Parte I

Descripción de la dinámica del helicóptero

Capítulo 2

Dinámica del helicóptero

Como bien es sabido, un requisito fundamental para realizar el diseño de sistemas de control de cualquier sistema es tener un modelo los más exacto posible, que permita conocer adecuadamente el comportamiento dinámico del mismo.

De este modo, el presente capítulo se dedicará a exponer de un modo genérico las ecuaciones generales que rigen la dinámica de cualquier helicóptero, así como las distintas simplificaciones y desacoplamientos que hay que realizar para facilitar el diseño de controladores en sucesivos epígrafes.

2.1. Ecuaciones generales

Como todos los sistemas mecánicos, las ecuaciones generales con las que se puede describir completamente la dinámica del helicóptero son las tres ecuaciones de cantidad de movimiento, las tres de momentos, y las tres correspondientes a los ángulos de *Euler* (relaciones cinemáticas).

A la hora de plantear estas ecuaciones, se va a hacer una enorme simplificación que permite formular el problema de una forma más abordable, la cual consiste en considerar a la aeronave como un sólido rígido de 6 grados de libertad. Con esto se está suponiendo que la dinámica de los rotores es mucho más rápida que la del fuselaje, de modo que éstos alcanzan el estado estacionario en tiempos mucho menores a los tiempos característicos de variación de los grados de libertad del fuselaje. Esta hipótesis es adecuada en un rango de frecuencias del fuselaje de bajas a moderadas.

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -(wq - vr) + \frac{X}{M_a} - g\sin(\theta) && (2.1)\\
\dot{v} &= -(ur - wp) + \frac{Y}{M_a} - g\cos(\theta)\sin(\phi) && (2.2)\\
\dot{w} &= -(vp - uq) + \frac{Z}{M_a} - g\cos(\theta)\cos(\phi) && (2.3)\\
\dot{p} &= \frac{1}{I_{xx}}\left[(I_{yy} - I_{xx})\, qr + I_{xz}(\dot{r} + pq) + L\right] && (2.4)\\
\dot{q} &= \frac{1}{I_{yy}}\left[(I_{zz} - I_{xx})\, rp + I_{xz}\left(r^2 + p^2\right) + M\right] && (2.5)\\
\dot{r} &= \frac{1}{I_{zz}}\left[(I_{xx} - I_{yy})\, pq + I_{xz}(\dot{p} - qr) + N\right] && (2.6)\\
\dot{\phi} &= p + q\sin(\phi)\tan(\theta) + r\cos(\phi)\tan(\theta) && (2.7)\\
\dot{\theta} &= q\cos(\phi) - r\sin(\phi) && (2.8)\\
\dot{\psi} &= q\sin(\phi)\sec(\theta) + r\cos(\phi)\sec(\theta) && (2.9)
\end{aligned}$$

Nótese que en las ecuaciones de $\dot{p}$ y $\dot{r}$ aparecen términos que involucran a $\dot{r}$ y $\dot{p}$ (respectivamente), por lo que sería conveniente operar con estas dos ecuaciones hasta obtener un sistema del tipo: $\dot{x} = f(x, u)$, donde x es el vector de estado: $x = (u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi)$, y u es el vector de control, cuya influencia está incluida en los términos de fuerza y momento, que dependen de las señales de control introducidos en la aeronave.

2.2. Ecuaciones linealizadas: Dinámica acoplada

Desde un punto de vista práctico, el sistema de ecuaciones 2.1 es difícilmente manejable debido a las no linealidades que lo afectan, lo cual no lo hace aconsejable para abordar el problema del diseño de controladores. Para solventar este problema, se procede a la linealización del mismo, considerando que durante el movimiento se producen pequeñas perturbaciones del vector de estado, respecto a su magnitud de equilibrio (*trim*), de forma que: $x = x_e + \delta x$.

