

3. Análisis en el dominio de la frecuencia

3.1 Introducción

Normalmente, la fuerza de excitación en los problemas de vibración tiene una naturaleza repetitiva. Ejemplos de ello son excitaciones debida a excentricidad de masas y desequilibrado en componentes rotatorios. En estos casos, normalmente, la frecuencia de respuesta de un sistema dinámico es la respuesta de una excitación sinusoidal.

Si la amplitud y frecuencia de la fuerza excitadora cambia, la respuesta del sistema también cambiará. Por ello, se suele calcular la respuesta del sistema en un rango de frecuencias, siendo esta la *función de respuesta en frecuencia*. Por ello, la variable que manejaremos en este caso no es el tiempo (t), sino la frecuencia (ω).

Las consideraciones del dominio de la frecuencia son aplicables incluso cuando las señales no son periódicas, y por tanto, más realistas. Se pasa al dominio de la frecuencia desde una señal temporal a partir de la transformada de Fourier.

Sin embargo, trabajar en este dominio conlleva una serie de transformaciones en la señal si estamos en el caso experimental. Una serie de problemas relacionados aparecerán en esta sistemática, y serán abordados en la última parte de este punto.

3.2 Análisis de Fourier

En este apartado se describen algunas de las características más importantes del análisis de Fourier, herramienta matemática usada en el análisis modal.

El análisis de Fourier es el paso para el análisis en frecuencia de las señales vibratorias. La representación en el dominio de la frecuencia de una señal de dominio temporal se obtiene a través de esta transformación.

Una de las ventajas más importantes de esta herramienta es que, en ocasiones, operaciones diferenciales en el tiempo (derivadas o integrales) se convierten en operaciones algebraicas.

Recalcaremos tres versiones de la transformada de Fourier:

- a) Transformada integral de Fourier: aplicadas a cualquier señal
- b) Expansión de series de Fourier: aplicables sólo a señales periódicas
- c) Transformada discreta de Fourier: aplicable a señales discretas

a) Transformada Integral de Fourier (FIT)

El espectro de Fourier $X(f)$, de una señal temporal $x(t)$, viene expresada por la siguiente relación:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (3.1)$$

Con la definición de $i = \sqrt{-1}$ y siendo f la frecuencia, variable. Cuando la relación anterior se multiplica por $\exp(i2\pi f\tau)$ e integrado con respecto a la frecuencia f usando la propiedad de ortogonalidad de la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi f(t - \tau)) df = \delta(t - \tau)$$

Se obtiene la transformada inversa, es decir, la señal temporal a través de la función del dominio temporal:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(i2\pi ft) df \quad (3.2)$$

b) Expansión en Series de Fourier (FSE)

Para una señal periódica $x(t)$ de período T, la expansión en serie s de Fourier se define como:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi f_n t + b_n \sin 2\pi f_n t) \quad (3.3)$$

Esta es la definición de la serie de Fourier, aunque existen otras formas alternativas en la aproximación:

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp (i2\pi n t / T) \quad (3.4)$$

Los coeficientes de Fourier se obtienen multiplicando por el coeficiente $\exp (-i2\pi m t / T)$ e integrando con respecto al tiempo, con variación de los límites de integración entre 0 y T, usando la propiedad:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \exp [i2\pi(n - m)t / T] dt = \delta_{nm}$$

Este valor de δ_{nm} se define como:

$$\delta_{nm} = \left\{ \begin{array}{l} 1 ; \text{ si } m = n \\ 0 ; \text{ si } m \neq n \end{array} \right\}$$

c) Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La función es definida ahora por un número discreto de puntos N. La transformada discreta de Fourier relaciona N-elementos secuenciados de una señal discreta (se suele trabajar con señales discretas en los receptores de señal en análisis experimental):

$$\{x_m\} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$$

Con N-elementos de la secuencia espectral:

$$\{X_m\} = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]$$

A través de la siguiente relación:

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m \exp (-i2\pi mn / N); \quad n = 1, N \quad (3.5)$$

Los valores X_n obtenidos se llaman líneas espectrales. Se puede demostrar que estas cantidades aproximan los valores del espectro continuo de Fourier a las frecuencias discretas correspondientes. Por último hay que fijarse además que se cumple la ración $X_{N-r} = X_r^*$.

