



Universidad de Sevilla  
Escuela Superior de Ingenieros



PROYECTO FIN DE CARRERA

**CONTROL ÓPTIMO DE LA  
DINÁMICA LONGITUDINAL DE  
HELICÓPTEROS MEDIANTE  
TÉCNICAS DE ASIGNACIÓN DE POLOS**

*Autor:* Vicente Melo Burgos

*Tutores:* D. Francisco Gordillo Álvarez  
D. Sergio Esteban Roncero

Sevilla, Octubre 2007



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>I Estudios preliminares</b>	<b>7</b>
<b>2. Dinámica del helicóptero. Normativa aplicable</b>	<b>9</b>
2.1. Dinámica del helicóptero . . . . .	9
2.1.1. Modelo linealizado de seis grados de libertad . . . . .	11
2.1.2. Reducción del problema. Componentes longitudinales . . . . .	15
2.1.3. Modos presentes en la dinámica longitudinal . . . . .	16
2.2. Normativa aplicable a helicópteros . . . . .	18
2.2.1. ADS-33. Requerimientos básicos en dinámica longitudinal . . . . .	19
<b>3. Fundamentos de control</b>	<b>23</b>
3.1. Asignación de polos (Pole placement) . . . . .	23
3.2. Control óptimo. LQR . . . . .	24
3.2.1. Propiedades del regulador óptimo . . . . .	25
3.2.2. Problema inverso de control óptimo . . . . .	28
3.2.3. Combinación de metodologías . . . . .	29
<b>II Desarrollo de controladores</b>	<b>31</b>
<b>4. Dinámica del BO-105</b>	<b>33</b>
4.1. Descripción general del helicóptero BO-105 . . . . .	33
4.2. Características dinámicas del BO-105 . . . . .	35
<b>5. Diseño de controladores para el BO-105</b>	<b>41</b>
5.1. Optimización de controladores . . . . .	41
5.1.1. Proceso de optimización para vuelo a punto fijo . . . . .	42
5.1.2. Proceso de optimización para baja velocidad . . . . .	45
5.1.3. Proceso de optimización para velocidades superiores . . . . .	48
5.2. Combinación de controladores. Gain-scheduling . . . . .	49

<b>6. Simulaciones dinámicas</b>	<b>69</b>
6.1. Modelo no lineal. Estados de equilibrio . . . . .	69
6.2. Sistema en bucle abierto . . . . .	71
6.3. Regulación de perturbaciones . . . . .	72
6.3.1. Perturbaciones iniciales . . . . .	74
6.3.2. Perturbaciones debidas a viento . . . . .	77
6.4. Controlador de mantenimiento de velocidad . . . . .	79
6.5. Controlador de aceleración . . . . .	81
6.6. Maniobra de aceleración-deceleración . . . . .	83
<b>III Apéndices</b>	<b>87</b>
<b>A. Derivadas de estabilidad del helicóptero BO-105</b>	<b>89</b>
<b>B. Modelo no lineal de la dinámica del helicóptero BO-105</b>	<b>93</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Las siguientes líneas comprenden el proyecto fin de carrera que culmina todo un trabajo realizado a lo largo de la titulación de Ingeniería Aeronáutica. La temática central del mismo aborda el problema de diseño de controladores óptimos para modos longitudinales de helicópteros mediante la técnica de asignación de polos.

A lo largo del proyecto se ponen de manifiesto tanto las características generales referentes a la dinámica longitudinal de helicópteros, así como las técnicas para abordar el cálculo de reguladores óptimos. Asimismo, se hace hincapié en la normativa actualmente en vigor sobre dinámica de helicópteros, que marca límites claros de comportamiento para uso tanto civil como militar.

La organización por capítulos del documento distingue claramente cada uno de los campos implicados en la consecución del objetivo inicial planteado. Con esta intención, se estructura el proyecto en dos partes diferenciadas: *Estudios preliminares* y *Desarrollo de controladores*.

La primera parte comprende los capítulos dedicados al estudio de la dinámica longitudinal de helicópteros, desde el desarrollo de las ecuaciones generales hasta su linealización y desacople entre modos longitudinales y lateral-direccionales. Asimismo, también se incluye una descripción de los aspectos más característicos de la normativa aplicable a los modos longitudinales de helicópteros, que representarán las pautas de comportamiento buscadas en los mismos. La conclusión de esta primera parte del proyecto estará dedicada a efectuar un repaso por los conceptos de control óptimo más relevantes en consonancia con el objetivo principal del proyecto, así como las virtudes que presenta el procedimiento de asignación de polos frente a otras técnicas similares.

La segunda parte del proyecto estará dedicada al desarrollo de controladores óptimos mediante técnicas de asignación de polos, aplicados al caso particular del helicóptero BO-105 de la empresa *Eurocopter*. Este desarrollo de los controladores, así como un análisis de la evolución de las soluciones óptimas con los modos longitudinales, formará parte del núcleo central del proyecto, mostrando la potencial capacidad del método empleado.

Ya por último, una vez desarrollados los controladores, se procederá a efectuar un procedimiento de *gain scheduling*, orientado a la aplicación de la batería de controladores desarrollada con anterioridad para diferentes velocidades de vuelo. Mediante simulaciones efectuadas en un modelo no lineal, con diferentes condiciones de vuelo y maniobras, se procederá a la comprobación de los controladores calculados.

Con todo ello, se pretenderá que el proyecto en su conjunto muestre el potencial de la técnica de asignación de polos en casos de control de dinámicas donde la situación de los polos de los sistemas involucrados esté limitada por factores externos u otros condicionantes, así como la posibilidad de que este tipo de controladores sea óptimo en rangos amplios de funcionamiento.

## Parte I

# Estudios preliminares





## Capítulo 2

# Dinámica del helicóptero. Normativa aplicable

El presente capítulo comprende una descripción detallada de la dinámica longitudinal desacoplada del helicóptero, poniendo especial hincapié en la descripción de los modos presentes en vuelo de avance, tanto en términos de autovalores como de frecuencias naturales y amortiguamientos asociados.

Asimismo, se presenta una descripción de la actual normativa aplicable a la dinámica de helicópteros, ADS-33, para su posterior desarrollo enfocado en el cumplimiento de la misma para diferentes helicópteros.

### 2.1. Dinámica del helicóptero

El análisis y modelado de la dinámica de un helicóptero genérico comporta la generación de una descripción matemática tanto del helicóptero en sí como de todos los efectos que sobre él incurren. Se tiene de esta manera que tomar en consideración los efectos aerodinámicos, estructurales y dinámicos de todos los componentes del mismo, desde las propias palas de los rotores, la posición y configuración de la propulsión del mismo, hasta los efectos que las vibraciones mecánicas inducen en la estructura del aparato. La figura 2.1 muestra los componentes del helicóptero que influyen principalmente en el modelado.

De esta manera, cuanto mayor número de efectos y variables se introduzcan en el problema (tanto de carácter lineal, las más sencillas, como no lineales en casos más generales) el resultado será un modelo más completo y cercano a la realidad, aunque con una complicación mayor tanto para el estudio de su respuesta como para estudios de estabilidad y equilibrado.

Con estas premisas, el modelo más genérico de modelado de sistemas pasa por la definición de

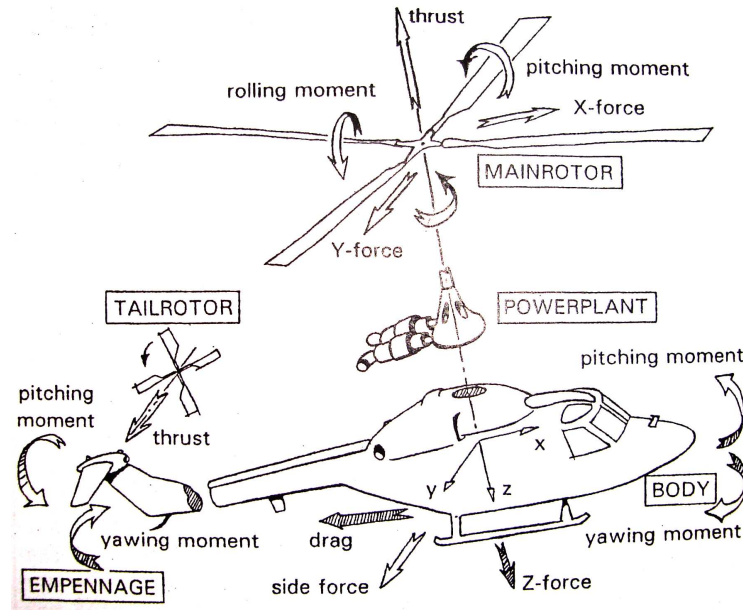


Figura 2.1: Componentes para el modelado de la dinámica del helicóptero: Rotores principal y de cola, fuselaje, planta de potencia, sistema de mandos de vuelo y cola.

los estados del sistema y las variables de control, en la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.1)$$

Donde  $\mathbf{x}$  representa los estados del sistema. Para un helicóptero genérico, este vector de estados es:

$$\mathbf{x}(t) = u, w, q, \theta, v, p, \phi, r, \psi \quad (2.2)$$

Por su parte, la función  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  contiene el modelo de fuerzas y momentos aplicados, referidos al centro de gravedad del helicóptero. Como se citó anteriormente, se incluyen las fuerzas y momentos aerodinámicos, estructurales, gravitacionales e inerciales.

Evidentemente, la complejidad del modelo estará incluida en la definición de los términos derechos de las ecuaciones diferenciales, en el modelado de fuerzas y momentos aplicados al sistema.

Con todo ello, el modelado del sistema conduce a la definición de tres problemas relacionados aunque diferentes:

- *Problema de trimado*: Centrado en calcular los valores de las variables de estado que proporcionan el equilibrio del sistema en una determinada posición del helicóptero. En términos matemáticos,

es descrito por la ecuación

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0 \quad (2.3)$$

- *Problema de estabilidad:* Basado en calcular la estabilidad del sistema en un punto de operación del helicóptero. Para ello, se linealizan las ecuaciones dinámicas del helicóptero en torno a dicho punto de operación, obteniendo un modelo lineal de pequeñas perturbaciones. Hecho esto, la estabilidad puede determinarse a partir del cálculo de los autovalores del sistema. Adicionalmente, si se pretende considerar modelos donde las perturbaciones sean importantes, el modelo lineal será poco válido, requiriéndose el empleo del modelo no lineal completo, con la complejidad que ello conlleva. De forma matemática, puede expresarse como:

$$\det \left[ \lambda I - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_{eq}} \right] = 0 \quad (2.4)$$

- *Respuesta del sistema:* Por último, el cálculo de la respuesta del sistema comprende el estudio de las variables de estado a lo largo del tiempo para unas entradas de control dadas, a partir de unas condiciones iniciales que permitan la correcta integración de las ecuaciones diferenciales descriptoras de la dinámica del sistema. En general, la complejidad de los sistemas dinámicos conduce directamente a integraciones numéricas en el tiempo para obtener la buscada respuesta. Al igual que en los dos casos anteriores de problemas asociados a la dinámica del sistema, la forma matemática para el cálculo, en este caso, de la respuesta del sistema en el tiempo, será:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (2.5)$$

En general, los tres problemas propuestos pueden resolverse empleando la planta dinámica completa, incluyendo no linealidades, o bien emplear linealizaciones del sistema en puntos de operación, donde se calculan tanto las variables de trimado, los autovalores y características dinámicas, y la respuesta del sistema ante entradas de control impuestas.

### 2.1.1. Modelo linealizado de seis grados de libertad

Vistos ya tanto el planteamiento general de las ecuaciones del movimiento del sistema (que en principio es totalmente genérico, sin identificación con un modelo concreto, como puede ser un helicóptero), es momento de fijar ideas en torno a la concepción de un modelo correspondiente a la dinámica del movimiento del helicóptero.

Con esta intención, y bajo la hipótesis inicial que considera el helicóptero como un cuerpo rígido (evitando de esta manera tanto efectos elásticos en la estructura como aeroelásticos en la determinación de las fuerzas y momentos aplicados), los grados de libertad del sistema se definirán en la forma:

$$\mathbf{x} = \{u, w, q, \theta, v, p, \phi, r, \psi\} \quad (2.6)$$

Donde cada grado de libertad se define como:

**u:** Velocidad traslacional en el eje x de avance del helicóptero

**v:** Velocidad traslacional según el eje y del helicóptero

**w:** Velocidad traslacional según el eje axial z del helicóptero

**p:** Velocidad angular de balanceo según el eje x

**q:** Velocidad angular de cabeceo según el eje y

**r:** Velocidad angular de guiñada según el eje z

$\theta$ : Ángulo de cabeceo

$\phi$ : Ángulo de balance

$\psi$ : Ángulo de guiñada

La orientación de los ejes para la determinación de las direcciones positivas de cada uno de los estados se muestra en la figura 2.1 en términos de fuerzas y momentos aplicados, los cuales tienen el mismo sentido que los estados correspondientes. Especial atención de cara a resultados posteriores merece la velocidad  $w$ , definida con sentido positivo hacia el suelo.

Por su parte, las variables de control del sistema corresponden a los mandos de paso cíclico y colectivo, tanto del rotor principal como rotor de cola:

$$\mathbf{u} = \{\theta_0, \theta_{1s}, \theta_{1C}, \theta_{0T}\} \quad (2.7)$$

$\theta_0$ : Mando de paso colectivo del rotor principal.

$\theta_{1s}$ : Mando de paso cíclico longitudinal del rotor principal.

$\theta_{1C}$ : Mando de paso cíclico lateral del rotor principal.

$\theta_{0T}$ : Mando de paso colectivo del rotor de cola.

Con estos estados, y combinadas con las ecuaciones correspondientes a los ángulos de Euler  $(\theta, \phi, \psi)$ , las ecuaciones que rigen la dinámica del helicóptero serán:

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -(wq - vr) + \frac{X}{M_a} - g \sin \theta \\
\dot{v} &= -(ur - wp) + \frac{Y}{M_a} + g \cos \theta \sin \phi \\
\dot{w} &= -(vp - uq) + \frac{Z}{M_a} + g \cos \theta \cos \phi \\
I_{xx}\dot{p} &= (I_{yy} - I_{zz})qr + I_{xz}(\dot{r} + pq) + L \\
I_{yy}\dot{q} &= (I_{zz} - I_{xx})rp + I_{xz}(r^2 - p^2) + M \\
I_{zz}\dot{r} &= (I_{xx} - I_{yy})pq + I_{xz}(\dot{p} - qr) + N
\end{aligned} \tag{2.8a}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\
\dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\
\dot{\psi} &= q \sin \phi \sec \theta + r \cos \phi \sec \theta
\end{aligned} \tag{2.8b}$$

Estas ecuaciones conforman un modelo completo no lineal con seis grados de libertad, difícilmente abordable para el cálculo de los problemas de trimado, estabilidad y respuesta. Es por ello conveniente el empleo de una linealización del sistema de ecuaciones en torno a un punto de equilibrio determinado, de manera que, al tener linealizado el problema, el cálculo de los tres tipos de problemas planteados sea mucho más manejable. A su vez, la linealización convenientemente empleada permite obtener resultados correctos con el nivel de simplificación estipulado en el modelo lineal.

En esta línea, el modelo lineal se basa en la utilización de la teoría de pequeñas perturbaciones. Esta postula que, durante el movimiento en perturbación, el comportamiento del helicóptero puede describirse mediante una perturbación a partir del valor de equilibrio empleado para la linealización.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x} \tag{2.9}$$

Esta linealización es aplicada tanto a los estados del sistema como a las fuerzas y momentos actuantes, siendo esta última suposición la que puede entrañar mayores divergencias con modelos no lineales, al despreciar efectos de segundo orden que, en el caso de fuerzas aerodinámicas o propulsivas pueden llegar a ser importantes en determinadas situaciones y maniobras en la envolvente de vuelo del helicóptero.

A fin de no realizar un desarrollo exhaustivo del proceso de linealización de las ecuaciones (2.8a), es suficiente la mención acerca del empleo de la linealización de fuerzas y momentos aplicados al helicóptero a partir de series de Taylor, donde la derivación parcial de las excitaciones externas se realiza sobre todos los estados y variables de control del helicóptero, dando lugar a las denominadas derivadas de estabilidad del helicóptero. Sirva como ejemplo el desarrollo de las fuerzas en la dirección longitudinal del helicóptero,  $X$ :

$$X = X_e + \frac{\partial X}{\partial u} \delta u + \frac{\partial X}{\partial w} \delta w + \dots + \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \dots = X_e + X_u u + X_w w + \dots + X_{\theta_0} \theta_0 + \dots \quad (2.10)$$

Este desarrollo se plasmará finalmente en las ecuaciones dinámicas de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (2.11)$$

Donde las matrices A y B se representan por:

$$A = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_e} \quad (2.12)$$

$$B = \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)_{x=x_e} \quad (2.13)$$

Expresándolas en la forma expandida con todos los términos que intervienen en la linealización de las ecuaciones (2.8a), dichas matrices resultarán:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{long} & A_{cross1} \\ \hline A_{cross2} & A_{lat} \end{array} \right) \quad (2.14a)$$

$$A_{long} = \left( \begin{array}{cccc} X_u & X_w - Q_e & X_q - W_e & -g \cos(\theta_e) \\ Z_u + Q_e & Z_w & Z_q + U_e & -g \cos(\phi_e) \sin(\theta_e) \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi_e) & 0 \end{array} \right) \quad (2.14b)$$

$$A_{cross1} = \left( \begin{array}{cccc} X_v + R_e & X_p & 0 & X_r + V_e \\ Z_v - P_e & Z_p - V_e & -g \sin(\phi_e) \cos(\theta_e) & Z_r \\ M_v & M_p - P_e \frac{2I_{xz}}{I_{yy}} - R_e \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}} & 0 & M_r + R_e \frac{2I_{xz}}{I_{yy}} - P_e \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}} \\ 0 & 0 & -\Omega_a \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) \end{array} \right) \quad (2.14c)$$

$$A_{cross2} = \begin{pmatrix} Y_u - R_e & Y_w + P_e & Y_q & -g \sin(\phi_e) \sin(\theta_e) \\ L'_u & L'_w & L'_q + k_1 P_e - k_2 R_e & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\phi_e) \tan(\theta_e) & \Omega_a \sec(\theta_e) \\ N'_u & N'_w & N'_q - k_1 R_e - k_3 P_e & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14d)$$

$$A_{lat} = \begin{pmatrix} Y_v & Y_p + W_e & g \cos(\phi_e) \cos(\theta_e) & Y_r - U_e \\ L'_v & L'_p + k_1 q_e & 0 & L'_r - k_2 q_e \\ 0 & 1 & 0 & \cos(\phi_e) \tan(\theta_e) \\ N'_v & N'_p - k_3 q_e & 0 & N'_r - k_1 q_e \end{pmatrix} \quad (2.14e)$$

$$B = \begin{pmatrix} X_{\theta_0} & X_{\theta_{1s}} & X_{\theta_{1c}} & X_{\theta_{0T}} \\ Z_{\theta_0} & Z_{\theta_{1s}} & Z_{\theta_{1c}} & Z_{\theta_{0T}} \\ M_{\theta_0} & M_{\theta_{1s}} & M_{\theta_{1c}} & M_{\theta_{0T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{\theta_0} & Y_{\theta_{1s}} & Y_{\theta_{1c}} & Y_{\theta_{0T}} \\ L'_{\theta_0} & L'_{\theta_{1s}} & L'_{\theta_{1c}} & L'_{\theta_{0T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N'_{\theta_0} & N'_{\theta_{1s}} & N'_{\theta_{1c}} & N'_{\theta_{0T}} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

En ambas matrices, los subíndices denotan la derivación parcial. Por otro lado, las inercias del helicóptero están representadas por  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xz}$ . No aparece la inercia  $I_{xy}$  por la simetría longitudinal del propio helicóptero. Las variables marcadas con prima (') corresponden a las correcciones realizadas para tener en cuenta el acoplamiento inercial entre momentos de balanceo y guiñada. Las variables  $k_1, k_2$  y  $k_3$  suponen términos combinación de las inercias del problema. Las variables de equilibrio se representan en forma de subíndice  $e$ .

$$L'_p = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} L_p + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} N_p \quad (2.16a)$$

$$N'_r = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} L_r + \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} N_r \quad (2.16b)$$

$$k_1 = \frac{I_{xz}(I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \quad (2.16c)$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}(I_{zz} - I_{yy}) + I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \quad (2.16d)$$

$$k_3 = \frac{I_{xx}(I_{yy} - I_{xx}) - I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \quad (2.16e)$$

### 2.1.2. Reducción del problema. Componentes longitudinales

A partir de las ecuaciones anteriores, que suponen ya un modelo linealizado para los seis grados de libertad, es de bastante utilidad, al igual que se emplea en el caso de aviones, la distinción del

problema completo en componentes longitudinales y lateral-direccionales. Con este planteamiento, se reduce aún más el problema lineal, proporcionando una mayor sencillez para el cálculo tanto de los modos dinámicos presentes como de los controladores necesarios.

Es importante destacar igualmente que el desarrollo de un modelo puramente longitudinal desecha todas las componentes de acoplamiento entre modos que, en ocasiones, pueden ser importantes, y suponer desviaciones grandes entre el modelo completo no lineal y el modelo linealizado puramente longitudinal.

Con ese objetivo, podemos dividir los estados del sistema entre los correspondientes a modos longitudinales y lateral-direccionales. Para el primero se tendrán en cuenta las velocidades longitudinales ( $u$  y  $w$ ), la velocidad angular de cabeceo ( $q$ ) y el ángulo de cabeceo ( $\theta$ ). Por su parte, los modos laterales contendrán la velocidad lateral ( $v$ ), las velocidades angulares de balanceo y guiñada ( $p$  y  $r$ ), y sus ángulos correspondientes ( $\phi$  y  $\psi$ ). En cuanto a las variables de control de cada uno de los modos, los longitudinales estarán controlador por el control de paso colectivo ( $\theta_0$ ) y paso cíclico longitudinal ( $\theta_{1s}$ ).

En términos de las componentes de las matrices A y B, los modos longitudinal y lateral-direccional suponen submatrices completas, correspondientes a cada conjunto de estados del sistema completo. Focalizando el problema únicamente en sus componentes longitudinales, las dos matrices (2.14) y (2.15) quedarán reducidas a las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} XX_u & X_w - Q_e & X_q - W_e & -g \cos(\theta_e) \\ Z_u + Q_e & Z_w & Z_q + U_e & -g \cos(\phi_e) \sin(\theta_e) \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi_e) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$B = \begin{pmatrix} X_{\theta_0} & X_{\theta_{1s}} \\ Z_{\theta_0} & Z_{\theta_{1s}} \\ M_{\theta_0} & M_{\theta_{1s}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Estos resultados generales servirán en capítulos posteriores, dedicados al estudio concreto del helicóptero BO-105, para el estudio de los problemas de estabilidad y respuesta dinámica asociados a dicha planta.

### 2.1.3. Modos presentes en la dinámica longitudinal

En las siguientes líneas se pretende dar una idea general de los resultados esperados en el estudio de la estabilidad longitudinal de helicópteros, de acuerdo con los estudios realizados por [Pad96] y [AKC02], principalmente. Con ello se pretende mostrar las características dinámicas de los modos longitudinales en el caso de helicópteros genéricos, en términos de autovalores, frecuencias naturales,



amortiguamientos y tiempos característicos.

Generalmente, la dinámica longitudinal de helicópteros (representada analíticamente por el modelo de espacio de estados con las matrices (4.2) y (2.18)) se caracteriza por la aparición de 4 autovalores distintos (hecho evidente a la luz de tratarse de un sistema con cuatro grados de libertad). Estos modos presentan una amplia variabilidad.

En el caso de aeronaves de ala fija (aviones y similares), la dinámica longitudinal está dominada por la aparición de dos modos oscilatorios: El modo de corto periodo y el modo fugoide. Corresponden cada uno de ellos a un par de autovalores complejos conjugados, con frecuencias naturales y amortiguamientos diferentes entre sí. En el caso del modo de corto periodo, se observan amortiguamientos elevados con altas frecuencias naturales. Para el caso del modo fugoide, el comportamiento corresponde a amortiguamientos más moderados, con frecuencias naturales menores.

En el caso de helicópteros, el comportamiento dinámico depende en gran medida de las características del rotor montado. Para helicópteros de rotor articulado, los modos dinámicos presentes se asemejan bastante a los de una aeronave de ala fija, con la presencia de los citados modos de corto periodo y fugoide. En cambio, los helicópteros de rotor fijo presentan comportamientos dinámicos completamente alejados de las aeronaves de ala fija, con la aparición de dos modos reales acompañados de un modo oscilatorio que, en comparación con aeronaves de ala fija, corresponde a un modo tipo fugoide, aunque con mayor inestabilidad que en caso de dichas aeronaves de ala fija.

Dejando a un lado los helicópteros de rotor articulado, cuyas características dinámicas son idénticas a las de aeronaves de ala fija, los helicópteros de rotor fijo (grupo al que pertenece el BO-105, objeto de estudio posterior) presentan características dinámicas cambiantes con la condición de vuelo. Así, los modos presentes pueden pasar desde los citados fugoide y corto periodo (correspondientes a dos pares de polos complejos conjugados), hasta cuatro autovalores reales, pasando por el caso más genérico y característico de estos rotores fijos, con la existencia de un par de autovalores complejos conjugados, combinado con la existencia de dos autovalores reales. Este caso general se expresaría en la forma:

$$(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = 0 \quad (2.19)$$

Estos tres modos se definen por:

**Modo de velocidad vertical:**  $(s + \frac{1}{T_1})$ . Representa una convergencia en velocidad vertical, generalmente con gran amortiguamiento. Se encuentra generalmente desacoplado de los otros dos modos (velocidad de avance y cabeceo). Para helicópteros genéricos, los valores que toma la constante de tiempo  $T_1$  se encuentran entre 1 y 2 segundos.

**Modo de velocidad de avance:**  $(s + \frac{1}{T_2})$ . Al igual el caso anterior, es una convergencia en velocidad, esta vez velocidad de avance, notoriamente amortiguada. A diferencia del anterior, sí presenta cierto grado de acoplamiento con el modo de cabeceo. Los valores característicos para la constante

de tiempo se encuentran en el entorno de 0,5, denotando así respuestas más rápidas que en el caso anterior.

**Modo de oscilación de cabeceo:**  $(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$ . Este modo tendrá una estabilidad dependiente de la velocidad y la condición de vuelo, a diferencia de los dos anteriores donde primaba la estabilidad. Así, para altas velocidades o ascensos pronunciados puede encontrarse situaciones de inestabilidad. El movimiento oscilatorio de cabeceo presenta un acople con el modo de velocidad de avance. Algunos autores, como [AKC02] definen este modo como modo de hoja descendiente (*falling leaf mode*). Además, este modo es comparable con el modo fugoide presente en aeronaves de ala fija, aunque con peores propiedades en cuanto a la estabilidad.

Por otro lado, y así se describe en la normativa actualmente en vigor, los modos dinámicos pueden separarse en modos de corto y largo plazo, estando los primeros caracterizados por incidir directamente en la percepción del piloto durante el transcurso de maniobras, mientras que los modos a largo plazo caracterizan la estabilidad dinámica del helicóptero en términos globales.

En conclusión, se ha comprobado la existencia de una gran variabilidad en las características dinámicas de helicópteros con rotor fijo, que evidentemente inciden en su comportamiento dinámico. Existe dependencia con la velocidad y la condición de vuelo de estos modos, como se comprobará más adelante en el estudio pormenorizado del helicóptero BO-105.

## 2.2. Normativa aplicable a helicópteros

La normativa sobre helicópteros relacionada con la dinámica de los mismos satisface la demanda, tanto de constructores como clientes, de una estandarización de los comportamientos de los mismos, de manera que se cumplan en todo diseño aeronáutico unos niveles mínimos de respuesta dinámica ante diferentes situaciones. Con este fin, vienen desarrollándose desde diferentes organismos estatales e internacionales diferentes normativas relacionadas con prácticamente todos los aspectos que atañen al diseño de un helicóptero.

Entre todos esos conceptos sobre el diseño de helicópteros, merece especial atención la dinámica del mismo, objeto de los análisis de capítulos posteriores. En este sentido, una de las primeras referencias sustanciales corresponde a la normativa MIL-H-8501, publicada por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos por primera vez en 1952 y revisada (con la nomenclatura MIL-H-8501A) en 1961. Esta norma engloba por primera vez en helicópteros conceptos como la fuerza máxima sobre las palancas de mando que debe aplicar el piloto, así como introduce condicionantes en la potencia de control, tanto longitudinal como lateral-direccional. Sin embargo, en general se presenta como una normativa con mayor carácter cualitativo, atendiendo más a requerimientos generales que a rangos concretos de parámetros dinámicos concretos, como amortiguamientos de los modos de vibración.

Otra normativa similar a la anterior es la británica Def Stan 00970, con la aparición mayoritaria de características cualitativas frente a las cuantitativas.

Como evolución de la anterior norma MIL-H-8501, en la década de los 80 apareció por primera vez una sustituta con peso suficiente como para preponderar frente a anteriores normativas relacionadas con la dinámica de helicópteros: ADS-33. De factura americana al igual que la MIL, la normativa ADS-33 (cuya última revisión data del año 2000) supone un salto importante frente a sus predecesoras, al incorporar de forma significativa límites y requerimientos cuantitativos de parámetros concretos acerca de la dinámica del helicóptero. Asimismo, introduce el concepto de *Mission Task Elements*, consistentes en una serie de maniobras que deben realizarse por pilotos probadores para cubrir un amplio rango de habilidades del helicóptero, a fin de demostrar su capacidad de vuelo en diferentes situaciones.

En los siguientes apartados se mostrará una descripción más detallada de la normativa ADS-33, que sentará las bases sobre la que se desarrollarán posteriormente los controladores para diferentes helicópteros.

### **2.2.1. ADS-33. Requerimientos básicos en dinámica longitudinal**

Como se ha comentado anteriormente, la normativa ADS-33 incide principalmente en la definición de los límites de estabilidad aceptables para el comportamiento dinámico de helicópteros genéricos. Con esta intención, a la hora de establecer dichos límites realiza una diferenciación clara en función de la respuesta del sistema (respuestas a corto y largo plazo) y de las entradas de control que actúan sobre el propio sistema, distinguiendo entre pequeñas, medianas y grandes perturbaciones. Adicionalmente, también incorpora diferentes exigencias de comportamiento según la velocidad de vuelo del aparato, de manera que en vuelo a punto fijo y en avance hasta 45 nudos se especifiquen cualidades de vuelo diferentes a las exigidas para vuelo en avance a partir de los citados 45 nudos.

El comportamiento dinámico del helicóptero puede dividirse en tres niveles, según la bondad del comportamiento. Así, en general será deseable que el helicóptero se encuentre, en la medida de lo posible, en el nivel 1 de comportamiento, siendo el nivel 3 el correspondiente a una mala respuesta dinámica del helicóptero en diversas situaciones de exigencia de maniobras. A medida que se desgranen cada una de las posibilidades que alberga la normativa, se comprobará la idoneidad de ubicar el comportamiento dinámico en el citado nivel 1.

Las siguientes figuras muestran un pequeño resumen de dichos niveles, que reflejan todo el espectro de la normativa en términos del control longitudinal.

