

2. Introducción al análisis dinámico

2.1 Introducción

El análisis dinámico puede estructurarse en tres etapas, llamado también “ruta teórica” para el análisis de vibraciones. La primera fase comienza con una descripción de las características físicas de la estructura, normalmente en términos de propiedades de masa, rigidez y amortiguamiento. A esta primera etapa se la denomina “Modelo Espacial”.

Tras la formulación del modelo espacial en las ecuaciones que gobiernan su comportamiento, se pasa a la segunda etapa donde se describe el comportamiento de la estructura a través de los modos de vibración. Esta segunda etapa es llamada “Modelo Modal”. Se presenta un conjunto de frecuencias naturales al que corresponden factores de amortiguamiento y modos de vibración. Esta solución describe siempre las distintas formas en la que la estructura es capaz de deformarse al vibrar de forma libre, es decir, sin aplicación de fuerzas externas.

La tercera y última etapa es la que generalmente tiene más interés. En esta se realiza un análisis del comportamiento de la respuesta de la estructura estudiada bajo distintas condiciones de carga dadas. En esta fase se obtienen las amplitudes bajo dichas cargas. Es llamada “Modelo de Respuesta”.



Fig. 2. 1 Ruta teórica de análisis de vibraciones

2.2 Sistemas de un grado de libertad

El sistema de un grado de libertad (SDOF) es el más sencillo para ilustrar muchos de los conceptos relacionados con el problema del análisis de vibraciones. Aunque la mayoría de las estructuras deben ser modeladas como sistemas de varios grados de libertad (MDOF), estas pueden ser estudiadas como superposición lineal de un número de sistemas de un solo grado de libertad. De ahí la importancia de estudiar estos sistemas.

El modelo básico de un SDOF puede verse en la Fig. 2.2, donde $f(t)$ y $x(t)$ son las variaciones de la fuerza aplicada y el desplazamiento, respectivamente. El modelo espacial de este sistema consiste en una masa m , un amortiguador k y un amortiguamiento viscoso c .

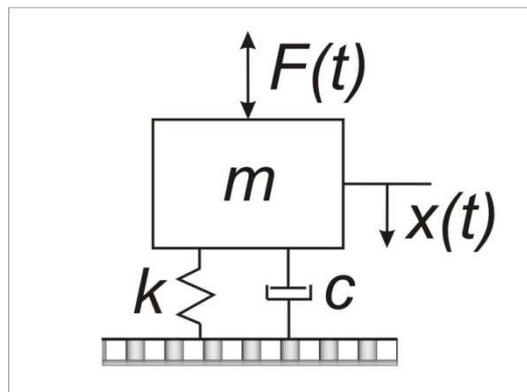


Fig. 2. 2. Esquema de un SDOF

La ecuación general que gobierna el movimiento de este sistema de un grado de libertad es:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (2.1)$$

2.2.1 Sistemas no amortiguados

Para este caso, el *modelo espacial* consiste sólo en una masa m un resorte k .

Primero consideremos un sistema sin fuerzas externas aplicadas, es decir, $f(t)=0$. La ecuación de gobierno queda entonces:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.2)$$

Si suponemos la solución de la forma $x(t) = X e^{i\omega t}$, tendremos:

$$(k - \omega^2 m) = 0$$

De esta forma, el *modelo modal* consiste en una solución simple (modo de vibración) con una frecuencia natural dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si se pasa al *modelo de respuesta*, considerando una excitación y una solución en respuesta dada de la forma:

$$F(t) = F e^{i\omega t}$$

$$x(t) = X e^{i\omega t}$$

donde X y F son complejos, tenemos la ecuación de movimiento de la forma:

$$(k - \omega^2 m) X e^{i\omega t} = F e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

Extrayendo el modelo de respuesta de nuestro sistema SDOF sin amortiguar tenemos:

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 m)}$$

2.2.2 Sistemas amortiguados

La amortiguación es el fenómeno por el que se disipa energía mecánica (normalmente convertida en energía térmica interna) en los sistemas dinámicos. Un conocimiento del nivel de amortiguación en un sistema es de importante relevancia, tanto en el análisis como en los ensayos realizados.

A la hora de caracterizar el amortiguamiento en un sistema dinámico, es importante entender primero los mecanismos asociados con la disipación de energía mecánica. Luego, disponer un modelo para representar dicha disipación. Finalmente, determinar los valores asociados, por ejemplo, mediante test.

