3. Método de paneles axilsimétrico

Esta sección se basará en la sección en la que se refirió al método de paneles bidimensional, debido a que la metodología es similar. El problema a resolver consistirá en calcular el campo fluido tridimensional cuando una corriente incidente de velocidad U_∞ incide sobre una gondola axilsimétrica, que absorbe aire a una velocidad u_{motor} en la entrada del compresor.

3.1. Introducción

Para poder considerar el problema axilsimétrico no habrá ala y la geometría de la toma será axilsimétrica. Tal y como se explicó en la sección la geometría de los difusores no es axilsimétrica para poder conseguir así un buen comportamiento durante las fases en las que hay un ángulo de ataque apreciable entre la corriente incidente y el eje del motor (fases como el aterrizaje, el despegue y circunstancias en las que haya viento cruzado).

En el presente desarrollo se supondrá como es lógico que el ángulo de ataque al que está puesto el motor es nulo, como debe ser en un problema axilsimétrico.

Dentro de las condiciones mencionadas anteriormente, se podrá simplificar el problema inicial (tridimensional) en un más sencillo. Una vez obtenida la ecuación del método de paneles para el caso tridimensional (en la cual el potencial en el punto fuente vendrá dado por integrales del potencial a lo largo de las superficies que forman el motor), se integrará en primer lugar según la coordenada acimutal, reduciendo así las integrales de superficie a integrales de línea.

3.1.1. Discusión de las condiciones de contorno

En el caso axilsimétrico las superficies frontera del dominio armónico serán:

Góndola y chorro Σ_m En esta frontera la condición de contorno será la de no penetrabilidad

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

Entrada del motor Σ_{in} La condición de contorno será

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_{motor}$$

. Para los redondeos de la entrada del motor, la condición de contorno será la componente normal a la frontera de la velocidad $\overrightarrow{u_{motor}}$, es decir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_{motor}\cos(\theta)$$

.

Salida motor Σ_{out} La condición de contorno será

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_{\infty}$$

Para los redondeos de la entrada del motor, la condición de contorno será la componente normal a la frontera de la velocidad $\overrightarrow{U_{\infty}}$, es decir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_{\infty}\cos(\theta)$$

.

Esfera exterior suficientemente alejada Σ_{∞} Se tomará lo suficientemente alejada para que el potencial creado por los manantiales y dobletes situados en el motor sea despreciable

3.2. Cálculo de la ecuación integral para el potencial

El procedimiento se hará de manera más rápida debido a que es análogo al caso bidimensional.

Se partirá de la ecuación de Green:

$$\int_{\Omega} (-\Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi)dw = 0 \qquad (39)$$

En donde ahora la función armónica Ψ al ser el dominio tridimensional será como sigue,

$$\Psi = \frac{1}{\mid \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \mid}$$

.

Esta función armónica hará que los potenciales debido a los manantiales y a los dobletes sean:

$$\Phi\left(\overrightarrow{r}\right)_{\text{manantiales}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_0} \frac{q(\sigma)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} d\sigma \qquad (40)$$

$$\Phi\left(\overrightarrow{r}\right)_{\text{dobletes}} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_0} \frac{\overrightarrow{a}\, m(\sigma)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} d\sigma \qquad (41)$$

donde $\overrightarrow{a}$ es la dirección del eje del doblete, $m(\sigma)$ la intensidad por unidad de superficie de los dobletes y $q(\sigma)$ el caudal por unidad de superficie de los manantiales.

Que se corresponden con la estudiada en Aerodinámica Básica tridimensional.