Para pequeñas amplitudes de perturbación en los controles, se distingue entre respuesta a corto plazo y medio-largo plazo. La primera está relacionada con la sensación del piloto a la hora de realizar maniobras, mientras que la segunda determina el comportamiento dinámico general del helicóptero. A la hora de la definición a través de la normativa, la respuesta a corto plazo viene determinada a través del ancho de banda y el retraso de fase, como se observa tanto en la gráfica 2.2, como en 2.3, donde se muestra la definición del ancho de banda y el retraso de fase a aplicar en las gráficas definitorias de los límites de cada uno de los niveles de comportamiento.

En esta figura, 2.2, aparecen tres gráficas que merecen una aclaración. Si bien las tres corre-

sponden a la misma situación de tipo de entrada de control y respuesta de corto plazo, se distinguen en que cada una de ellas se asigna a un modo de operación o maniobra. Así, la primera comenzando por la izquierda se refiere al seguimiento de trayectorias y adquisición de objetivos. Por otro lado, la gráfica de en medio es empleada en helicópteros ante operaciones donde el piloto puede tomar el control pleno del aparato, sin la intervención de sistemas aumentadores de estabilidad o controladores automáticos más avanzados. La última gráfica, la de la derecha, se emplea al igual que la intermedia en cualquier operación diferente al seguimiento de trayectorias, pero en este caso la maniobra se puede realizar con sistemas de control automático como ayuda al pilotaje.

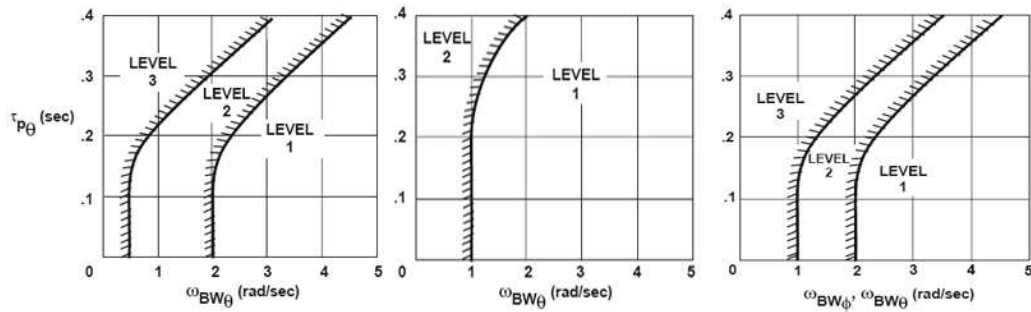


Figura 2.2: Requerimientos para cabeceo según ADS-33, con pequeñas perturbaciones y respuesta de corto plazo. Vuelo a punto fijo o bajas velocidades (hasta 45 nudos).

En el caso de la respuesta de medio-largo plazo, la normativa define las limitaciones en función de una combinación de frecuencias naturales y amortiguamiento del modo, como se muestra en 2.4.

Por último, para velocidades de vuelo a partir de 45 nudos, la normativa vuelve a definir requisitos de comportamiento dinámico a partir del ancho de banda y el retraso de fase del sistema, tal como muestran las gráficas de la figura 2.5. Al igual que en caso del vuelo a baja velocidad, aparecen tres gráficas diferentes según la operación de vuelo y el modo de llevarla a cabo.

Por su parte, en el caso de la respuesta en medio-largo plazo, la normativa reduce el problema a los mismos límites que para el vuelo a baja velocidad (figura 2.4), aunque imponiendo para toda frecuencia natural que el amortiguamiento del sistema sea siempre igual o superior a  $\xi = 0,35$ .

Finalmente, y con la intención de sintetizar toda la normativa básica aplicada a helicópteros reflejada en estas líneas, debe tenerse en cuenta los objetivos planteados inicialmente en el proyecto, basados en el control de la respuesta dinámica del helicóptero de forma global. En términos normativos se traduce en controlar la respuesta del sistema a medio-largo plazo, de manera que en todo momento el sistema se encuentre en la región óptima caracterizada por nivel 1 en las gráficas. De todas las gráficas analizadas hasta el momento, la que más se amolda al objetivo inicial es la 2.4, donde se definen los niveles a partir de las características de frecuencias naturales y amortiguamientos de los modos presentes, tanto para bajas como altas velocidades, teniendo en cuenta que para estas últimas debe cumplirse la condición de  $\xi = 0,35$ .

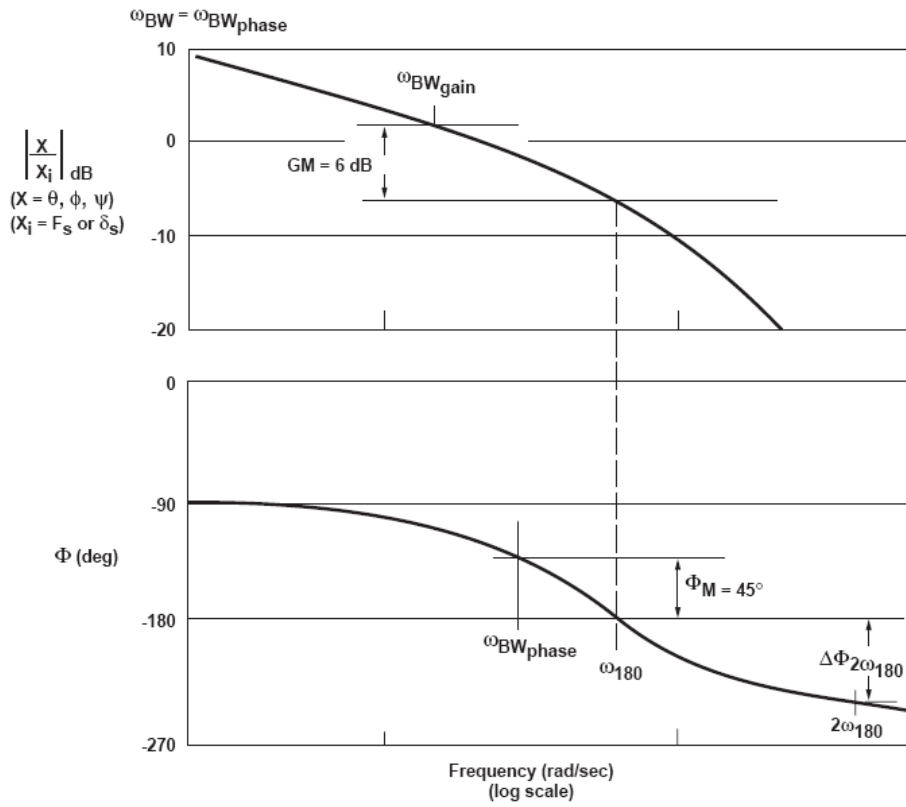


Figura 2.3: Definición del ancho de banda y retraso de fase para el cálculo de las características a corto plazo de la respuesta, según ADS-33.

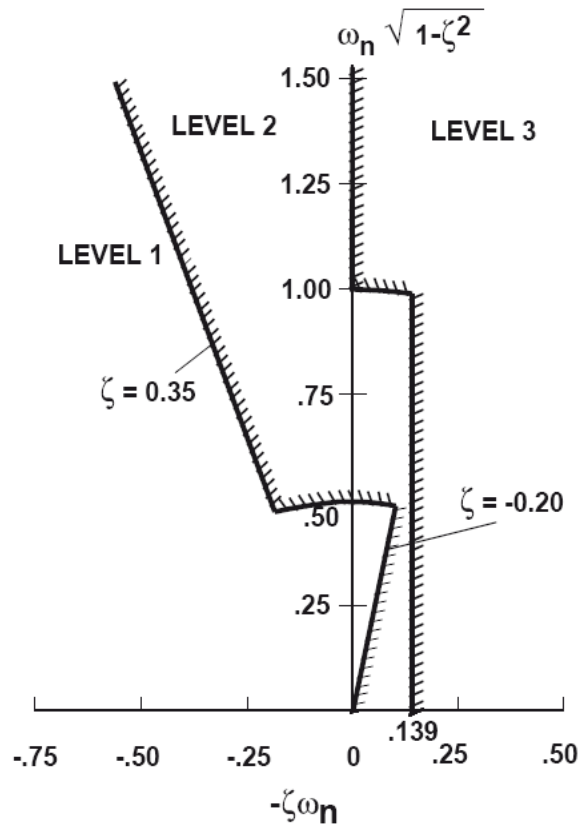


Figura 2.4: Requerimientos para cabeceo en hover y baja velocidad, en función de frecuencias naturales y amortiguamientos

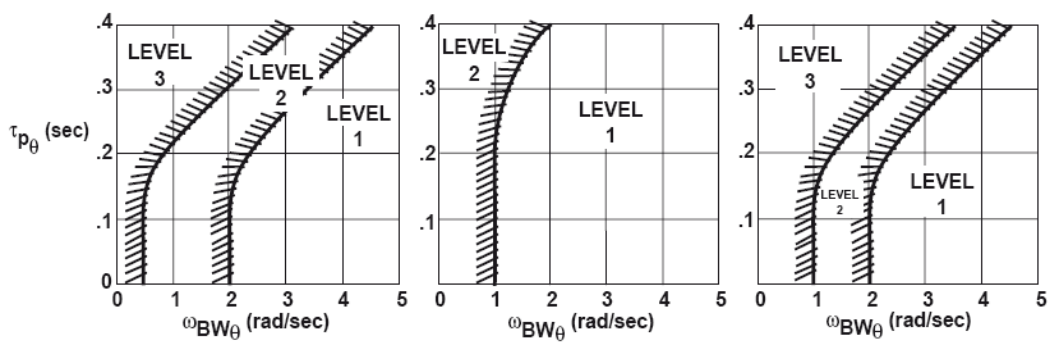


Figura 2.5: Requerimientos para cabeceo ante pequeñas perturbaciones. Respuesta de corto plazo. Rango de validez: Velocidades de vuelo a partir de 45 nudos.

## Capítulo 3

# Fundamentos de control

El siguiente capítulo presenta una descripción de los fundamentos aplicados posteriormente al desarrollo de controladores para helicópteros. Sin ánimo de reproducir al pie de la letra toda la teoría asociada a los conceptos de control empleados, se intentará hacer mayor énfasis en los puntos principales que arrojen resultados aplicables directamente a los problemas planteados.

### 3.1. Asignación de polos (Pole placement)

Partiendo de un sistema en el espacio de estados con realimentación lineal a través de la matriz  $K$ , como se muestra en la figura 3.1, el problema de asignación de polos consiste en encontrar dicha matriz  $K$  para unos valores propios del sistema en bucle cerrado determinado. De forma analítica, puede establecerse lo siguiente:

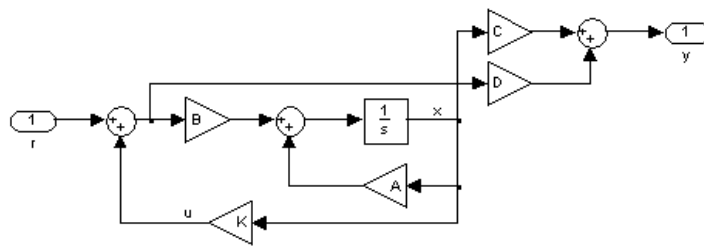


Figura 3.1: Modelo completo de sistema dinámico con realimentación del estado

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1a)$$

$$u = -Kx \quad (3.1b)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (3.1c)$$

De esta forma, el problema se ve reducido a encontrar  $K$ , para que, dados los autovalores de la planta a través de la matriz  $A$ , y los valores objetivo a través de  $(A - BK)$ , el sistema sea controlable.

Esta técnica de asignación de polos está supeditada a la condición (necesaria y suficiente) de que la planta sea de estado totalmente controlable, lo cual puede resumirse en lo siguiente:

$$\text{rango}[ B \quad AB \quad | \quad \dots \quad | \quad A^{n-1}B ] = n \quad (3.2)$$

Con  $n$  la dimensión de la matriz  $A$ .

Por tanto, como se puede ver, la técnica de asignación de polos, para plantas totalmente controlables, es una herramienta de suma utilidad y potencia, al permitir alcanzar comportamientos del sistema en la forma deseada, al poder modelar los polos del mismo en bucle cerrado. Es por ello que será la técnica empleada en capítulos posteriores para el desarrollo de controladores de helicópteros que permitan alcanzar las respuestas dinámicas necesarias en consonancia con la normativa ya vista en el 2.2

Sin embargo, la técnica de asignación de polos no incluye características de optimalidad o robustez en su desarrollo. Este hecho impide asegurar que el método de asignación de polos logre alcanzar controles fiables a la hora de implementar sistemas de control por *gain scheduling* en diversos puntos de operación. Es por ello que, como se verá en siguientes apartados, se buscarán propiedades de los controladores óptimos tipo LQR que puedan aplicarse a la técnica de asignación de polos para garantizar dichas características de robustez y optimalidad en la medida de lo posible, cumpliendo en todo momento con la normativa vigente para helicópteros, ADS-33.

## 3.2. Control óptimo. LQR

El control óptimo, como técnica de realimentación, se basa en la definición de una función de coste con el objetivo de su optimización. En el caso del regulador lineal cuadrático (*Linear Quadratic Regulator, LQR*), esta función de coste está asociada tanto a los estados del sistema como a las señales de control del mismo, a través de matrices de ponderación,  $Q$ ,  $R$  y  $N$ , con una expresión:

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + 2x^T(t)Nu(t)dt \quad (3.3)$$

Donde la elección de las matrices  $Q$ ,  $R$  y  $N$  es, en principio, arbitraria, en función del problema físico de interés. Para simplificar el problema, de aquí en adelante se supondrá que no existe interacción entre los estados y las variables de control desde el punto de vista del coste. Así, la matriz  $N$  será nula.



Para el caso que nos ocupa, en el que realizamos una realimentación del estado en la forma  $u = -Kx$ , el cálculo de dicha matriz de realimentación pasa por la solución de la ecuación de Ricatti. Suponiendo que el sistema sea invariante con el tiempo, la ecuación de Ricatti tiene la expresión siguiente (donde ya se ha considerado la nulidad de la matriz N):

$$A^T S + SA - (SB)R^{-1}(B^T S) + Q = 0 \quad (3.4)$$

La solución de la ecuación (3.4), la matriz S, permite el cálculo directo de la matriz de realimentación K, a partir de la expresión:

$$K = R^{-1}(B^T S) \quad (3.5)$$

De esta manera, con el procedimiento de control óptimo LQR, se obtiene una matriz de realimentación con la interesante propiedad de proporcionar un control del estado de la forma más óptima posible. A continuación se verán algunas propiedades del control óptimo desde el punto de vista de robustez, relacionadas con el margen de fase y de ganancia obtenidos mediante este controlador.

### 3.2.1. Propiedades del regulador óptimo

Las siguientes líneas intentan poner de manifiesto las propiedades del regulador óptimo en términos de robustez (relacionada con el margen de fase y de ganancia), partiendo de la igualdad de retorno de la diferencia, que se muestra a continuación.

Para el problema del regulador óptimo, se cumple la siguiente igualdad, conocida como igualdad de retorno de la diferencia, la cual surge como una consecuencia de la ecuación de Ricatti, (3.4):

$$R + B^T(-i\omega I - A^T)^{-1}Q(i\omega I - A)^{-1}B = [I + B^T(-i\omega I - A^T)^{-1}K^T]R[I + K(i\omega I - A)^{-1}B] \quad (3.6)$$

Ecuación que también puede ser expresada en la forma de inecuación siguiente:

$$[I + B^T(-i\omega I - A^T)^{-1}K^T]R[I + K(i\omega I - A)^{-1}B] \geq R \quad (3.7)$$

Para el caso del sistema con única entrada de control, el problema se ve simplificado sobremanera, al tener la expresión  $-K(i\omega I - A)^{-1}B$  como una función de transferencia escalar. De ahí, la expresión de la igualdad del retorno de la diferencia, (3.6), quedará, expresando en minúsculas valores escalares y vectores, frente a matrices en mayúsculas:

$$r + b^T(-i\omega I - A^T)^{-1}Q(i\omega I - A)^{-1}b = r|1 + k(i\omega I - A)^{-1}b|^2 \quad (3.8)$$

Suponiendo adicionalmente que la matriz  $Q$  se obtiene como producto de un vector  $d$  por su propio traspuesto ( $Q = dd^T$ ), (3.8) puede reducirse a la forma:

$$r + |d^T(i\omega I - A)^{-1}b|^2 = r|1 + k(i\omega I - A)^{-1}b|^2 \quad (3.9)$$

Por su parte, y con un desarrollo análogo, derivado de (3.9), la expresión escalar para (3.7) podrá expresarse en la forma:

$$|1 + k(i\omega I - A)^{-1}b|^2 \geq 1 \quad (3.10)$$

Por otro lado, en el caso general multivariable, la expresión (3.7) puede verse simplificada bajo la hipótesis de que la matriz  $R$  de ponderación de las variables de control en la función de coste del problema del regulador óptimo es diagonal con todos sus elementos iguales, en la forma  $R = \rho I$ . Con ello, y sin entrar en el desarrollo algebraico de la expresión, obtenemos un resultado basado en la citada expresión:

$$\underline{\sigma}[I + K(i\omega I - A)^{-1}B] \geq 1 \quad (3.11)$$

Para cualquier valor de la frecuencia  $\omega$ , y con  $\underline{\sigma}$  representando el menor valor singular de la expresión entre corchetes. El empleo del menor valor singular responde al establecimiento de una analogía entre el caso escalar y el matricial para el cálculo del valor absoluto de una matriz.

Ya por último, el caso general, con la matriz  $R$  elegida sin imponer su carácter diagonal, condiciona una expresión derivada de (3.7) en la forma:

$$\underline{\sigma} \left[ R^{1/2} [I + K(i\omega I - A)^{-1}B] R^{-1/2} \right] \geq 1 \quad (3.12)$$

La interpretación de las propiedades de robustez basadas en el margen de fase y de ganancia se derivan directamente de las expresiones obtenidas en (3.10), (3.11) y (3.12), y se evalúan a continuación.

### Sistemas con entrada simple

Para el caso de sistemas con una única entrada, la expresión (3.10) muestra con claridad las características de robustez del sistema. Se reescribe de nuevo por claridad:

$$|1 + k(i\omega I - A)^{-1}b|^2 \geq 1 \quad (3.13)$$

Esta inecuación es fácilmente interpretable en términos del diagrama de Nyquist de la función de transferencia del sistema en bucle abierto. El significado es claro: La distancia de cualquier punto de la gráfica de Nyquist de la función de transferencia del bucle abierto del sistema al punto  $-1 + 0i$  es mayor o igual a la unidad. De otra manera, el diagrama de Nyquist de la función de transferencia evita el círculo centrado en el punto  $-1 + 0i$  y de radio igual a la unidad. Este resultado en forma gráfica se muestra en la figura 3.2.

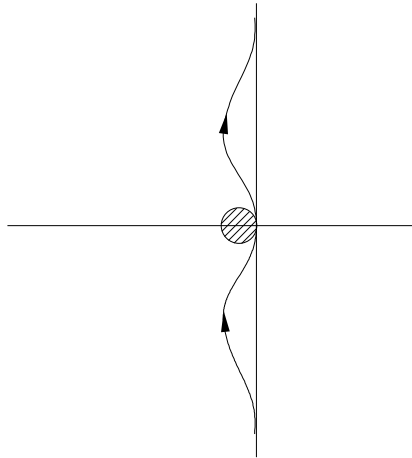


Figura 3.2: Diagrama de Nyquist genérico cumpliendo la condición de optimalidad al no internarse en el círculo unitarios de centro  $(-1 + 0i)$

Este planteamiento se cumple tanto en el caso de que existan polos del sistema en la región  $Re[j\omega] \geq 0$  como si todos se encuentran en la región estable  $Re[j\omega] \leq 0$ . En el primer caso, el número de polos que se encuentren en dicha región deberá ser igual al número de vueltas en sentido contrario a las agujas del reloj sobre el círculo ya mencionado. El segundo caso se reduce a la no existencia de vueltas alrededor del mencionado círculo centrado en  $-1 + 0i$ .

### Margen de fase y ganancia

El margen de fase se define como la cantidad de atraso adicional en la frecuencia de corte requerida para llevar al sistema a la situación de estabilidad límite. En otras palabras, el margen de fase es la cantidad de cambio de fase negativa que debe introducirse al sistema (sin incrementar la ganancia) para hacer que el diagrama de Nyquist con  $\omega \geq 0$  pase a través del punto  $-1 + 0i$ .

El cálculo del margen de fase de un sistema, a partir del diagrama polar, pasa por encontrar el punto de corte del diagrama de Nyquist de la función de transferencia del sistema con el círculo unitario centrado en el origen. Combinando este hecho con la característica antes mencionada sobre la

evasión del diagrama de Nyquist del círculo unitario de centro  $-1 + 0i$ , resulta que el margen de fase mínimo que se obtendría con un controlador óptimo sería siempre de 60 grados. La figura 3.3 pone de manifiesto este hecho de manera gráfica.

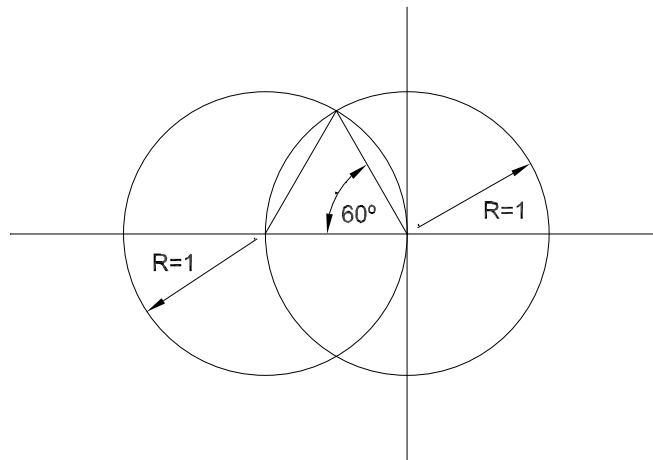


Figura 3.3: Determinación del margen de fase mínimo para controladores óptimos.

### Sistemas multivariable

Para sistemas multivariable, el planteamiento de las propiedades anteriores es más complejo, sin una aplicación directa del diagrama de Nyquist para el estudio de la estabilidad. En este sentido, dicho estudio debe realizarse a partir de la ecuación (3.12), en el caso de matrices de peso  $R$  genéricas, o a partir de (3.11) para matrices  $R$  diagonales.

Para las primeras no puede garantizarse la condición de robustez en términos de margen de fase. En el caso de matrices  $R$  diagonales, donde se cumpla (3.11), el margen de fase se mantendrá por encima de los 60 grados, siempre que los valores diagonales de la matriz  $R$  no tengan valores muy dispares entre sí.

### 3.2.2. Problema inverso de control óptimo

Otra forma de plantear el problema del regulador óptimo es el denominado problema inverso de control óptimo. En este caso, se impone como punto de partida para la búsqueda del regulador la matriz de ganancias de realimentación,  $K$ , intentando posteriormente el cálculo de las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$  que permiten afirmar que la matriz  $K$  corresponde evidentemente a una realimentación de manera óptima.

Para el desarrollo del problema de control óptimo se parte de las siguientes premisas:

- Planta (matrices  $A$  y  $B$ ) conocidas.

- Matriz de ganancias  $K$  conocida.
- Matriz de peso  $R$  conocida.
- El par  $[A,B]$  es estabilizable.
- El sistema  $(A-BK)$  es estable.
- Se cumple la igualdad de retorno de la diferencia.

Es importante señalar que la matriz  $R$  se selecciona desde el planteamiento del problema para que el problema se vea reducido al cálculo de la matriz de pesos  $Q$ . En el caso escalar, esta asunción no tiene coste alguno. Para el caso multivariable, debe determinarse la matriz  $R$  a partir de la igualdad de retorno de la diferencia, (3.6).

Con todo ello, la matriz  $Q$  (modelada como producto de un vector  $d$  por su traspuesto) de peso se calculará de forma que se mantenga la igualdad de retorno de la diferencia, reproducida a continuación por claridad:

$$R + B^T(-i\omega I - A^T)^{-1}Q(i\omega I - A)^{-1}B = [I + B^T(-i\omega I - A^T)^{-1}K^T]R[I + K(i\omega I - A)^{-1}B] \quad (3.14)$$

El desarrollo posterior que conduce al cálculo de esta matriz de pesos es relativamente sencillo en el caso de una única entrada de control, donde la igualdad de retorno de la diferencia se ve bastante reducida en virtud de la aparición de términos escalares y puramente vectoriales. Para el caso multivariable, y suponiendo adicionalmente que el par  $[A,d]$  es detectable, el cálculo de la matriz  $Q$  no involucra dificultad adicional. Sin embargo, no se muestra el desarrollo completo en estas líneas por quedarse fuera de los objetivos marcados para el proyecto.

### 3.2.3. Combinación de metodologías

Una vez vistas las posibilidades de regulación de que se dispone, es momento de seleccionar entre las opciones la más conveniente a la regulación de la dinámica de helicópteros que se desarrollará más adelante.

Para el desarrollo de estos controladores, debe tenerse en cuenta dos aspectos fundamentales en cuanto a la planta existente que se desea regular. Por un lado, se deberá efectuar una batería de controladores para los diferentes puntos de operación dependientes de la velocidad de vuelo, de manera que la transición entre los mismos sea lo más suave posible. Por otro lado, debe cumplirse la normativa ADS-33 sobre comportamiento dinámico, en términos de frecuencias naturales y amortiguamientos, para asegurar que en todo momento el helicóptero se encuentre en el nivel 1 definido por dicha normativa.

A continuación se analizan las diferentes opciones de control disponibles para la dinámica del helicóptero.

**Asignación de polos:** Esta técnica es muy adecuada para la consecución del segundo objetivo planteado: El cumplimiento de las características dinámicas dictadas por la normativa ADS-33. Sin embargo, en ningún momento se asegura que este regulador sea óptimo o robusto, por lo que en principio no sería del todo adecuado para la tarea de obtener una batería de controladores para combinar adecuadamente entre sí.

**Control óptimo LQR:** El controlador LQR permite disponer de propiedades de robustez y optimalidad en el manejo de la planta del sistema, con lo que el desarrollo de la batería de controladores adaptables es factible con resultados satisfactorios. Sin embargo, el cumplimiento de las características dinámicas impuestas por ADS-33 sólo es factible a través de una sintonización de las matrices Q y R de peso de los estados y variables de control del sistema, lo cual requeriría de la búsqueda de relaciones físicas entre dichas matrices y las propiedades dinámicas del sistema.

**Problema inverso de control óptimo:** Esta modalidad de control óptimo parece indicada para la consecución de los dos objetivos planteados. Por un lado, el tener la matriz de ganancias K como dato permite cumplir con los requerimientos de la normativa en cuanto a comportamiento dinámico, ayudado para la determinación de dicha matriz de ganancias de la técnica de asignación de polos. Por otro lado, al tratarse de una técnica de control óptimo, posee las propiedades de éste, con lo que la implementación en una batería de controladores está justificada. Sin embargo, el objetivo final de este problema se halla en el cálculo de las matrices de peso Q y R. Este resultado requeriría de un análisis posterior de estas matrices para comprobar si corresponden a ponderaciones de los estados y variables de control factibles para la dinámica del sistema buscada.

**Asignación de polos óptima:** Esta última técnica surge como combinación de la técnica de asignación de polos y las propiedades del control óptimo. Como se vio en apartados anteriores, las propiedades del control óptimo, suponiendo una matriz de peso R diagonal, dependen únicamente de la planta del sistema y de la matriz de ganancias K. Por tanto, una técnica interesante para el cálculo de los controladores, de forma que cumplan con la normativa ADS-33 y sean lo más robustas posibles para el empleo en baterías de controladores, consiste en combinar la técnica de asignación de polos buscando aquellas matrices de ganancia K que cumplan las propiedades de optimalidad (referidas en el caso multivariable a los valores singulares de la matriz).

A la vista de las técnicas desarrolladas, la técnica de asignación de polos con propiedades de control óptimo parece la más indicada para el desarrollo posterior de los controladores de la dinámica del helicóptero. En capítulos posteriores se implementará esta técnica en el caso del helicóptero BO-105, para obtener una batería de controladores en todo el rango de velocidades de vuelo disponibles para este helicóptero.

## Parte II

# Desarrollo de controladores





## Capítulo 4

# Dinámica del BO-105

Tras capítulos anteriores dedicados a normativas acerca de la dinámica de helicópteros y fundamentos de control, es momento de poner en práctica dichos conocimientos en una planta real, representada en este caso por el helicóptero BO-105. En las siguientes líneas se intentará realizar inicialmente una descripción cualitativa del helicóptero, para seguidamente describir su dinámica longitudinal en función de la velocidad de vuelo, a través de los modos presentes en el mismo. Con ello, se tendrá una visión general de las propiedades dinámicas y las necesidades de control que posteriormente conducirán al desarrollo de controladores para conformar un *gain scheduling* lo más apropiado posible.

### 4.1. Descripción general del helicóptero BO-105

El helicóptero BO-105 pertenece a la empresa *Eurocopter*. Inicialmente desarrollado en la República Federal Alemana tras la Segunda Guerra Mundial por *Messerschmitt-Bölkow-Blohm* (años más tarde, junto a *Aérospatiale*, se creó el consorcio *Eurocopter*) se ha convertido en el helicóptero con mayores unidades fabricadas en dicho país desde 1967, fecha de su primer vuelo, si bien su desarrollo se remonta a 1963 como respuesta al encargo realizado por el gobierno alemán para obtener helicópteros para salvamento y a la vez competitivos en el mercado, tras las restricciones impuestas al país por la comunidad internacional tras el fin de la Segunda Guerra Mundial, que comprendía entre otras la imposibilidad de poseer una industria aeroespacial durante un número de años.

Desde el punto de vista tecnológico, el BO-105 se caracteriza por haber sido el primer helicóptero de clase ligera con doble turbina propulsora en incorporar un rotor rígido y palas de material compuesto, permitiendo así características de maniobrabilidad no vistas con anterioridad. Entre ellas, destaca por ser el primer helicóptero en realizar loopings de 360 grados. Por otro lado, la incorporación de dos turbinas de forma redundante así como sistemas eléctricos, hidráulicos y neumáticos dobles permite al BO-105 alcanzar grados de fiabilidad operacional altos, mejorando en gran medida los helicópteros existentes hasta la fecha en el mercado internacional.



Figura 4.1: Helicóptero MBB BO-105

Por otro lado, el BO-105 (en su versión inicial) posee capacidad para cuatro ocupantes, con gran capacidad de carga, así como facilidad de acceso al habitáculo para realizar todo tipo de misiones. Es por ello que su fabricación (inicialmente por parte de *Messerschmitt-Bölkow-Blohm* y más tarde a través del consorcio *Eurocopter* se alargó hasta el año 1997.

En resumen, el helicóptero BO-105 supuso un hito importante en la industria aeronáutica al incorporar características dinámicas novedosas, sirviendo como base de desarrollo a helicópteros tanto civiles como militares posteriores. Desde su puesta en marcha a finales de los años 60, se han vendido más de 1500 unidades a 36 países distintos en todo el planeta, en alguna de sus multitudes versiones.

La tabla 4.1 muestra algunas de las características más importantes de este helicóptero.

