

Parte I

Desarrollo teórico del proyecto

2. Método de paneles bidimensional

El objetivo de este capítulo es desarrollar el método de paneles para calcular el campo fluido sobre el conjunto bidimensional perfil-motor.

El método de los paneles sirve para resolver la laplaciana, tanto para cuerpos esbeltos como para cuerpos romos. Es un método de elementos de contorno en el que se discretiza la frontera del dominio fluido en una serie de elementos, en los cuales se les coloca singularidades, para el caso Aerodinámica manantiales y/o dobles, dependiendo de la condición de contorno.

Para resolver el campo fluido, consideraremos el fluido con comportamiento potencial, para lo cual se desprecian tanto la viscosidad ($Re \gg 1$), la transmisión de calor ($RePr \gg 1$) como las fuerzas másicas $\frac{U^2}{gc} \ll 1$, además de considerarse movimiento barótopo de forma que por el teorema de Bjerness-Kelvin demuestra que la circulación a lo largo de una línea material y por tanto la vorticidad alrededor de cualquier superficie que se apoye sobre esta curva es constante en el tiempo; debido a que el movimiento es inicialmente irrotacional, la corriente no viscosa de un fluido alrededor de cuerpos fuselados a ángulos de ataque pequeños es irrotacional y la velocidad del fluido deriva, por tanto, de una función escalar llamada potencial de velocidades:

$$\nabla \wedge \vec{v} = 0 \mapsto \vec{v} = \nabla \Phi \quad (1)$$

Si ahora suponemos el problema incompresible y estacionario la ecuación de conservación de la cantidad de masa queda de la forma:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

Para resolver el problema de la laplaciana recurrimos a la ecuación de Green:

$$\int_{\Omega} (-\Psi \nabla \Phi + \Phi \nabla \Psi) dw = 0 \quad (3)$$

Donde Ψ debe ser una función que sea armónica. Para el caso bidimensional

$$\Psi = \ln |\vec{r}|$$

Aplicando el teorema de Gauss a (39) se obtendrá

$$\int_{\Sigma} (-\Psi \nabla \Phi + \Phi \nabla \Psi) d\sigma = 0 \quad (4)$$

Siendo Σ la frontera del dominio donde se define la función armónica.

2.1. Discusión de las condiciones de contorno

La condición de contorno sobre la superficie del obstáculo sólo se puede aplicar en la dirección normal debido a que al despreciar la viscosidad hemos eliminado la derivada de mayor orden no pudiendo así poner la condición de contorno tangencial sobre el obstáculo, que vendrá dada por el estudio de capa límite, donde si se retiene esta derivada de mayor orden. Conviene aquí distinguir las distintas condiciones de contorno que habrá en cada curva de la frontera del dominio fluido que estudia este proyecto.

1. Entrada del motor Σ_{in} . En esta frontera conocemos la velocidad del fluido perpendicular a ella, de modo que la condición de contorno queda de la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_{motor}$$

. Para los redondeos de la entrada del motor, la condición de contorno será la componente normal a la frontera de la velocidad $\overrightarrow{u_{motor}}$, es decir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_{motor} \cos(\theta)$$

2. Labio superior de la toma difusiva. Imponemos la condición de no penetrabilidad del fluido en este contorno.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

3. Labio inferior de la toma difusiva. Imponemos la condición de no penetrabilidad del fluido en este contorno.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

4. Gondola y chorro del motor. Imponemos la condición de no penetrabilidad del fluido en este contorno.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

5. Fin del chorro del motor Σ_{out} . En este contorno imponemos que el fluido lo atraviesa con una velocidad normal a él de valor u_∞ , quedando la condición de contorno de la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_\infty$$

. Para los redondeos de la salida del motor, la condición de contorno será la componente normal a la frontera de la velocidad \vec{U}_∞ , es decir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_\infty \cos(\theta)$$

6. Perfil Σ_p . En este contorno la condición de contorno vuelve a ser la condición de no penetrabilidad.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

7. Estela del perfil $\Sigma_{estela\ sup}$ y $\Sigma_{estela\ inf}$. Como la estela es línea de corriente, la condición de contorno vuelve a ser

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

. Es importante señalar que la estela se considerará recta y horizontal y que se extenderá hasta el infinito.

8. Circunferencia exterior suficientemente alejada Σ_∞ . En esta superficie la condición de contorno será $\Phi = \Phi_\infty$.

Para simplificar la notación se denominará por Σ_m a las fronteras formadas por: labio superior de la toma difusiva, labio inferior de la toma difusiva y góndola y chorro del motor.

Resulta interesante discutir la condición de contorno en el chorro y la condición de contorno a la salida del chorro.

Condición de contorno en el chorro En la física de los motores se sabe que en el chorro el fluido es altamente compresible. Además el interior del chorro tendrá una presión de remanso distinta a la de la corriente exterior,

de manera que si se quisiera aplicar el método de paneles al interior del chorro, se tendría que definir otro potencial en el interior del chorro distinto al potencial del campo exterior, pero como el estudio se centrará sólo en la influencia del chorro sobre la toma difusiva no se definirá este nuevo potencial. Se supondrá que la tobera del motor está adaptada, así que la presión del chorro será p_∞ . Esto hará que el chorro no se expanda, pudiéndose así continuar a lo largo de la pared lateral del chorro con la condición de contorno de no penetrabilidad.

Condición de contorno a la salida del chorro El chorro se prolongará hasta una longitud de varias veces la góndola. Como suficientemente aguas abajo del motor la corriente debe ser muy parecida a la corriente sin perturbar, la condición de contorno apropiada para esta superficie es que la velocidad en este contorno sea igual a la velocidad incidente al motor, es decir u_∞ .