Las implicaciones de esta transformación son las siguientes:

- La DFT asume necesariamente que la función $x(t)$ es periódica, de ahí a usar en las ecuaciones el periodo definido como T.
- La representación de la DFT es sólo válida en los valores específicos x_k ($x(t)$ en $t = t_k$) usada en la discretización.
- Es importante recalcar el hecho de que tenemos un número limitado de señales N de valores x_k para aproximar, es decir, la serie de Fourier es descrita por N valores. La importancia de la magnitud de la variable N se verá con posterioridad.

Existe la denominada FFT (Fast Fourier Transform), que es una modificación de la DFT. Esta nueva versión es algo más rápida en cuando a cómputo de cálculo se refiere (toma aproximadamente $N \log_2(N)$ operaciones mientras que la DFT estándar tomaría N^2). Esta se aplica cuando el número de muestras de la señal es una potencia de 2.

3.3 Fast Fourier Transform (FFT)

El uso de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) es apropiado para el análisis digital de información, usando un ordenador. La utilización de las relaciones de la DFT, sin embargo, no es computacionalmente eficiente debido a la necesidad de un gran número de operaciones, y necesita gran cantidad de memoria del computador. Por esta razón, el uso de la DFT no fue considerado viable hasta 1965.

El algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) fue publicado por Cooley y Tukey en ese mismo año. Este reducía de una manera considerable el número de operaciones aritméticas requeridas para la transformada de una secuencia de información de N-puntos a un factor de $2N \log_2 N$.

Muchas de las operaciones aritméticas de la DFT son redundantes. La eficiencia del algoritmo de la FFT radica en dividir el procedimiento en varias etapas de tal forma que las operaciones redundantes son obviadas.

Se sabe, en principio, que para obtener los coeficientes se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left[\phi_{-\frac{N}{2}}, \dots, \phi_{-\frac{N}{2}-1} \right] \tilde{u} = A\tilde{u} = u \quad (3.6)$$

Donde $\phi_k(x) = e^{\frac{2\pi i}{L} kx}$.

Sabiendo que las columnas de la matriz de coeficientes son ortogonales en el sentido:

$$\phi_k^* \phi_m = \begin{cases} N, & \text{si } k = m + lN \\ 0, & \text{si } k \neq m + lN \end{cases}$$

y manipulando la matriz A:

$$A^* A = NI$$

Donde I es la matriz identidad.

Podemos escribir por tanto que los coeficientes buscados son:

$$\tilde{u} = \frac{1}{N} (A^* u)$$

Aún se puede seguir reduciendo el número de operaciones necesarias para llegar al cálculo usado por la Transformada Rápida de Fourier. Debido a la propiedad del aliasing:

$$\begin{aligned}\phi_{-N/2} &= \phi_{N/2} \\ &\dots \\ \phi_{-1} &= \phi_{N-1}\end{aligned}$$

Si reescribimos los vectores de la matriz A (llamándolo ahora M) y los coeficientes del vector u, el sistema se puede escribir:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= [\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{N/2-1}, \tilde{u}_{-N/2}, \dots, \tilde{u}_{-1}]^T \\ M &= [\phi_0, \dots, \phi_{N-1}] \\ M\tilde{u} &= u\end{aligned}$$

De nuevo se puede ver que $M^*M = NI$. Al ser la matriz $M = (m_{k,j})_{0 \leq k,j \leq N-1}$, con $m_{k,j} = e^{\frac{2\pi i}{N}kj}$, la matriz M es simétrica. Entonces:

$$NI = M^*M = \bar{M}M; \quad M^{-1} = \frac{1}{N}\bar{M}$$

Es decir, finalmente obtenemos:

$$\tilde{u} = \frac{1}{N}\bar{M}u \tag{3.7}$$

3.4 Conceptos relacionados

Existe una serie de características del análisis digital de Fourier que, si no son tratadas correctamente, pueden llegar a dar errores en los resultados. Estas aparecen como consecuencia de la aproximación por discretización y de la necesidad de limitar en longitud temporal la señal que estemos captando en el experimento.

