

Anexo B

Aproximación diseño de la base1 de la barra

La finalidad de la base1 de la barra sirve, como su nombre indica, de apoyo a la estructura estudiada (barra empotrada en uno de sus extremos). Esta estructura, al estar unida con la de objeto de estudio, forma con ella un conjunto estructural en sí mismo. Por tanto, los parámetros que se obtengan estarán afectados por la presencia de la base1. Se hace por tanto necesario un diseño coherente con el objetivo buscado. Si se desea que la barra se comporte como una barra empotrada, el dimensionamiento de la base1 deberá contemplar este hecho.

Fase de definición

Diferentes son las especificaciones y requerimientos a la hora de plantear el diseño. En el siguiente cuadro se analizan:

Tipo	Requerimientos
Dimensional	La placa situada en la estructura del laboratorio donde se realizarán los distintos ensayos contiene unos taladros fijados, tanto en separación como en tipo de rosca. Estos se encuentran formando cuadrados de 100x100 con una M10.
Estructural	La barra unida a la base debe tener un comportamiento similar al de una barra empotrada, por tanto, desplazamiento y rotación del punto empotrado deben tender a cero. Por otro lado, se debe diseñar la unión entre la placa y la base1.
Material	Para aprovechar el material de la barra, la base será del mismo material que ella, por tanto las características del material vienen fijadas.

Tabla B. 1 Requerimientos base1

Fase de concepción

Observando el cuadro anterior, podemos ver que en la base1, de forma cuadrada 100x100 y tipo de material dado, sólo tenemos como espesor la variable a modificar para el diseño. Este parámetro hará que se cumpla con el requerimiento estructural, mediante la condición de convergencia de las primeras frecuencias de la estructura, y con este los tres requerimientos fijados.

Para la fase de concepción, se debe modelar estructuralmente la base1. La unión de la base1 y la barra se realizará mediante una tuerca enroscada al extremo de la barra que traspasa la base1, tal y como muestra la siguiente figura:

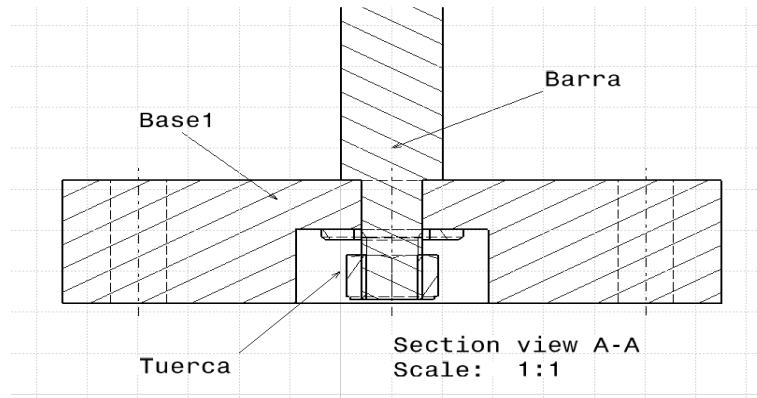


Fig. B. 1 Unión diseño base1

El proceso para obtener la rigidez al giro ($K_\theta = M/\theta$) que la base1 opone a la barra (se supondrá que la rigidez a desplazamiento es infinita) es el siguiente: suponemos la base1 como una barra empotrada (unión de los cuatro tornillos en las esquinas). El modelo a resolver es:

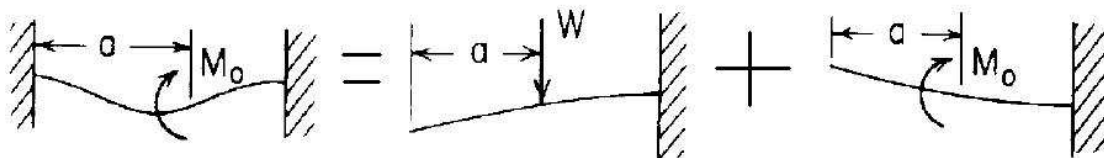


Fig. B. 2 Superposición problema diseño base1

Con la condición de compatibilidad de que el desplazamiento en el problema1 debe ser igual y contraria al desplazamiento en el problema2.