De este modo, teniendo en cuenta que el sistema de ecuaciones no lineales 2.1 se puede expresar de la forma:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u})$$

se puede hacer un desarrollo en serie de Taylor, quedándose solo con los términos lineales, esto es:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}_e, \vec{u}_e) + \left.\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}, \vec{u})}{\partial \vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_e} (\vec{x} - \vec{x}_e) + \left.\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}, \vec{u})}{\partial \vec{u}}\right|_{\vec{u}=\vec{u}_e} (\vec{u} - \vec{u}_e) \tag{2.10}$$

Puesto que los vectores $\vec{x}_e$ y $\vec{u}_e$ están definidos de forma que la aeronave se encuentre en equilibrio, se cumplirá que $\vec{f}(\vec{x}_e, \vec{u}_e) = 0$. De esta forma, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}_i &= \left.\frac{\partial f_i(\vec{x}, \vec{u})}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_e} \left(x_j - x_{e_j}\right) + \left.\frac{\partial f_i(\vec{x}, \vec{u})}{\partial u_j}\right|_{\vec{u}=\vec{u}_e} \left(u_j - u_{e_j}\right)\\
\dot{\vec{x}}_i &= A_{ij}\left(x_j - x_{e_j}\right) + B_{ij}\left(u_j - u_{e_j}\right) = A_{ij}\delta x_j + B_{ij}\delta u_j
\end{aligned}$$

donde:

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\vec{x}=\vec{x}_e} \quad \text{y} \quad B_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)_{\vec{x}=\vec{x}_e}$$

Es importante señalar que en la función vectorial $\vec{f}(\vec{x},\vec{u})$ intervienen las fuerzas y momentos aerodinámicos (ver ecuaciones 2.1). Así, para poder derivar esta función , será necesario disponer de una expresión que permita relacionar estas fuerzas y momentos con las vectores $\vec{x}$ y $\vec{u}$. De este modo, si se considera que las fuerzas y momentos son funciones analíticas de $\vec{x}$ y $\vec{u}$ (hipótesis generalmente válida, aunque pudiera fallar en casos donde aparezcan fenómenos de histéresis o discontinuidades), se pueden realizar expansiones en serie de Taylor de la forma:

$$X = X_e + \frac{\partial X}{\partial u}\delta u + \frac{\partial X}{\partial v}\delta v + \frac{\partial X}{\partial w}\delta w + ... \equiv X_e + X_u\delta u + X_v\delta v + X_w\delta w + ... \tag{2.11}$$

Los coeficientes X_u, X_w, etc, reciben el nombre de derivadas de estabilidad, y sus valores se supondrán conocidos. Con esto se puede describir la dinámica del helicóptero mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \left(\begin{matrix} X_u & X_w - Q_e & X_q - W_e & -g\cos\Theta_e \\ Z_u + Q_e & Z_w & Z_q + U_e & -g\cos\Phi_e\sin\Theta_e \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & \cos\Phi_e & 0 \\ Y_u - R_e & Y_w - P_e & Y_q & -g\sin\Phi_e\sin\Theta_e \\ L'_u & L'_w & L'_q + k_1P_e - k_2R_e & 0 \\ 0 & 0 & \sin\Phi_e\tan\Theta_e & \Omega_a\sec\Theta_e \\ N'_u & N'_w & N'_q - k_1R_e - k_3P_e & 0 \\ 0 & 0 & \sin\Phi_e\sec\Theta_e & 0 \end{matrix} \right. \dots$$

$$\left. \begin{matrix} X_v + R_e & X_p & 0 & X_r + V_e & 0 \\ Z_v - P_e & Z'_p - V_e & -g\sin\Phi_e\cos\Theta_e & Z_r & 0 \\ M_v & M_p - \frac{2P_eI_{xz}+R_e(I_{xx}-I_{zz})}{I_{yy}} & 0 & M_r + \frac{2R_eI_{xz}-P_e(I_{xx}-I_{zz})}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_a\cos\Theta_e & -\sin\Phi_e & 0 \\ Y_v & Y_p + W_e & g\cos\Phi_e\cos\Theta_e & Y_r - U_e & 0 \\ L'_v & L'_p + k_1Q_e & 0 & L'_r - k_2Q_e & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cos\Phi_e\tan\Theta_e & 0 \\ N'_v & N'_p - k_3Q_e & 0 & N'_r - k_1Q_e & 0 \\ 0 & 0 & -R_e\sec\Theta_e\sin\Phi_e & \cos\Phi_e\sec\Theta_e & 0 \end{matrix} \right) \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ v \\ p \\ \phi \\ r \\ \psi \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} X_{\theta_0} & X_{\theta_{1s}} & X_{\theta_{1c}} & X_{\theta_{0T}} \\ Z_{\theta_0} & Z_{\theta_{1s}} & Z_{\theta_{1c}} & Z_{\theta_{0T}} \\ M_{\theta_0} & M_{\theta_{1s}} & M_{\theta_{1c}} & M_{\theta_{0T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{\theta_0} & Y_{\theta_{1s}} & Y_{\theta_{1c}} & Y_{\theta_{0T}} \\ L'_{\theta_0} & L'_{\theta_{1s}} & L' & L'_{\theta_{0T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N'_{\theta_0} & N'_{\theta_{1s}} & N' & N'_{\theta_{0T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_{1s} \\ \theta_{1c} \\ \theta_{0T} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Nótese que en las ecuaciones anteriores las variables de perturbación han sido denotadas por u, v, w, etc, en lugar de δu, δv, δw, etc. Esta será la notación que se siga de aquí en adelante.