Sabemos que existe cualquier forma de disipación de energía mecánica en los sistemas dinámicos. Sin embargo, en multitud de casos, si la energía disipada durante un intervalo de tiempo de interés es pequeña en comparación con la energía inicial, se puede obviar el término de amortiguación. De hecho, se suele realizar un primer estudio de cualquier estructura sin amortiguación, teniendo así un modelo para el desarrollo, para después, en una segunda etapa, realizar un estudio más detallado, en el que este término esté presente. Existen distintos tipos de amortiguación inherentes en los sistemas mecánicos. El amortiguamiento puede dividirse en

- Amortiguamiento fluido (viscoso o turbulento)
- Amortiguamiento seco o de Coulomb
- Amortiguamiento histerético o estructural

El amortiguamiento fluido se da por el paso obligado de un fluido a través de un orificio. Puede ser viscoso, en cuyo caso la fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad, o turbulento, en cuyo caso es proporcional al cuadrado de la velocidad. El tipo más usado es el viscoso. En este el flujo es laminar y genera ecuaciones lineales. La constante depende de la viscosidad del fluido, de la superficie de contacto y del espesor de película.

El seco o de Coulomb se origina por el rozamiento de dos superficies entre las que no existe ningún medio que lo atenúe. Es el caso típico producido por el deslizamiento de un cuerpo sobre otro. En este caso la fuerza amortiguadora se supone constante y depende de la naturaleza de los materiales y del estado de la superficie de contacto.

El amortiguamiento estructural de materiales se origina por la disipación de energía asociada a defectos en la microestructura, tales como límites de grano e impurezas, movimientos de dislocaciones en metales... Existen multitud de modelos que han sido empleados para representar este tipo de disipación. Significa esto que un solo modelo no es significativo ni satisfactorio para representar este fenómeno en todos los materiales.

2.2.2.1 Amortiguamiento viscoso

Si se añade a la ecuación de movimiento libre un amortiguamiento viscoso c , esta queda de la forma expresada en la ecuación (2.1) sin el término de la fuerza externa.

Probamos con una solución de la forma:

$$x(t) = X e^{st} \quad (\text{donde } s \text{ es un número complejo})$$

De esta forma, la ecuación en s queda:

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{2.4}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene:

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\omega_0 \xi \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \tag{2.5}$$

Las relaciones entre los parámetros son:

$$\omega_0^2 = k/m \quad ; \quad \xi = c/c_0 = c/2\sqrt{km}$$

Esta expresión del valor de s implica una solución modal:

$$x(t) = X e^{-\omega_0 \xi t} e^{i \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t}$$

La solución está compuesta por:

- Una parte imaginaria o oscilatoria, de frecuencia $\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$,
- Una parte real o decaimiento, con un factor de amortiguamiento de $\omega_0 \xi$.

En la siguiente figura podemos ver un ejemplo de solución, donde a lo largo del tiempo la oscilación va decayendo:

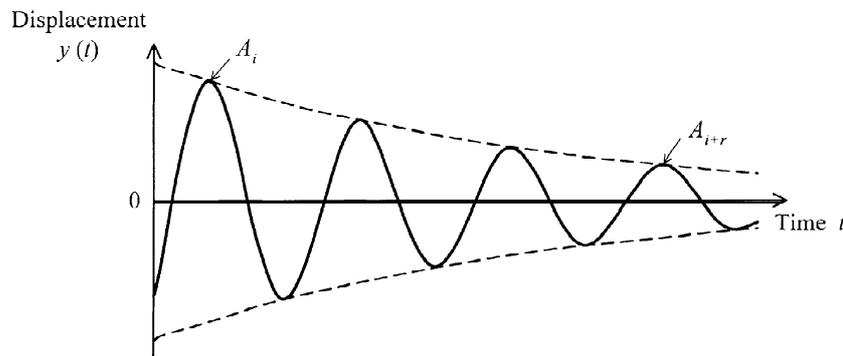


Fig. 2. 3 Respuesta modelo con amortiguamiento

En caso de aplicar una fuerza externa, teniendo esta una expresión $f(t) = F e^{i \omega t}$ y probando una solución del tipo $x(t) = X e^{i \omega t}$, tenemos la relación:

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2) + i \omega c} \quad (2.6)$$

Al ser una solución imaginaria, contiene información del módulo y de la fase del desplazamiento respecto a la fuerza.