De las ecuaciones de [6] tenemos, para cada sub-problema:

Parámetro	Problema1	Problema2
Giro	$\theta_A = \frac{W(L - a)^2}{2EI}$	$\theta_A = -\frac{M_0(L - a)}{EI}$
Desplazamiento	$y_A = -\frac{W(2L^3 - 3L^2a + a^3)}{6EI}$	$y_A = \frac{M_0(L^2 - a^2)}{2EI}$

Tabla B. 2 Condiciones de superposición base1

Igualando los desplazamientos tenemos:

$$W = \frac{3M_0}{2L} \quad (\text{B.1})$$

Finalmente, sumando los giros y observando que $L=50\text{mm}$, la expresión de la rigidez es:

$$K_\theta = \frac{8EI}{L} \quad (\text{B.2})$$

En la variable I (inercia) se encuentra el espesor "e", $I = Le^3/12$, por lo que finalmente tenemos:

$$K_\theta = \frac{2}{3} Ee^3 \quad (\text{B.3})$$

Esta rigidez entrará como dato a la hora de calcular las frecuencias naturales de la barra.

Al tener modelada la base1, pasamos a obtener las frecuencias naturales de la estructura (barra). Para ello, aprovechando que la Inercia y Módulo Elástico de la misma es constante, calcularemos estas mediante la ecuación diferencial que gobierna el movimiento, que es para un estado sin cargas [2]:

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + m(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Suponiendo una solución del tipo $v(x,t) = y(x)Y(t)$, se puede llegar a demostrar que:

$$y(x) = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax + A_3 \cosh(ax) + A_4 \sinh(ax) \quad (\text{B.5})$$

Con $a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$

Las condiciones de contorno son las siguientes:

Condición	X=0	X=longBarra
$y(x)$	0	-
$y'(x)$	$\frac{EIy''(x=0)}{K_\theta}$	-
$y''(x)$	$\frac{K_\theta y'(x=0)}{EI}$	0
$y'''(x)$	-	0

Tabla B. 3 Condiciones de contorno barra-base1

Como se observa, son las mismas condiciones de contorno en derivada primera y segunda en $x=0$ al existir la rigidez de la base1 (modelado como un muelle de constante elástica K_θ).

Por otro lado, en $x=L$, solo se puede imponer que los esfuerzos son nulos.

La solución se buscará imponiendo las condiciones de contorno e igualando el valor del determinante a cero. Se comprobará con las tres primeras frecuencias de empotramiento “perfecto”, las cuales las encontramos en [1]. Conforme se vaya variando el espesor de la base, y con él la rigidez K_θ , se buscará una solución de compromiso para dar por aceptable nuestro empotramiento en la base1.

Hay que recordar en este punto que la barra es de sección rectangular. Por tanto, dependiendo de la dirección en la que excitemos, tendremos un valor de inercia distinto, y unas características dinámicas diferentes. Para el diseño, se estudiará la sección que impone una inercia mayor, es decir, en la dirección de 20mm.

En la siguiente figura podemos ver las tres primeras frecuencias de una barra con unas características E, I, L, m y sus modos asociados:

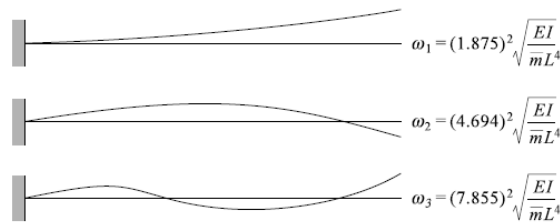


Fig. B. 3 Tres primeros modos teóricos

Se resumen en el siguiente cuadro dichas frecuencias con “empotramiento perfecto” para la barra estudiada (20x15x900):

Frecuencias Barra Empotramiento Perfecto
$f_1 = 20.63 \text{ Hz}$
$f_2 = 129.28 \text{ Hz}$
$f_3 = 362.03 \text{ Hz}$