Finalmente a estas anteriores condiciones de contorno, habrá que añadir la condición de Kutta.

2.2. Cálculo de la ecuación integral para el potencial

Es conocido que el potencial total se puede expresar como $\Phi = \Phi_\infty + \Phi^*$, siendo Φ^* el potencial de perturbación. Sabiendo que el potencial en el infinito y el potencial total son armónicos, el potencial de perturbación también lo es, de modo, que a éste se le aplicará la ecuación de Green, que vale para cualquier función armónica. Es importante señalar que el potencial de perturbación no tiene por qué ser debido a un obstáculo que perturbe poco la corriente incidente, tal y como en la teoría linealizada de perfiles.

En primer lugar aplicaremos (4) al potencial de perturbación en la frontera del problema. Pondremos el punto fuente en el perfil y en el motor, de manera que la frontera del problema a resolver quedará tal y como muestran las Figuras 2 y 3.

En primer lugar aplicaremos (4) al potencial de perturbación en la frontera del infinito. Sabiendo que en el infinito, el potencial de perturbación será dado por los manantiales y dobletes que se colocarán en el contorno del motor y del perfil. En el infinito el potencial de perturbación debido a los dobletes será de la forma:

$$\nabla\Phi \sim -C\frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad \Phi \sim C\frac{1}{r}$$

siendo C proporcional a la intensidad de los dobletes.

Al extender la integral de la ecuación de Green debido a los dobletes situados en el obstáculo (conjunto motor y el perfil) en la circunferencia frontera del infinito, Σ_∞ , el término a integrar queda

$$\int \left(C\frac{1}{r} + \ln rC\frac{1}{r^2} \right) r d\theta \sim 0 \quad (5)$$

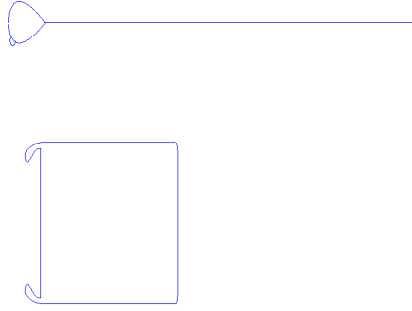


Figura 2: Frontera del problema para punto fuente situado en el perfil

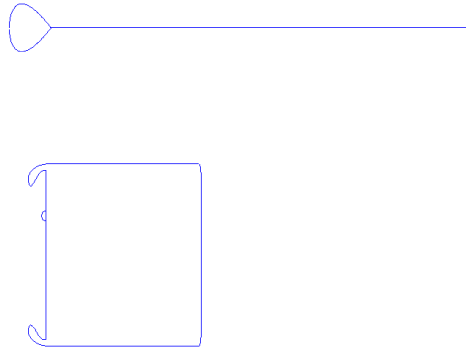


Figura 3: Frontera del problema para punto fuente situado en el motor

viéndose claramente que esos términos serán despreciables.

Respecto a los términos debidos a los manantiales que habrá en el contorno del obstáculo (conjunto motor y el perfil), en el infinito el potencial que provocarán será:

$$\nabla\Phi \sim \frac{\vec{e}_r}{r} \quad \Phi \sim \ln r$$

Si se procede a extender la integral de la ecuación de Green debida a los manantiales a lo largo de la superficie Σ_∞ ,

$$\int \left(C \ln r \frac{1}{r} - \ln r C \frac{1}{r} \right) r d\theta \sim 0 \quad (6)$$

De manera, usando (6) y (5) la ecuación de Green queda de la forma

$$\int_{\Sigma_{total} - \Sigma_{\infty}} (-\Psi \nabla \Phi^* + \Phi^* \nabla \Psi) d\sigma = 0 \quad (7)$$

Sustituyendo en (7) la relación $\Phi^* = \Phi_{\infty} - \Phi$ obtenemos:

$$\int_{\Sigma_{total} - \Sigma_{\infty}} (-\Psi \nabla \Phi + \Phi \nabla \Psi) d\sigma - \int_{\Sigma_{total} - \Sigma_{\infty}} (-\Psi \nabla \Phi_{\infty} + \Phi_{\infty} \nabla \Psi) d\sigma = 0 \quad (8)$$

La ecuación (8) se tratará en dos partes:

1. Parte debido al potencial en el infinito, Φ_{∞}
2. Parte debido al potencial total, Φ

2.2.1. Contribución del potencial en el infinito

Se tratan los términos de (8) en los que aparece el potencial en el infinito.

Debido a que en la estela $\Phi_{\infty}]_{\Sigma_{estela \ sup}} = \Phi_{\infty}]_{\Sigma_{estela \ inf}}$ y las normales son contrarias la contribución en (8) de la estela debido al potencial en el infinito se anulan, de manera que solo quedan las superficies del motor, del perfil y la semicircunferencia que encierra al punto fuente. La semicircunferencia y el contorno al que éste pertenezca, ya sea el motor o en el perfil, se transformaran en dos contornos nuevos.

1. una circunferencia centrada en el punto fuente, la llamaremos Σ_{ϵ}
2. el contorno al que pertenece el punto fuente (perfil o punto del conjunto motor) menos la semicircunferencia que se le ha añadido a la semicircunferencia inicial para formar la circunferencia descrita anteriormente. A esta nueva frontera se la denominará Σ_e

La contribución debido a Σ_e queda:

$$\int_{\Sigma_e} (-\Psi \nabla \Phi_{\infty} + \Phi_{\infty} \nabla \Psi) d\sigma = 0$$

debido a que como en su interior no hay ninguna singularidad, equivale a la ecuación de Green, que es conocido que es cero.