3.2.1. Ecuación integral para el potencial de velocidades

Operando tal y como se hizo en el caso bidimensional se llega a la ecuación:

$$\Phi(\overrightarrow{r'}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_{m,in,out}} \Phi\nabla\Psi\overrightarrow{n}d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_{in,out}} \nabla\Phi\overrightarrow{n}\Psi d\sigma + 2\Phi_\infty(\overrightarrow{r'}) \tag{42}$$

Como se sabe en los problemas axilsimétrico, una de sus propiedades es

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = 0 \tag{43}$$

De (43) se pueden obtener:

$$\begin{aligned}
\Phi(\overrightarrow{r}) &= \text{constante en } \theta \\
\frac{\partial\Phi}{\partial n}_{\Sigma_{in,out}} &= \text{constante en } \theta
\end{aligned}$$

La condición (43) permitirá que (42) sea integrada a lo largo de θ sabiendo que las intensidades de los dobletes (Φ) y de los manantiales ($\nabla\Phi\overrightarrow{n}$) son constantes en θ, de manera que salen fuera de la integral relativa a la coordenada acimutal.

La integral debida a los manantiales queda de la forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{in,out}} \frac{\partial\Phi}{\partial n}\left(\int_0^{2\pi} \Psi r d\theta\right) ds = \int_{\Gamma_{in,out}} \frac{\partial\Phi}{\partial n} G ds \tag{44}$$

Mientras que la contribución de los dobletes queda como sigue:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{in,out,m}} \Phi\left(\int_0^{2\pi} \nabla\Psi\overrightarrow{n} r d\theta\right) ds = \int_{\Gamma_{in,out,m}} \Phi H ds \tag{45}$$

En (44) y en (45) aparecen las llamadas funciones de Kernel G y H respectivamente, éstas son dadas por,

$$G = \frac{2r}{\pi\sqrt{A}}K(m) \tag{46}$$

$$H = \frac{2r}{\pi\sqrt{\bar{A}}}E(m)\left[\frac{n_r}{2r} + \frac{(r'-r)n_r + (z'-z)n_z}{\bar{B}}\right] - \frac{K(m)n_r}{\pi\sqrt{\bar{A}}} \tag{47}$$

donde

$$\bar{A} = (r'+r)^2 + (z'-z)^2 \qquad \bar{A} = (r'-r)^2 + (z'-z)^2 \qquad m = \frac{4rr'}{\bar{A}}$$

y $K(m)$ y $E(m)$ son las funciones elípticas de primer y segundo orden respectivamente. Finalmente n_r y n_θ son las componentes según r y θ respectivamente, del vector normal del panel a lo largo del cual se integra exterior al dominio fluido.

Conviene especificar en este momento la notación en coordenadas cilíndricas. El punto fuente tendrá de coordenadas r', z' y el punto de la superficie de integración tendrá de coordenadas r, z.

Parece interesante reflexionar sobre las funciones dadas por (46) y (47). En estos casos se tiene que integrar tanto para los manantiales como para los dobletes la influencia de un panel sobre sí mismo.

Por consiguiente usando (45) y (44), la ecuación (42) se puede escribir:

$$\Phi(r', z') = \int_{\Gamma_{m,in,out}} \Phi H(r,z)ds - \int_{\Gamma_{in,out}} \frac{\partial\Phi}{\partial n}G(r,z)ds + 2\Phi_\infty(\overrightarrow{r'}) \tag{48}$$

donde se puede observar que se tiene una expresión para el potencial de velocidades en función de integrales de línea en lugar de integrales de superficie.

Si se discretizan las curvas anteriores: $\Gamma_m, \Gamma_{in}, \Gamma_{out}$ en N paneles y en cada uno de ellos supondremos una forma funcional del potencial, en el presente caso será constante en el panel, se podrá expresar expresar el potencial en el punto fuente en función del potencial en los distintos paneles de la discretización, de manera que tendremos de incógnitas el potencial en cada uno de los N paneles. Por lo que si particularizamos (48) poniendo como punto fuente todos los centros de los N paneles que forman el contorno, tendremos N ecuaciones que cerrarán el problema. Éste será un problema lineal de la forma $Ax = b$ que se resolverá invirtiendo la matriz A.

Cerrado el problema se procederá a calcular cada uno de los coeficientes de influencia entre los distintos paneles. Para el cálculo de los coeficientes de influencia de nuevo se dividirá para manantiales y dobletes. A contrario de lo ocurrido para el caso bidimensional ahora no se han encontrado integrales a los distintos coeficientes de influencia, a causa de esto se ha hallado numéricamente los distintos coeficientes de influencia.