<b>Características generales del BO-105</b>	
Dimensiones (longitud, anchura, altura)	11.9m / 2.5m / 3m
Rotores	Principal (4 palas) y antipar (2 palas)
Peso en vacío	1300 kg
Peso máximo al despegue	2500 kg
Carga de pago	690 kg
Velocidad máxima	67.39 m/s - 131 nudos
Velocidad de crucero	56.85 m/s - 110.7 nudos
Alcance medio	555 km
Techo	3050 m
Techo vuelo a punto fijo (sin efecto suelo)	457 m
Techo vuelo a punto fijo (con efecto suelo)	1525 m
Velocidad ascensional máxima	7.5 m/s

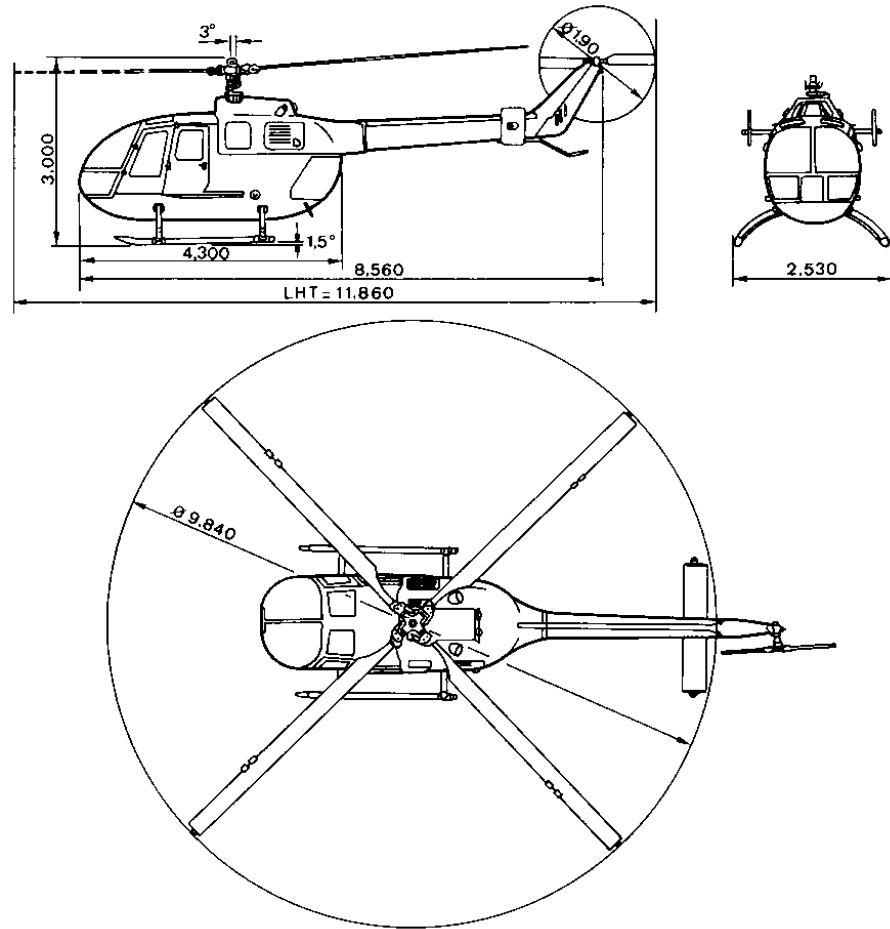


Figura 4.2: BO-105. Dimensiones y vista general

## 4.2. Características dinámicas del BO-105

En el apartado 2.1 se desarrolló por completo, a partir de las ecuaciones no lineales generales para un helicóptero rígido, un modelo de seis grados de libertad linealizado en torno a un punto de equilibrio. Posteriormente, ese modelo se simplificó hasta resultar únicamente un modelo lineal de la dinámica longitudinal del helicóptero rígido genérico, con cuatro grados de libertad: Velocidad de avance ( $u$ ), velocidad ascensional ( $w$ ), velocidad angular de cabeceo ( $q$ ), y el ángulo de cabeceo ( $\theta$ ).

Este modelo genérico longitudinal está representado por la matriz de estados  $A$ , que se reproduce a continuación por claridad en el desarrollo:

$$A = \begin{pmatrix} X_u & X_w - Q_e & X_q - W_e & -g \cos(\theta_e) \\ Z_u + Q_e & Z_w & Z_q + U_e & -g \cos(\phi_e) \sin(\theta_e) \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi_e) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

A partir del modelo genérico, [Pad96] identificó las derivadas de estabilidad de diversos helicópteros (entre ellos el BO-105), consiguiendo estudiar su evolución con la velocidad de avance  $u$ . El resultado de estos estudios puede comprobarse en el apéndice A, donde se encuentra una reproducción de los valores obtenidos para las derivadas de estabilidad y control en el caso longitudinal.

Un detalle importante acerca de las derivadas obtenidas mediante [Pad96] es la inclusión de los términos de equilibrio en las propias derivadas de estabilidad, a la vez que se considera que tanto  $\theta_e$  como  $\phi_e$  son cero en el estado de equilibrio. Así, la matriz (4.2) se simplifica en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} X_u & X_w & X_q & -g \\ Z_u & Z_w & Z_q & 0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

A partir de los datos de derivadas de estabilidad disponibles, es esencial el cálculo de los modos presentes en el helicóptero antes de ejercer ninguna acción de control sobre el mismo. En otras palabras, se procederá a continuación a realizar un análisis de los autovalores de la matriz 4.2 (con los valores numéricos correspondientes al apéndice A) en función de la velocidad de vuelo.

Dichos resultados se muestran a continuación de forma gráfica. La figura 4.3 muestra la evolución del lugar de las raíces del sistema parametrizado con la velocidad de vuelo. Como puede comprobarse, durante cualquier régimen de vuelo aparecen dos modos de primer orden, con polos reales estables gracias al carácter negativo de la raíz, y un par de polos complejos conjugados, que dan origen al modo oscilatorio. Este comportamiento corresponde con lo ya descrito de forma general en 2.1.3, por lo que todo es válido hasta el momento. La figura 4.4 es simplemente aclaratoria de la anterior, al mostrar con mayor nivel de detalle únicamente el par de polos complejos conjugados.

A partir de los valores obtenidos para el par de polos complejos conjugados, pueden obtenerse los valores de frecuencia natural y amortiguamiento correspondientes a dicho modo. Las siguientes fórmulas ponen de manifiesto dicho cálculo, tomando los polos complejos en la forma  $(a \pm bi)$ :

$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.3a)$$

$$\xi = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.3b)$$

El resultado de estos cálculos, en función de la velocidad, es el que aparece en la figura 4.5. Idéntico resultado para los dos polos reales es el que aparece en la figura 4.6.

Ya por último, enlazando con el capítulo dedicado al estudio de la normativa aplicable a helicópteros, es imprescindible combinar los anteriores valores obtenidos tanto para la frecuencia natural  $\omega_n$  como el amortiguamiento  $\xi$  a fin de equipararlos con las gráficas de comportamiento descritas por la normativa. Con ese objetivo, la figura 4.7 muestra en el eje de abscisas la combinación  $-\xi\omega_n$ , y en ordenadas  $\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ . Más aún, la figura 4.8 muestra estos mismos valores combinados con la

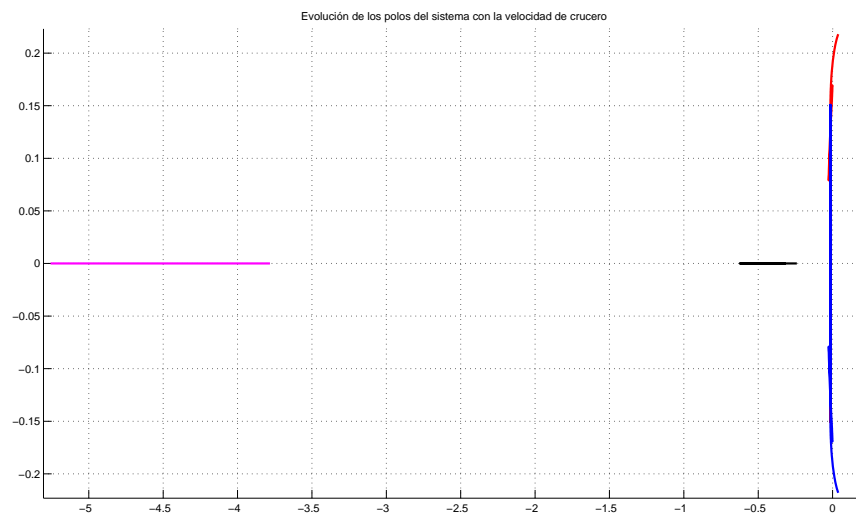


Figura 4.3: Lugar de las raíces del sistema parametrizado con la velocidad de vuelo.

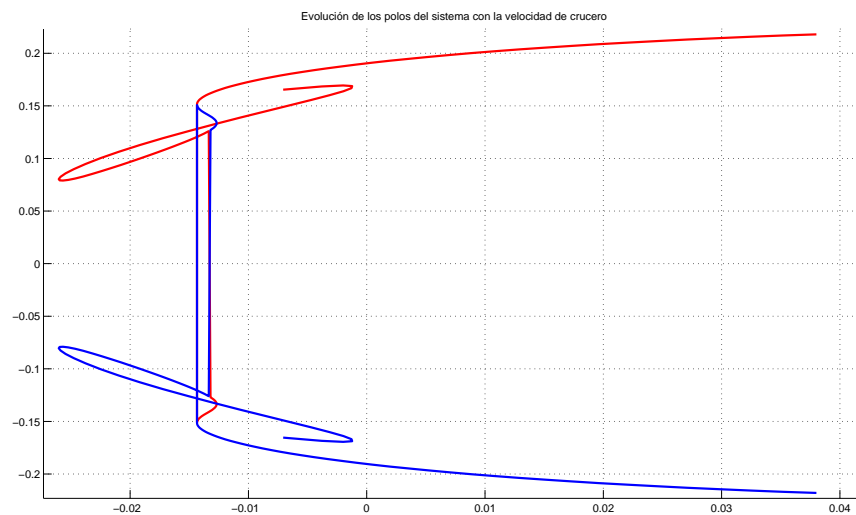


Figura 4.4: Lugar de las raíces del sistema parametrizado con la velocidad de vuelo. Detalle del modo oscilatorio.

definición de niveles de comportamiento dinámico ya mostrada en el capítulo de normativa, figura 2.4.

A la vista de las gráficas mostradas sobre el comportamiento intrínseco del BO-105 (según el modelo linealizado de [Pad96]), se observa que cumple en todo momento las características generales para un helicóptero de rotor rígido, caracterizado por la existencia de dos modos de primer orden acompañados de un modo oscilatorio. En términos de estabilidad, es claro que los modos de primer orden son estables, a tenor de poseer unos valores negativos. Un análisis más exhaustivo arroja que los

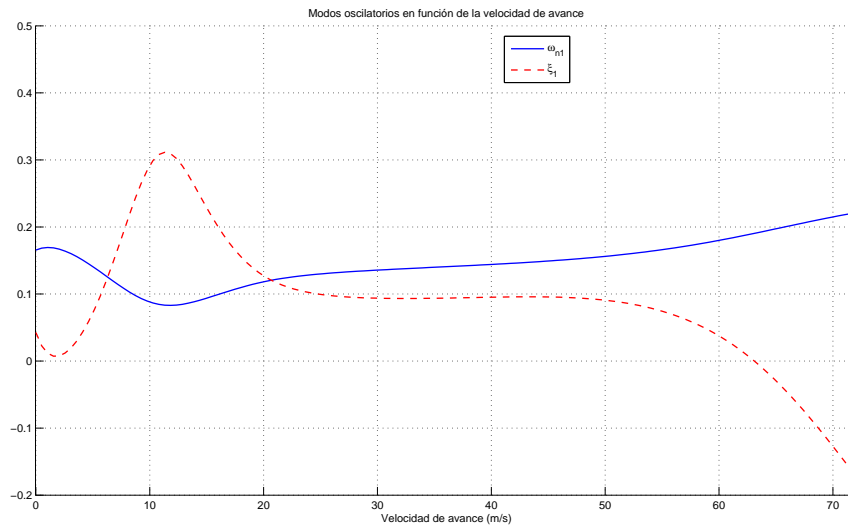


Figura 4.5: Frecuencias naturales y amortiguamiento del polo oscilatorio en función de la velocidad de vuelo.

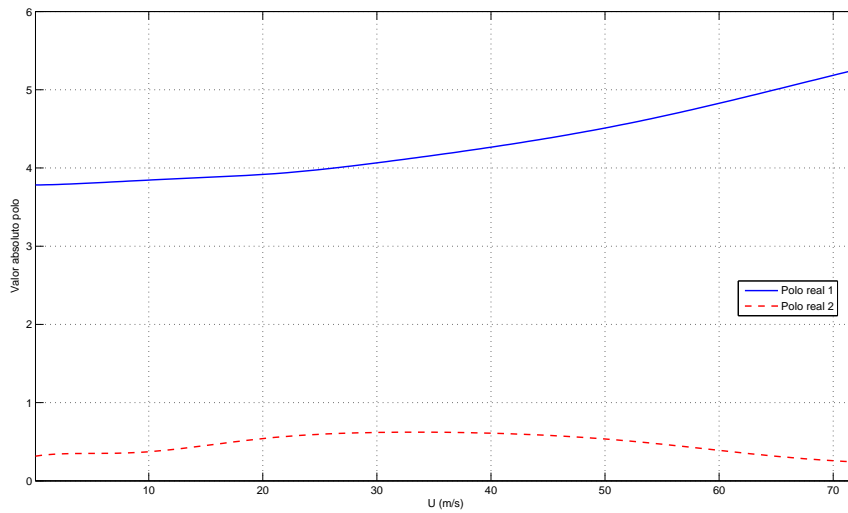


Figura 4.6: Evolución de los valores absolutos de los polos reales en función de la velocidad de vuelo.

niveles entre los que se encuentran dichos polos son:

	Valores extremos para los polos reales			
	Valor	Velocidad (m/s)	Valor	Velocidad (m/s)
Polo 1	-3.7824	0	-5.2568	72
Polo 2	-0.2405	72	-0.6224	33.4

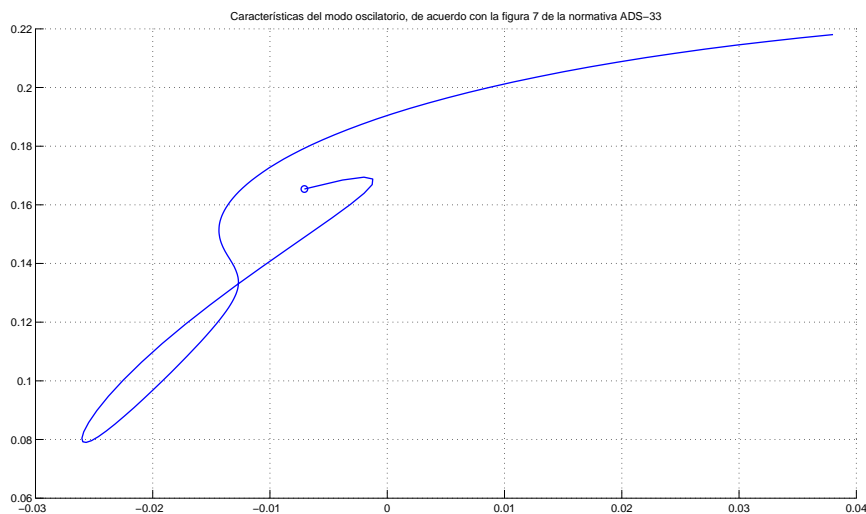


Figura 4.7: Evolución del modo oscilatorio en términos de frecuencia natural y amortiguamiento según la definición de la normativa ADS-33.

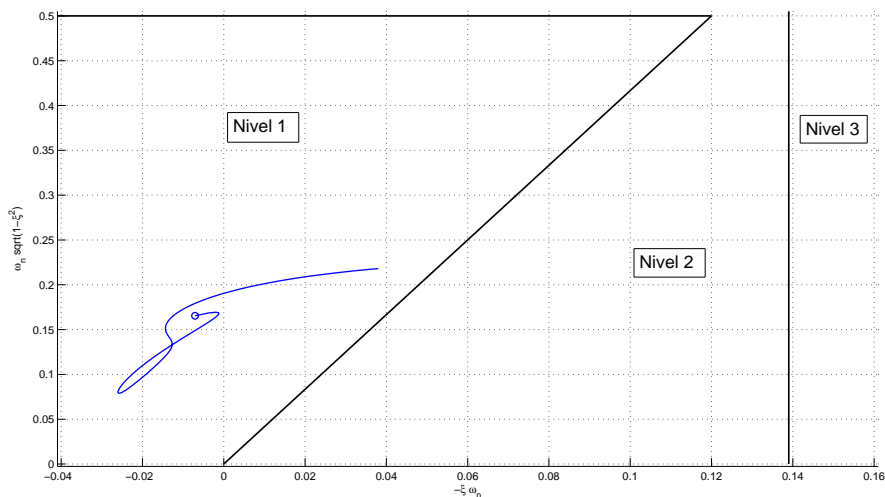


Figura 4.8: Comparación de la evolución del modo oscilatorio en términos de frecuencia natural y amortiguamiento según normativa ADS-33 y los límites impuestos por esta.

El desarrollo de controladores, tratado en capítulos posteriores, podrá de manifiesto la necesidad de modificar estos valores con la velocidad de vuelo, de manera que se obtengan comportamientos dinámicos que, si bien puede que no difieran mucho de los valores intrínsecos del helicóptero BO-105, al ser estables y estar en márgenes razonables de funcionamiento, sí pretenderán alcanzar evoluciones equilibradas con la velocidad de vuelo.

En el caso del modo oscilatorio, pueden determinarse de forma análoga al caso de modos de

primer orden los niveles máximos y mínimos alcanzados por la frecuencia natural y amortiguamiento, a partir por ejemplo de la figura 4.5. La siguiente tabla muestra dicho resultado.

	Valores extremos para el modo oscilatorio			
	$\xi_{min}$	$\xi_{max}$	$\omega_{n_{min}}$	$\omega_{n_{max}}$
Valor	-0.0025	0.3114	0.0831	0.2213
Velocidad (m/s)	63.3	11.3	11.8	72
$\omega_n$ asociada	0.1911	0.0834	-	-
$\xi$ asociada	-	-	0.3092	-0.1718

A la vista de la tabla, se observa la necesidad, al igual que en el caso de los modos de primer orden, de efectuar un equilibrado de los modos con la velocidad de vuelo. En este caso ese equilibrado es aún más necesario, en virtud de la existencia de modos inestables según la velocidad. Puede comprobarse (de forma gráfica a través de la figura 4.5) que la velocidad a la cual se produce la transición entre modo oscilatorio estable e inestable es de 123 nudos ( $63,3m/s$ ). Es por ello preciso incorporar al sistema reguladores que permitan, por un lado, obtener un rango de amortiguamientos y frecuencias naturales más razonable y, por otro, que se mantenga estable para velocidades superiores a los citados 123 nudos.

Resumiendo las características observadas en el comportamiento dinámico del BO-105, se ha observado que los modos del sistema son los correspondientes a un helicóptero de rotor fijo general, con la existencia de dos modos convergentes de primer y un modo oscilatorio. Si bien el helicóptero presenta propiedades tales que permiten asegurar su estabilidad de acuerdo con la normativa ADS-33, sufre grandes variaciones en el comportamiento según varíe la velocidad de vuelo, alcanzándose incluso situaciones de inestabilidad en cabeceo para velocidades superiores a 123 nudos ( $63,3m/s$ ). Por tanto, la implementación al sistema de controladores del tipo SAS (Sistemas de Aumento de la Estabilidad) puede mejorar en cierta forma el comportamiento del helicóptero en cualquier condición de vuelo.



## Capítulo 5

# Diseño de controladores para el BO-105

Una vez que se ha mostrado ya la dinámica del helicóptero y la normativa aplicable, así como las opciones para desarrollar controladores para este sistema, es momento de llevar las ideas teóricas a la práctica, empleando como sistema el modelo longitudinal linealizado para el helicóptero BO-105, del que ya se analizó su comportamiento en el capítulo anterior.

Los pasos a dar para controlar la dinámica del helicóptero son dos: Por un lado, para cada una de las velocidades de vuelo seleccionadas, deberá calcularse la matriz de ganancias que hace óptimas las propiedades del controlador, de acuerdo con lo ya visto en el capítulo 3. El siguiente paso será combinar todos estos controladores para que actúen a modo de *Gain scheduling* para el desempeño de maniobras que impliquen cambios en la velocidad de vuelo.

### 5.1. Optimización de controladores

Para la optimización de los controladores mediante la técnica de la asignación de polos, se toman como premisas los siguientes conceptos, ya desarrollados con anterioridad:

**Normativa:** La normativa ADS-33 marca, tal como se mostró en la figura 2.4, los límites de trabajo de frecuencias naturales y amortiguamientos para modos oscilatorios de cabeceo. Asimismo, también diferencia los comportamientos deseados según el rango de velocidades: Punto fijo y velocidades hasta 45 nudos (23.1 m/s), y velocidades superiores a 45 nudos.

**Control óptimo:** Dentro de las propiedades del control óptimo, la ecuación (3.11) impone una condición clara para el cálculo de las matrices de ganancia que cumplen las propiedades de un controlador óptimo.

**Helicóptero BO-105:** Las características del helicóptero imponen márgenes de velocidad de vuelo donde deben calcularse controladores: Entre vuelo a punto fijo y velocidades de 110 nudos, correspondientes a vuelo de crucero.

**Propiedades de helicópteros similares:** La información bibliográfica acerca de helicópteros similares existentes en el mercado da una primera aproximación acerca de los valores típicos para los modos longitudinales. En el caso de los dos modos reales, los valores típicos a baja velocidad son  $-2$  y  $-0,5$ , como ya se comentó en el capítulo dedicado al estudio de la dinámica longitudinal.

Con estas premisas, la idea fundamental subyacente consistirá en encontrar, para valores seleccionados tanto de los dos polos reales del sistema como para la frecuencia natural y el amortiguamiento del modo oscilatorio, la existencia o no de soluciones que cumplan la propiedad de optimalidad (3.11) (consistente en que el menor valor singular del sistema sea, para toda frecuencia, mayor que la unidad). Este estudio deberá extenderse para valores de la velocidad de vuelo que comprendan desde el vuelo a punto fijo hasta valores correspondientes a la velocidad de crucero del helicóptero BO-105 (56.6 m/s).

Durante todo el proceso se intentará comenzar, en el caso de los dos polos reales, con los valores recomendados para vuelo a baja velocidad:  $-0,5$  y  $-2$ , para los casos de convergencia en velocidad vertical y horizontal de avanza, respectivamente. En caso de no encontrar soluciones óptimas con dichos valores, será necesaria la modificación de estos parámetros a fin de hallar las soluciones que cumplan las propiedades de optimalidad.

### 5.1.1. Proceso de optimización para vuelo a punto fijo

Para el caso del vuelo a punto fijo, la figura 5.1 muestra un mapa del número de soluciones existentes para valores cambiantes tanto del amortiguamiento como del valor absoluto del mayor polo real. A la vista de la gráfica, existen soluciones óptimas para todo el rango estudiado, si bien el número total de soluciones aumenta, en general, para valores crecientes de amortiguamientos y valores del mayor polo real. En otras palabras, la existencia de modos dinámicos más rígidos permite la existencia de soluciones óptimas en un mayor rango de frecuencias naturales.

A pesar del alentador resultado de la figura 5.1, ésta no incluye en ningún momento la situación de las soluciones óptimas en términos de la frecuencia natural. Si bien se encuentra en un rango entre  $0,1$  y  $30\text{rad/s}$ , no se puede conocer a priori el valor exacto de dicha frecuencia. Sin embargo, la utilidad de la gráfica es grande en la medida en que de un vistazo se puede conocer la existencia o no de soluciones óptimas en el rango estudiado.

Con el fin de encontrar la situación exacta de las soluciones se presenta el conjunto de figuras 5.3, donde sí se muestran con claridad dónde se encuentran cada una de las soluciones óptimas en función de los valores de frecuencia natural, amortiguamiento y valor de los polos reales.

El conjunto de figuras 5.3 será una constante en el proceso de obtención de óptimos, por lo que merece una explicación inicial de los valores representados. La figura 5.2 muestra prácticamente todos

Evolución del número de valores óptimos con la magnitud del polo real y el amortiguamiento, con  $\omega_n$  entre 0.1 y 30 rad/s

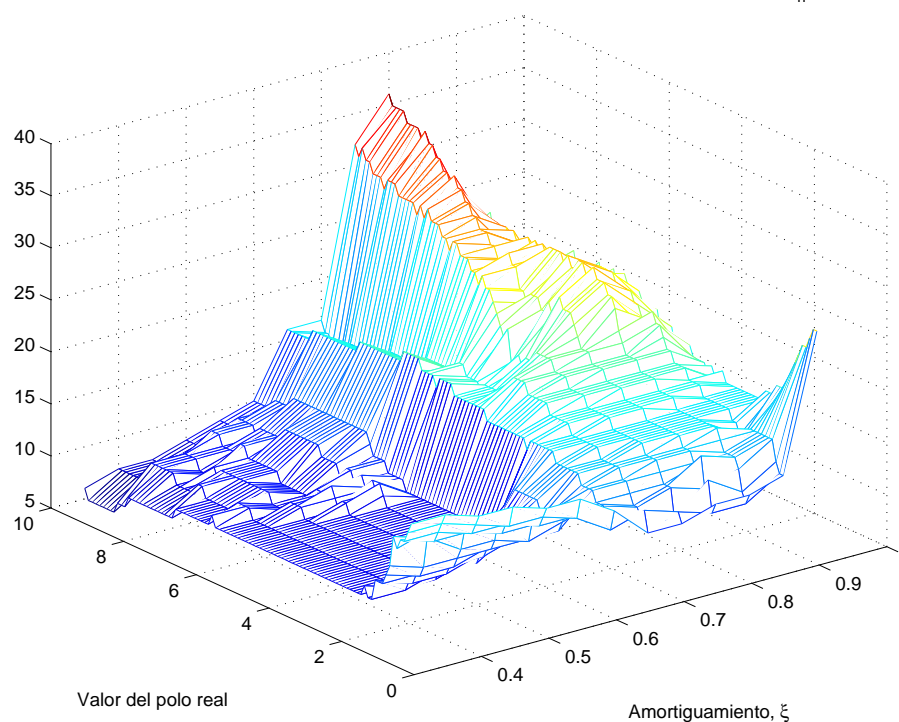


Figura 5.1: Mapa de evolución del número de soluciones en función del amortiguamiento y del valor del mayor polo real. Vuelo a punto fijo.

los parámetros involucrados en cada una de las gráficas de optimización. Los ejes  $x$  e  $y$  corresponden a los valores real e imaginario de las soluciones del modo oscilatorio (la leyenda de cada eje indica la dependencia de estos valores con la frecuencia natural y el amortiguamiento). Se muestran también los límites impuestos por la normativa ADS-33 para cumplir los requisitos de nivel 1. Estos requisitos se basan principalmente en la consideración del amortiguamiento por encima de 0,35. Ya por último, las líneas punteadas representan curvas de nivel tanto de frecuencia natural como de amortiguamiento. El primer caso corresponde a las circunferencias concéntricas, con un espacio entre ellas de 1 rad/s. En el segundo caso se encuentra una malla con espacio entre curvas de  $\xi = 0,1$ , desde 0,4 hasta 1 (este último coincide con el eje de abscisas).

Centrando el análisis en los resultados obtenidos en el conjunto de figuras 5.3, se observa la existencia de multitud de soluciones para diferentes valores del amortiguamiento, si bien la frecuencia natural se encuentra contenida en valores de hasta 5 rad/s. Para el valor de referencia del mayor polo real ( $-2$ ), las soluciones óptimas son tan variadas que permiten confirmar la no necesidad de variación de los polos reales respecto a los valores de referencia para encontrar soluciones óptimas con las características de rigidez modal que se deseen.

El análisis variacional con el valor del mayor polo real permite observar su efecto sobre el número de soluciones y su ubicación en el plano. Como se observa en las restantes figuras de 5.3, el

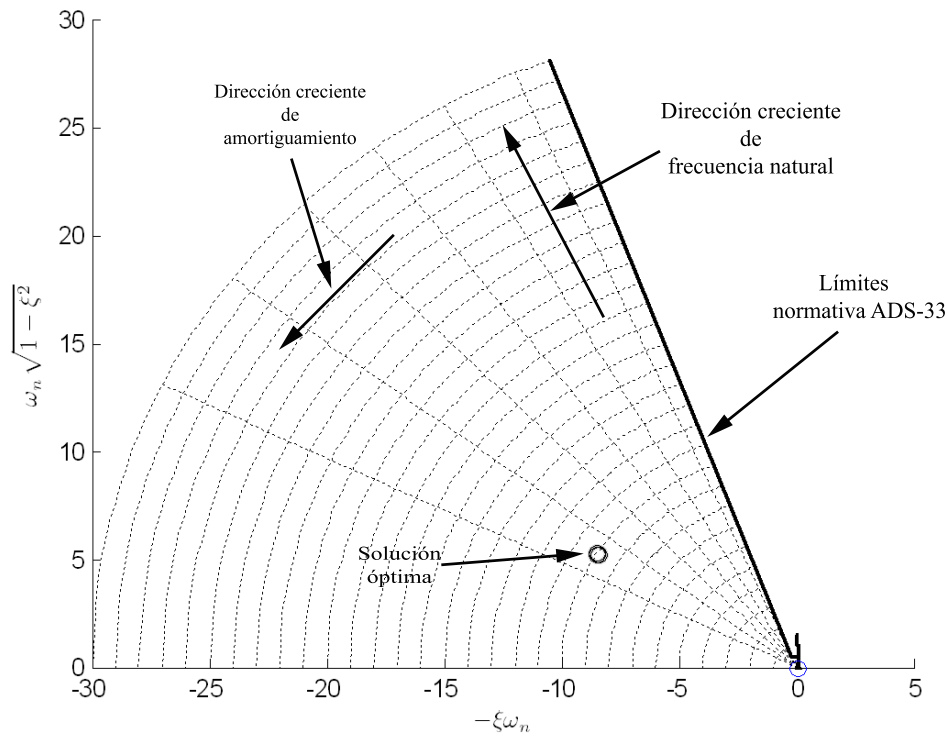


Figura 5.2: Explicación de las gráficas de optimización

número de soluciones óptimas es mayor, así como su rango de frecuencias naturales. A medida que aumenta el valor del mayor polo real, las soluciones óptimas existentes pueden encontrarse a valores de frecuencia natural más altos (en torno a 12 rad/s en el caso del mayor polo real con valor  $-10$ ). Por otro lado, aumentos grandes del valor del polo real producen una polarización de las soluciones, que se encuentran ahora únicamente en el entorno de 10 rad/s y 1 rad/s, con la consiguiente desaparición de valores intermedios en el entorno de 3 rad/s.

Estos resultados pueden interpretarse físicamente de la siguiente manera: A medida que se aumenta el valor del mayor polo real (correspondiente al modo de convergencia en velocidad de avance), las soluciones para el modo oscilatorio requieren de mayores frecuencias naturales y amortiguamientos, dando lugar a un modo de cabeceo más rígido, como consecuencia del acople entre el modo de convergencia en velocidad de avance y cabeceo. Aumentos mayores de la rigidez del modo de convergencia en velocidad de avance implican mayor rigidez del modo de cabeceo, pero generan una nueva serie de soluciones con modos mucho más suaves, fruto nuevamente del acople en frecuencias entre ambos modos.