Tabla B. 4 Tres primeras frecuencias analíticas

En la siguiente figura se representan los errores relativos en % de las frecuencias obtenidas con distintos espesores de la base1 respecto a las frecuencias ideales arriba descritas, definido como:

$$error = \frac{\omega_{ideal} - \omega_{base1}}{\omega_{ideal}} \quad (B.6)$$

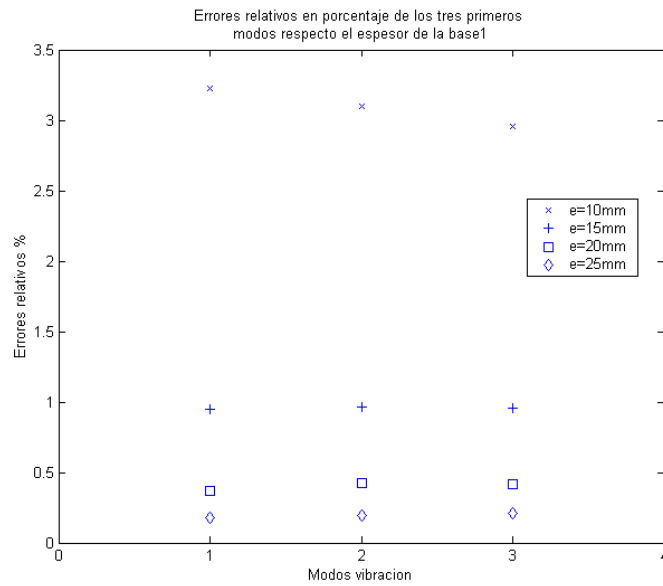


Fig. B. 4 Errores relativos de las frecuencias de vibración

Se observa que con un espesor de 15mm el error cometido es aproximadamente del 1% en las tres frecuencias. Teniendo en cuenta la cantidad de material que se debe usar para la construcción de la base1, se toma como espesor de diseño 15mm.

La siguiente gráfica representa el valor de la primera frecuencia con distintos valores del espesor, siendo esta representación sólo informativa para demostrar la convergencia hacia el caso “ideal” a medida que se aumenta el espesor de la base, y con él su rigidez:

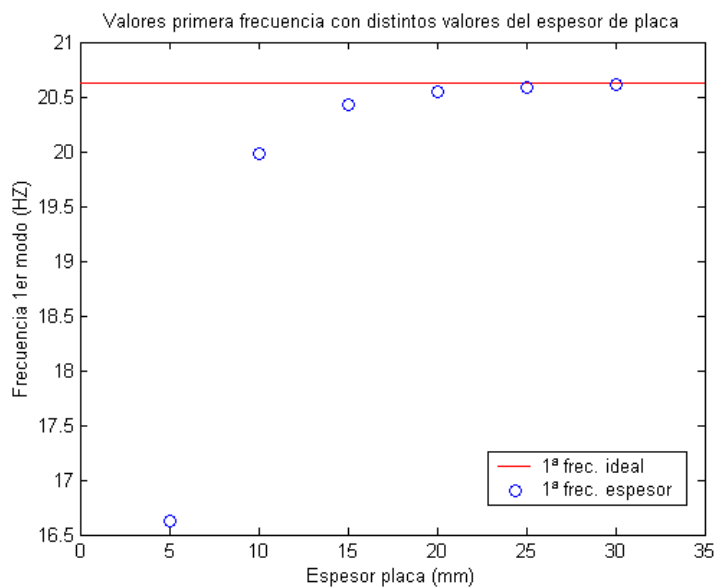


Tabla B. 5 Convergencia del primer modo con el espesor de la base1

Este espesor escogido atiende sólo a la especificación estructural en cuanto a frecuencias se refiere. La otra especificación estructural, la de unión de la barra con la placa, requiere el uso de una tuerca de M12. Estas tienen una altura de 10mm. Debido a la necesidad de arandela y de tener una superficie plana en la parte inferior de la base1 para su posterior unión a la placa de la estructura del laboratorio, se le suman a los 15mm de la base1 de diseño otros 15mm. Esta incorporación de material esta en el lado de seguridad, pues disminuirán los errores relativos de las frecuencias.

Finalmente se realizan los planos necesarios para la construcción de la base1. Se hace referencia a estos en el anexoC.