La contribución de Σ_{ϵ} se calcula suponiendo que el radio de esta pequeña circunferencia es ϵ . Dividiremos la contribución en la parte propia de dobletes y la de manantiales:

1. Parte de dobletes.

$$\int_0^{2\pi} \ln \epsilon \nabla \Phi_{\infty} \vec{e}_r \epsilon d\theta = 0 \quad (9)$$

Debido a que el límite cuando ε tiende a cero es nulo

2. Parte de manantiales.

$$\int_0^{2\pi} \Phi_\infty \frac{\vec{e}_r}{\varepsilon} (-\vec{e}_r) \varepsilon d\theta = -2\pi \Phi_\infty(\vec{r}) \quad (10)$$

2.2.2. Contribución del potencial total

Trataremos los términos de (8) en los que aparece el potencial total.

Conviene recordar que éstos términos son:

$$\int_{\Sigma_{total} - \Sigma_\infty} (-\Psi \nabla \Phi + \Phi \nabla \Psi) d\sigma \quad (11)$$

Es aquí donde se aplican la condición de contorno de no penetrabilidad para el caso de las paredes de labios del difusor, góndola, chorro, perfil y estela. También se aplicarán las condiciones de flujo en la entrada del motor y la salida del chorro.

La contribución de la semicircunferencia se ve a continuación, de nuevo dividida en contribución de manantiales y de dobletes:

1. Contribución de manantiales:

$$\int_0^\pi \ln \varepsilon \nabla \Phi \vec{e}_r \varepsilon d\theta = 0 \quad (12)$$

Tal y como ocurría en (9)

2. Contribución de dobletes:

$$\int_0^\pi \Phi \frac{\vec{e}_r}{\varepsilon} (-\vec{e}_r) \varepsilon d\theta = -\pi \Phi(\vec{r}) \quad (13)$$

Visto esto, los términos de (11) que quedan finalmente son

$$\int_{\Sigma_p + \Sigma_m + \Sigma_{out} + \Sigma_{in}} \Phi \nabla \Psi \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_{estela\ inf}, \Sigma_{estela\ sup}} \Phi \nabla \Psi \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_{in} + \Sigma_{out}} \Psi \nabla \Phi \vec{n} d\sigma - \pi \Phi(\vec{r}) \quad (14)$$

El término de la estela se puede simplificar un poco más, debido a que $\nabla \Psi|_{\Sigma_{estda\ sup}} = \nabla \Psi|_{\Sigma_{estda\ inf}}$ y que como la circulación es:

$$\Gamma = \int_C \nabla \Phi d\vec{l} = \int_C \frac{d\Phi}{ds} ds = \Phi^+ - \Phi^- \quad (15)$$

Por tanto el término de los dobletes en la estela queda de la forma:

$$\int_{\Sigma_{\text{estela inf}}, \Sigma_{\text{estela sup}}} \Phi \nabla \Psi \vec{n} d\sigma = \Gamma \int_{\Sigma_{\text{estela sup}}} \nabla \Psi \overrightarrow{n_{\Sigma_{\text{estela sup}}}} d\sigma \quad (16)$$

2.3. Cálculo de coeficientes de influencia y ensamblado final

A continuación se estudiarán todas las aportaciones de las diferentes superficies. A estas alturas se tiene que (8) queda de la forma:

$$\Phi(\vec{r}^j) = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_{p,m,in,out}} \Phi \nabla \Psi \vec{n} d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_{in,out}} \nabla \Phi \vec{n} \Psi d\sigma + \frac{\Gamma}{\pi} \int_{\Sigma_{\text{estela sup}}} \nabla \Psi \vec{n} d\sigma + 2\Phi_{\infty}(\vec{r}^j) \quad (17)$$

Esta ecuación relaciona el potencial en el punto fuente con la circulación en la estela del perfil y integrales del potencial sobre las fronteras del dominio fluido, recordando que estas fronteras son:

Entrada del motor Designada por Σ_{in} .

Salida del chorro del motor Designada por Σ_{out} .

Contorno no penetrable del motor Designada por Σ_m .

Contorno del perfil Designada por Σ_p .

Si se discretiza las fronteras anteriores: $\Sigma_m, \Sigma_p, \Sigma_{in}, \Sigma_{out}$ en N paneles y en cada uno de ellos se supone una forma funcional del potencial, en este caso será un valor constante en el panel, se podrá expresar el potencial en el punto fuente en función del potencial en los distintos paneles de la discretización, de manera que se tendrá de incógnitas el potencial en cada uno de los N paneles y la circulación del perfil. Por lo que si se particulariza (17) poniendo como punto fuente todos los centros de los N paneles que forman el contorno, se obtendrán N ecuaciones que junto a la condición de Kutta cerrará el problema. Éste será un problema lineal de la forma $Ax = b$ que se resolverá invirtiendo la matriz A .

La condición de Kutta se traduce en igualdad de velocidades en las inmediaciones del borde de salida, tanto para el intradós y como para el extradós:

$$\overrightarrow{v_{\text{intradós bs}}} = \overrightarrow{v_{\text{extradós bs}}}$$

Cerrado el problema se procederá a calcular cada uno de los coeficientes de influencia entre los distintos paneles. Para el cálculo de los coeficientes de influencia de nuevo se dividirá para manantiales y para dobletes.