La expresión (2.6) puede igualmente ser expresada de la forma siguiente, diferenciado módulo y fase:

$$\frac{|X|}{|F|} = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}}$$

Las siguientes figuras muestran los incrementos de desplazamientos ($D=P/k$) y desfase respecto a la frecuencia $\beta = \omega / \sqrt{k/m}$ para un sistema de un grado de libertad con distintos valores de coeficiente de amortiguamiento:

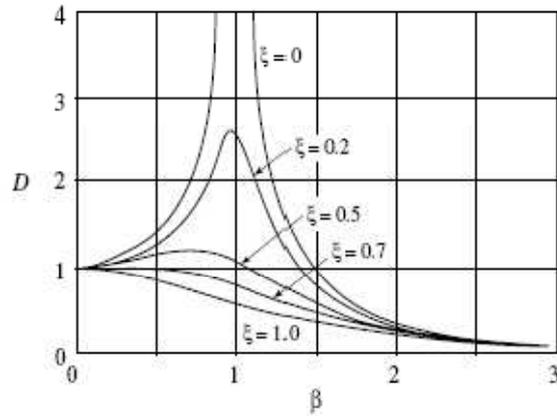


Fig. 2. 4 Módulo respuesta en frecuencia de un SDOF

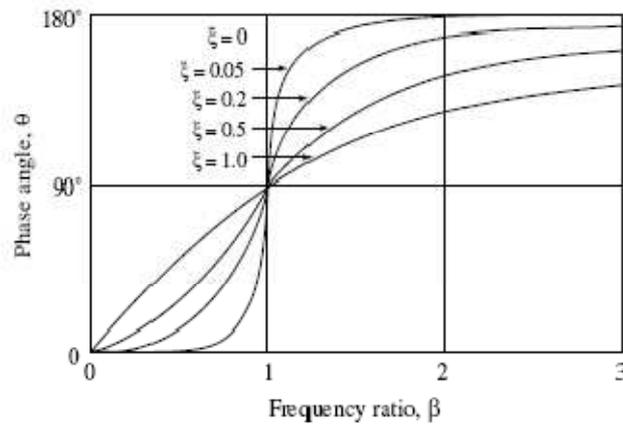


Fig. 2. 5 Fase de respuesta en frecuencia de un SDOF

2.2.2.2 Amortiguamiento estructural

Como se comentó al principio del apartado, para el caso de modelización del amortiguamiento estructural, se prescribe:

$$c_e = \frac{d}{\omega}$$

Tal y como se hizo en la sección 1.2.2.1, se plantea la ecuación de movimiento con el término de fuerza y se ensayan soluciones del tipo $x(t) = X e^{i\omega t}$.

La relación, de nuevo compleja, entre desplazamiento y fuerza es ahora:

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2) + id} \quad (2.7)$$

Por último se puede ver la energía disipada en cada ciclo. Si se integra en un ciclo la fuerza por la velocidad se tiene:

$$\Delta U = \pi d X^2$$

Donde X es el máximo desplazamiento.

2.2.3 Representación de la respuesta en frecuencia

A lo largo de los apartados anteriores han ido apareciendo expresiones que relacionaban el desplazamiento con la fuerza excitadora. Esta función, con la frecuencia (ω) como variable independiente, recibe el nombre de *función de respuesta en frecuencia* (FRF).

Al ser una relación de variables complejas, debemos distinguir entre su amplitud y fase, o parte real y parte imaginaria, teniendo en cuenta la aparición de la variable independiente. Por ello, existen cuatro formas más comunes de representar la FRF:

- Módulo de la FRF contra la frecuencia y fase de la FRF contra la frecuencia (son necesarios dos gráficas por tanto).
- Parte real contra frecuencia y parte imaginaria contra frecuencia (de nuevo dos gráficas son necesarias)
- Parte real de la inversa de la FRF contra la frecuencia y parte imaginaria de la inversa de la FRF contra la frecuencia.
- Parte real de la FRF contra la parte imaginaria de la FRF (también llamada de Nyquist)

En este último, el del diagrama de Nyquist, se trata de una gráfica única, por lo que falta información sobre las frecuencias, que debe añadirse identificando su valor en puntos representativos. Se puede demostrar que la gráfica en este caso tiene apariencia de círculo (teóricamente así es, aunque experimentalmente no siempre es posible). Si el amortiguamiento es viscoso, la circunferencia aparece desplazada en el eje real; en cambio si es modelada con amortiguamiento estructural, el desplazamiento es en el eje imaginario. En la siguiente figura podemos ver una representación general del diagrama de Nyquist:

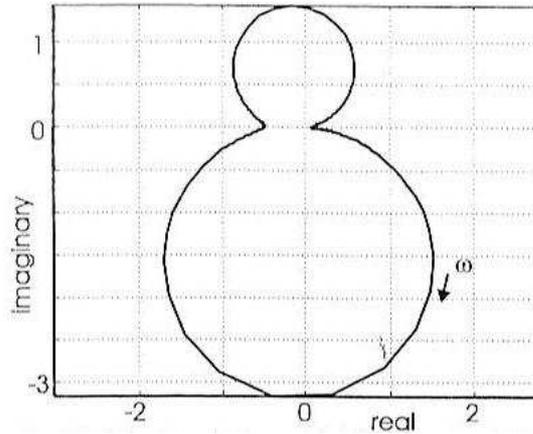


Fig. 2. 6 Representación FRF de Nyquist

2.3 Sistemas de varios grados de libertad

Para un sistema de varios grados de libertad (MDOF), con N grados de libertad, la ecuación general de movimiento puede expresarse de forma matricial de la forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.8)$$

Donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente, de dimensión $N \times N$. Los vectores $x(t)$ y $f(t)$ representan la variación con el tiempo de los desplazamientos y las fuerzas, respectivamente.

2.3.2 Vibraciones no amortiguadas libres

Consideremos en primer lugar la vibración libre, para determinar las propiedades modales del sistema. La ecuación de gobierno queda de la forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = 0 \quad (2.9)$$

Si asumimos el tipo de solución, tal y como se hizo en los sistemas de un solo grado de libertad, pero en este caso vectorial de la forma:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$$

Donde $\{X\}$ es un vector $N \times 1$ independiente del tiempo.

Si sustituimos en la ecuación (2.9), llegamos a la expresión:

$$([K] - \omega^2[M])\{X\}e^{i\omega t} = 0 \quad (2.10)$$

Si observamos esta expresión, podemos ver que la condición para que exista movimiento (no solución trivial) debe cumplirse que el determinante de la matriz sea nulo. Es decir:

$$\det|([K] - \omega^2[M])| = 0 \quad (2.11)$$

Resolviendo este determinante, que es una ecuación de grado N, obtendremos las frecuencias naturales del sistema no amortiguadas.

Asociada a cada valor de las frecuencias halladas, tenemos la forma de movimiento del sistema, es decir, los valores del vector $\{X\}$. Cada uno de ellos son los modos de vibración, y se calculan sustituyendo cada una de las frecuencias en la ecuación (2.10).

Por tanto, la solución completa del espacio modal puede expresarse en la forma de dos matrices, una diagonal, donde se representan las frecuencias naturales, y otra matriz de autovalores, que llamaremos Ψ , cuyas columnas están asociadas a las mismas:

$$[\omega^2], [\Psi]$$

2.3.3 Propiedades de ortogonalidad

El modelo modal posee ciertas propiedades importantes, conocidas como propiedades de ortogonalidad.

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [M] [\Psi] &= [m_r] \\ [\Psi]^T [K] [\Psi] &= [k_r] \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde se puede ver que: $[\omega_r^2] = [m_r]^{-1} [k_r]$. Las matrices m_r y k_r se llaman masa modal y rigidez modal del modo r .

Como la matriz de autovectores no es única, pues el escalado de los modos de vibración sigue cumpliendo con la ecuación (2.10), los valores de masa y rigidez modal no son únicos. Se plantea la siguiente normalización:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$$

De esta forma tenemos:

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\omega_r^2]$$

La relación entre los modos normalizados y los calculados de manera general son entonces:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi\}_r$$

Donde $m_r = \{\psi\}_r^T [M] \{\psi\}_r$.