Con el fin de automatizar el cálculo numérico de los coeficientes de influencia se definió la longitud de cada panel, tal y como sigue:

$$\triangle r = |\overrightarrow{r_{j+1}} - \overrightarrow{r_j}| \tag{49}$$

Se necesitará también la definición del vector tangente a cada panel

$$\begin{pmatrix} t_j^r \\ t_j^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{j+1} - r_j \\ z_{j+1} - z_j \end{pmatrix} \tag{50}$$

siendo (r_{j+1}, z_{j+1}) las coordenadas cilíndricas del extremo final del panel j y (r_j, z_j) las coordenadas cilíndricas del extremo inicial del panel j.

3.3. Cálculo de coeficientes de influencia y ensamblado final

3.3.1. Coeficientes de influencia de manantiales

Estos coeficientes de influencia se denominarán a través de $M_{i,j}$, siendo i el índice del panel fuente y j el índice del panel efecto. Este desarrollo vale para el caso de que $i \neq j$.

El coeficiente se definirá de la siguiente manera:

$$M(i,j) = \int_0^{\triangle r} G(r_i, r(s), z_i, z(s))ds \tag{51}$$

donde

$$r(s) = r_j + st_j^r \qquad z(s) = z_j + st_j^z$$

y s es la longitud de arco, en este caso respecto al del primer punto del panel en el cual se produce la integración.

3.3.2. Coeficientes de influencia de dobletes

Para el caso de los dobletes la influencia de denominará por medio de $C_{i,j}$, siendo i el índice del panel fuente y j el índice del panel efecto.Este desarrollo vale para el caso de que $i \neq j$.

$C(i,j)$ se definirá a través de la siguiente integral de linea:

$$C(i,j) = \int_0^{\triangle r} H(r_i, r(s), z_i, z(s))ds \tag{52}$$

siendo de nuevo

$$r(s) = r_j + st_j^r \qquad z(s) = z_j + st_j^z$$

3.3.3. Acerca de los coeficientes de influencia

En el caso bidimensional el término de los dobletes no tenía influencia de la contribución debida al propio panel porque al coger los paneles planos se cumplía que $\nabla\Phi\overrightarrow{n} = 0$. Sin embargo ahora la parte de la integral correspondiente al panel de centro $\overrightarrow{r'}$ involucra tridimensionalmente tanto al panel del punto fuente como a los paneles que están en la misma coordenada (r', z') y en distinta coordenada θ; y como es lógico estos otros paneles sí influyen sobre el potencial del punto fuente, tal y como se puede ver si se aplica la ecuación (42).

También se observa como a medida que nos acercamos al eje acimutal los valores de (46) y (47) decrecen, es decir la contribución al potencial, debido a los paneles situados en el mismo anillo concéntrico al eje que el panel del punto fuente, decrece a medida que dichos anillos están más cerca del eje (r pequeños), tal y como era de esperar.

3.3.4. Cálculo del coeficiente de influencia de un panel sobre sí mismo

A contrario de lo ocurrido para el caso bidimensional, ahora un panel axilsimétrico si tiene influencia sobre el sí mismo. Como se sabe el coeficiente de influencia de un panel sobre sí mismo vendrá dado por la siguiente expresión:

$$M(i,j) = \int_0^{long_i} G(r_i, r(s), z_i, z(s))ds \tag{53}$$

para el caso de los manantiales, y

$$C(i,j) = \int_0^{long_i} H(r_i, r(s), z_i, z(s))ds \tag{54}$$

para los dobletes. En ambos casos s es la coordenada arco.