2.3.1. Notación empleada

La radiovector que unirá el punto efecto con el punto causa se puede notar de la forma $\vec{r}_j - \vec{r}_i$, donde el subíndice i hace referencia al punto fuente y el subíndice j al panel efecto. Para poder automatizar los cálculos se expresará éste vector en términos de las componentes normal y tangencial del panel efecto, j . Esto se consigue de la siguiente manera:

$$\vec{r}_j - \vec{r}_i = R_{i,j}^n \vec{n}_j + R_{i,j}^t \vec{t}_j \quad (18)$$

Siendo \vec{n}_j el vector unitario normal del panel j y \vec{t}_j el vector tangencial al panel j .

Por último también conviene introducir la longitud de cada panel, para así poder realizar la integración sobre cada panel de manera más cómoda. Esta longitud del panel se designará con

$$\Delta r_j = |\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j| \quad (19)$$

2.3.2. Coeficientes de influencia de dobles

La forma de los coeficientes de influencia es la influencia en el panel efecto debido al doblete situado en el panel fuente, si la intensidad de éste fuera la unidad. La expresión del coeficiente de influencia es la siguiente:

$$C = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta \vec{r}} \nabla \Psi \vec{n} d\sigma \quad (20)$$

Donde

$$\nabla \Psi = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

y el punto fuente viene dado por el radio-vector \vec{r}' .

Expresando el vector $\vec{r} - \vec{r}'$ en un sistema de coordenadas con un eje tangente y otro perpendicular al panel donde se integra el coeficiente de influencia, se puede llegar a una buena automatización del cálculo de los coeficientes de influencia. Estos coeficientes de influencia serán designados a través de $C_{i,j}$.

Se puede demostrar que los coeficientes de influencia de los dobles tienen la forma:

$$C_{i,j} = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \left(\frac{R_{i,j}^t + \Delta \vec{r}}{R_{i,j}^n} \right) - \arctan \left(\frac{R_{i,j}^t}{R_{i,j}^n} \right) \right) \quad (21)$$

La contribución al potencial del punto fuente situado en un panel, del propio panel es nula ya que como se sabe en este caso $\nabla \Psi \vec{n} = 0$.

2.3.3. Coeficientes de influencia en la estela

De la misma forma que en se puede calcular la influencia de la estela sobre el resto de puntos del dominio fluido. El coeficiente de influencia de la estela queda de la misma forma que en la Subsección 2.3.3. A éstos coeficientes de influencia se le designará a través de E_j que mostrará la influencia sobre la estela de poner un doblete en el panel i . Para calcularlos basta hacer el límite a la expresión (21) cuando $\Delta \vec{r}$ tiende a infinito. La expresión queda de la forma:

$$E_j = \frac{1}{\pi} \left[\text{sign} (R_{i,j}^n) \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{R_{i,j}^t}{R_{i,j}^n} \right) \right] \quad (22)$$

2.3.4. Coeficientes de influencia de manantiales

Como se comentó en apartados anteriores los manantiales nos servirán para modelar el flujo absorbido por el motor y el flujo del chorro de salida. La forma de los coeficientes de influencia es la integral sobre cada panel del potencial debido al doblete situado en el punto fuente si la intensidad de dicho doblete tuviera valor unidad. En el apartado 2.4.1 se introdujo la influencia de los manantiales, que identificaremos de la siguiente forma:

$$M = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta r_j} \nabla \Phi \vec{n} \Psi d\sigma$$

Estos coeficientes de influencia se denominarán a través de $M_{i,j}$, siendo i el índice del panel fuente y j el índice del panel efecto.

La expresión del coeficiente de influencia es la siguiente:

$$\begin{aligned} M_{i,j} = & \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \left[(-R_{i,j}^t) \ln (R_{i,j}^t)^2 + (R_{i,j}^n)^2 + (R_{i,j}^t + \Delta r_i) \ln (R_{i,j}^t - \Delta r_j)^2 + (R_{i,j}^n)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \left[-R_{i,j}^n \left(\arctan \frac{-R_{i,j}^n}{-R_{i,j}^t - \Delta r_j} - \arctan \frac{-R_{i,j}^n}{-R_{i,j}^t} \right) - \Delta r_i \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Es importante señalar que la contribución del manantial de un panel sobre sí mismo es no nula, a contrario de lo que ocurría en los dobletes. Si se cogen paneles lo suficientemente pequeños, esta contribución si se podrá despreciar, pero si se cogen paneles mayores, se extenderá la integral a dicho panel.

2.3.5. Forma matricial del problema

Una vez cerrado y discretizado el problema, se procederá a su planteamiento desde el punto de vista matricial. Como ya se comentó la resolución del problema consistirá en plantear la ecuación (17) para todos los paneles junto

a la condición de Kutta.

En términos de variables de nuestro problema la condición de Kutta queda de la forma:

$$\frac{\Phi_m - \Phi_{m-1}}{d(m, m-1)} = \frac{\Phi_{m+2} - \Phi_{m+3}}{d(m+1, m+2)} \quad (24)$$

Siendo m el índice del panel del extradós del perfil que contiene al borde de salida. Con la (24) se cierra el problema, exigiendo que en el borde de salida del perfil las velocidades sean iguales. Esta condición provocará en perfiles de borde de salida angulosos que la velocidad en dicho borde sea nula.