Este efecto de acople, que en el caso del vuelo a punto fijo se intuye levemente, se mostrará con mucha mayor claridad en el caso de velocidades de vuelo superiores.

### 5.1.2. Proceso de optimización para baja velocidad

Según la normativa ADS-33, el vuelo a baja velocidad se define hasta los 45 nudos (23.1 m/s). Con esa cifra en mente, el proceso de optimización seguido en el caso del vuelo a punto fijo debe extenderse al vuelo a baja velocidad. Las siguientes líneas ponen de manifiesto este proceso para velocidades seleccionadas cada 10 nudos, hasta llegar a 40 nudos (20.6 m/s). Posteriormente también se realiza un análisis del vuelo a 45 nudos, para completar el vuelo a baja velocidad.

Como característica diferencial respecto al proceso seguido en el caso del vuelo a punto fijo, los valores del mayor polo real se extienden ahora hasta  $-30$ , en un intento por abarcar todos los comportamientos dinámicos posibles. El amortiguamiento sigue tomándose en el mismo rango antes empleado, al igual que la frecuencia natural, limitada a 30 rad/s.

#### Vuelo a 10 nudos (5.1 m/s)

Para una velocidad de vuelo de 10 nudos, el proceso de optimización difiere poco del realizado para el vuelo a punto fijo, con resultados muy similares a los encontrados para el primero. Las figuras 5.4, 5.5 y 5.6 muestran el número de soluciones existentes y la evolución de las mismas, respectivamente.

De igual forma al caso del vuelo a punto fijo, con velocidades de avance de 10 nudos encontramos un mapa de soluciones caracterizado por la existencia de múltiples soluciones en prácticamente todo el rango de posibilidades entre el amortiguamiento y el valor del mayor polo real, con una acentuación de este número de soluciones para valores mayores del amortiguamiento.

En cuanto a la evolución de las soluciones, el comportamiento es similar al caso anterior, aunque más acentuado en términos del valor del polo real correspondiente al modo de convergencia en velocidad. Se requiere ahora un mayor valor absoluto de este último para presentar la aparición de modos flexibles (con baja frecuencia) que en el caso del vuelo a punto fijo. Por otro lado, los modos más rígidos que aparecen como alternativa a estos modos flexibles requieren frecuencias más elevadas a medida que se aumenta el valor del dicho polo real. Estos efectos son producto de las características dinámicas intrínsecas del helicóptero, el cual requiere rigidizar más los modos longitudinales para obtener soluciones óptimas.

#### Vuelo a 20 nudos (10.3 m/s)

Para la velocidad de 20 nudos comienzan a observarse comportamientos que difieren ligeramente de las anteriores velocidades de vuelo. De la figura 5.7 se desprende que las soluciones óptimas se encuentran únicamente para valores del amortiguamiento iguales o superiores a 0.6 (salvo algunas excepciones), lo cual tiene concordancia con las necesidades de mayor rigidez a medida que aumenta la velocidad de vuelo. Por otro lado, las soluciones para amortiguamientos elevados son abundantes y crecientes con el valor del mayor polo real, lo cual corrobora lo mencionado acerca de la necesidad de modos rígidos para velocidades más elevadas.

Evaluando la evolución de las soluciones, como se aprecia en las figuras 5.8 y 5.9, para el valor base del polo real ( $-2$ ) se obtienen soluciones con amortiguamientos variables, aunque con frecuencias naturales más elevadas que en casos anteriores, en el entorno de 9 rad/s. A medida que se aumenta el polo real, las soluciones tienen un comportamiento similar al ya observado para la velocidad de 10 nudos: Todas las soluciones óptimas aumentan su frecuencia natural, en este caso hasta el entorno de 11 rad/s, hasta que (para el valor del polo de  $-12$ ) aparecen las soluciones óptimas con modos de cabeceo flexibles. En este momento las soluciones están divididas en función de la frecuencia natural, entre los 7 rad/s de las flexibles y los 18 rad/s de las soluciones más rígidas. El mayor aumento del valor del polo real correspondiente al modo de convergencia en velocidad de avance contribuye de forma global al aumento de la frecuencia natural en las soluciones óptimas encontradas, con amplios márgenes de actuación en el caso de  $-30$  para el polo real. Así, se vuelve a comprobar al igual que en el caso de velocidades inferiores la necesidad de aumentar la rigidez de los modos longitudinales con la velocidad para obtener soluciones óptimas mediante el método de asignación de polos.

Una duda que puede asaltar, vistos los resultados hasta el momento, es acerca de la influencia del polo real correspondiente al modo de velocidad vertical, situado siempre en el valor  $-0,5$ . Como se citó en el apartado dedicado a la dinámica, este modo contaba con muy poco acoplamiento respecto al modo de cabeceo, por lo que su influencia debe ser pequeña. El conjunto de figuras 5.10 muestra la dependencia de las soluciones con dicho polo real. Como se aprecia en todas ellas, la contribución de este modo (que siempre será un modo relativamente lento, con valores absolutos inferiores o cercanos a la unidad) es bastante pequeña. No hay cambios apreciables ni en las frecuencias a las que se producen los óptimos ni en los amortiguamientos necesarios, lo cual permite afirmar que el valor de referencia es adecuado para la obtención de controladores óptimos, sin necesidad de variaciones que, por otra parte, conducirían a tomar una variable más en el proceso de optimización, haciendo éste más complejo que el ya desarrollado. Asimismo, este pequeño inciso sobre el modo de velocidad vertical y su influencia en el modo de cabeceo reafirma aún más el hecho teórico del desacople de este modo con el resto de modos longitudinales.

### **Vuelo a 30 nudos (15.4 m/s)**

Como se aprecia en la figura 5.11, la búsqueda de soluciones óptimas se reduce a medida que aumentamos la velocidad de vuelo. Para el caso del vuelo a 30 nudos (15.4 m/s), existen amplias regiones donde las combinaciones amortiguamiento-polo real no conducen a ninguna solución óptima. Sólo se encuentran este tipo de soluciones bien para amortiguamientos altos (del orden de 0.9), o bien para valores del polo real elevados (en el entorno de  $-20$ ). Dentro de este campo de soluciones, los valores que toman las frecuencias naturales se muestran en las figuras 5.12 y 5.13.

Para valores bajos del mayor polo real, las soluciones siguen la tendencia de velocidades anteriores, con valores elevados del amortiguamiento y de la frecuencia natural, ésta última en el entorno de los 12-15 rad/s. A medida que se aumenta el valor de polo real aumentan las frecuencias naturales de las soluciones óptimas, hasta la llegada de los denominados modos flexibles, (con valores del polo real de  $-12$ ), si bien su efecto no se aprecia claramente hasta elevar el valor hasta  $-20$ . Aumentos superiores

desplazan las soluciones más rígidas a valores de la frecuencia natural aún mayores, hasta alcanzar valores cercanos a los 20 rad/s, mientras que los modos flexibles siguen confinados en el entorno de 3 rad/s.

### **Vuelo a 40 nudos (20.6 m/s)**

Nuevamente se mantiene la pauta seguida por las anteriores velocidades, donde encontrábamos soluciones óptimas por un lado para altos valores de amortiguamiento y el mayor polo real con magnitudes contenidas, y por otro lado para amortiguamientos inferiores acompañados de modos de velocidad de avance muy rígidos. A esta velocidad en concreto llama la atención la cantidad de soluciones encontradas para  $\xi = 0,95$ , que da una idea de las necesidades de rigidez requeridas para mantener un modo de velocidad de avance no muy rígido.

La evolución de las soluciones con el valor del modo de velocidad de avance es parecida al de velocidad de avance de 30 nudos. Sin embargo, a diferencia tanto de ésta como de velocidades inferiores, la aparición de modos flexibles no se produce a frecuencias tan bajas como en casos anteriores. Ahora las soluciones iniciales se encuentran en el entorno de 15 rad/s, y la aparición de modos más flexibles aparece no sólo a valores mayores de la magnitud del mayor polo real, sino también a frecuencias cercanas a los 7 rad/s. Este hecho es significativo en la medida en que el aumento de velocidad está requiriendo paulatinamente modos más rígidos, lo cual repercutirá en el comportamiento del helicóptero a velocidades elevadas.

Otro aspecto reseñable es la desaparición de los modos más rígidos frente a los más flexibles para valores del modo de velocidad de avance mayores. Esto es debido, si observamos la evolución tanto de las soluciones a esta velocidad como a velocidades inferiores, a que a medida que se aumenta la rigidez del modo de velocidad de avance, los modos más rígidos de cabeceo aumentan su frecuencia natural. Al estar representados únicamente los valores hasta frecuencias naturales de 30 rad/s, es de suponer que estos modos se encuentran en regiones superiores, entre 40 y 50 rad/s; estos valores ya superan ampliamente los márgenes de operación tanto de helicópteros similares como los sugeridos por la normativa, por lo que no se considerarán a la hora del cálculo de soluciones óptimas.

### **Vuelo a 45 nudos (23.1 m/s)**

La velocidad de vuelo de 45 nudos presenta muy pocas diferencias respecto a la anterior de 40 nudos (23.1 m/s). Vuelve a observarse que las soluciones óptimas se encuentra casi exclusivamente en la región de  $\xi = 0,95$  y valores pequeños del modo de velocidad de avance, y amortiguamientos en el entorno de  $\xi = 0,7$  para valores más altos de la magnitud del mayor polo real, como puede verse en la figura 5.17. Asimismo, la evolución de las soluciones, mostrada en las figuras 5.18 y 5.19 vuelve a presentar las mismas características que en el caso anterior: Inicio con soluciones en el entorno de  $\omega_n = 15$  rad/s y amortiguamientos altos, que van aumentando su frecuencia natural con el aumento de la rigidez del modo de velocidad de avance, hasta la aparición de modos más flexibles, en este caso

para frecuencias naturales de 7 rad/s y modo de velocidad de avance con de valor  $-13$ .

A diferencia de la velocidad de 40 nudos, ahora se observa que las soluciones encontradas para un modo de velocidad de avance de  $-13$  desaparecen durante los siguientes modos, para volver a aparecer en  $-18$ . Esta particularidad de la solución en esta velocidad no supone más que un pequeño detalle de un comportamiento circunstancial, el cual puede ser debido a múltiples factores. Como se comprobará en velocidades superiores, el caso de esta velocidad y las soluciones óptimas más flexibles que desaparecen queda en mera anécdota.

Aumentos mayores de la rigidez del modo de velocidad de avance rigidizan aún más las soluciones óptimas para el modo de cabeceo, poniendo de manifiesto nuevamente el acople existente entre los modos del sistema longitudinal.

### 5.1.3. Proceso de optimización para velocidades superiores

Para velocidades superiores a las estudiadas hasta el momento, la tendencia de las soluciones continúa indiferente. A medida que la velocidad aumenta, las soluciones óptimas sólo pueden encontrarse para valores más rígidos del modo de velocidad de avance, y a frecuencias naturales que, en el caso menor, se encuentran entre 15 y 20 rad/s. Al igual que en velocidades bajas, una vez encontradas soluciones óptimas, éstas evolucionan hacia valores crecientes de la frecuencia natural con el aumento de rigidez del modo de velocidad de avance.

El cambio de comportamiento observado a velocidades inferiores a 45 nudos, donde aparecían, además de los modos rígidos iniciales evolucionados, modos más flexibles con menores valores de frecuencia natural asociados, se produce para valores nuevamente más rígidos del modo de velocidad de avance. A su vez, los modos que aparecen no son tan flexibles como en el caso de velocidades bajas, sino que se encuentran en el mejor de los casos entre 5 y 10 rad/s. La evolución de estos modos con la rigidez del modo de velocidad de avance es idéntica a la de velocidades menores: Aumento del valor requerido en frecuencia natural con el aumento del valor del mayor polo real.

Ya por último, cabe destacar que para velocidades elevadas se aprecia con mucha más claridad que la aparición de los modos flexibles analizada hasta ahora no es única, sino que forma parte de un proceso cíclico de comportamiento de la dinámica acoplada entre los modos longitudinales. Dichos modos aparecen de forma continuada con el aumento del valor de la rigidez del modo de velocidad de avance, si bien estos aumentos son excesivamente elevados, de forma que carecen de un sentido físico claro que consiga poder identificarse con modos reales de un helicóptero. Por ese motivo, a la hora de la elección de los modos para las diferentes velocidades de vuelo, sólo se tendrán en cuenta las combinaciones de valores de los modos que aparezcan para valores pequeños de modo de velocidad de avance, o los denominados modos flexibles que aparecen por primera vez al aumentar el valor del mayor polo real.

La siguiente tabla muestra a modo de resumen, para velocidades elevadas entre 50 y 110 nudos (25.7 y 56.6 m/s), las primeras soluciones óptimas encontradas dentro de los denominados modos



flexibles, que poseen frecuencias naturales moderadas y, por tanto, constituyen la elección más lógica dentro de las posibilidades de optimización en velocidades elevadas.

V (nudos)	V(m/s)	Valor polo real mínimo	$\omega_n$	$\xi$
50	25.7	-22	8.5	0.75
60	30.9	-25	10	0.85
70	36.0	-34	13.5	0.85
80	41.2	-41	15.5	0.85
90	46.3	-51	19.5	0.85
100	51.4	-65	24.5	0.85
110	56.6	-83	31	0.85

A la vista de la tabla, se comprueba la necesidad de disponer de modos muy rígidos para encontrar controladores óptimos. Esto conduciría a dos enfoques distintos de actuación: Por un lado, puede optarse por usar controladores óptimos aunque con modos excesivamente rígidos, que reproduzcan comportamientos del helicóptero rígidos, repercutiendo en la dificultad del mismo para abandonar posiciones de equilibrio a alta velocidad, o realizar transiciones entre los mismos. Por otro lado, podrían emplearse controladores óptimos obtenidos con esta técnica hasta cierta velocidad (por ejemplo 46.3 m/s), siendo los modos en esta última velocidad los que se mantendrían constantes para velocidades más elevadas. Este procedimiento estaría justificado en la medida en que las velocidades superiores involucran maniobras principalmente de vuelo de crucero, las cuales se desvían poco frente a las posiciones de equilibrio, con lo que menores grados de optimalidad y robustez en los controladores estarían tolerados.

De las dos opciones contempladas, la primera opción es la más adecuada al planteamiento seguido durante todo el documento, acorde con la consecución de los controladores óptimos por métodos de asignación de polos. La evaluación de si efectivamente este método es válido para altas velocidades se mostrará en el capítulo siguiente, dedicado a la realización de diferentes simulaciones en diversas situaciones de vuelo.

## 5.2. Combinación de controladores. Gain-scheduling

Una vez desarrollados los controladores para las diferentes velocidades de vuelo, el proceso natural siguiente se basa en la combinación de los mismos para disponer de una batería que abarque todo el rango de velocidades.

En este sentido, se desarrollaron controladores en intervalos de 1 nudo (0.51 m/s), desde el vuelo a punto fijo hasta la velocidad de crucero de 110 nudos (56.6 m/s). Con la intención de no reproducir la totalidad de las matrices de ganancia, se muestran en la figura 5.20 la evolución de los cuatro parámetros que controlan los tres modos presentes en la dinámica longitudinal: Valor de los dos polos reales, frecuencia natural y amortiguamiento del modo oscilatorio de cabeceo.

La selección de los modos se realizó de manera que los valores del modo de velocidad de avance y la frecuencia natural tengan una evolución suave. De esta manera, para velocidades bajas se emplearon

soluciones con valores pequeños del modo de velocidad de avance, que conducen a valores contenidos en frecuencia natural. El aumento de velocidad de vuelo repercute en aumentos de los dos valores mencionados. De esta manera, cuando los valores del modo de velocidad de avance se elevan de forma considerable, la aparición de soluciones más flexibles permite disponer de continuidad tanto en el modo de velocidad de avance como en la frecuencia natural.

Varias conclusiones pueden extraerse de la figura 5.20. En primer lugar, el modo de velocidad vertical se comporta, tal como se vio a la hora del desarrollo de controladores, de forma desacoplada del resto, por lo que mantiene su constante de tiempo durante toda la evolución con la velocidad. Por su parte, el otro modo real sí se comporta de forma acoplada en la forma ya vista con anterioridad. Su evolución podría representarse por un polinomio cuadrático, evitando las pequeñas desviaciones producidas por el proceso de optimización de forma aislada a ciertas velocidades.

En cuanto al modo de cabeceo, la frecuencia natural tiene un comportamiento análogo al del modo de velocidad de avance, con incrementos que podrían modelarse de forma cuadrática (evitando nuevamente los casos asilados que se salen de la tendencia general). Por su parte el amortiguamiento, si bien presenta dos saltos importantes a velocidades de 17 y 29.3 m/s, los saltos no son excesivamente elevados (un 7% en el primer salto, y un 13% en el segundo, con un incremento total del 21%), manteniéndose en todo momento comportamientos de alta amortiguación del modo de cabeceo.

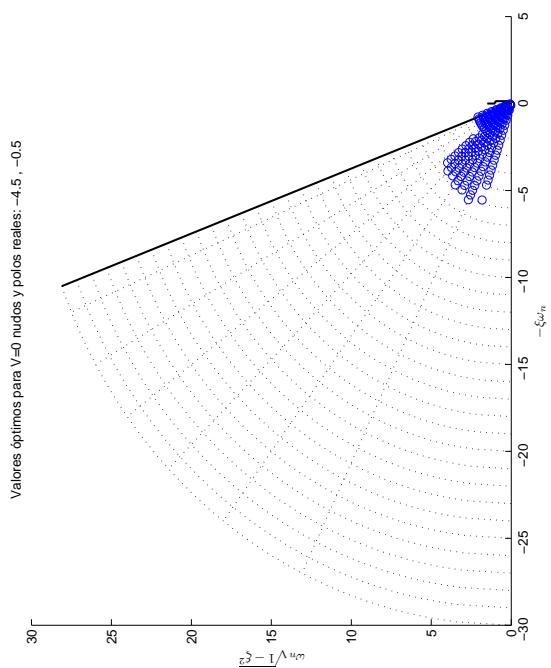
La metodología de funcionamiento de *gain scheduling*, que se empleará en la demostración de la bondad de los controladores desarrollados a lo largo del proyecto, consiste en la selección de la ganancia adecuada para cada velocidad de vuelo. Dependiendo del modelo empleado, las ganancias calculadas deberán ser interpoladas para velocidades intermedias o no. En el caso de un modelo adaptativo únicamente con velocidades discretizadas cada unidad de velocidad (nudos), tanto el modelo (del que se dispone de forma continua de sus derivadas de estabilidad y control) como los controladores no deberán ser interpolados en velocidades intermedias. Si, por el contrario, se opta por un modelo continuo para cualquier fracción de velocidad de vuelo, la batería de controladores calculada hasta ahora deberá interpolarse para dichas velocidades intermedias.

En este último caso, la interpolación más sencilla y directa que asegura la continuidad de las matrices de ganancias es la interpolación lineal, expresada en la forma:

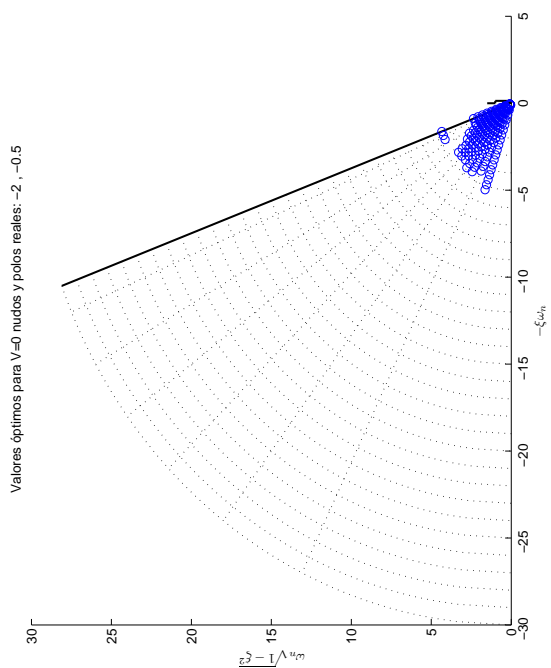
$$K(V) = \frac{V - v_1}{v_2 - v_1}k(v_2) + \frac{v_2 - V}{v_2 - v_1}k(v_1) \quad (5.1)$$

Donde  $v_1$  y  $v_2$  representan las velocidades enteras más cercanas a la velocidad de cálculo de la ganancia, y  $k_1$  y  $k_2$  las matrices correspondientes a dichas velocidades de vuelo.

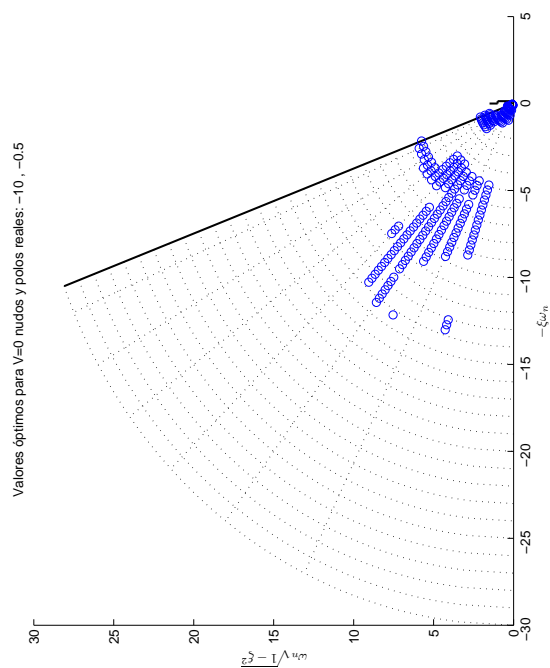
Con todo este proceso, la batería de controladores adaptados a todo el régimen de velocidades de vuelo estaría desarrollado, a expensas de su comprobación mediante simulaciones, aspecto que se tratará en el siguiente capítulo.



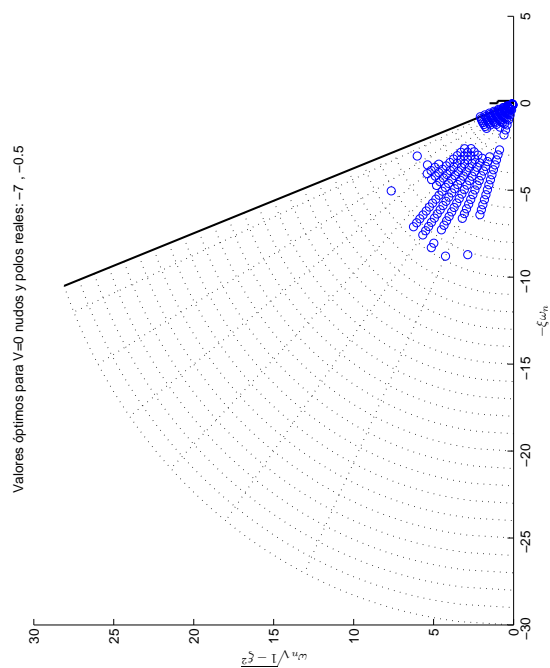
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0,5, -2$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0,5, -4,5$



(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0,5, -7$



(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0,5, -10$

Figura 5.3: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo a punto fijo.

Evolución del número de valores óptimos con la magnitud del polo real y el amortiguamiento, con  $\omega_n$  entre 0.1 y 30 rad/s

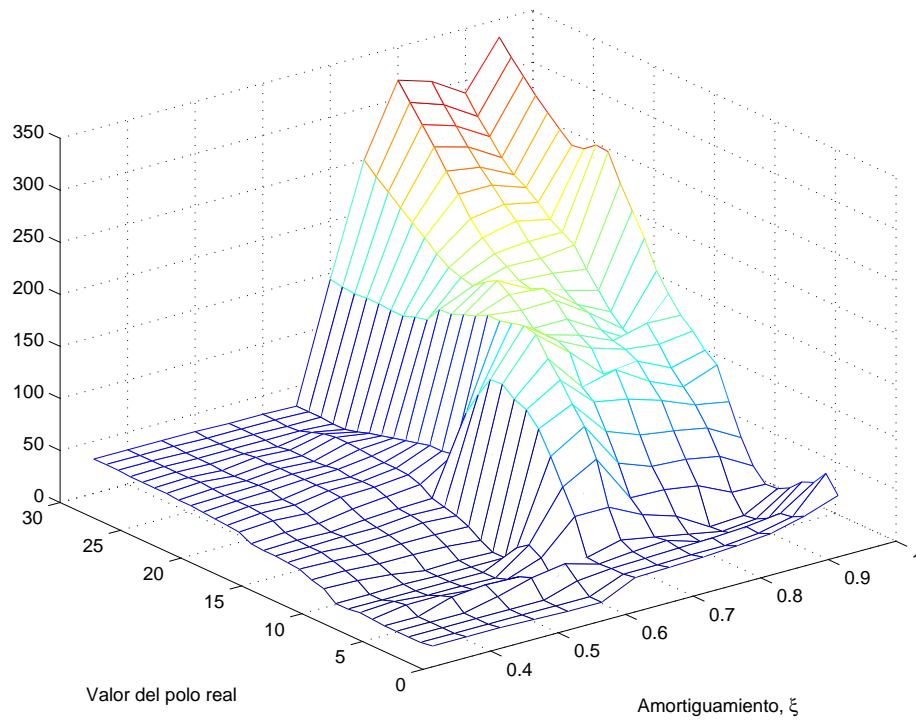


Figura 5.4: Mapa de evolución del número de soluciones para velocidad de vuelo de 10 nudos (5.1 m/s).

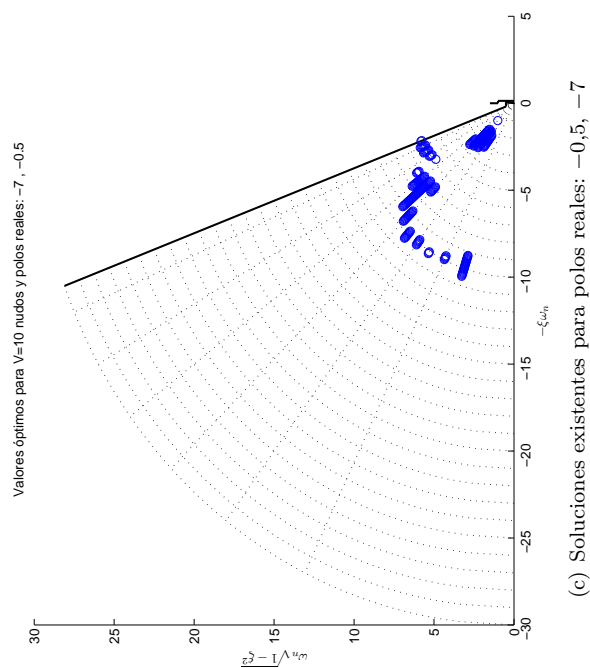
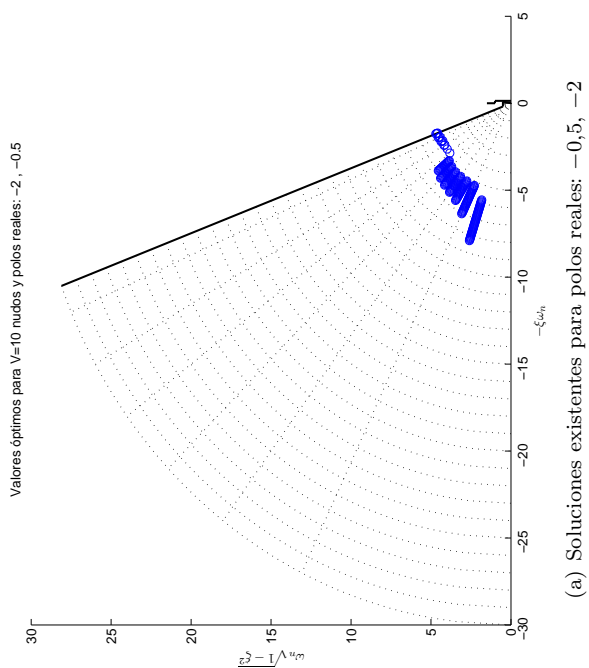
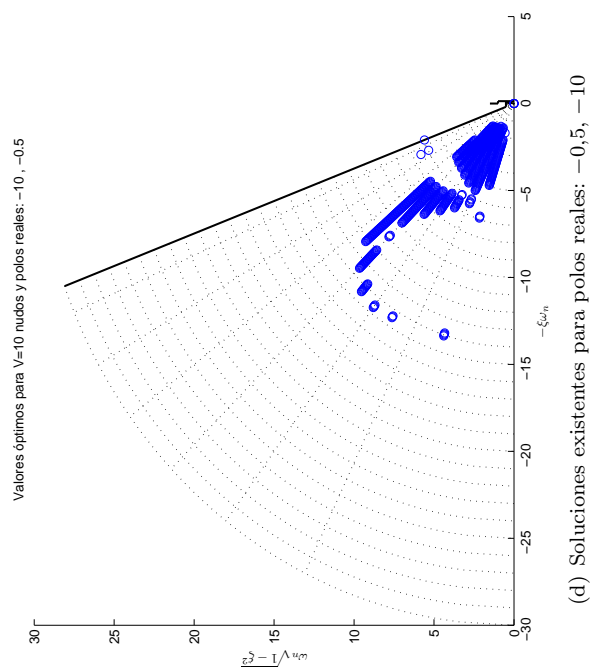
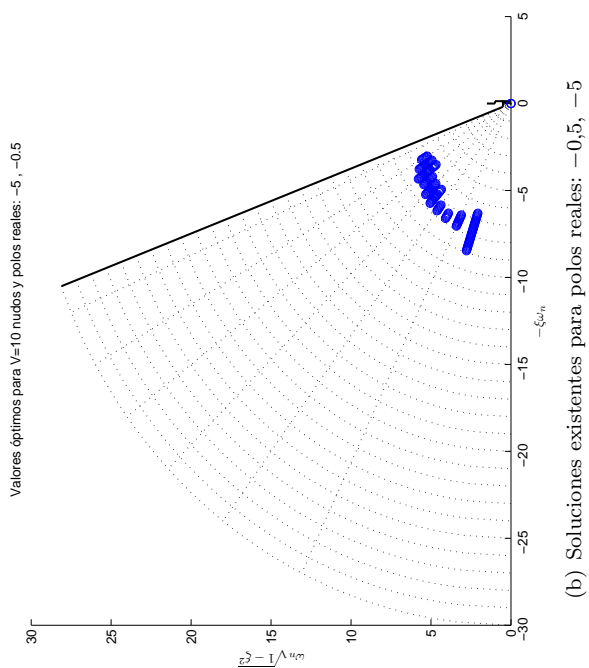


Figura 5.5: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 10 nudos (5.1 m/s)