En los puntos siguientes se describen los más importantes.

3.4.1 Aliasing

Es un problema relacionado con la discretización de la señal de origen temporal. En el proceso de discretización, la existencia de frecuencias altas en la señal original puede no ser captada si el muestreo es demasiado lento. De hecho, esas frecuencias altas pueden aparecer como frecuencias bajas en el sistema.

En la siguiente figura podemos ver el fenómeno. La señal original (línea continua) y los distintos puntos de la señal que capta el sistema de adquisición. La señal con la que trabajamos por tanto tiene una frecuencia menor:

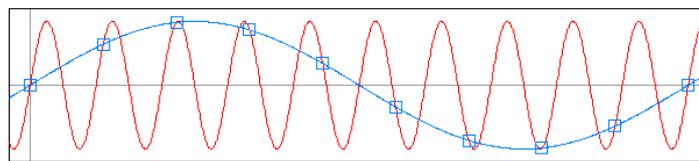


Fig. 3. 1 El fenómeno de aliasing.

Una señal temporal que tiene el espectro mostrado a la izquierda en la fig. 3.2 aparecerá distorsionado como la figura de la derecha. La mayor frecuencia que puede ser incluida en el espectro es $\omega_s/2$.

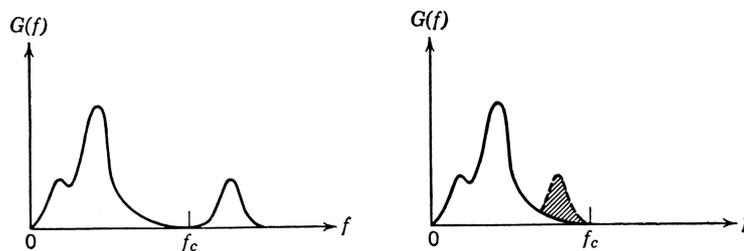


Fig. 3. 2 Distorsión del efecto aliasing

La solución al problema es usar un filtro anti-aliasing cuya finalidad es la de un filtro paso bajo a la señal original. El resultado es modificar la historia temporal en el analizador. Obviamente, como no son perfectos, el corte se produce a lo largo de una región cercana a la frecuencia de Nyquist, la cual se debe desechar. Es esencial tomar las correctas precauciones anti-aliasing.

3.4.2 Leakage

El problema leakage es consecuencia directa de la necesidad de tomar un valor finito en la longitud de la historia temporal y suponerla periódica para realizar el

análisis de Fourier. El problema se ilustra mejor con los dos ejemplos mostrados en las figuras siguientes:

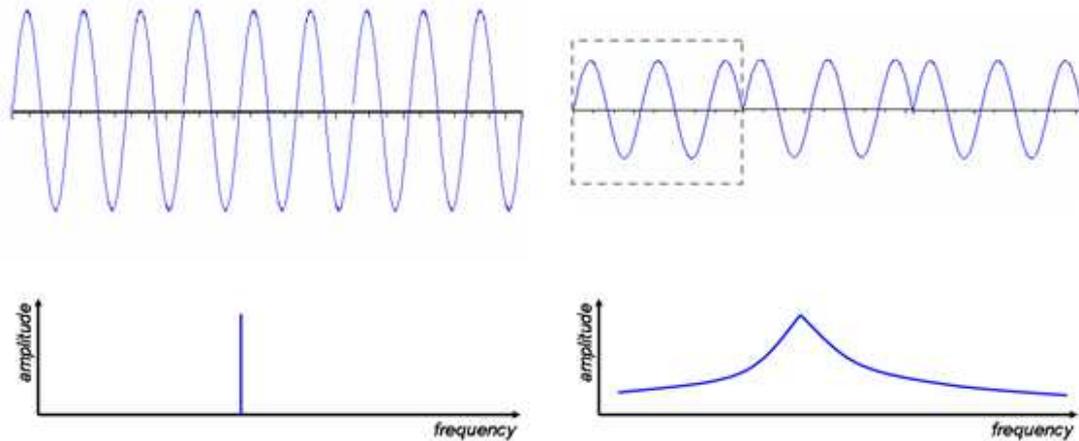


Fig. 3. 3 Efecto leakage

En el primer caso, (a), la señal es perfectamente periódica en el tiempo T , y el resultado del espectro es una línea simple en la frecuencia correspondiente. En el siguiente caso, (b), asumir que es periódico no es estrictamente válido e implica a cada final una discontinuidad. Como consecuencia de esto, el espectro producido no indica una frecuencia simple como la original poseía. La energía ha sido filtrada en una serie de frecuencias cercanas a la frecuencia real.

Estos ejemplos representan el mejor y el peor caso aunque el problema es más acusado cuando la frecuencia de la señal es pequeña.

Este fenómeno es un problema en muchas de las aplicaciones del procesado digital de señales, y es por tanto necesario eliminarlo o en caso de no ser posible, minimizar sus efectos. Existen varias posibilidades para ello:

- Cambiar la duración de medida
- Añadir ceros al final de la medida analizada (“zero padding”).
- Modificando la señal procesada de tal forma que se reduzca la severidad del efecto leakage. Este proceso se refiere al empleo de las llamadas “ventanas”, y es el objetivo del siguiente punto.

3.4.3 Ventanas

En muchas ocasiones, la solución más práctica al problema leakage involucra el uso de ventanas. Existen diferentes clases de ventanas para diferentes tipos de problemas.

Las ventanas imponen un perfil en la señal temporal antes de realizar la transformada de Fourier. Se representan por funciones temporales, $w(t)$, como se muestran en Fig. 3.4. La señal analizada es $\hat{x}(t) = x(t) \cdot w(t)$.

Las ventanas Hanning (b) o Cosine Taper (c) son usadas normalmente para señales continuas, como pueden ser las producidas por vibraciones aleatorias, mientras que la ventana Exponential (d) es usada para vibraciones transitorias, donde es mucho más importante la información concentrada en la parte inicial del tiempo registrado.

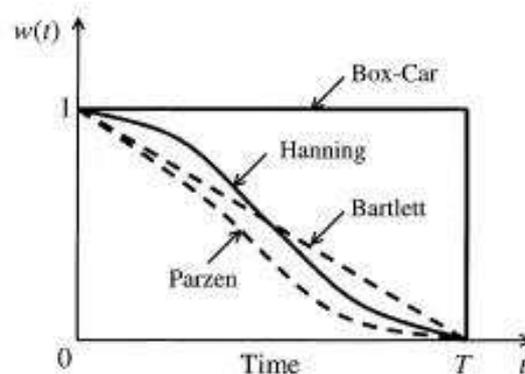


Fig. 3. 4 Distintas ventanas en el dominio del tiempo

En todos los casos, se requiere de un escalado para compensar la atenuación de la señal por la aplicación de la ventana. Sin embargo, si tanto la respuesta como la excitación son afectadas por la misma ventana, y la relación de ambas se procesa para obtener la FRF, no se requiere de la re-escala.