El sistema es un sistema de ecuaciones algebraico lineal, fácil de resolver. Es de la forma $Ax = b$, siendo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -C_{1,2} & \cdots & -C_{1,r} & \cdots & -C_{1,N} & -E_1 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ -C_{r,1} & -C_{r,2} & \cdots & 1 & \cdots & -C_{r,N} & -E_r \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ -C_{N,1} & -C_{N,2} & \cdots & -C_{N,r} & \cdots & 1 & -E_N \\ \cdots & \frac{1}{d(m, m-1)} & \frac{1}{d(m, m-1)} & \frac{1}{d(m+1, m+2)} & \frac{1}{d(m+1, m+2)} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

y el término independiente de la ecuación:

$$b = \begin{pmatrix} 2u_\infty (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) - \sum_{h \in \Sigma_{in}, \Sigma_{out}} M_{1,h} \\ \vdots \\ 2u_\infty (x_r \cos \alpha + y_r \sin \alpha) - \sum_{h \in \Sigma_{in}, \Sigma_{out}} M_{r,h} \\ \vdots \\ 2u_\infty (x_N \cos \alpha + y_N \sin \alpha) - \sum_{h \in \Sigma_{in}, \Sigma_{out}} M_{N,h} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Donde se observa que el término independiente de la ecuación tiene un sumatorio extendido sólo a los paneles en los cuales la condición de contorno no es de penetrabilidad. Es importante notar que la principal diferencia con el caso de resolución del campo potencial sobre un perfil respecto al caso de añadirle un motor, es este término de los manantiales, que como se observa solo influye al término independiente del sistema de ecuaciones a resolver.

2.4. Resolución numérica

Para resolver este problema se recurrió a Matlab. Con este software se automatizaron los cálculos de manera que fueran lo más sencillo posible.

Se definió un fichero '.m' a través del cual se realizaba la resolución del problema. Este fichero '.m' empezaba con la definición de la geometría de la toma y del perfil. Esta definición de la geometría del problema se daba mediante puntos discretos o ecuaciones de la misma (caso de perfiles tipo NACA).

Este fichero llamaba a otros ficheros '.m' que se encargaban de discretizar la geometría. Al hablar de discretizar se hace referencia a crear los paneles a lo largo de la geometría. Se utilizaron dos ficheros de discretización:

1. Discretización del perfil
2. Discretización del conjunto entrada del motor, labio superior e inferior del labio del motor, gondola y chorro y salida del chorro.

Discretización del perfil Como se sabe que los mayores cambios en la velocidad tangente al perfil ocurrían en las cercanías del borde de ataque y de salida. Para producir la discretización se optó por usar el cambio siguiente:

$$x = \frac{c_{\text{perfil}}}{2} (1 - \cos \eta) \quad (27)$$

donde

$$\eta = [0 : h_{\text{perfil}} : 1] \quad (28)$$

En donde h es el paso de manera que se discretiza η de forma equiespaciada.

Se observa en (27) que x será más pequeña en las cercanías de $x = 0$ y de $x = c_{\text{perfil}}$ que en el resto de abscisas.

Como se puede ver solo hay un control para la discretización de la geometría del perfil, y éste será h_{perfil} . De manera que si de quiere disminuir el tamaño de los paneles habrá que actuar sobre esta variable.

Discretización del conjunto entrada del motor, labio superior e inferior del labio del motor, gondola y chorro y salida del chorro. Este conjunto geométrico fue más complicado de discretizar, debido a su geometría más compleja y a que poseía diferentes condiciones de contorno. A este conjunto por cuestiones de simplicidad se le denominará de aquí en adelante conjunto total del motor.

Para la discretización de este conjunto geométrico se tenían dos objetivos:

1. Tamaño de los elementos acorde con los previsibles cambios en las velocidades tangentes a ellos. Además el

cambio de tamaño entre elementos adyacentes debería ser progresivo y sin saltos grandes en el tamaño de éstos.

2. Producir un cambio suave en las transiciones de las distintas condiciones de contorno que existen en el conjunto geométrico complejo. Por ejemplo qué hacer con la unión de la entrada al motor con los labios del difusor.

Para resolver el segundo objetivo se optó por la utilización de redondeos. Se hicieron tres redondeos:

1. Redondeo entre la entrada del motor y el labio del difusor.
2. Redondeo entre la salida del motor y el chorro del motor.
3. Redondeo entre el intradós del perfil y el chorro.

En los dos primeros redondeos, el parámetro libre es el radio de éstos. Se hicieron de manera que la circunferencia fuera tangente a los dos elementos que unían. En el redondeo de la entrada del motor el punto del extradós del perfil del difusor en el cual empezaba el redondeo era el que tenía la tangente horizontal, de manera x de la entrada del motor se cogía una vez hallada la circunferencia de redondeo, definida a través de su radio. Se puede demostrar fácilmente que el ángulo abarcado por los dos primeros redondeos es de 90° .

Finalmente señalar que en este último redondeo (chorro y góndola) no hay problemas de transición de condiciones de contorno, además el radio del redondeo viene dado por la geometría de la góndola que se quiera calcular; es decir el problema a resolver tiene un determinado radio dado, mientras que en los dos casos de redondeo anteriores el radio de redondeo se podía cambiar, de hecho en estos últimos casos se debe seleccionar de tal forma que haya una transición suave entre las distintas fronteras que serán unidas por los redondeos.

En el caso del redondeo de la salida del motor la posición de la salida del chorro también se calculaba a través del radio del redondeo, que era definido a gusto.

Volviendo al primer objetivo, los tramos de la geometría en los cuales se preveían cambios grandes en la velocidad era el borde de ataque de los labios del difusor. Además para una correcta transición en las condiciones de contorno también se discretizaron con elementos pequeños los distintos redondeos.

Para conseguir que el cambio de tamaño de los elementos fuese progresivo y no a saltos, se optó por usar de nuevo un único parámetro para el tamaño de la discretización del subconjunto. Como éste estaba formado por geometrías variadas: perfiles, tramos rectos (la entrada y salida del motor) y tramos curvos (los respectivos redondeos) hubo que sacar una serie de relaciones entre los pasos de las discretizaciones de las distintas geometrías adyacentes, a través de las cuales se producía la transición entre los distintos tamaños de los tramos del conjunto geométrico.