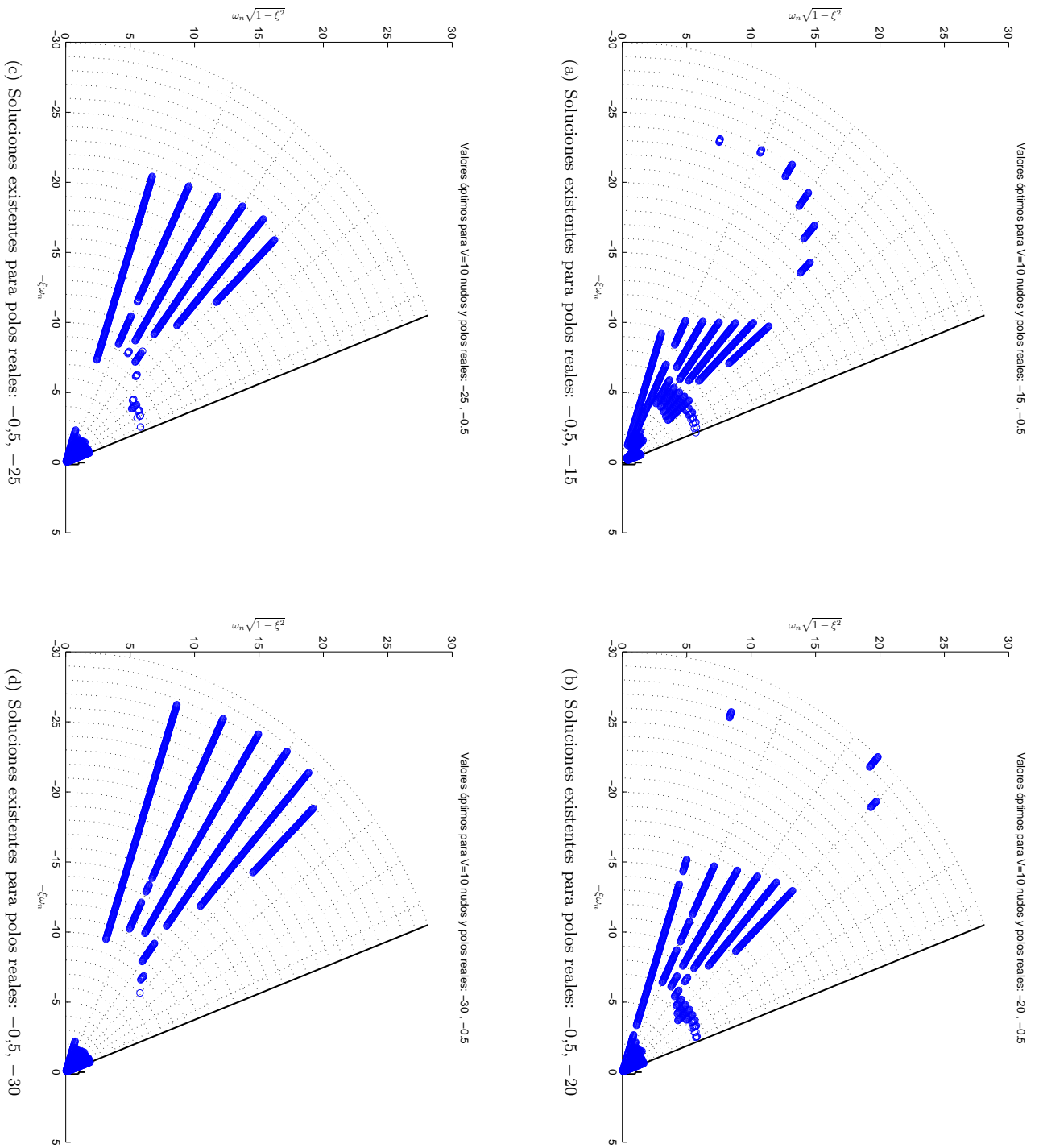


Figura 5.6: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 10 nudos (5,1 m/s)

Evolución del número de valores óptimos con la magnitud del polo real y el amortiguamiento, con  $\omega_n$  entre 0.1 y 30 rad/s

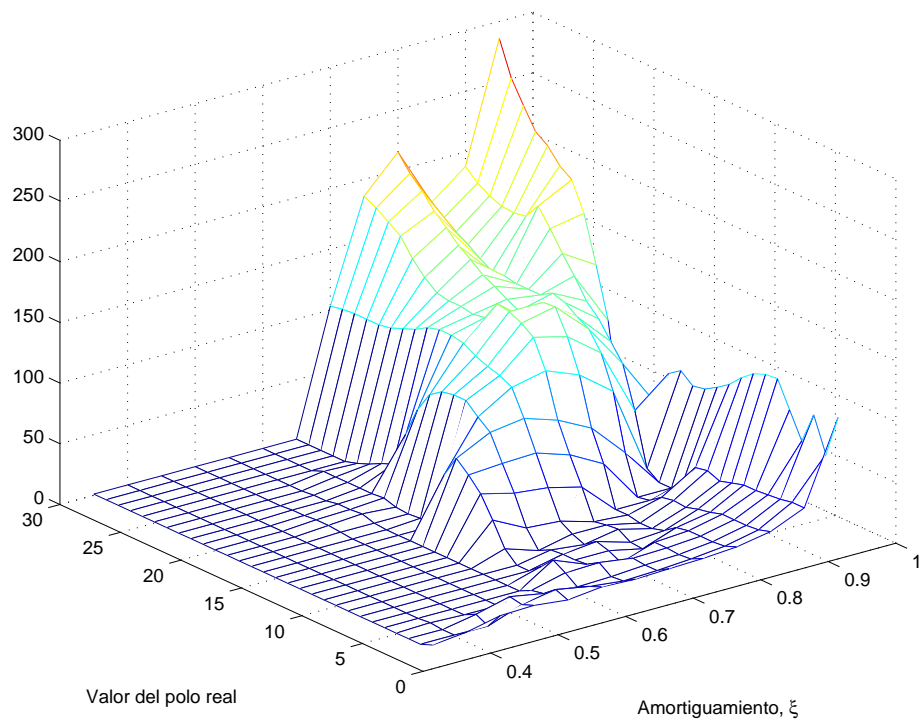
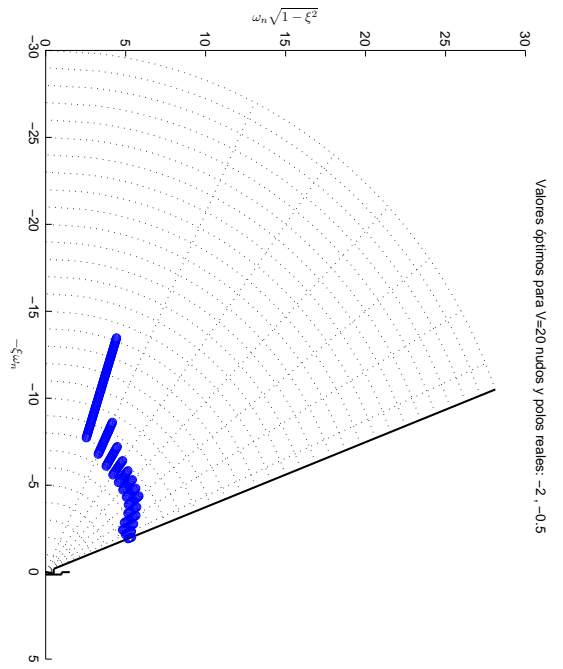
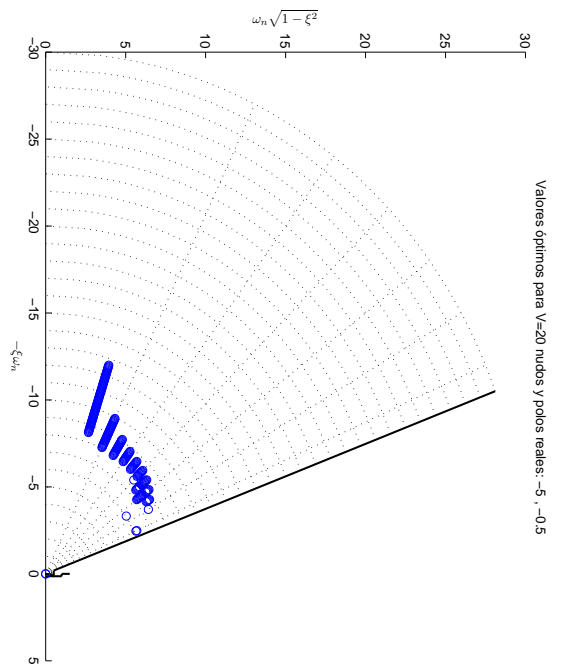


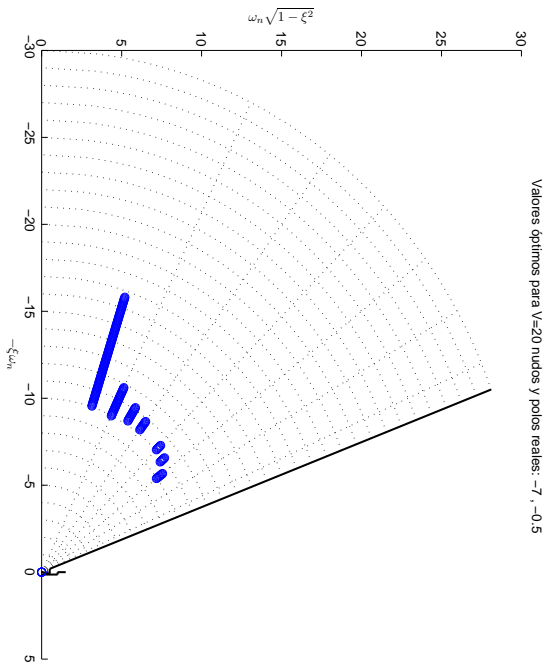
Figura 5.7: Mapa de evolución del número de soluciones para velocidad de vuelo de 20 nudos (10.3 m/s).



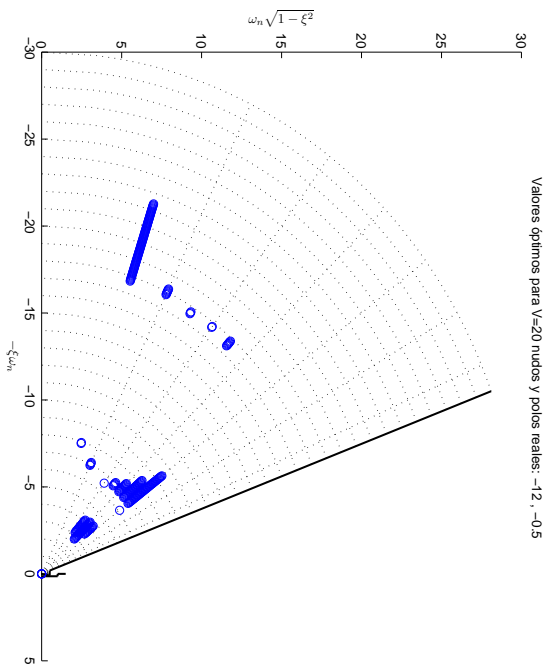
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -2$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -5$



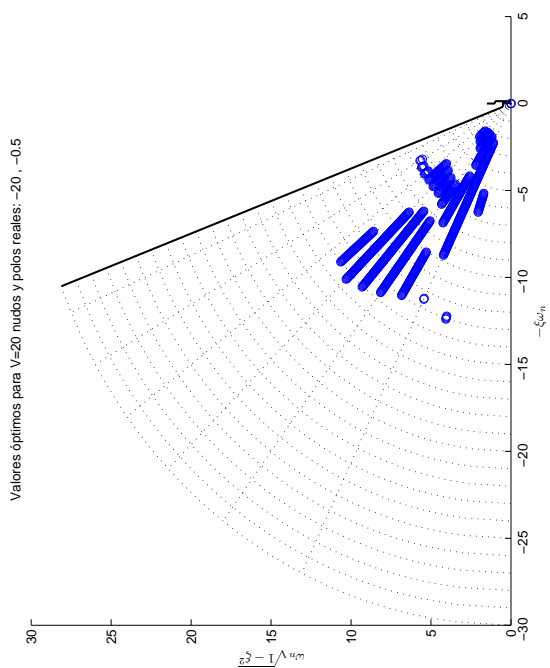
(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -7$



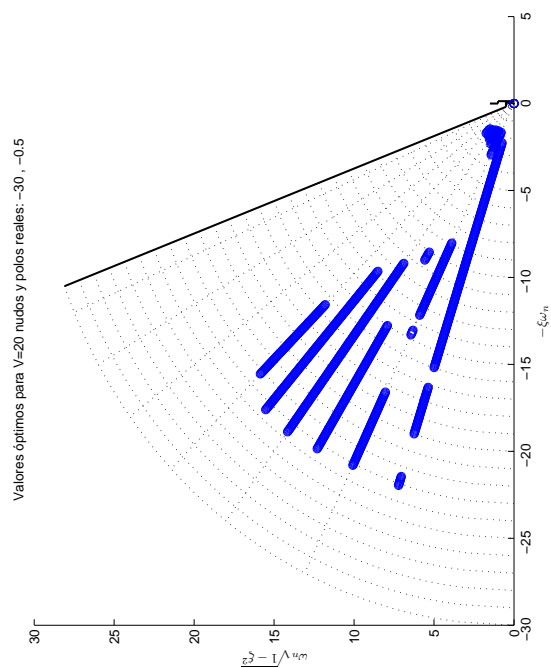
(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -12$

Figura 5.8: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 20 nudos (10.3 m/s)

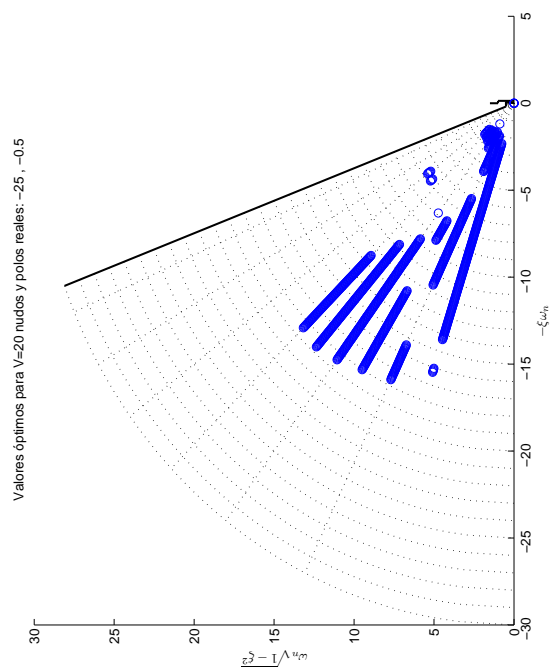




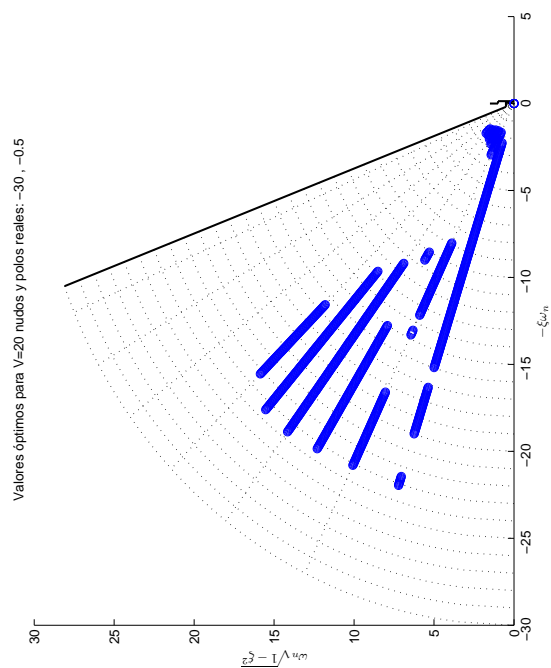
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -15$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -20$



(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -25$



(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -30$

Figura 5.9: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 20 nudos (10.3 m/s)

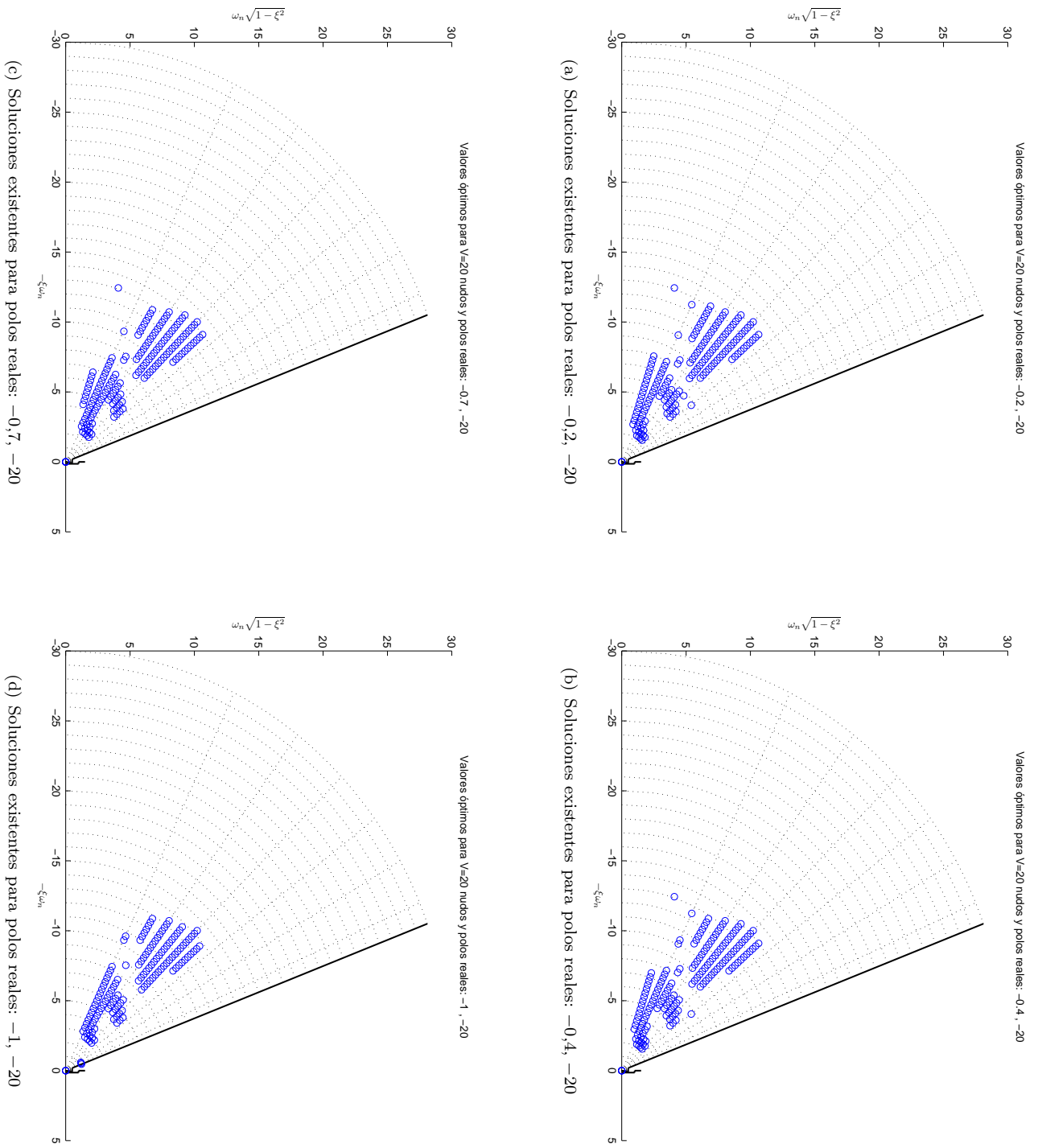


Figura 5.10: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del menor polo real. Vuelo en avance a 20 nudos (10.3 m/s)

Evolución del número de valores óptimos con la magnitud del polo real y el amortiguamiento, con  $\omega_n$  entre 0.1 y 30 rad/s

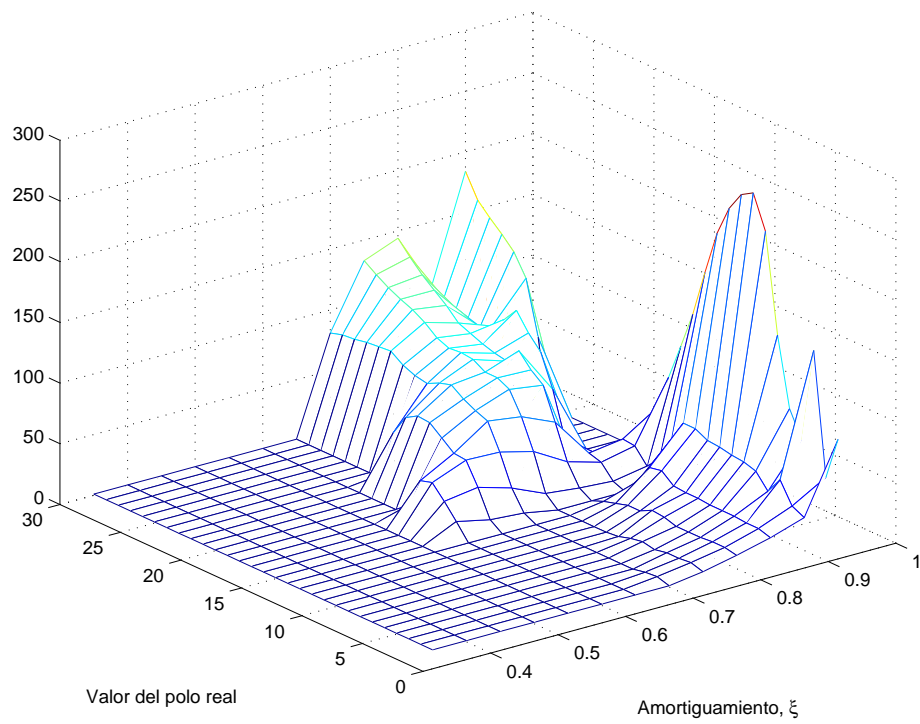
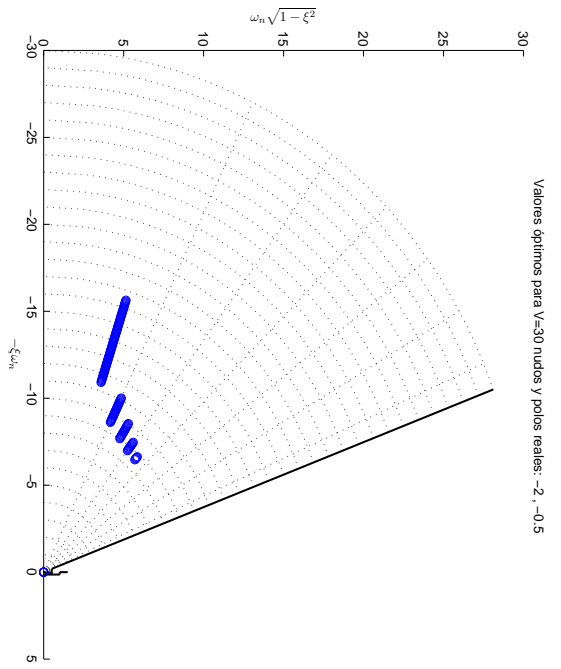
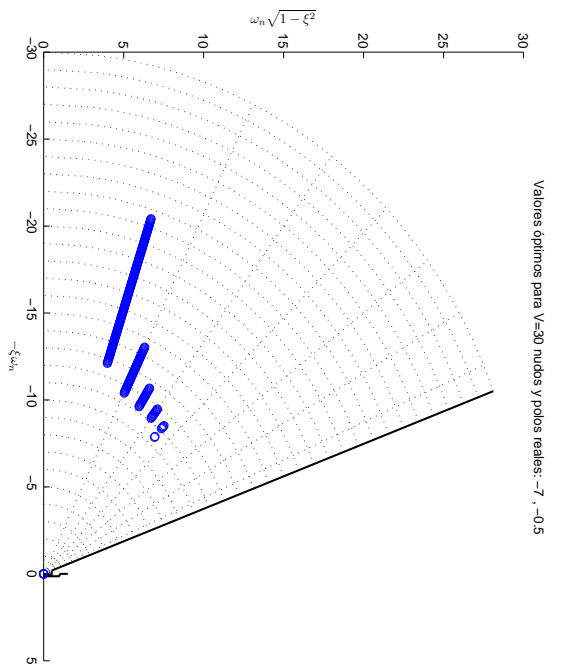


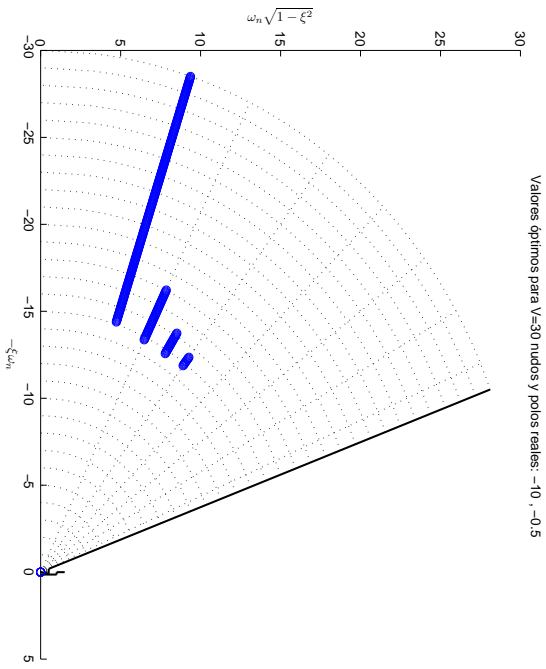
Figura 5.11: Mapa de evolución del número de soluciones para velocidad de vuelo de 30 nudos (15.4 m/s).



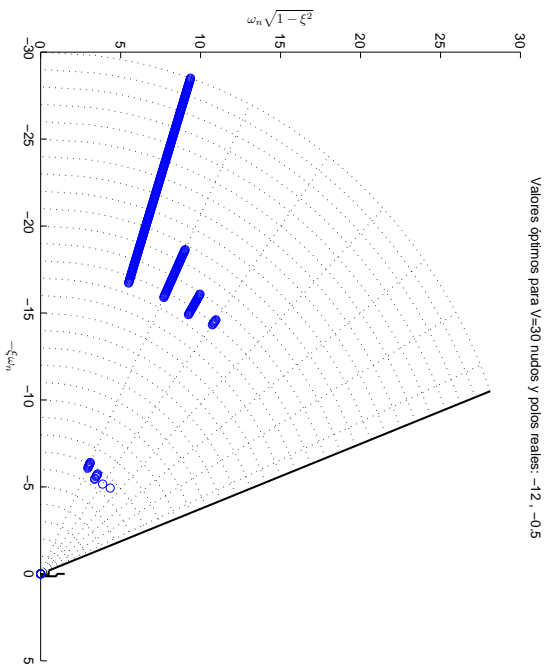
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -2$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -7$

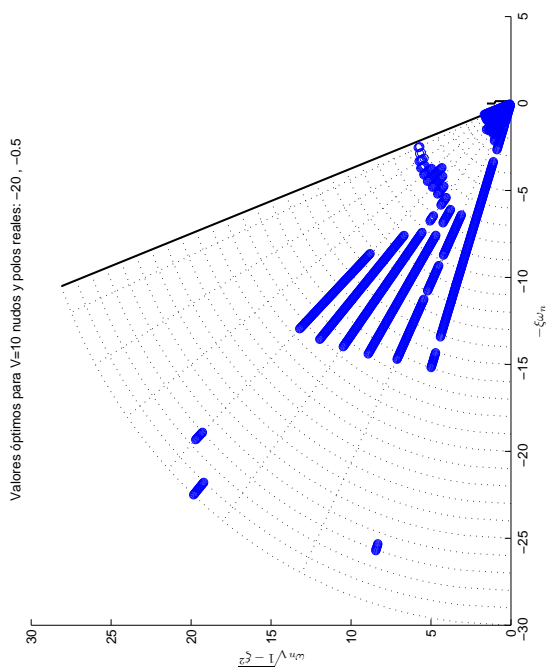


(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -10$

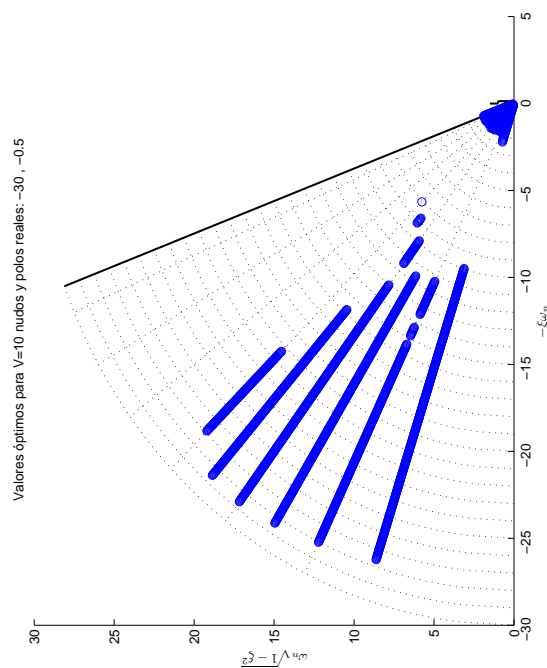


(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -12$

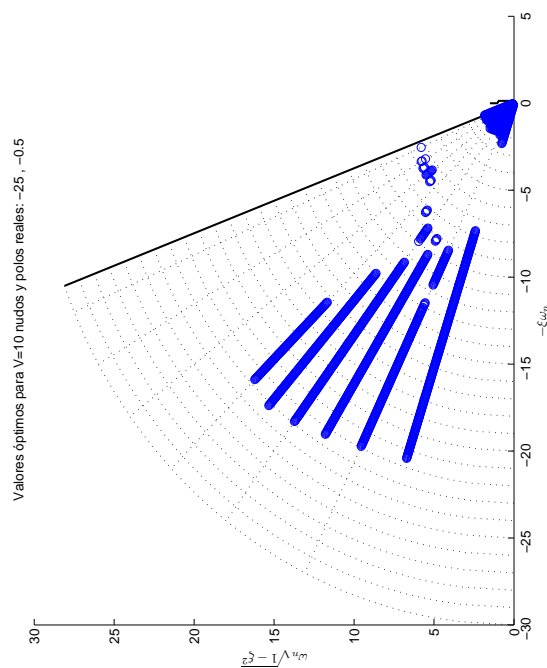
Figura 5.12: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 30 nudos (15.4 m/s)



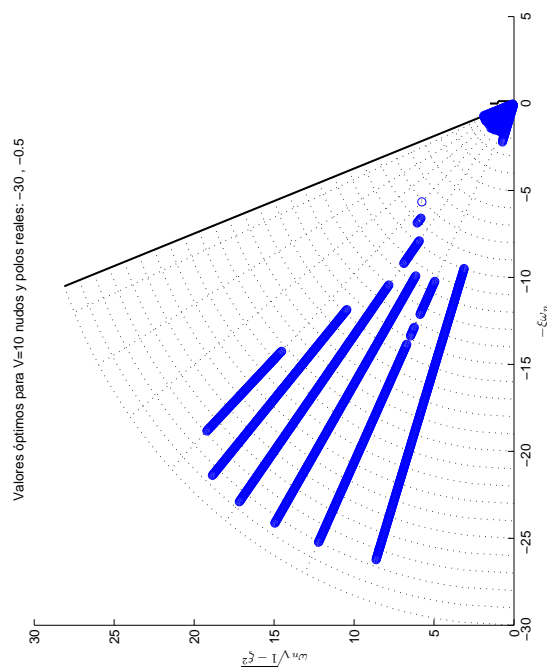
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -15$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -20$



(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -25$



(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -30$

Figura 5.13: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 30 nudos (15.4 m/s)