Se puede demostrar mediante operaciones matriciales que:

$$\{\psi\}_r^T [M] \{\psi\}_s = 0; r \neq s$$

$$\{\psi\}_r^T [K] \{\psi\}_s = 0; r \neq s$$

En caso de ser $r=s$ o $\omega_r = \omega_s$, tenemos:

$$\{\psi\}_r^T [M] \{\psi\}_r = m_r$$

$$\{\psi\}_r^T [K] \{\psi\}_r = k_r$$

2.3.4 Vibraciones no amortiguadas excitadas

Consideremos en caso en el que la estructura es excitada por un conjunto de fuerzas de forma sinusoidal con la misma frecuencia ω , aunque la magnitud y la fase sean distintas. La fuerza puede representarse de la forma:

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$$

Como siempre, probemos la solución de la forma:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$$

Recordemos que $\{F\}$ y $\{X\}$ son vectores $N \times 1$ de magnitudes complejas independientes del tiempo.

La ecuación de movimiento (2.8) sin el término de amortiguación pasa a ser:

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

Si invertimos la matriz, tenemos finalmente que los desplazamientos son:

$$\{X\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{F\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (2.14)$$

Mediante las propiedades ortogonales vistas en el apartado anterior, usando las relaciones (2.12) podemos llegar a:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi][(\omega_r^2 - \omega^2)][\Phi]^T \quad (2.15)$$

Esta última ecuación (2.15) podrá expresarse en la forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (2.16)$$

Donde rA_{jk} es llamado residuo o constante modal, y es de gran importancia en el análisis modal experimental.

2.3.5 Vibraciones libres amortiguadas. Matriz de amortiguamiento proporcional

Si la matriz de amortiguamiento $[C]$ puede expresarse como una combinación lineal de las matrices de masa $[M]$ y $[K]$ de la forma:

$$[C] = \beta[K] + \gamma[M] \quad (2.17)$$

Tomando como modos de vibración los mismos que en el caso no amortiguado, tenemos que el término de amortiguación es:

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \beta [\Phi]^T [K] [\Phi] + \gamma [\Phi]^T [M] [\Phi] = \beta [\omega_r^2] + \gamma$$

Al ser diagonal también, y al ensayar en la ecuación (2.8) sin el término de fuerza la solución de la forma:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{pt}$$

Tenemos que sólo varían las frecuencias de vibración.

Se puede comprobar entonces que la solución modal del sistema libre con amortiguamiento proporcional de un MDOF es:

$$\omega'_r = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}; \quad \xi_r = \beta \omega_r / 2 + \gamma / 2 \omega_r$$

$$[\Psi_{\text{amortiguado}}] = [\Psi_{\text{no amortiguado}}]$$

Se puede realizar un tratamiento análogo al caso de amortiguación estructural.

2.3.6 Vibraciones amortiguadas excitadas

En el caso de un sistema de varios grados de libertad excitado, en el cual introducimos la matriz de amortiguamiento, se complica la obtención de la solución con respecto a los pasos vistos en el apartado 2.3.3.

Retomando la ecuación (2.8), y una vez realizadas las derivaciones pertinentes de la solución admitida del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$$

Podemos escribir entonces:

$$\{X\} = ([K] - \omega^2[M] + i\omega[C])^{-1}\{F\} \quad (2.18)$$

De nuevo, como ocurría en el apartado 2.3.3, esta expresión no es conveniente desde el punto de vista de aplicaciones numéricas. Se realizará un procedimiento análogo al visto en esa sección, pero con ciertas modificaciones.

En primer lugar, se define un nuevo vector de coordenadas $\{u\}$, que será de orden $2N$, y el cual se define como:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}_{(2Nx1)} \quad (2.19)$$

Calculemos primero el problema sin excitación. Si en la ecuación (2.8) sin término de fuerza introducimos (2.19):

$$[C: M]_{Nx2N}\{\dot{u}\}_{2Nx1} + [K: 0]_{Nx2N}\{u\} = \{0\}_{Nx1} \quad (2.20)$$

Añadimos la siguiente identidad para cerrar el problema:

$$[M: 0]_{Nx2N}\{\dot{u}\}_{2Nx1} + [0: -M]_{Nx2N}\{u\} = \{0\} \quad (2.21)$$

Ahora tenemos $2N$ ecuaciones y $2N$ incógnitas $\{u\}$. De forma matricial podemos expresarla como:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \{\dot{u}\} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \{u\} = \{0\} \quad (2.22)$$

Para proseguir, llamemos a las matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$$

De esta forma, simplificamos la ecuación (2.22) a:

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = \{0\} \quad (2.23)$$

Hemos conseguido expresar la ecuación en una forma estándar. Si asumimos la solución del tipo:

$$\{u\} = \{U\}e^{st}$$

El problema a resolver será:

$$(s_r[A] + [B])\{\theta\}_r = \{0\} \quad ; \quad r = 1, 2N \quad (2.24)$$

Resolviendo el problema, tendremos $2N$ autovalores y $2N$ autovectores del sistema, a los que designaremos por s_r y $\{\theta\}_r$, respectivamente.