Se definieron una serie de pasos o número de paneles para realizar la discretización de cada uno de los tramos

Paso para la discretización del extradós $h_{\text{extrados labio}}$.

Paso para la discretización del intradós $h_{\text{intradados labio}}$.

Paso para la discretización de la entrada al motor h_{in} .

Paso para la discretización de la salida al chorro del motor h_{out} .

Paso para la discretización del conjunto chorro gondola $h_{\text{ch gon}}$.

Número de paneles que habrá en el redondeo existente entre la entrada al motor y los labios del difusor

$$N_{\text{redondeo in}}.$$

Número de paneles que habrá en el redondeo existente entre la salida del motor y la geometría del chorro

$$N_{\text{redondeo out}}.$$

Número de paneles que habrá en el redondeo existente entre el extradós del perfil y el inicio del chorro

$$N_{\text{redondeo ch gon}}.$$

Para obtener dichas relaciones entre paso se recurrió a igualar el tamaño de los elementos adyacentes de los distintos tramos de la geometría que estuvieran en contacto. De modo que suponiendo como único parámetro libre el paso de la discretización para el extradós del perfil se pueden obtener todos los demás pasos de los distintos elementos pertenecientes al conjunto total del motor. De nuevo se hará una transformación coseno, como la expresada en (27) para discretizar todos los elementos del conjunto total del motor.

Es conveniente en este punto hacer una reflexión sobre el cambio coseno. Cuando se uso en el perfil, la discretización correspondiente al borde de salida y al borde de ataque era del mismo tamaño. Pero ahora, por ejemplo si nos vamos al tramos del extradós del labio, nos interesaría que hubiera mayor número de elementos en la parte del extradós cercana al borde de ataque que en la parte del extradós cercana al redondeo con el chorro. Para ello se usará el cambio coseno de la siguiente forma:

$$x = \frac{x_{\text{fpe ref}}}{2} (1 - \cos \eta) \quad (29)$$

Siendo ahora $x_{\text{fpe ref}}$ un valor de referencia de la abscisa fin del extradós, mayor que la abscisa real fin del extradós, x_{fpe} . Este cambio se usará para el extradós del perfil del labio del motor. Ahora η no estará entre 0 y 1, sino entre cero y el valor inferior a 1, η^* tal que al sustituir η^* en (29) se obtenga x_{fpe} , de modo que se conseguirán distintos tamaños para cada uno de los extremos del tramo.

Las distintas discretizaciones vienen dadas por:

1. Extradós labio. La discretización de este tramo es de la forma

$$x = (1 - \cos \eta) \frac{x_{\text{fpe ref}}}{2}$$

. En donde

$$\eta \in [0 : h_{\text{extrados-labio}} : \eta^*]$$

Obtenidas esta discretización en 'x' interpolaremos las correspondientes ordenadas 'y' (si la geometría viene dada por puntos) o si la geometría es tipo NACA se obtendrán de las correspondientes ecuaciones.

2. Intradós labio. Cuya discretización viene dada por la siguiente expresión $x = [1 - \cos \eta] \frac{x_{\text{fpi}}}{2}$ En donde

$$\eta \in [0 : h_{\text{intradós-labio}} : 1]$$

. De manera que los dos extremos del intradós del labio tendrán el mismo tamaño. Para obtener las ordenadas se actuará como antes, o bien interpolando o mediante las ecuaciones que dan la geometría.

3. Entrada del motor. La discretización de este tramo viene dada por

$$y = \frac{h_{\text{toma}}}{2} \cos \eta$$

. Ahora

$$\eta \in [0 : h_{\text{in}} : 1]$$

. Aquí h_{toma} será la altura de la entrada del motor (dada por la diferencia de la coordenada y de los extremos de la entrada del motor). En este caso las abscisas correspondientes serán todas iguales y de valor x_{toma} dada como se dijo con anterioridad por el radio de redondeo de la entrada al motor. Notar que la parte debida al radio de redondeo será una contribución a esta abscisa, la otra contribución será la debida al valor de la abscisa del último punto del intradós del perfil, que es un parámetro dado por la geometría del problema (recordar que se definió a partir del punto del intradós del labio de la toma con tangente horizontal).

4. Salida del motor. La discretización de este tramo viene dada por

$$y = \frac{h_{\text{chorro}}}{2} \cos \eta$$

Ahora

$$\eta \in [0 : h_{out} : 1]$$

Aquí h_{chorro} será la altura del chorro del motor (dada por la diferencia de la coordenada y de los extremos del chorro. Las abscisas de los correspondientes puntos 'y' serán de valor constante e igual a $x_{sal\ chorro}$, que al igual que en el caso anterior tendrá una contribución dada por el radio del redondeo, en este caso el redondeo de la salida del chorro del motor. De nuevo la otra contribución es la debida a la abscisa del último punto del conjunto gondola chorro, dado por la geometría del problema.

5. Conjunto gondola chorro. La discretización de este tramo vendrá dada por

$$x = (1 - \cos \eta) \frac{x_{fc}}{2}$$

En donde

$$\eta \in [0 : h_{ch\ gon} : 1]$$

El parámetro x_{fc} es la coordenada fin del chorro. Los paneles extremos de este conjunto tendrán el mismo tamaño. Este tramo se considera que es recto y horizontal, por lo que tendrán una coordenada 'y' dada por la geometría del problema.