Evolución del número de valores óptimos con la magnitud del polo real y el amortiguamiento, con  $\omega_n$  entre 0.1 y 30 rad/s

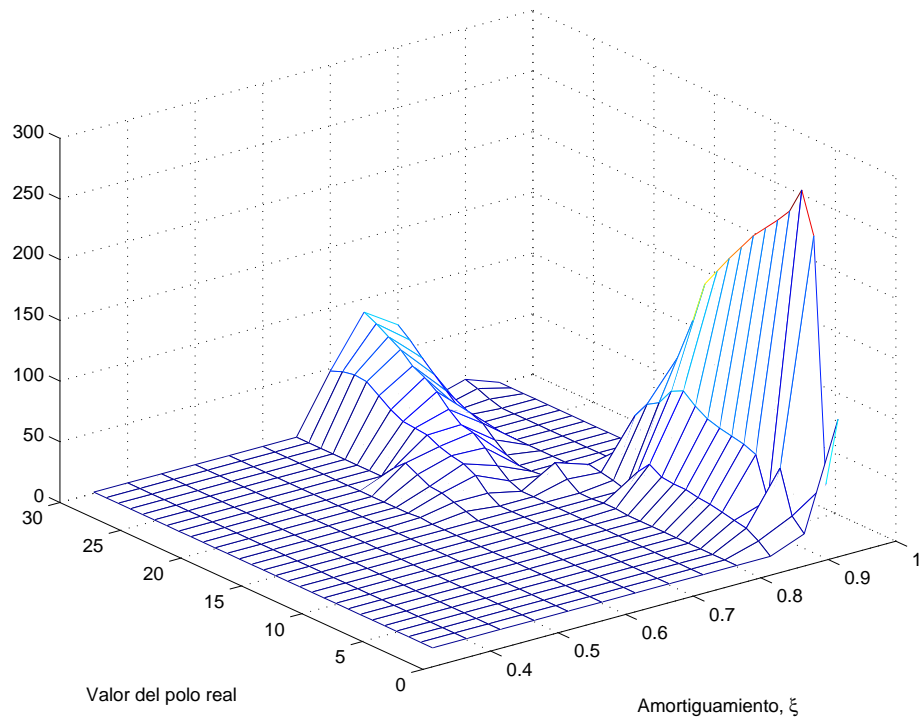
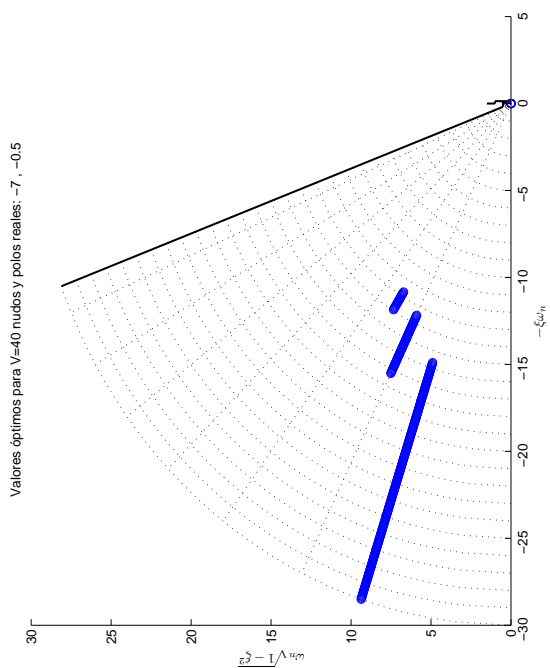
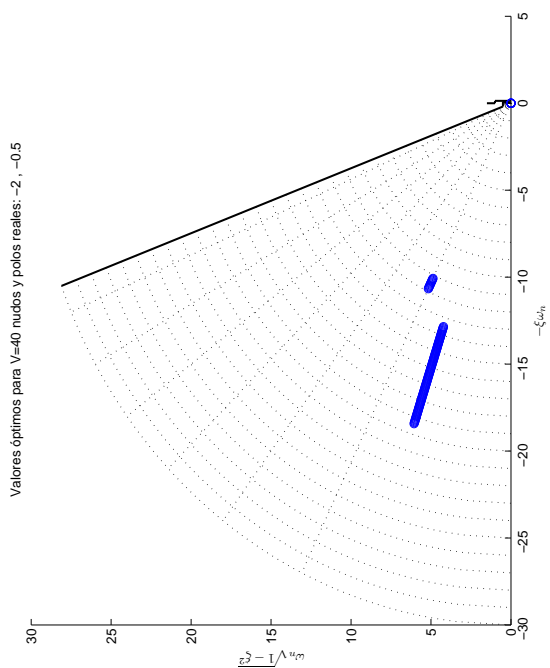


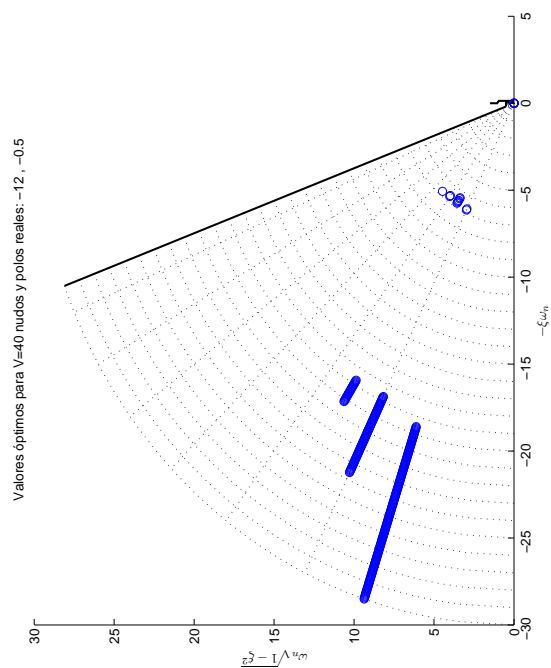
Figura 5.14: Mapa de evolución del número de soluciones para velocidad de vuelo de 40 nudos (20.6 m/s).



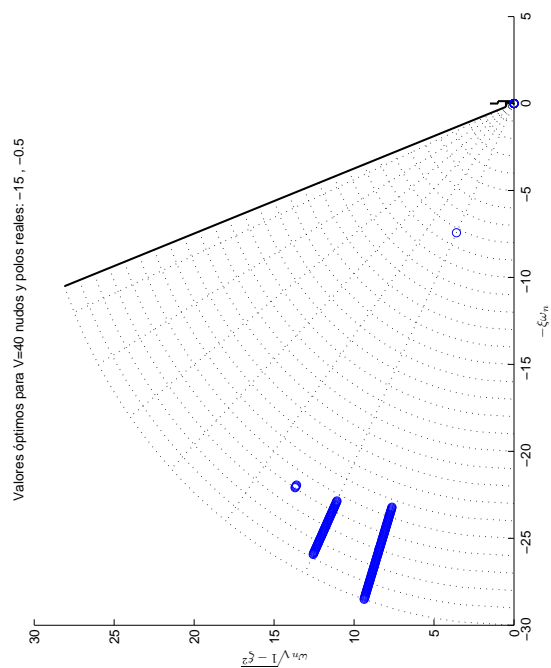
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -2$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -7$

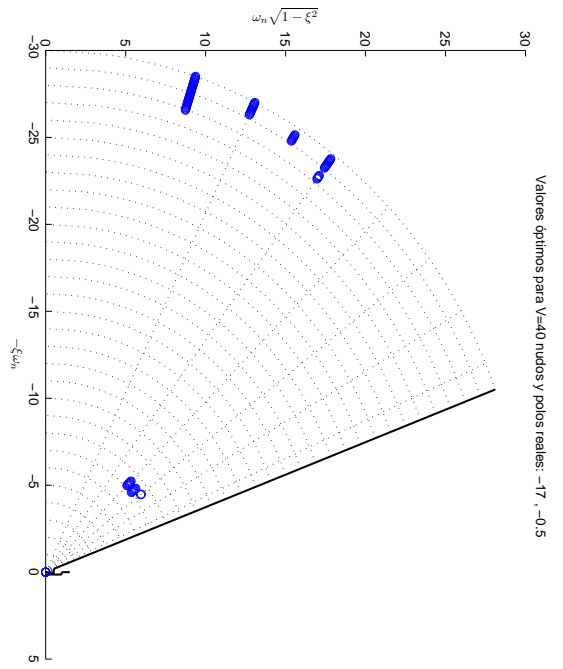


(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -12$

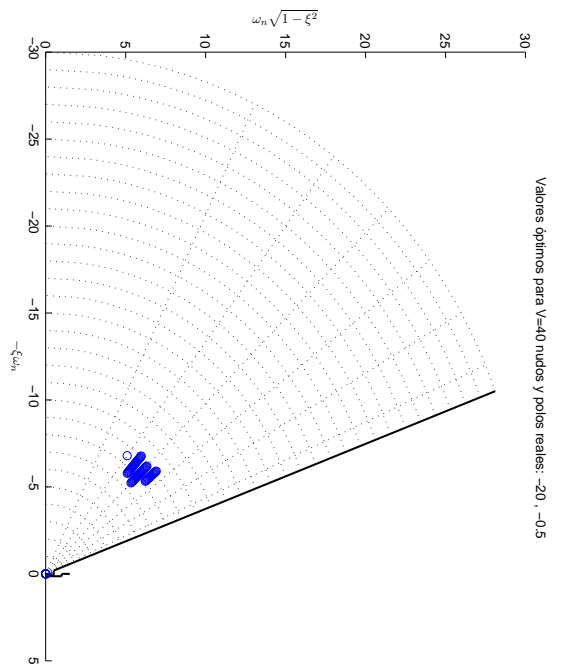


(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -15$

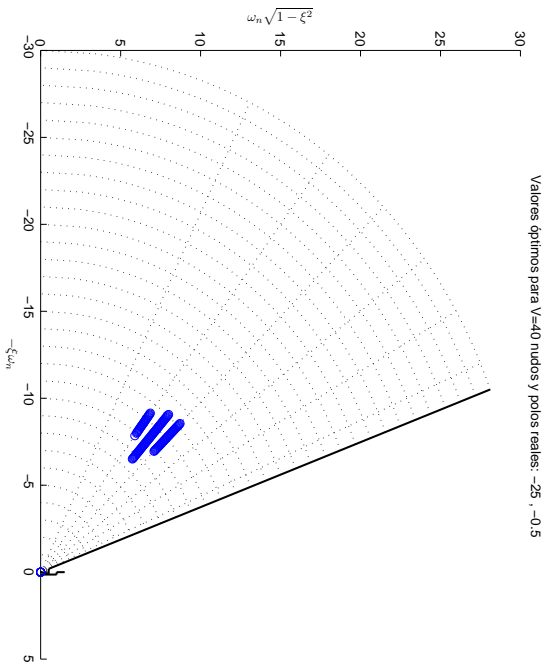
Figura 5.15: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 40 nudos (20.6 m/s)



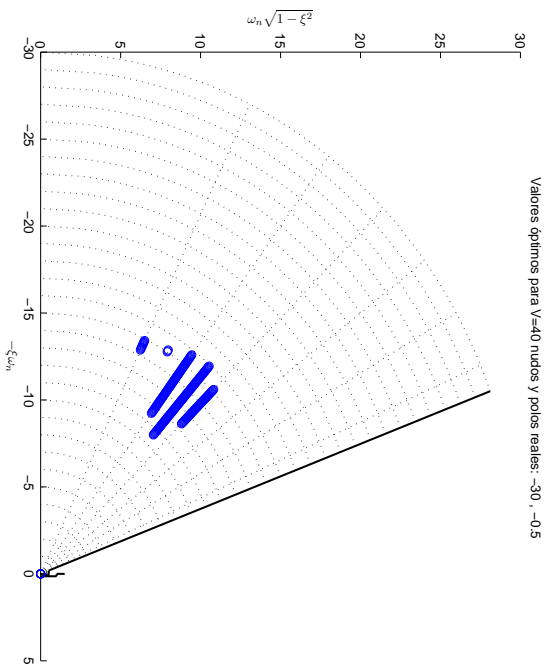
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -17$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -20$



(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -25$



(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -30$

Figura 5.16: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 40 nudos (20.6 m/s)



Evolución del número de valores óptimos con la magnitud del polo real y el amortiguamiento, con  $\omega_n$  entre 0.1 y 30 rad/s

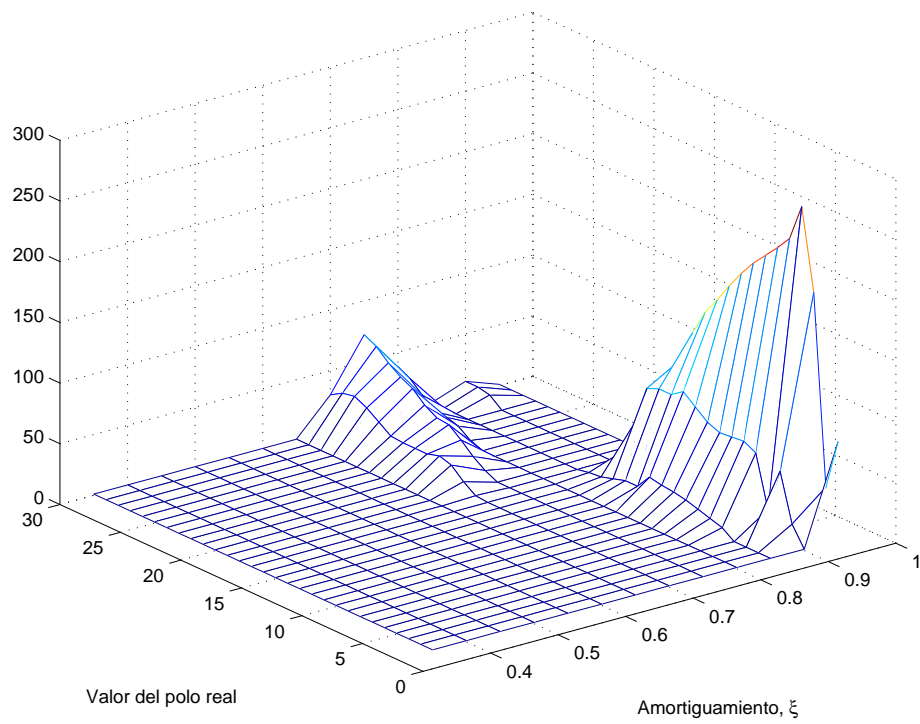
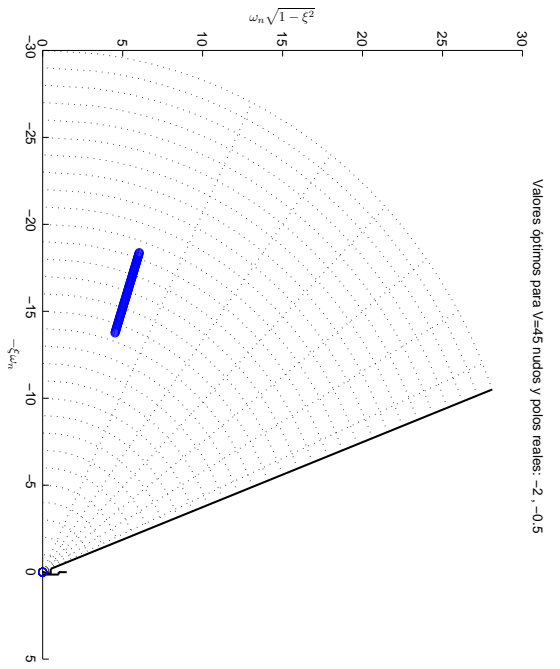
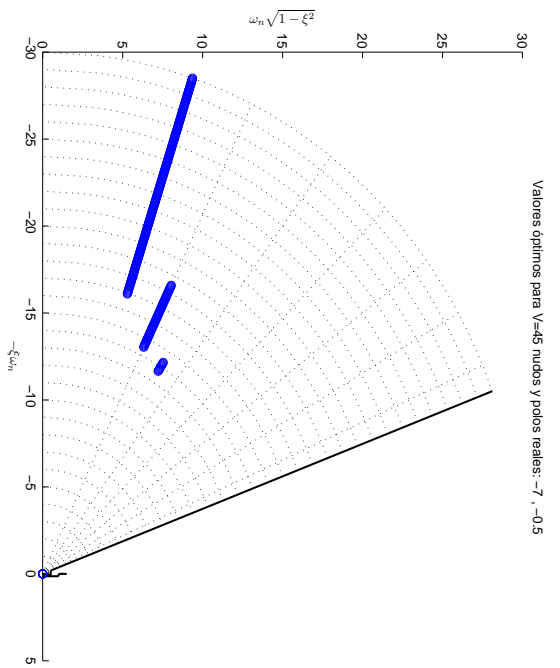


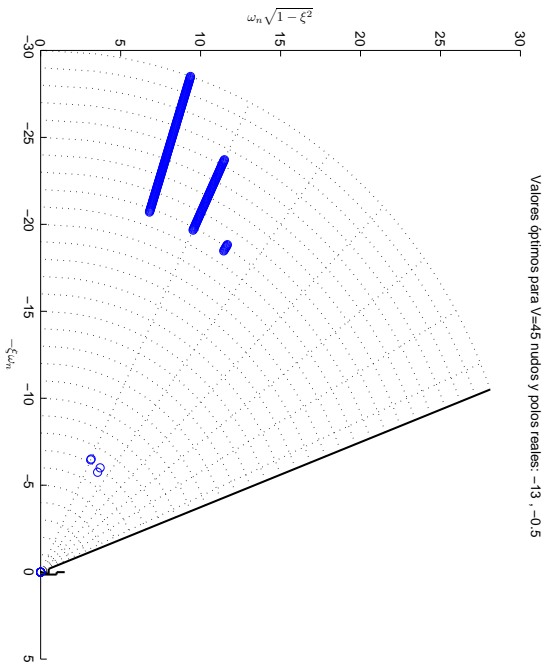
Figura 5.17: Mapa de evolución del número de soluciones para velocidad de vuelo de 45 nudos (23.1 m/s).



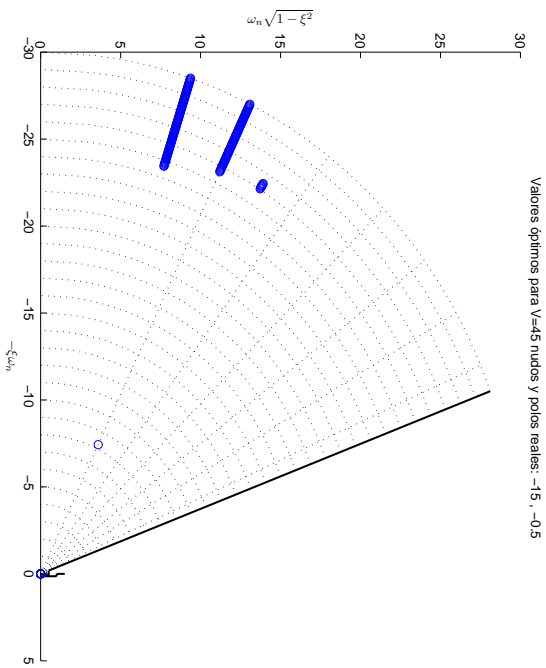
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -2$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -7$

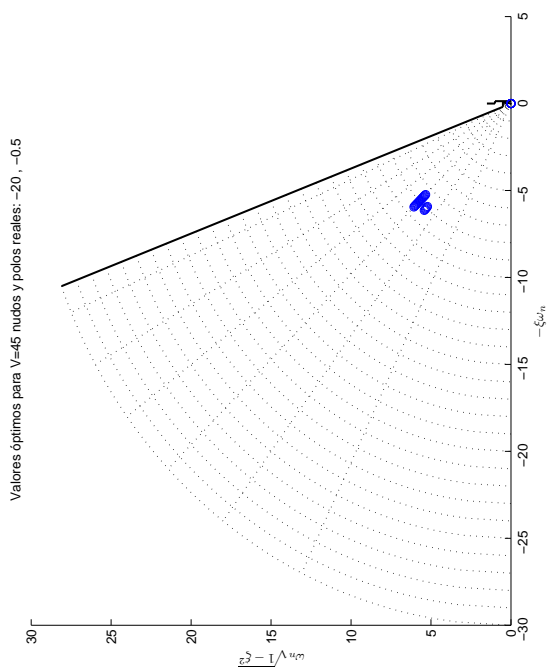


(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -13$

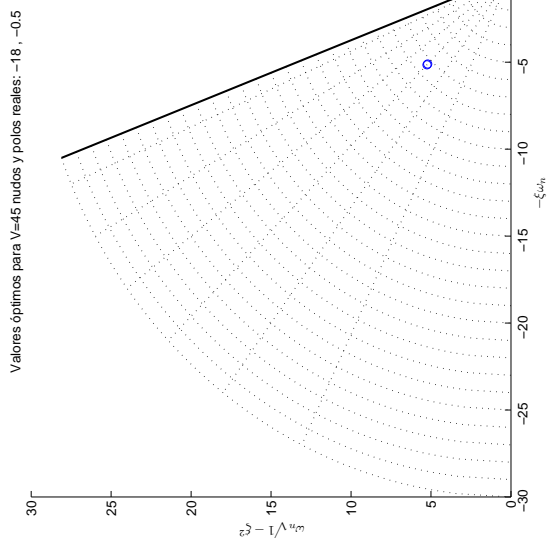


(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -15$

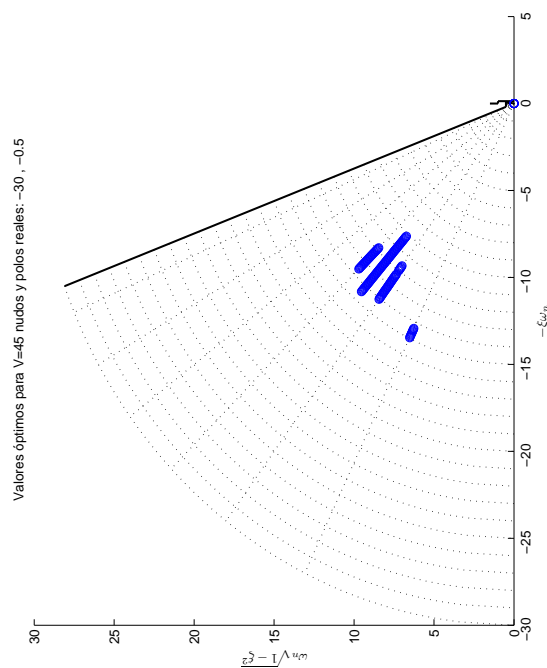
Figura 5.18: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 45 nudos (23.1 m/s)



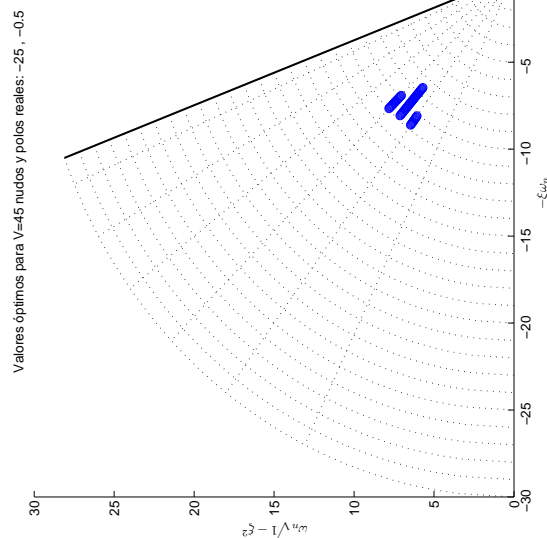
(a) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -18$



(b) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -20$

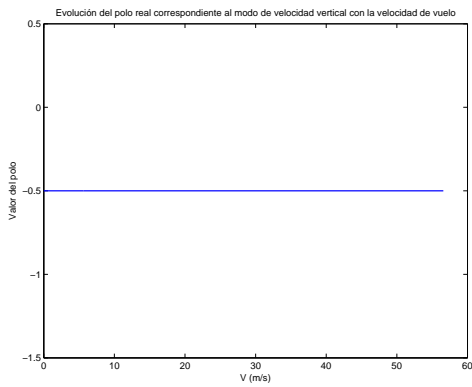


(c) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -25$

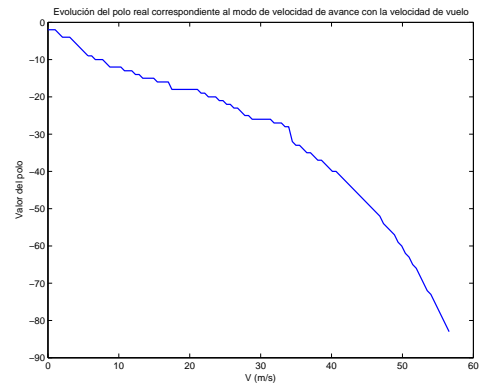


(d) Soluciones existentes para polos reales:  $-0.5, -30$

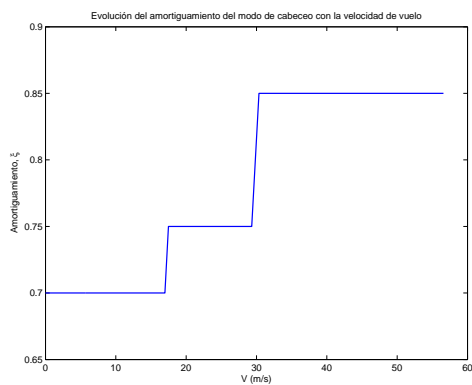
Figura 5.19: Evolución de las soluciones óptimas con el valor del mayor polo real. Vuelo en avance a 45 nudos (23.1 m/s)



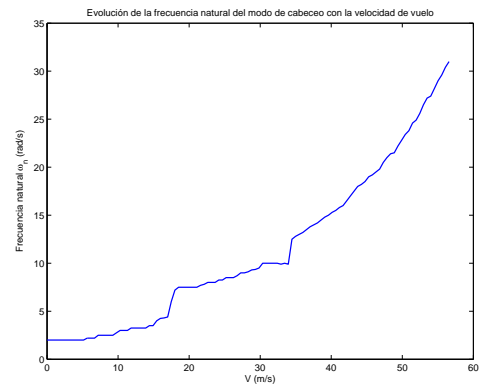
(a) Evolución del valor del modo de velocidad vertical



(b) Evolución del valor del modo de velocidad de avance



(c) Evolución del valor del amortiguamiento del modo de cabeceo



(d) Evolución del valor de la frecuencia natural del modo de cabeceo

Figura 5.20: Evolución de los modos con la velocidad de vuelo (m/s)

## Capítulo 6

# Simulaciones dinámicas

Una vez desarrollados los controladores óptimos a partir del método de la asignación de polos, de manera que conocemos el comportamiento dinámico del sistema en cada uno de los modelos linealizados para cada velocidad de vuelo, es momento de corroborar si efectivamente todo el desarrollo anterior conduce a comportamientos estables y deseables en el helicóptero de estudio, el BO-105.

Para las citadas comprobaciones se emplea un modelo no lineal adaptativo con la velocidad de vuelo, que permite recoger toda la dinámica longitudinal no lineal del mismo. Detalles sobre el propio modelo, así como los créditos correspondientes se encuentran detallados en el apéndice B.

### 6.1. Modelo no lineal. Estados de equilibrio

El modelo no lineal empleado se basa la combinación de modelos lineales de perturbación según la velocidad de vuelo. Asimismo, trabaja con los estados de forma absoluta para la entrada de señales de control. Este hecho requiere del cálculo de los estados de equilibrio con la velocidad de forma continua en el tiempo.

Extraídas de [Pad96], las figuras 6.1 y 6.2 muestran los valores de equilibrio tanto para los estados del sistema como para los controles de paso colectivo y cíclico longitudinal.

Es bastante interesante observar ciertas características del equilibrio que inciden directamente en los resultados de las simulaciones que se obtendrán más adelante. En primer lugar, y apoyado en la figura 6.3, pueden determinarse las velocidades globales tanto de avance como de descenso, a partir de los valores de las velocidades, expresadas en ejes cuerpo del helicóptero ( $u$  y  $w$ ).

$$V = u \cos(\theta) + w \sin(\theta) \tag{6.1}$$

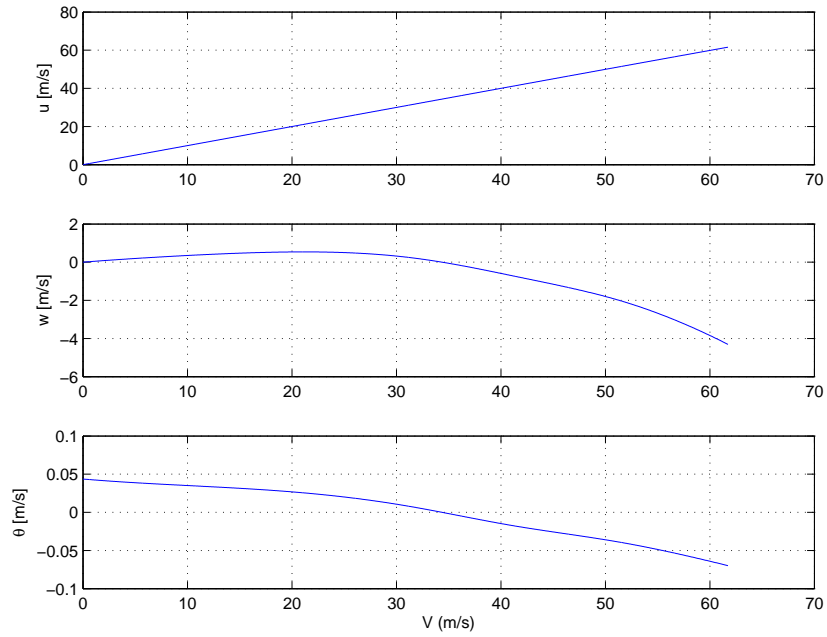


Figura 6.1: Estados de equilibrio en función de la velocidad de vuelo

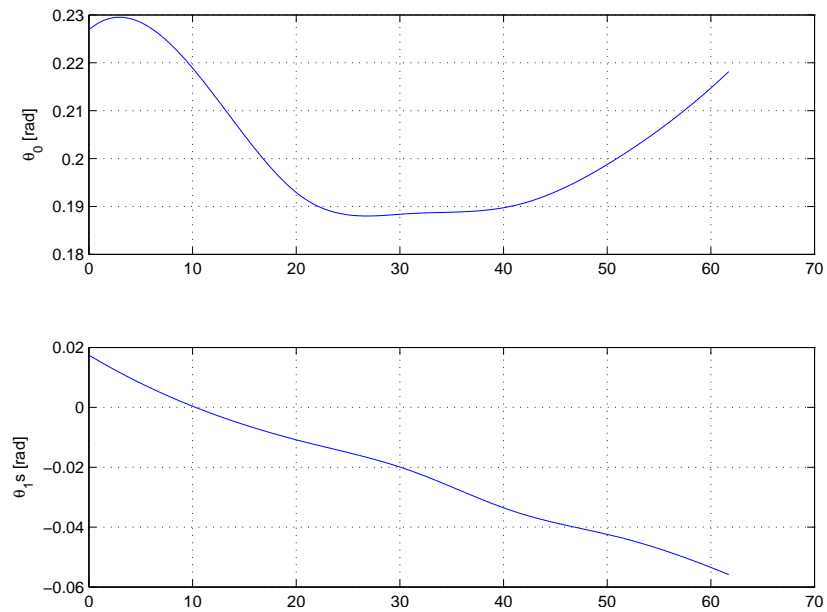


Figura 6.2: Control de equilibrio en función de la velocidad de vuelo

$$V_d = w \cos(\theta) - u \sin(\theta) \quad (6.2)$$

Para todas las velocidades de vuelo, la combinación de velocidades en ejes cuerpo  $u$  y  $w$  produce velocidades verticales  $V_d$  nulas, como corresponde a estados de equilibrio. El hecho de que las dos

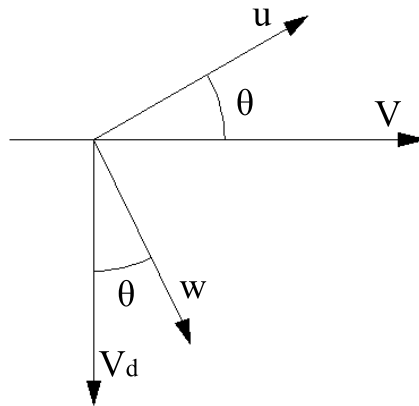


Figura 6.3: Definición de las velocidades globales de vuelo en función de las componentes  $u$  y  $w$

velocidades en ejes cuerpo sean no nulas es fruto únicamente del sistema de coordenadas. A velocidades bajas, donde el ángulo de cabeceo  $\theta$  es positivo, la definición de la velocidad vertical global  $V_d$  arroja que  $w > 0$ , ya que  $u$  es siempre positiva. De forma física, el helicóptero "siente una velocidad en su eje cuerpo vertical que se dirige hacia el suelo. Para velocidades elevadas (a partir de 34.4 m/s donde se produce  $\theta_e = 0$ ), el comportamiento se invierte, siendo el ángulo de cabeceo de equilibrio negativo, y, por la ecuación de  $V_d$ , la velocidad vertical en ejes cuerpo  $w$ , también negativa.