Tenemos que, además, se cumplen las relaciones de ortogonalidad, de la forma:

$$[\theta]^T [A] [\theta] = [a_r] \quad (2.25)$$

$$[\theta]^T [B] [\theta] = [b_r]$$

$$\text{Con } s_r = -b_r/a_r$$

Resuelto el problema homogéneo, expresamos el término de fuerza como:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}_{(2N \times 1)}$$

Si se asume una respuesta armónica, al igual que la excitación, podremos llegar mediante una serie de operaciones a la solución de $\{u\}$:

$$\begin{Bmatrix} X \\ \dots \\ i\omega X \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\theta\}_r^T \{P\} \{\theta\}_r}{a_r(i\omega - s_r)} \quad (2.26)$$

Debido a que los autovalores y autovectores aparecen en pares conjugados, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} X \\ \dots \\ i\omega X \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\{\theta\}_r^T \{P\} \{\theta\}_r}{a_r(i\omega - s_r)} + \frac{\{\theta^*\}_r^T \{P\} \{\theta^*\}_r}{a_r^*(i\omega - s_r^*)} \right) \quad (2.27)$$

Usando el hecho de que:

$$s_r = \omega_r(-\xi_r + i\sqrt{1 - \xi_r^2}) \quad (2.28)$$

Podremos llegar a la expresión final del desplazamiento del nodo j cuando existe una fuerza unidad en el nodo k :

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(rR_{jk}) + i(\omega/\omega_r)(rS_{jk})}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r\xi_r} \quad (2.30)$$

Con:

$$(rR_k) = 2(\xi_r \text{Re}\{rG_k\} - \text{Im}\{rG_k\}\sqrt{1 - \xi_r^2})$$

$$(rS_k) = 2\text{Re}\{rG_k\}$$

$$(G) = (\theta_{kr}/a_r)\{\theta\}_r$$

En la siguiente figura se representa a modo de ejemplo el espectro de respuesta general de un nodo i cuando existe una fuerza aplicada en el nodo j. Se distingue entre el módulo y el desfase:

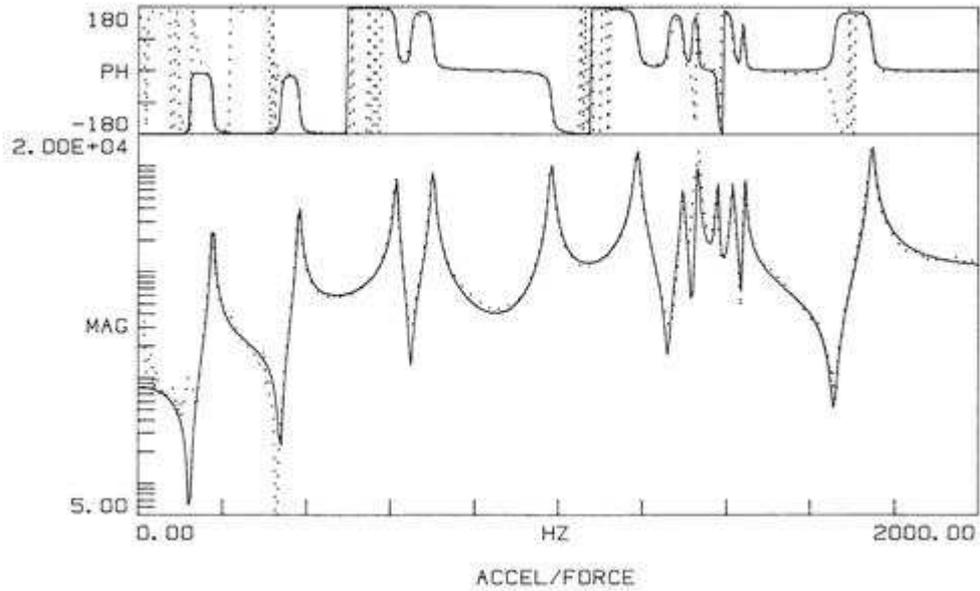


Fig. 2. 7 Módulo y fase en frecuencia de MDOF