia son distinta debido a que la presión actúa de manera perpendicular a la frontera y la fricción actúa de manera paralela a la frontera. Notar que se podían haber cogido otras superficies de adimensionalización.

Como se ha resuelto las ecuaciones de capa límite en términos de variables adimensionales se procede a expresar

(81) en función de estas variables, quedando de la forma:

$$C_{d-f} = \frac{\int_0^{x_{\text{despr-extrados}}} 2\overrightarrow{t_{\text{extrados}}}\,\overrightarrow{i}\,\frac{\partial u(y=0,x)}{\partial y}dx}{\sqrt{\frac{U_\infty c_{\text{perfil}}}{\nu}}} + \frac{\int_0^{x_{\text{despr-intrados}}} 2\overrightarrow{t_{\text{intrados}}}\,\overrightarrow{i}\,\frac{\partial u(y=0,x)}{\partial y}dx}{\sqrt{\frac{U_\infty c_{\text{perfil}}}{\nu}}} \tag{82}$$

En (82) hay dos términos, el primero corresponde a la integral sobre el extradós y el segundo a la integral sobre el intradós.

Para obtener esta expresión se ha hecho la hipótesis de que los esfuerzos viscosos después del desprendimiento son despreciables.