Una última reseña acerca del modelo no lineal sobre el que se testarán los controladores desarrollados es la inclusión de la saturación de los controles. Para intentar reproducir los límites físicos de los mandos de vuelo del helicóptero, se definen los siguientes valores máximos y mínimos para el paso colectivo y el cíclico longitudinal, respectivamente.

	Mínimo (grados)	Máximo (grados)
$\theta_0$	-0.2	+15
$\theta_{1s}$	-6	11

Estos valores de saturación están referidos a las variables de control de forma global. Por tanto, durante la evolución temporal del sistema, estos valores no se corresponden necesariamente con el valor máximo aplicable mediante los controladores. A estos valores de saturación habría que sustraerles los correspondientes a los estados de equilibrio del sistema, con la saturación real que se presenta para los controladores automáticos será variable con el tiempo, y dependiente de la condición de vuelo.

## 6.2. Sistema en bucle abierto

Para iniciar el tratamiento de las simulaciones, interesa evaluar las propiedades del modelo no lineal con que se cuenta. Las figuras 6.4, 6.6 y 6.5 muestran el comportamiento del sistema en bucle abierto, con condiciones iniciales crecientes en términos de velocidad de avance  $u$ .

Varios aspectos son destacables a raíz de los resultados de las simulaciones. En primer lugar, se comprueba que la combinación de sistemas lineales estables no es suficiente para que el modelo no lineal basado en éstos lo sea. Para velocidades bajas (10.3 m/s) no se aprecia realmente que el sistema diverja, si bien las oscilaciones no se atenúan hasta un estado de equilibrio. El efecto de la inestabilidad se aprecia mucho más claramente en el caso de velocidades iniciales más elevadas, donde el sistema ya es incapaz de mantenerse estable.

Otro aspecto destacable se encuentra en las gráficas de las velocidades  $u$  y  $V$ . Se puede apreciar que la velocidad  $u$  comienza directamente en el valor inicial indicado, si bien la velocidad  $V$  comienza en el valor 0, pasando de forma instantánea al valor impuesto por la condición inicial. Este hecho no es más que una característica del modelo empleado, donde la velocidad global de vuelo se encuentra retrasada respecto a la velocidad  $u$  en un paso de integración. Esta característica se verá repetida en prácticamente todas las simulaciones llevadas a cabo durante el desarrollo del capítulo, por lo que no se mencionará en sucesivas condiciones de vuelo y control.

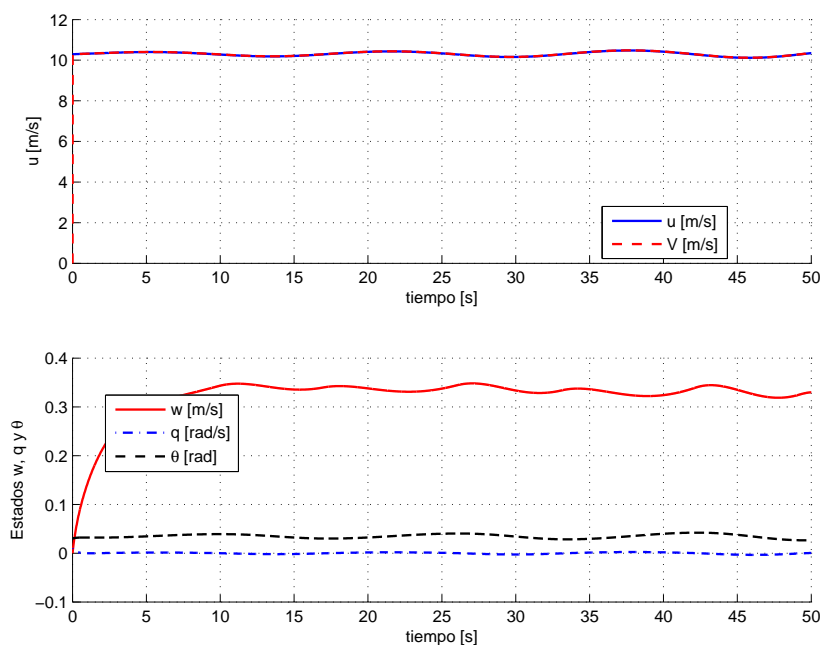


Figura 6.4: Respuesta del sistema en bucle abierto, con condiciones iniciales:  $u=10.3$  m/s (20 nudos),  $w=0$  m/s,  $q=0$  rad/s  $\theta = 0,03rad$

### 6.3. Regulación de perturbaciones

El primer caso de interés de la aplicación de la batería de controladores consiste en comprobar si el sistema se comporta de forma estable para situaciones en las que, partiendo de una velocidad de vuelo ya controlada, se introduce una perturbación al modelo. Esta perturbación puede ser en forma de un único impulso en alguno de los controles, una ráfaga de viento, o una entrada en escalón. Las



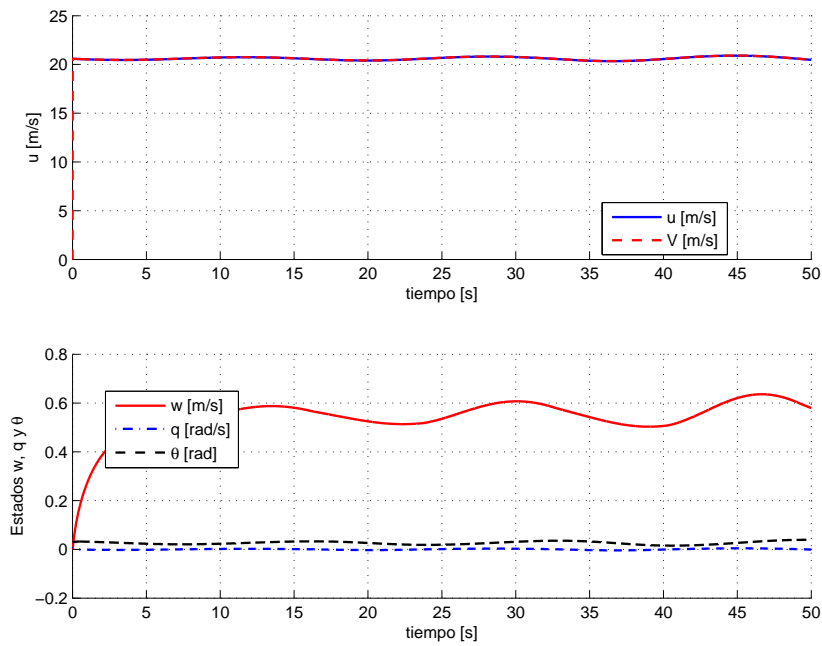


Figura 6.5: Respuesta del sistema en bucle abierto, con condiciones iniciales:  $u=20.6$  m/s (40 nudos),  $w=0$  m/s,  $q=0$  rad/s  $\theta = 0,03rad$

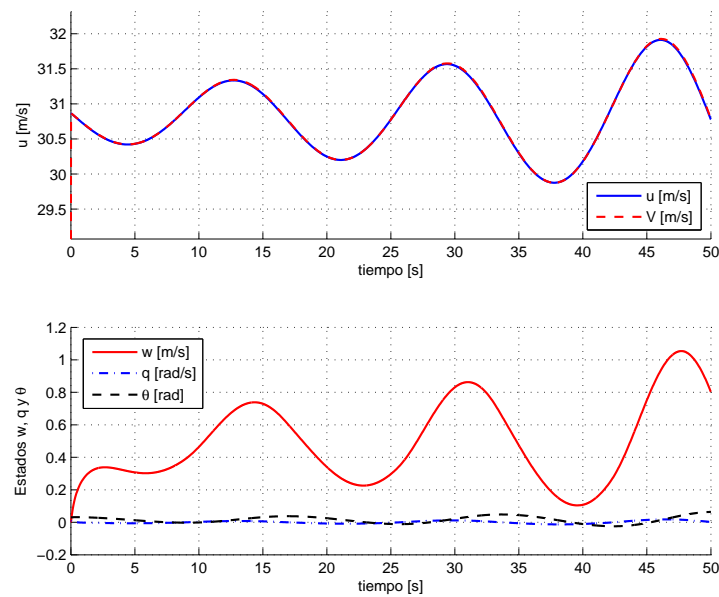


Figura 6.6: Respuesta del sistema en bucle abierto, con condiciones iniciales:  $u=30.9$  m/s (60 nudos),  $w=0$  m/s,  $q=0$  rad/s  $\theta = 0,03rad$

dos primeras deben producir respuestas que, salvo el periodo de transición inicial, tiendan de nuevo al

equilibrio del sistema transcurrido el tiempo suficiente. El tercer caso es de especial utilidad para el estudio de los errores en régimen permanente que puede presentar el sistema.

### 6.3.1. Perturbaciones iniciales

Las figuras 6.7-6.11 muestran los resultados de las simulaciones realizadas ante condiciones iniciales cambiantes. Principalmente el factor de cambio es la velocidad longitudinal  $u$ , ya que ésta es la que determina en mayor medida el cambio de modelo (también podía tomarse como factor de cambio la velocidad vertical  $w$ , si bien su rango de actuación física en helicópteros es muy inferior al de la velocidad  $u$ ).

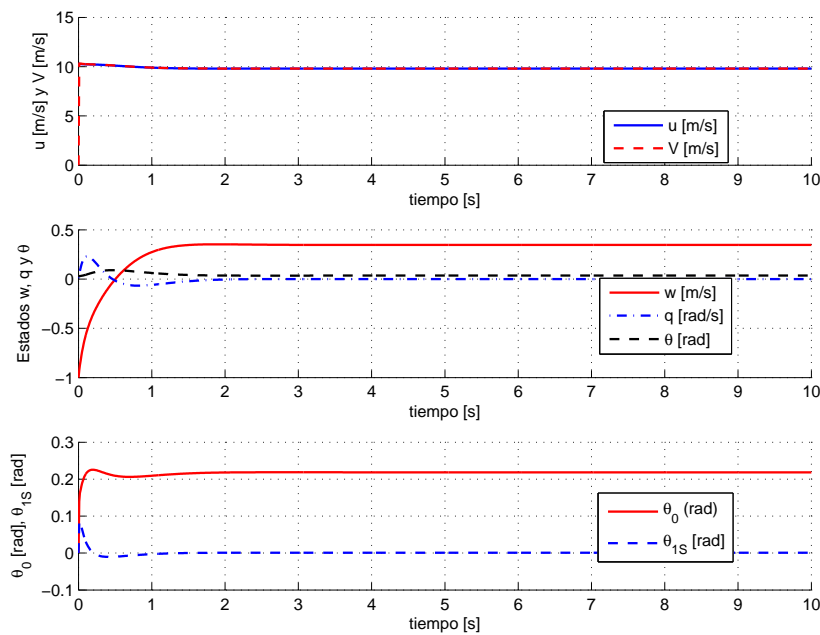


Figura 6.7: Respuesta del sistema en el tiempo, con condiciones iniciales:  $u=10.3$  m/s (20 nudos),  $w = -1$  m/s,  $q = 0.01$  rad/s  $\theta = 0.03$  rad

A la vista del resultado de las gráficas, pueden desgranarse diversos aspectos relacionados con la respuesta del sistema en bucle cerrado ante perturbaciones iniciales.

**Estabilidad del sistema:** Como se comprueba con los resultados obtenidos, los sistemas tienen al equilibrio de forma relativamente rápida, permaneciendo en él una vez alcanzado de forma indefinida. Cada una de las gráficas presenta comportamientos en el régimen transitorio diverso, dependiendo en gran medida tanto de los modos seleccionados mediante la técnica de asignación de polos como de la diferencia entre los valores iniciales y los de equilibrio. Asimismo, los valores obtenidos de forma permanente corresponden a los estados de equilibrio para la velocidad equilibrada, como puede comprobarse comparando los resultados con las gráficas de equilibrio 6.1 y 6.2.

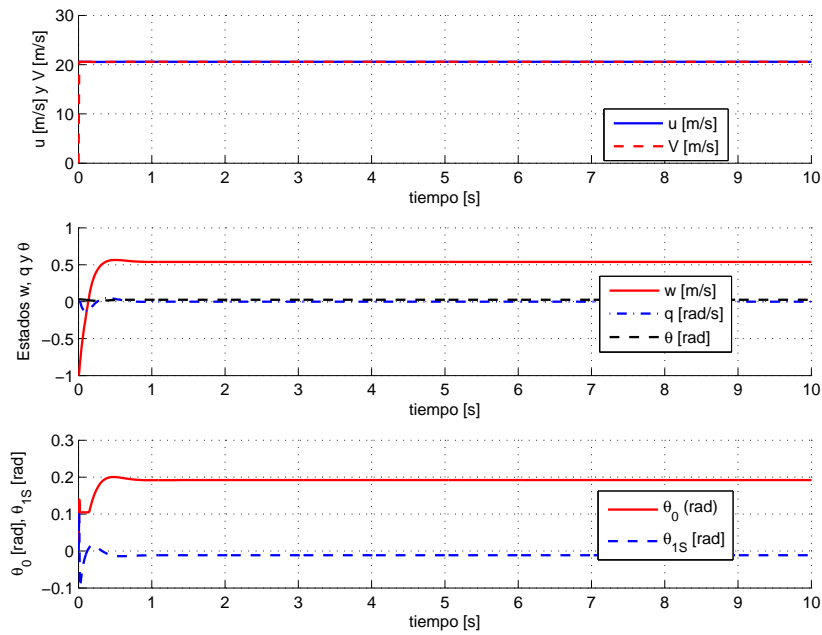


Figura 6.8: Respuesta del sistema en el tiempo, con condiciones iniciales:  $u=20.6$  m/s (40 nudos),  $w = -1$  m/s,  $q = 0.01$  rad/s  $\theta = 0.03$  rad

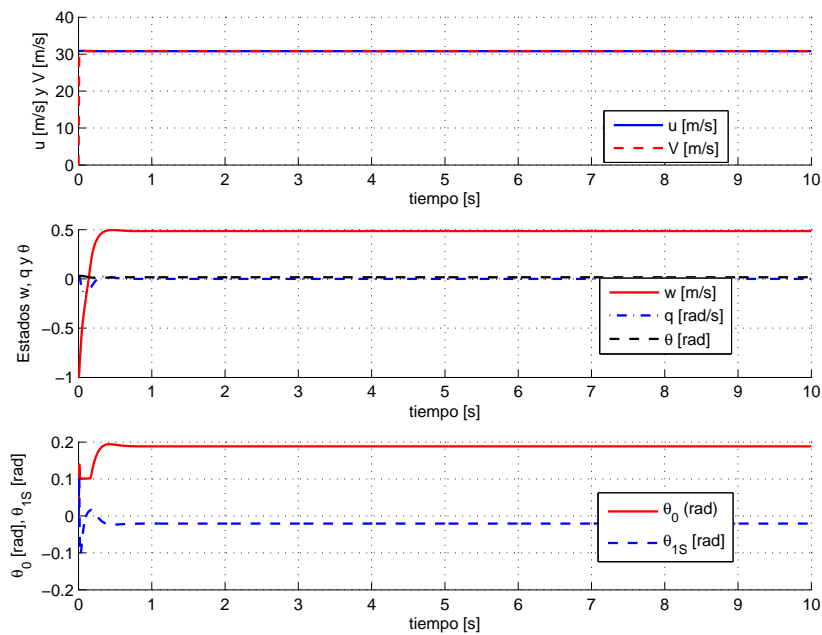


Figura 6.9: Respuesta del sistema en el tiempo, con condiciones iniciales:  $u=30.9$  m/s (60 nudos),  $w = -1$  m/s,  $q = 0.01$  rad/s  $\theta = 0.03$  rad

**Equilibrio alcanzado distinto de las condiciones iniciales:** Al estar el sistema sin ningún tipo de referencia que seguir, sino simplemente perturbado con condiciones iniciales, no existe ninguna

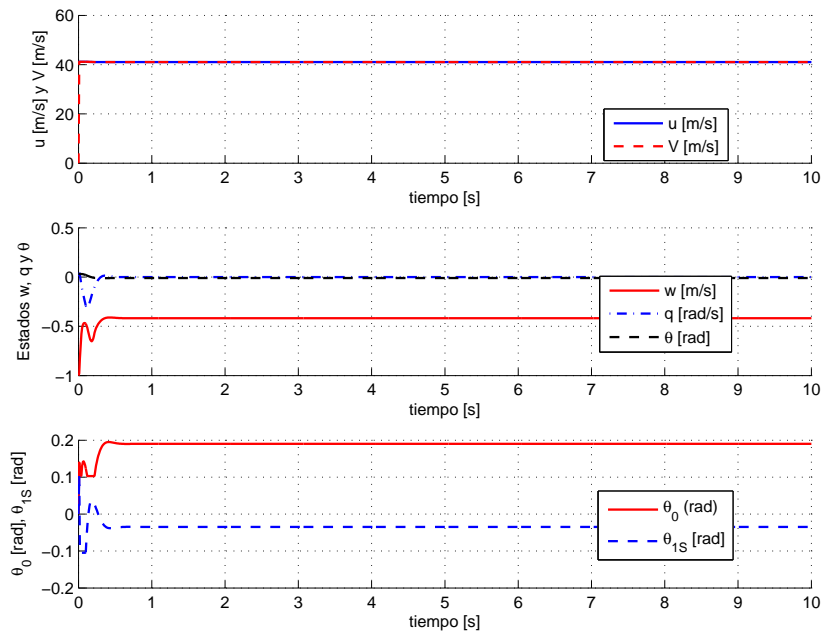


Figura 6.10: Respuesta del sistema en el tiempo, con condiciones iniciales:  $u=41.2$  m/s (80 nudos),  $w = -1$  m/s,  $q = 0,01$  rad/s  $\theta = 0,03$  rad

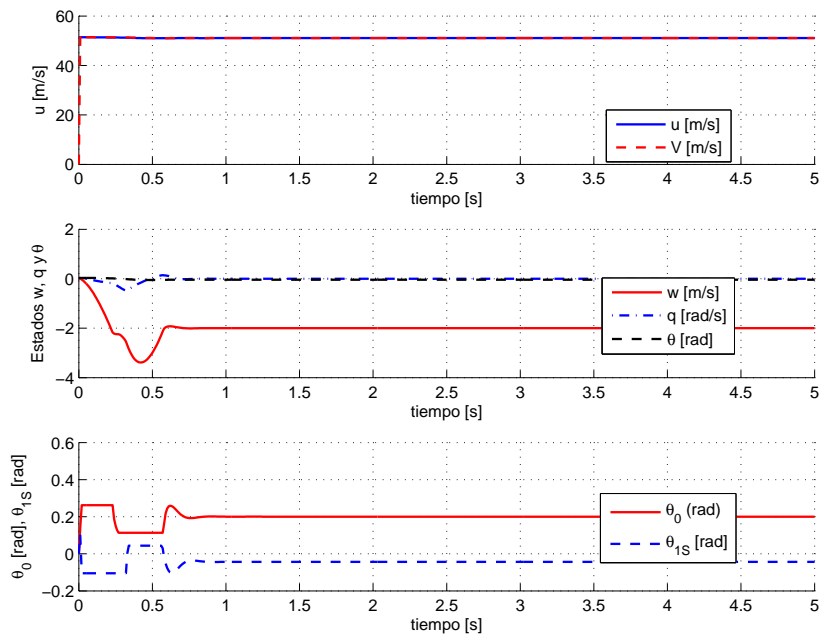


Figura 6.11: Respuesta del sistema en el tiempo, con condiciones iniciales:  $u=51$  m/s (100 nudos),  $w = -1$  m/s,  $q = 0,01$  rad/s  $\theta = 0,03$  rad

preferencia acerca del equilibrio que alcanzar, por lo que, dependiendo de la evolución de los estados, se alcanzará un equilibrio u otro. Es interesante observar asimismo que velocidades de

avance iniciales elevadas concurren en grandes diferencias respecto a los estados iniciales.

**Intervención de saturaciones:** Como se aprecia en los casos de condiciones iniciales en la velocidad  $u$  de 20.6 m/s (40 nudos) hasta 51 m/s (100 nudos), en los instantes iniciales aparece la saturación de los controles aplicados al sistema. Tal como se comentó anteriormente, la saturación no se produce expresamente en los valores impuestos de forma externa, sino que los controles de equilibrio deben ser restados del total para conocer el control máximo admisible. En el caso de la velocidad de 51 m/s (100 nudos) aparece una segunda saturación a valores inferiores, causada por la dinámica impuesta al sistema, que al ser excesivamente rígida y rápida conducen a la citada saturación.

Destacar asimismo que en el caso de alta velocidad (figura 6.11) la convergencia del sistema es bastante elevada, tal como se definió en el desarrollo de los controladores para alta velocidad del capítulo anterior. Es significativa la saturación inicial de los controles que impide la rápida convergencia de los modos de cabeceo y velocidad vertical. En cambio, el modo de velocidad de avance  $u$ , con el alto valor de su polo real, presenta una convergencia muy rápida, a pesar de las saturaciones de los controles.

### 6.3.2. Perturbaciones debidas a viento

Siguiendo con la perturbación del sistema desde posiciones de equilibrio, en este caso se tratará de introducir al sistema, aparte de las condiciones iniciales, ráfagas de viento como excitación adicional. Las figuras 6.12 y 6.14 muestran las respuestas del sistema ante ráfagas de distinta naturaleza. Las ráfagas corresponden a modelos de la forma  $1 - \cos(x)$ , modelo estándar para ráfagas de cálculo.

Como se aprecia en las figuras, la introducción de la perturbación en forma de viento, tanto vertical como longitudinal, no tiene efecto sobre la estabilidad global del sistema. Tras el paso por la ráfaga, el sistema vuelve a alcanzar un nuevo estado de equilibrio. Sin embargo, al igual que ocurría en el caso de las perturbaciones iniciales, el nuevo estado de equilibrio alcanzado no está definido en ningún momento, por lo que el sistema tiende simplemente al equilibrio más cercano.

Los casos correspondientes a la ráfaga severa de 20 m/s presentan saturación de los controles. En el caso de condiciones iniciales de 30.9 m/s (60 nudos) se produce la saturación de los controles principalmente en el momento de actuación de la ráfaga, si bien al comienzo de la simulación existe un pequeño intervalo de tiempo en el que el control está saturado, hasta que el sistema es capaz de llegar a una situación de equilibrio próxima a las condiciones iniciales impuestas. Para el caso de condiciones iniciales de 51 m/s (100 nudos) vuelve a aparecer la situación de doble saturación de los controles al comienzo de la maniobra, siendo esta saturación debida a las características dinámicas tan severas impuestas. Al igual que en el caso anterior, durante la intervención de la ráfaga se produce la saturación de los controles, lo que hace que la respuesta del sistema sea más lenta de lo esperable si no existiera la condición de saturación.

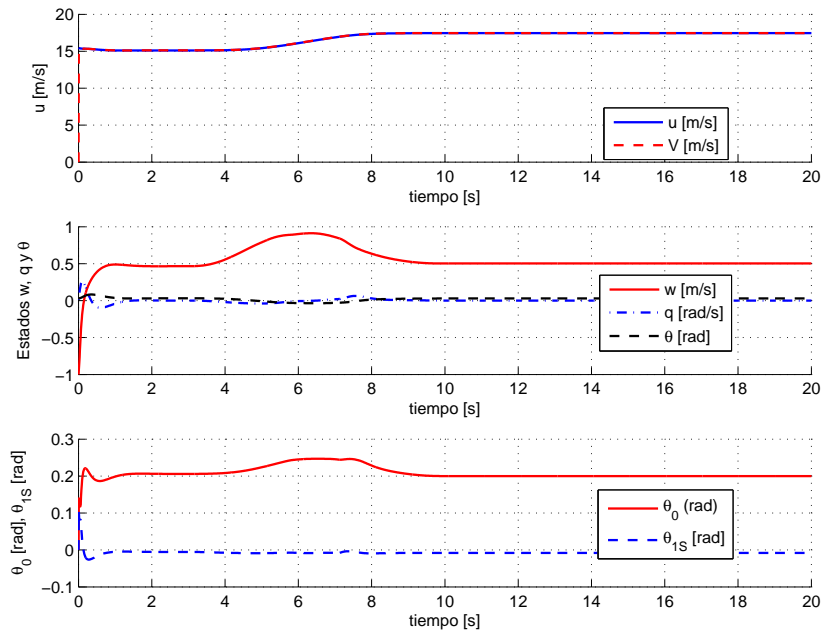


Figura 6.12: Respuesta del sistema ante viento de 10 m/s en direcciones  $x$  y  $z$ , con condiciones iniciales:  $u=15.4$  m/s (30 nudos),  $w = -1$  m/s,  $q = 0,01$  rad/s  $\theta = 0,03$  rad

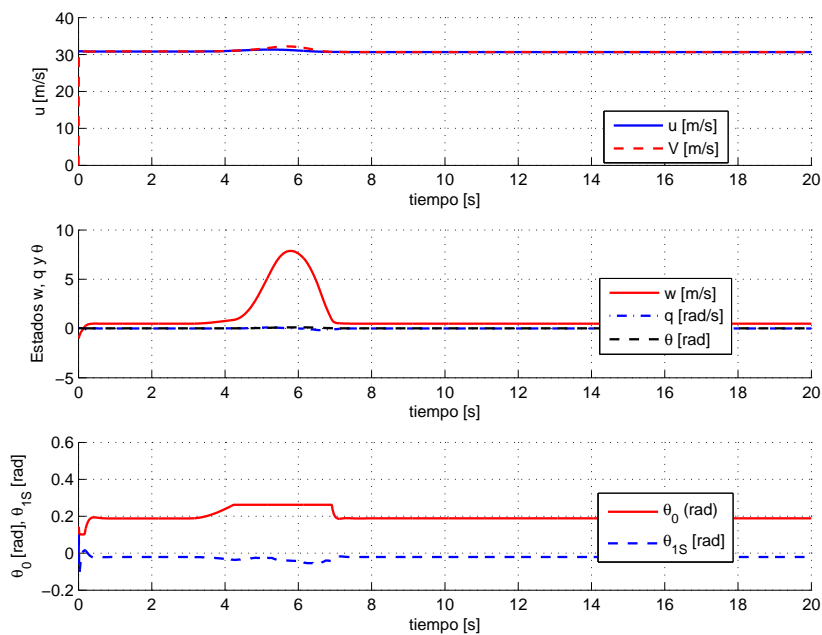


Figura 6.13: Respuesta del sistema ante viento de 20 m/s en direcciones  $x$  y  $z$ , con condiciones iniciales:  $u=30.9$  m/s (60 nudos),  $w = -1$  m/s,  $q = 0,01$  rad/s  $\theta = 0,03$  rad

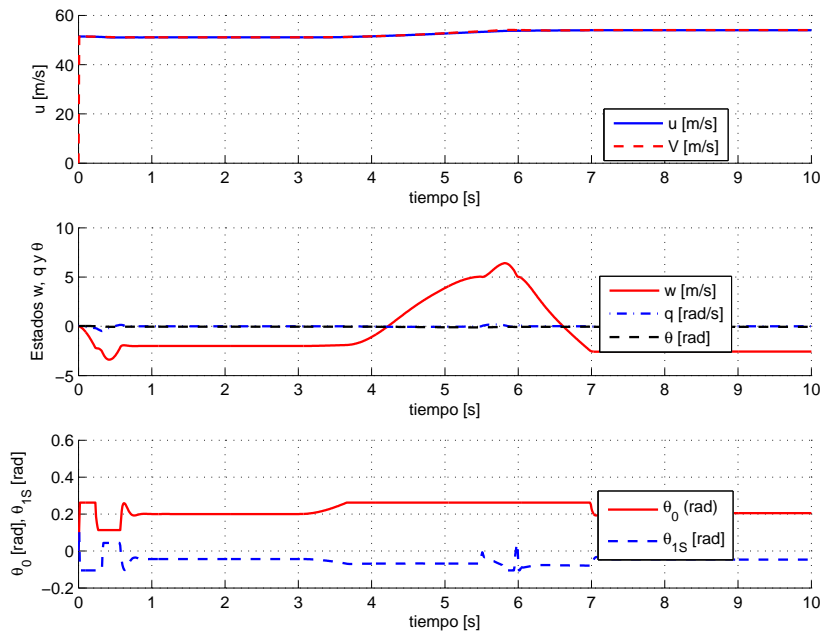


Figura 6.14: Respuesta del sistema ante viento de 20 m/s en direcciones  $x$  y  $z$ , con condiciones iniciales:  $u = 51,4\text{m/s}$ (100nudos),  $w = -1\text{m/s}$ ,  $q = 0,01\text{rad/s}$   $\theta = 0,03\text{rad}$

## 6.4. Controlador de mantenimiento de velocidad

Vista la utilidad del sistema ante perturbaciones de distinta índole, debe comprobarse si el sistema es capaz de comportarse de una manera predeterminada, alcanzando un equilibrio deseado. Con esta intención, las figuras 6.15 y 6.17 muestran la evolución del sistema ante requerimientos de equilibrio diversos.

Las figuras muestran que efectivamente el controlador cumple su objetivo alcanzar la velocidad de vuelo deseada desde las condiciones iniciales impuestas, y de mantener esa velocidad de vuelo en el tiempo. En el primer caso, 6.15, con una condición inicial de aproximadamente 7.7 m/s (15 nudos), la consecución del objetivo de 10.3 m/s (20 nudos) es bastante sencilla, por lo que la convergencia es relativamente rápida, aunque con amplios valores de la componente de velocidad vertical, que se ven atenuados en el tiempo, hasta los valores correspondientes al equilibrio en la velocidad seleccionada. Aparecen al comienzo pequeños intervalos de saturación de los controles, hasta que el sistema se aproxima a una condición de equilibrio.