Las funciones $G(s)$ y $H(s)$ tienen entre otros términos, la función elíptica $K(m)$, la cual presenta un infinito integrable en $m = 1$. Tal y como muestra *Abrahamovizt* la función K se puede representar a través de un error menor de 10^{-11} mediante la siguiente relación

$$K(m) = a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2 + a_3 m_1^3 + a_4 m_1^4 - \lg(m_1)(b_0 + b_1 m_1 + b_2 m_1^2 + b_3 m_1^3 + b_4 m_1^4); \tag{55}$$

donde $a0, a1, a2, a3, a4, b0, b1, b2, b3, b4$ son constantes y $m_1 = 1 - m$. En la tabla siguiente se indican el valor de las constantes.

Nodos	Pesos
a_0	1,38629436112
a_1	0,09666344259
a_2	0,03590092383
a_3	0,03742563713
a_4	0,01451196212
b_0	0,5
b_1	0,12498593597
b_2	0,06880248576
b_3	0,03328355346
b_4	0,00441787012

Tal y como se ve en (55) la única parte singular de K es el término:

$$2b_0 \lg(s) \tag{56}$$

de manera que será en el que se centrará el estudio. De la definición de m_1 se puede demostrar que:

$$m_1 = \frac{(r' - r)^2 + (z' - z)^2}{\bar{A}}$$

.

Por tanto si se descompone el logaritmo en dos término se tendrá que:

$$\lg(m_1) = \lg(s^2) - \lg(\bar{A})$$

donde s es, como ya se sabe, la longitud de arco y se define $s = \sqrt{(r' - r)^2 + (z' - z)^2}$.

Para poder integrar los coeficientes de influencia de manantiales y dobletes se procederá a descomponer el integrando F en dos términos, uno singular $F_{singular}$ dado por (56),y otro regular $F_{regular}$. La integral del coeficiente de influencia quedará de la siguiente manera

$$\int_{-\frac{\triangle r}{2}}^{\frac{\triangle r}{2}} (F - F_{singular})\, g(s)ds + \int_{-\frac{\triangle r}{2}}^{\frac{\triangle r}{2}} F_{singular} g(s)ds \tag{57}$$

Siendo $g(s)$ el término del integrando no afectado por la singularidad y midiéndose la longitud de arco respecto al punto central del panel en el cual se procede a realizar la integración del coeficiente de influencia. A la primera integral del segundo miembro de (57) se le denominará I_1 (se realizará numéricamente) y a la segunda integral se le llamará I_2.

Centrando la atención en I_2:

$$I_2 = \int_{-\frac{\triangle r}{2}}^{\frac{\triangle r}{2}} 2b_0 \lg(s) g(0) ds + \int_{-\frac{\triangle r}{2}}^{\frac{\triangle r}{2}} 2b_0 \lg(s) \left(g(s) - g(0)\right) ds$$

donde de nuevo se dividirá el segundo miembro en las dos integrales, la primera de ellas se denominará I_{21} que se podrá realizar analíticamente, y la segunda I_{22} que se realizará numéricamente.

A continuación se procede a calcular la primitiva de I_{21},

$$I_{21} = 2b_0 \left[\frac{\triangle r}{2} \left(\lg|\frac{\triangle r}{2}| - 1 \right) - \frac{-\triangle r}{2} \left(\lg|\frac{-\triangle r}{2}| - 1 \right) \right] \tag{58}$$

Las integrales definidas como I_1, I_{22} se calcularán mediante cuadraturas de Gauss-Legendre de 6 puntos, al igual que como se calculaban el resto de coeficientes de influencia en los casos en los cuales no existía la singularidad propia del panel. Conviene recordar los pesos y los nodos para cuadraturas de Gauss-Legendre de 6 puntos.