6. Redondeo de la entrada del motor. Se supondrán los paneles de longitud constante, de manera que la longitud de cada panel vendrá dada por la siguiente expresión

$$long = \frac{R_{red\ in} \gamma}{N_{redondeo\ in}}$$

Siendo γ el ángulo que abarca el redondeo, que como se comentó es de valor $\frac{\pi}{2}$. En este caso las coordenadas de los puntos se obtienen a partir de la ecuación de la circunferencia de redondeo.

7. Redondeo de la salida del motor del motor. Se supondrán los paneles de longitud constante, de manera que la longitud de cada panel vendrá dada por la siguiente expresión

$$long = \frac{R_{red\ out} \gamma}{N_{redondeo\ out}}$$

. Donde de nuevo el ángulo abarcado por el redondeo es $\frac{\pi}{2}$. En este caso las coordenadas de los puntos se obtienen a partir de la ecuación de la circunferencia de redondeo.

8. Redondeo entre el extradós del perfil y el inicio del chorro. Se supondrán los paneles de longitud constante, de manera que la longitud de cada panel vendrá dada por la siguiente expresión

$$long = \frac{R_{red\ in\ \gamma}}{N_{redondeo\ ch\ gon}}$$

. Siendo γ el ángulo que abarca el redondeo. Que será el ángulo formado por las normales del redondeo en los puntos de tangencia del redondeo con el extradós y con el chorro. En este caso las coordenadas de los puntos se vuelven a obtener a partir de la ecuación de la circunferencia de redondeo.

La relación entre el número de paneles del redondeo de la entrada del motor y el paso del intradós del labio del difusor es de la forma:

$$N_{redondeo\ in} = \frac{\frac{R_{red\ in\ \pi}}{2}}{\left(1 - \cos\left(h_{intrados-labio}\right) \frac{x_{fpi}}{2}\right)} \quad (30)$$

Siendo x_{fpi} la abscisa de última del perfil del intradós, que como se dijo antes era la que tenía tangente horizontal y $R_{red\ in}$ el radio del redondeo a la entrada del motor.

La relación entre el paso en la entrada del motor y el número de paneles del redondeo de entrada es de la forma:

$$h_{in} = \arccos \frac{2long_{panel-red}}{h_{toma}} \quad (31)$$

Donde ahora $long_{panel-red}$ es la longitud de los paneles del tramos de redondeo de la entrada del motor.

La relación entre el paso en el intradós del labio y el extradós del labio vendrá dada por:

$$h_{extrados-labio} = \arccos 1 - long_{panel-intradados} \frac{2}{x_{fpe-ref}} \quad (32)$$

Siendo $long_{panel-intradados}$ la longitud del panel del intradós del labio que contiene al borde de ataque.

La siguiente relación será entre el número de paneles que habrá en el redondeo entre el extradós y la gondola del perfil con el paso con el que se discretiza el extradós del labio:

$$N_{redondeo\ ch\ gon} = \frac{R_{red\ ch\ gon\ \gamma}}{long_{panel-intradados}} \quad (33)$$

Donde ahora $long_{panel\ intrados}$ es la longitud del panel del extradós del labio que linda con el inicio del redondeo.

A continuación se relacionará el paso con el que se discretizará el conjunto góndola chorro con valores el número

de paneles que hay en el redondeo del chorro.

$$h_{ch\ gon} = \arccos 1 - \text{long}_{\text{panel-redondeo}} \frac{2}{x_{fc}} \quad (34)$$

Siendo $\text{long}_{\text{panel-panel-redondeo}}$ la longitud de los paneles del redondeo entre el extradós y el chorro.

Seguidamente se halla el número de paneles del redondeo de la salida del motor en función del último tamaño del panel del conjunto gondola chorro:

$$N_{\text{redondeo out}} = \frac{R_{\text{red out}} \frac{\pi}{2}}{\text{long}_{\text{panel-chorro}}} \quad (35)$$

Siendo ahora $\text{long}_{\text{panel-chorro}}$ la longitud del último panel del conjunto gondola chorro antes del redondeo de salida.

Finalmente para terminar las relaciones entre elementos de discretización se hallará el paso correspondiente a la salida del motor.

$$h_{\text{out}} = \arccos \text{long}_{\text{panel-chorro}} \frac{2}{h_{\text{chorro}}} \quad (36)$$

Donde aparece de nuevo $\text{long}_{\text{panel-chorro}}$ porque la longitud de los paneles del redondeo es la misma que la longitud del tramo del chorro.

Terminada la explicación de la discretización se muestra en la Figuras 4 y 5 los distintos redondeos hechos sobre la geometría de la sección de la góndola.