Por otra parte, hay que decir que los subíndices e se corresponden con las magnitudes en estado de equilibrio. Además, las derivadas de estabilidad correspondientes a fuerzas aparecen normalizadas (el término que se observa en la ecuación es la derivada de estabilidad dividido por la masa del helicóptero).

Los demás parámetros que aparecen en las ecuaciones son los siguientes:

$$L'_p = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} L_p + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} N_p; \quad L'_r = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^2} L_r + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^2} N_r \tag{2.13}$$

$$N'_p = \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} N_r + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} L_r; \quad N'_p = \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^2} N_p + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^2} L_p \tag{2.14}$$

$$k_1 = \frac{I_{xz}\left(I_{xx} + I_{zz} - I_{yy}\right)}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}; \quad k_2 = \frac{I_{zz}\left(I_{zz} - I_{yy}\right) + I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}; \quad k_3 = \frac{I_{xx}\left(I_{yy} - I_{xx}\right) + I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$

Todas estas constantes y las derivadas de estabilidad corregidas ($'$) aparecen al resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para despejar $\dot{p}$ y $\dot{r}$ en función de las variables de estado.

2.3. Ecuaciones linealizadas desacopladas: Dinámica longitudinal

El sistema de ecuaciones 2.12 proporciona un modelado bastante completo del comportamiento del helicóptero, sin embargo, no resulta adecuado a la hora de analizar los modos de respuesta o de diseñar controladores, ya que el elevado número de grados de libertad dificulta el problema y enmascara las características típicas de la respuesta. Por este motivo, se suelen desacoplar las ecuaciones linealizadas estudiando la dinámica longitudinal y la lateral-direccional por separado.

La dinámica longitudinal viene regida por las variables de estado: u, w, q y θ; junto con las señales de control θ_0 y θ_{1s} (colectivo y cíclico longitudinal respectivamente). Estos parámetros están definidos por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} X_u & X_w - Q_e & X_q - W_e & -g\cos\Theta_e \\ Z_u + Q_e & Z_w & Z_q + U_e & -g\cos\Phi_e \sin\Theta_e \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & \cos\Phi_e & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\theta_0} & X_{\theta_{1s}} \\ Z_{\theta_0} & Z_{\theta_{1s}} \\ M_{\theta_0} & M_{\theta_{1s}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_{1s} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

En el apéndice A se pueden encontrar los valores de las derivadas de estabilidad que se han expuesto en las ecuaciones anteriores. Estas derivadas de estabilidad se obtienen mediante el software *Helisim*, el cual implementa un modelo no lineal completo del helicóptero en cuestión, y realiza las correspondientes diferenciaciones numéricas a partir del punto de equilibrio.

2.4. Ecuaciones linealizadas desacopladas: Dinámica lateral-direccional

Pasando ahora a estudiar la dinámica lateral-direccional, se va a escribir el sistema de ecuaciones diferenciales en términos de las variables de este problema, que son: v, p, r, ϕ, ψ; y de las dos señales de control que más afectan al problema lateral-direccional, como son el ángulo de ataque de las palas al accionar el cíclico lateral (θ_{1c}), y el ángulo de ataque colectivo del rotor de cola (θ_{0T}).

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Y_v & Y_p + W_e & Y_r - U_e & g\cos\phi_e \cos\theta_e & 0 \\ L'_v & L'_p + k_1 Q_e & L'_r - k_2 Q_e & 0 & 0 \\ N'_v & N'_p - k_3 Q_e & N'_r - k_1 Q_e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\phi_e \tan\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi_e \sec\theta_e & \begin{matrix} Q_e \cos\phi_e \sec\theta_e \\ -R_e \sin\phi_e \sec\theta_e \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{\theta 1c} & Y_{\theta 0T} \\ L'_{\theta 1c} & L'_{\theta 0T} \\ N'_{\theta 1c} & N'_{\theta 0T} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1T} \\ \theta_{0T} \end{bmatrix} + \vec{f}(t) \tag{2.16}$$