Las ventanas vistas son aplicadas en el dominio del tiempo. No obstante, es posible aplicarlas también en el dominio de la frecuencia, aunque es algo más complejo. Ahora la ventana vendrá representada por $W(\omega)$. Se debe realizar una convolución de las dos funciones para obtener el espectro de salida buscado $\hat{X}(\omega) = X(\omega) * W(\omega)$. Las funciones temporales antes mostradas, tienen una representación en el tiempo de la forma:

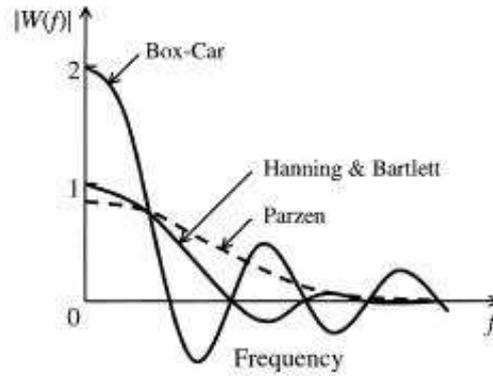


Fig. 3. 5 Distintas ventanas en el dominio de la frecuencia

3.4.4 Filtros

Los filtros se emplean para atenuar partes no deseadas de las señales en el dominio de la frecuencia. Se suelen emplear con señales procedentes de acelerómetros y con transductores de presión y fuerza, con el fin de eliminar la distorsión que se produce a altas frecuencias. Sin embargo, si no se eligen adecuadamente pueden producir una distorsión adicional.

Un filtro tiene la propiedad de eliminar ciertas frecuencias de una señal y dejar pasar las demás sin alterarlas. El funcionamiento de los filtros en realidad es más complicado y hay más aspectos a tener en cuenta.

Los filtros son semejantes a las ventanas, salvo que son de aplicación en el dominio del tiempo. Los distintos tipos que podemos encontrarnos son: paso bajo (a), paso alto (b), banda limitada (c), banda estrecha (d):

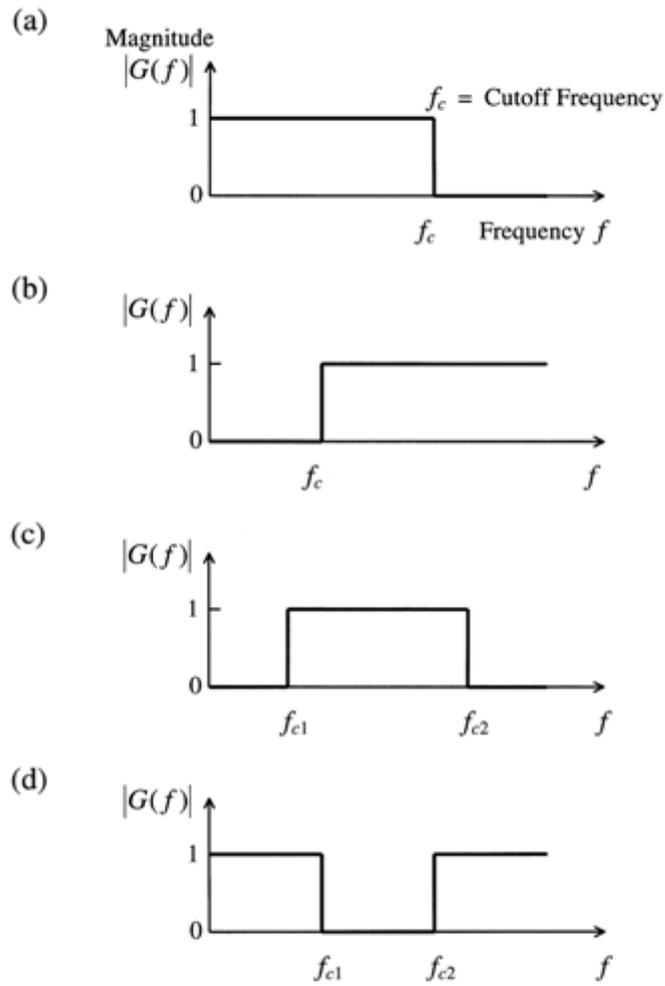


Fig. 3. 6 Filtros en el dominio de la frecuencia

En la práctica, todos los filtros tendrán un rango de frecuencias finita en el que se ha diseñado la función. En las zonas donde se produce el corte, al no ser este perfecto, se introduce información que habrá que tener en cuenta.