Nodos	Pesos
±0,238619186083197	0,467913934572691
±0,661209386466265	0,360761573048139
±0,932469514203152	0,171324492379170

3.3.5. Forma matricial del problema

Planteando la ecuación (48) tantas veces como paneles haya se consigue el sistema algebraico mencionado anteriormente. Éste tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1+C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,r} & \cdots & C_{1,N} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ C_{r,1} & C_{r,2} & \cdots & 1+C_{r,r} & \cdots & C_{r,N} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ C_{N,1} & C_{N,2} & \cdots & C_{N,r} & \cdots & 1+C_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_r \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2U_\infty z_1 + \sum_{h\in\Sigma_{in},\Sigma_{out}} M_{1,h} \\ \vdots \\ 2U_\infty z_r + \sum_{h\in\Sigma_{in},\Sigma_{out}} M_{r,h} \\ \vdots \\ 2U_\infty z_N + \sum_{h\in\Sigma_{in},\Sigma_{out}} M_{N,h} \end{pmatrix} \tag{59}$$

El sistema es de la forma $Ax = b$, siendo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,r} & \cdots & C_{1,N} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ C_{r,1} & C_{r,2} & \cdots & 1+C_{r,r} & \cdots & C_{r,N} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ C_{N,1} & C_{N,2} & \cdots & C_{N,r} & \cdots & 1+C_{N,N} \end{pmatrix} \tag{60}$$

y el término independiente de la ecuación:

$$b = \begin{pmatrix} 2U_\infty z_1 + \sum_{h\in\Sigma_{in},\Sigma_{out}} M_{1,h} \\ \vdots \\ 2U_\infty z_r + \sum_{h\in\Sigma_{in},\Sigma_{out}} M_{r,h} \\ \vdots \\ 2U_\infty z_N + \sum_{h\in\Sigma_{in},\Sigma_{out}} M_{N,h} \end{pmatrix} \tag{61}$$

3.4. Resolución numérica

Al igual que sucedió con el problema bidimensional se recurrió a Matlab para resolver el problema. Con este software se automatizaron los cálculos de manera que fueran lo más sencillo posible.

Se definió un fichero '.m' a través del cual se realizaba la resolución del problema. Este fichero '.m' empezaba con la definición de la geometría de la toma. La definición de la geometría de la toma se dio mediante puntos discretos y la realizaba otro archivo '.m'.

La discretización del conjunto total de la geometría se hizo tal y como en el caso bidimensional, dejando solo un parámetro libre para definir la longitud de los paneles de la malla.

3.4.1. Calculo del potencial en un punto cualquiera

De nuevo se procederá a obtener el potencial de un punto del interior del dominio fluido a través de los potenciales de la frontera del dominio. Una vez hecha la resolución numérica (sección 3.4) se tiene el potencial en la frontera del dominio fluido.

Para calcular el potencial en un punto interior del dominio (r', z') tal y como ocurría en el caso bidimensional lo único que varia es que en vez de coger una semiesfera para eliminar la singularidad del punto fuente , (r', z') , se cogía una esfera. Recordar que en el punto fuente la función armónica Ψ era singular debido a que se definía de la forma,

$$\Psi(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}|}$$

mientras que ahora esta función no será singular en ningún punto de la frontera.

Si se opera de manera similar a lo hecho en la Sección 3.2.1, se llega a la siguiente expresión:

$$\Phi(r', z') = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{m,in,out}} \Phi H(r, z) ds - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{in,out}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} G(r, z) ds + \Phi_{\infty}(\overrightarrow{r'}) \tag{62}$$

Así que obtenido los potenciales para distintos puntos del interior del dominio fluido se podrá proceder al cálculo de la velocidad en el interior del dominio. Para ello se usará la definición de potencial, es decir, para hallar la componente de la velocidad en una dirección en un punto, se calculará el potencial en dicho punto y en un punto adyacente según la dirección de la componente de velocidad deseada y se aplicará la siguiente fórmula:

$$v_u = \frac{\Phi((r, z) + \epsilon\overrightarrow{u}) - \Phi(r, z)}{d((r, z) + \epsilon\overrightarrow{u}, (r, z))} \tag{63}$$

Siendo $d((r, z) + \epsilon\overrightarrow{u}, (r, z))$ la distancia entre los puntos en los cuales se ha calculado el potencial, $\overrightarrow{u}$ la dirección en la cual se quiere calcular la componente de la velocidad y ϵ la distancia entre puntos.

A medida que más pequeño sea ϵ más exacto será el valor de la componente de la velocidad que se pretende calcular.