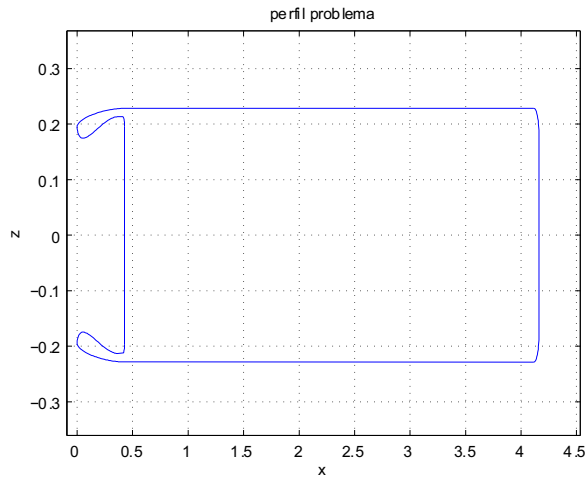


Figura 4: Geometría de la sección de la toma con redondeos

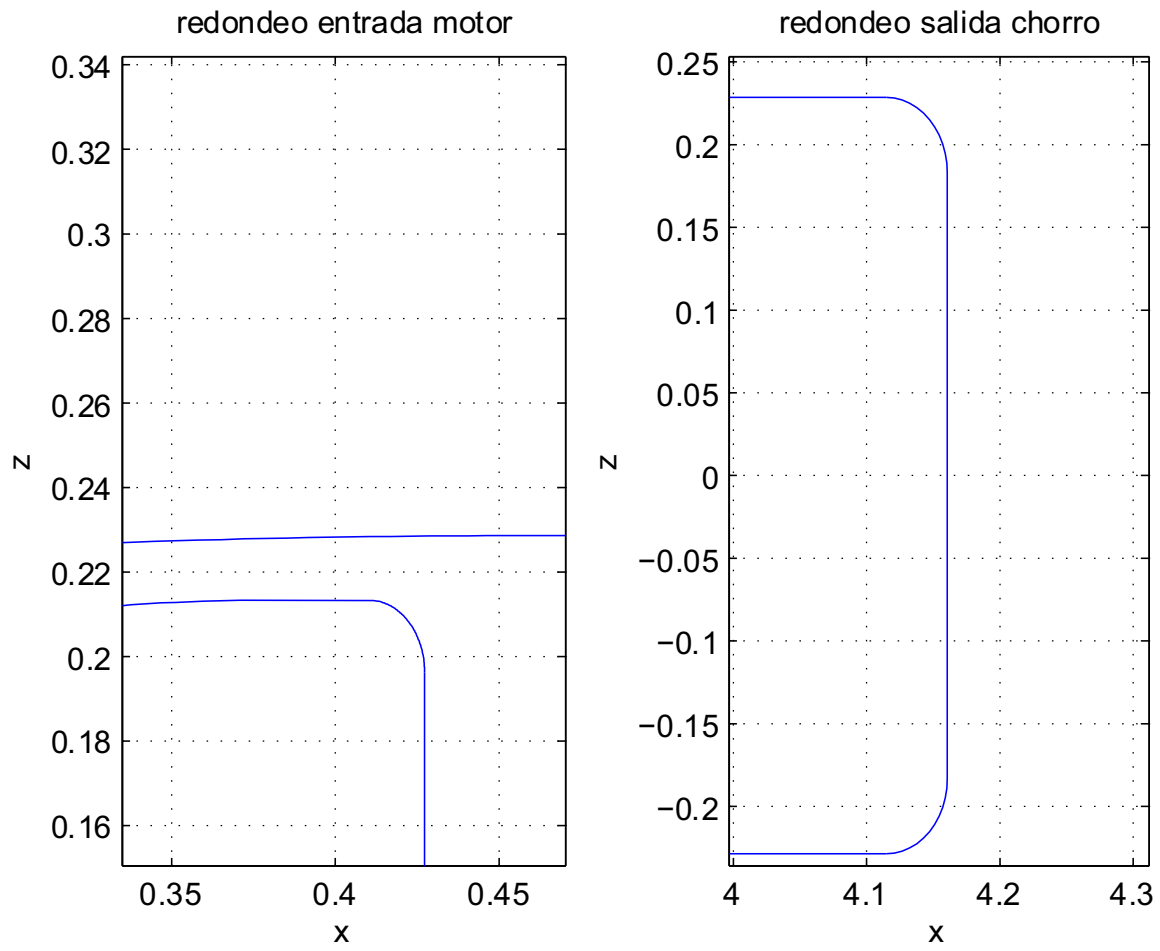


Figura 5: Geometría de la sección de la toma con redondeos. Zoom

2.4.1. Cálculo del potencial en un punto cualquiera

Una vez resuelto el problema se podrá obtener el potencial de un punto del interior del dominio fluido a través de los potenciales de la frontera del dominio. En la sección se calcula la manera de calcular el potencial en un punto de la frontera del dominio fluido a través de los potenciales en el resto del contorno.

Para calcular el potencial en un punto interior del dominio \vec{r}_0 lo único que varia es que en vez de coger una semicircunferencia para eliminar la singularidad del punto fuente, \vec{r}_0 , se cogía la circunferencia completa. Recordar que en el punto fuente la función armónica Ψ era singular debido a que se definía de la forma,

$$\Psi(\vec{r}) = \ln |\vec{r} - \vec{r}_0|$$

De manera que si se opera de manera similar a lo hecho en la subsección 2.4.1, se llega a una expresión del tipo:

$$\Phi(\vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{p,m, in, out}} \Phi \nabla \Psi d\vec{n} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{in, out}} \nabla \Phi \vec{n} \Psi d\sigma + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\Sigma_\infty} \nabla \Psi \vec{n} d\sigma + \Phi_\infty(\vec{r}') \quad (37)$$

De manera que obtenido los potenciales para distintos puntos del interior del dominio fluido se podrá proceder al cálculo de la velocidad en el interior del dominio. Para hallar la componente de la velocidad en una dirección en un punto, se usará la definición de potencial de velocidades, es decir se calculará el potencial en dicho punto y en un punto adyacente según la dirección de la componente de velocidad deseada y se aplicará la siguiente fórmula:

$$v_u = \frac{\Phi(\vec{r}_i + \epsilon \vec{u}) - \Phi(\vec{r}_i)}{d(\vec{r}_i + \epsilon \vec{u}, \vec{r}_i)} \quad (38)$$

Con $d(\vec{r}_i + \vec{u}, \vec{r}_i)$ la distancia entre los puntos en los cuales se ha calculado el potencial, \vec{u} la dirección en la cual quiero calcular la componente de la velocidad y ϵ la distancia entre puntos.

Como es lógico cuanto más pequeño sea ϵ más exacto será el valor de la componente de la velocidad deseada.