En el segundo caso, donde se parte con unas condiciones iniciales en velocidad de aproximadamente 10 m/s (19 nudos), y con un objetivo de alcanzar 25.7 m/s (50 nudos), se observa cómo nuevamente es posible alcanzar este equilibrio, si bien se logra de una forma más lenta que en el caso anterior. Esto es debido principalmente a la actuación de la saturación de los controles del sistema, que se aprecia en la misma figura. Nótese, como ya se comentó en anteriores ocasiones, que los valores de control mostrados corresponden a las entradas de control de perturbación que entran en el modelo

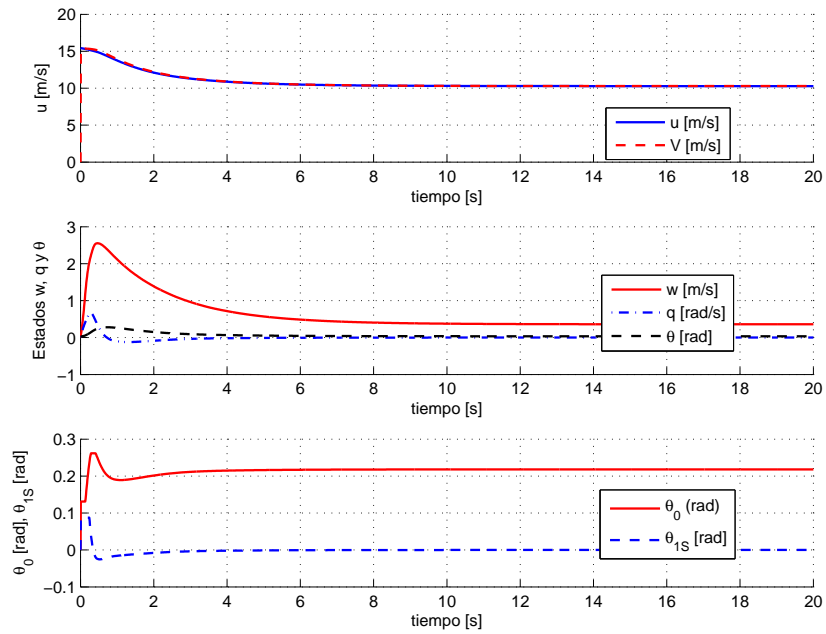


Figura 6.15: Controlador de mantenimiento de velocidad a 10 m/s. Condiciones iniciales:  $u = 15m/s$ ,  $w = 0m/s$ ,  $q = 0,01rad/s$   $\theta = 0,03rad$

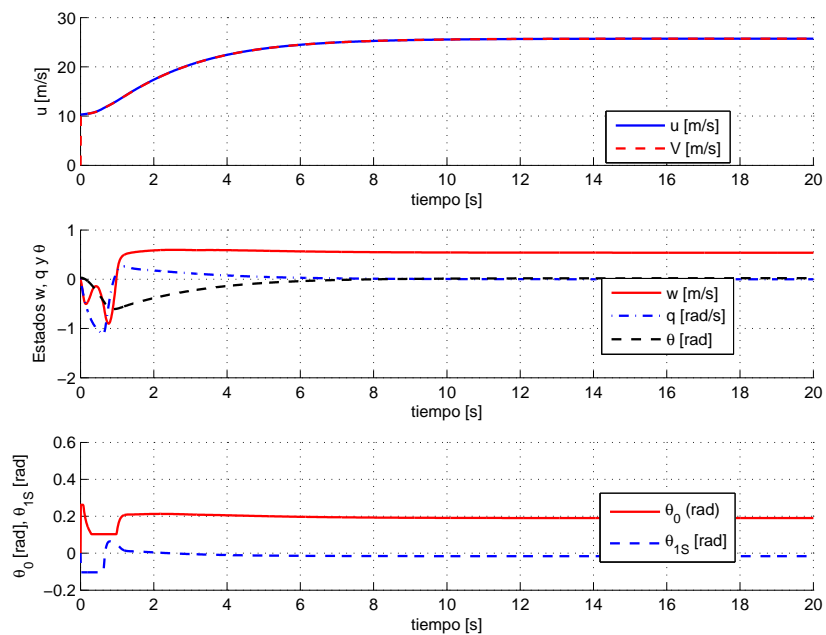


Figura 6.16: Controlador de mantenimiento de velocidad a 25 m/s. Condiciones iniciales:  $u = 10m/s$ ,  $w = 0m/s$ ,  $q = 0,01rad/s$   $\theta = 0,03rad$



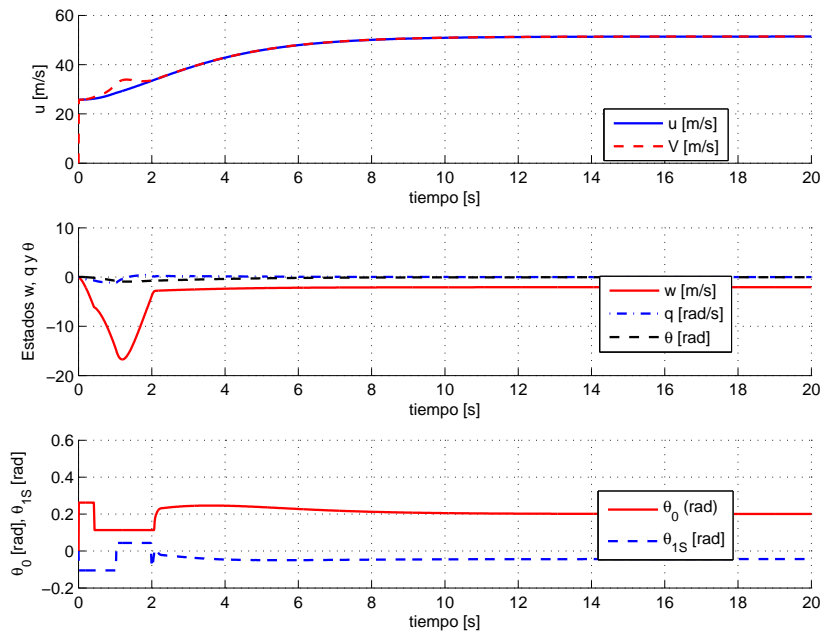


Figura 6.17: Controlador de mantenimiento de velocidad a 51 m/s (100 nudos). Condiciones iniciales:  $u=26$  m/s (50 nudos),  $w = 0$  m/s,  $q = 0,01$  rad/s  $\theta = 0,03$  rad

dinámico, de manera que se han abstraído ya las componentes de los controles de equilibrio.

El último caso, correspondiente a la condición de seguimiento en velocidad de 51 m/s (100 nudos) presenta una convergencia más lenta debida al hecho de la gran diferencia entre las condiciones iniciales impuestas y el valor que debe alcanzar el sistema en velocidad. Es interesante asimismo la saturación de los controles en los primeros instantes, que desaparece en el momento en que el modelo adquiere velocidad suficiente como para que los modos requieran menos entradas de control. Como se seleccionaron modos muy rígidos a alta velocidad, la saturación es importante en los instantes iniciales de la simulación.

## 6.5. Controlador de aceleración

Así como el mantenimiento de una velocidad de vuelo reporta aspectos interesantes del comportamiento del sistema, así como abre una puerta al control automático del helicóptero en términos del diseño de autopilotos, el siguiente paso consistirá en realizar un seguimiento de un patrón de velocidad de vuelo a lo largo del tiempo. Se trata de una aceleración del helicóptero desde el vuelo a punto fijo hasta los 36 m/s (70 nudos), para después mantener esa velocidad de forma indefinida. Los resultados de la simulación se muestran en la figura 6.18.

Como se observa en el perfil, se trata de iniciar la trayectoria de aceleración desde 10.3 m/s (20 nudos), para acelerar hasta 36 m/s (70 nudos) en 5 segundos y mantener esa velocidad de forma

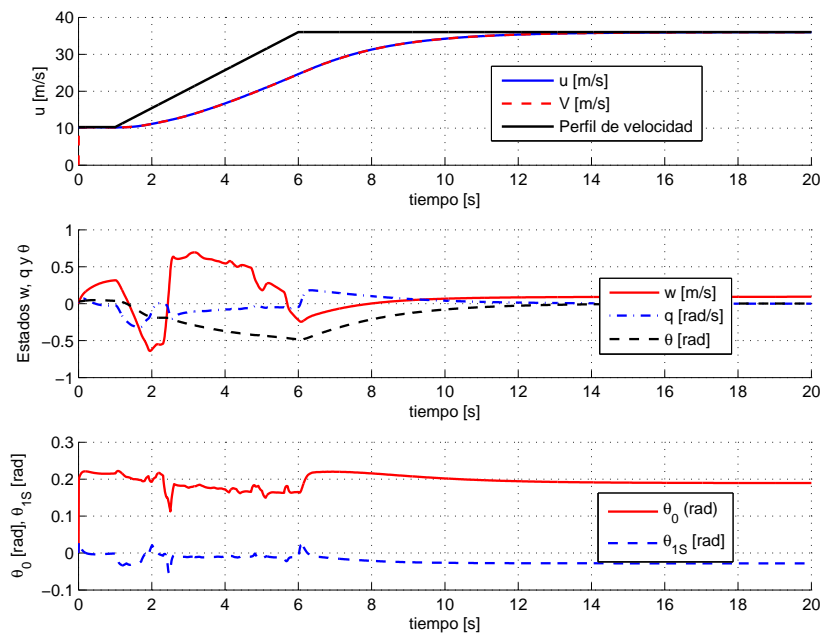


Figura 6.18: Evolución de los estados en el seguimiento del perfil de velocidades entre 10.3 m/s (20 nudos) y 36 m/s (70 nudos)

permanente.

A la vista de los resultados, se demuestra que el sistema controlado efectivamente es capaz de seguir la trayectoria de aceleración marcada. Si bien la velocidad de avance  $u$  sigue el perfil casi a la perfección, la velocidad vertical  $w$  sufre variaciones erráticas durante el proceso de aceleración, hasta que se estabiliza la velocidad de referencia y puede alcanzar un estado de equilibrio invariante en el tiempo. Por su parte, los otros dos estados longitudinales,  $q$  y  $\theta$ , se mantienen en valores muy pequeños, casi de equilibrio durante toda la simulación. En cuanto a los controles del sistema, no se observan saturaciones durante toda la maniobra, por lo que no hay limitaciones en los controladores durante toda la simulación.

Si bien la trayectoria antes indicada es excesivamente exigente, un nuevo perfil de velocidades consistente en alcanzar los mismos niveles de velocidad pero en tiempos mayores puede dar una idea más clara de la capacidad de seguimiento de la batería de controladores.

La nueva simulación muestra que el sistema consigue seguir la trayectoria de forma correcta, mejor que en el caso de perfiles rápidos. Sin embargo, sigue mostrando, en este caso más evidente, la existencia de errores de seguimiento en velocidad durante todo el tramo de subida. En el momento en que se impone a través del perfil una velocidad fija, el sistema es capaz de alcanzar el estado deseado sin problema alguno.

Una última simulación, más agresiva que las anteriores, consiste en alcanzar velocidades de vuelo más altas. Se impondrá al sistema el mismo conjunto de condiciones iniciales que anteriormente, pero

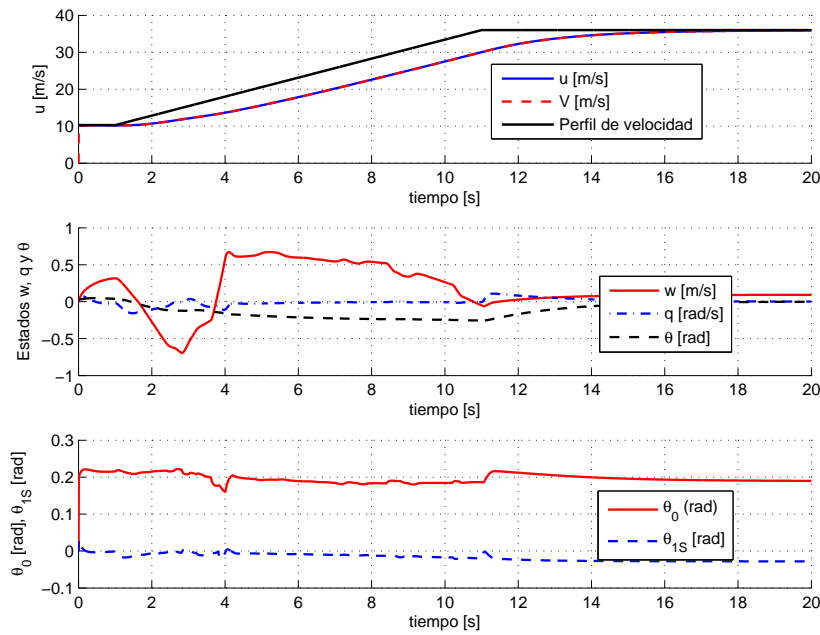


Figura 6.19: Evolución de los estados en el seguimiento del perfil de velocidades entre 10.3 m/s (20 nudos) y 36 m/s (70 nudos) . Perfil suave

en este caso haciéndole llegar hasta la velocidad de 100 nudos. La figura 6.20 muestra los resultados.

Nuevamente, el sistema es capaz de seguir el perfil requerido, aunque con errores de seguimiento mayores que en casos anteriores. De esta forma, el equilibrio final se alcanza más lentamente. Por otro lado, los controles sólo se saturan en el momento en que se alcanza la condición de equilibrio final por parte del perfil, que corresponde al momento en que el error de seguimiento es mayor entre perfil y respuesta del sistema. En el momento en que los estados del sistema se acercan a la situación de velocidad constante definida, la saturación desaparece y tanto las variables de estado como de control tienden al equilibrio asignado.

## 6.6. Maniobra de aceleración-deceleración

De forma similar a lo realizado en el apartado anterior para el caso de un seguimiento en aceleración, se efectuará a continuación el seguimiento de una maniobra más compleja, consistente en una aceleración, un mantenimiento de la velocidad de vuelo durante un periodo determinado de tiempo, seguido de una deceleración al final de la maniobra. Los resultados de la simulación, así como el perfil seleccionado, se muestran en la figura 6.21

El resultado de la simulación es claro: El sistema responde con un retardo respecto al perfil de velocidades impuesto al sistema, realizando el seguimiento de la aceleración con un error constante en los tramos de aceleración y deceleración. Asimismo, al igual que en el caso de la maniobra del apartado

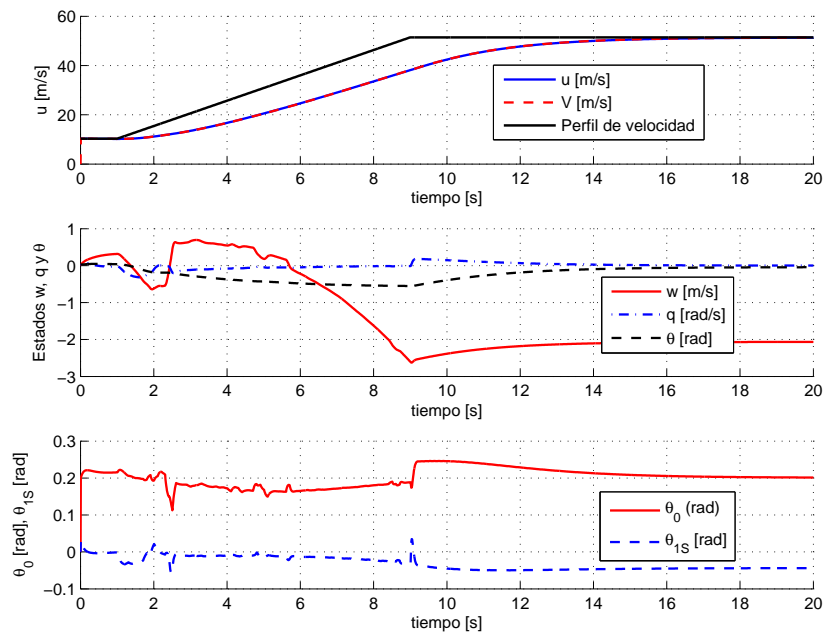


Figura 6.20: Evolución de los estados en el seguimiento del perfil de velocidades hasta 51 m/s (100 nudos)

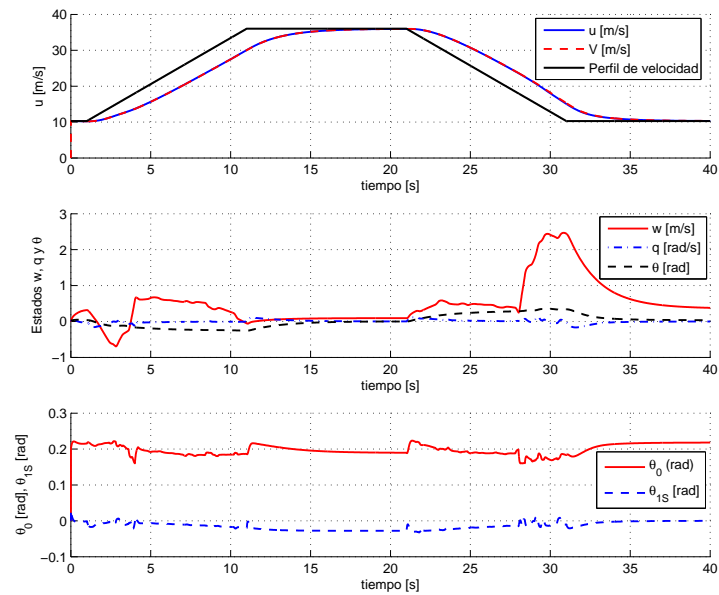


Figura 6.21: Evolución de los estados en la maniobra de aceleración-deceleración, entre 10.3 m/s (20 nudos) y 36 m/s (70 nudos)

anterior, en el momento en que al sistema se le impone una situación de velocidad de vuelo constante se alcanza el equilibrio con relativa rapidez.



## Parte III

# Apéndices





## Apéndice A

# Derivadas de estabilidad del helicóptero BO-105

Las gráficas que se presentan a continuación comprenden tanto las derivadas de estabilidad longitudinales como las derivadas de control, asociadas al helicóptero BO-105, en función de la velocidad. Extraídas de [Pad96], comprenden el punto de partida para el desarrollo de las plantas sobre las cuales se aplican los diferentes controladores para la consecución de los objetivos propuestos a lo largo del proyecto. Más información sobre la obtención de este modelo puede encontrarse en [Pad96]

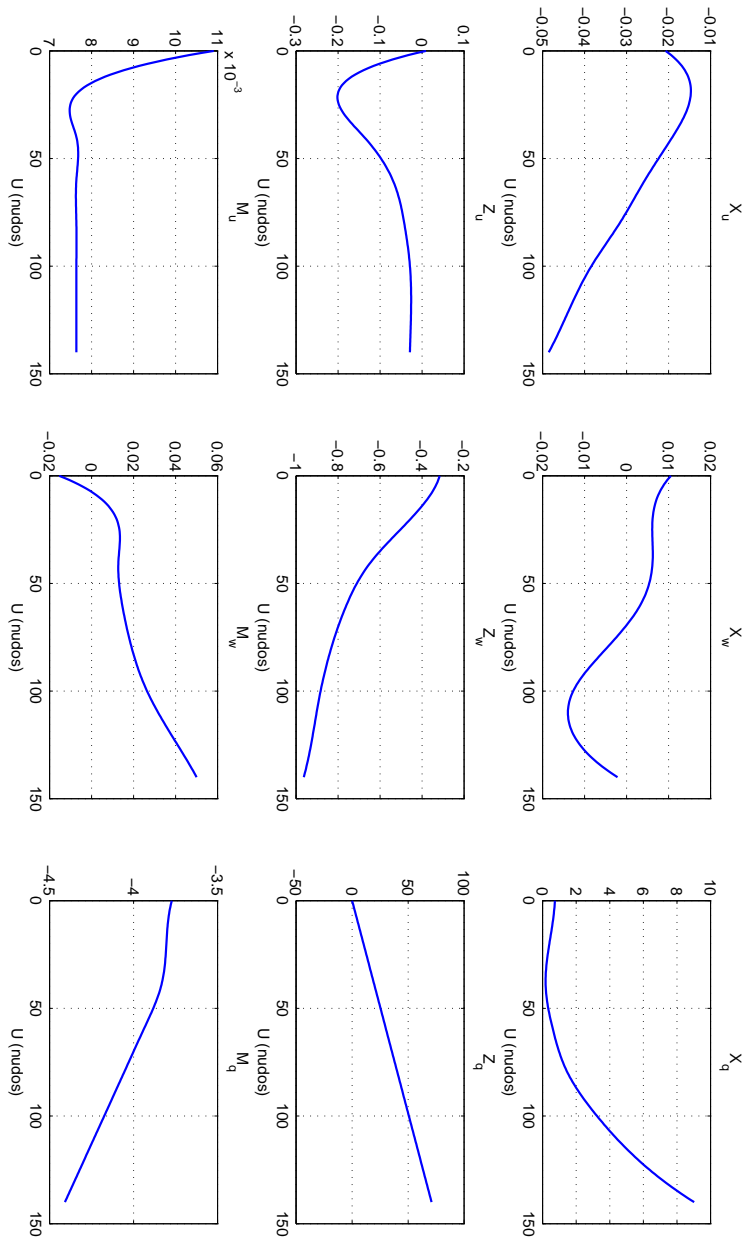


Figura A.1: Derivadas de estabilidad longitudinales para el helicóptero BO – 105

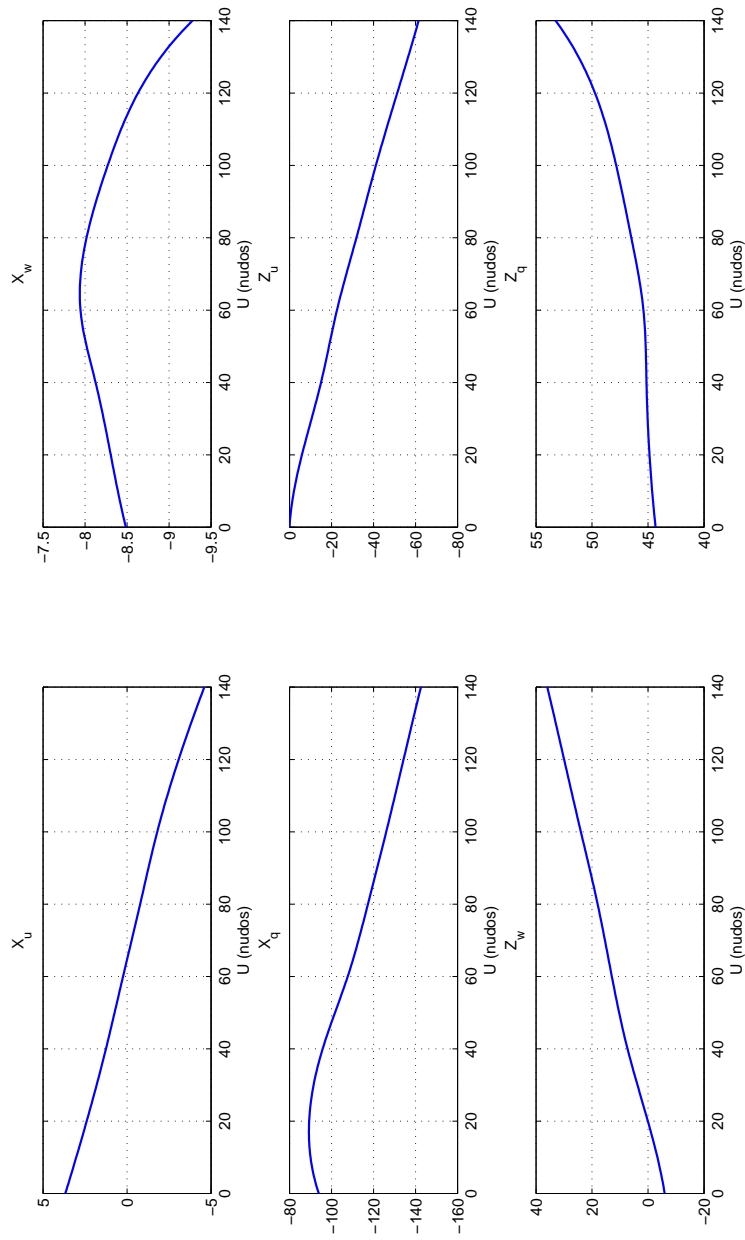


Figura A.2: Derivadas de control longitudinales para el helicóptero BO – 105



## Apéndice B

# Modelo no lineal de la dinámica del helicóptero BO-105

En las siguientes líneas se recoge una descripción general del modelo no lineal para la representación de la dinámica longitudinal del helicóptero BO-105. Dicho modelo forma parte del proyecto de carrera de D. Francisco Gavilán Jiménez, titulado *Diseño de sistemas de control para helicópteros mediante combinación de controles óptimos basados en modelos linealizados*, a quien corresponden los créditos de su creación.

El modelo está basado en la implementación de forma continua de las matrices de estado del sistema, A y B, así como las matrices de ganancia K. De esta forma, en todo momento de la integración con respecto al tiempo se actualiza tanto las matrices que definen el modelo como los controladores aplicados.

Como se observa en la figura B.1, las entradas al sistema son múltiples, pudiendo definirse las condiciones iniciales del sistema, la inclusión de control externo independiente de los estados, la imposición de perturbaciones debidas a viento, o bien la imposición de una velocidad o perfil de velocidades de vuelo de referencia. Con todas estas posibilidades se pretende disponer de un amplio abanico sobre el que testar los controladores desarrollados.

Entrando en el propio modelo dinámico, independientemente de los controles aplicados, la figura B.2 muestra los bloques que componen el modelo y le proporcionan su carácter no lineal. El proceso de integración que lleva a cabo, en líneas generales, es el siguiente:

- A través del vector de estados absolutos en  $t - 1$  se calcula la velocidad de vuelo V:  $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$
- Con este valor de V se calculan los estados y controles de equilibrio,  $x_e$  y  $u_e$ . La resta de los estados absolutos del tiempo  $t - 1$  y los de equilibrio recién calculados proporciona las variables

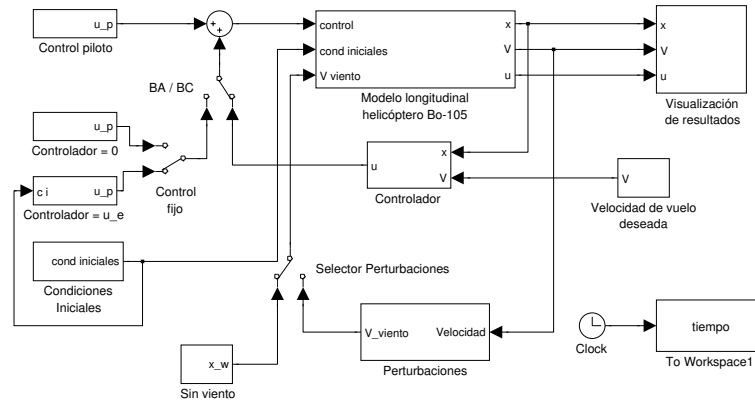


Figura B.1: Modelo no lineal adaptativo de la dinámica longitudinal del BO-105

de perturbación,  $\Delta x$  y  $\Delta u$ .

- Estas variables de perturbación, combinadas con las matrices de estado A y B, proporcionan la derivada del estado, en la forma  $\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$ .
- La derivada del estado permite el cálculo del estado en el siguiente instante:  $x(t) = x(t-1) + \dot{x}\Delta t$ .
- El estado recién calculado vuelve a realimentar el ciclo para continuar las integraciones durante el tiempo estipulado.

De esta forma, el modelo planteado consigue modelar de forma correcta la no linealidad producida por la variación de la planta del sistema con la velocidad de vuelo, de manera que los controladores testados sobre esta plataforma con éxito tienen la capacidad de regular con satisfacción las no linealidades presentadas, por lo que configuran un primer paso importante para su testeo en sistemas reales con mayor número de no linealidades y grados de libertad.

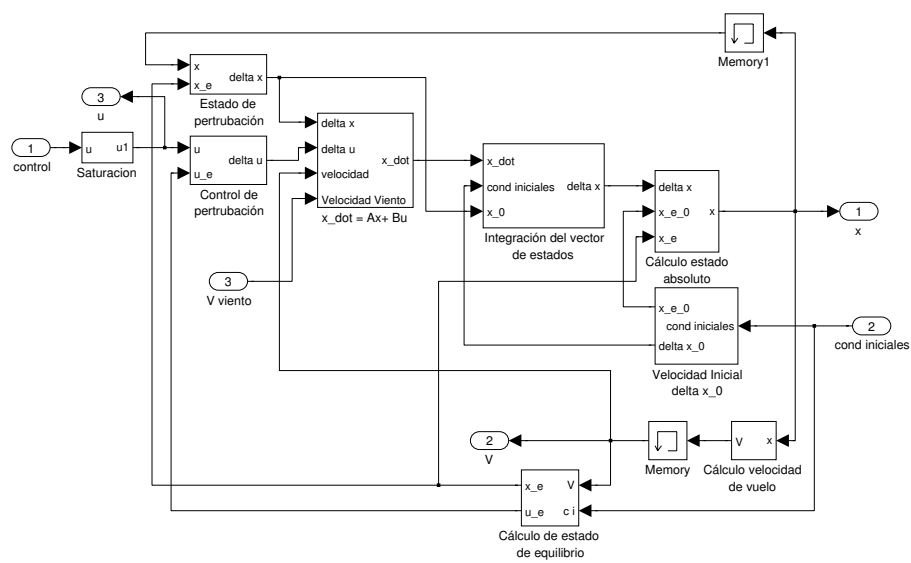


Figura B.2: Modelo no lineal adaptativo de la dinámica longitudinal del BO-105





# Bibliografía

- [AKC02] Eric W. H. Fitzpatrick Alastair K. Cooke. *Helicopter Test and Evaluation*. AIAA, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.
- [Ano61] Anon. *Military Specification (MIL-H-8501A) - General Requirements for Helicopter Flying and Ground Handling Qualities*. US Army AVSCOM, 1961.
- [AVS89] AVSCOM. *Aeronautical Design Standard (ADS-33C) - Handling Qualities for Military Helicopters*. US Army AVSCOM, 1989.
- [BDA90] John B. Moore Brian D.O. Anderson. *Optimal Control. Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, 1990.
- [Fra02] James A. Franklin. *Dynamics, Control, and Flying Qualities of V/STOL Aircraft*. AIAA, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.
- [Joh80] W. Johnson. *Helicopter Theory*. Dover, 1980.
- [KJA97] Björm Wittenmark Karl J. Aström. *Computer controlled systems : theory and design*. Prentice-Hall, 1997.
- [McL90] Donald McLean. *Automatic flight control systems*. Prentice Hall, 1990.
- [Oga98] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderno*. Pearson Educación, 1998.
- [Pad96] Gareth D. Padfield. *Helicopter Flight Dynamics*. Blackwell Science, 1996.
- [Pro95] Raymond W. Prouty. *Helicopter Performance, Stability, and Control*. Krieger Publishing Company, 1995.
- [UE01] Eronini Umez Eronini. *Dinámica de sistemas y control*. Thomsom Learning, 2001.