

5. Análisis modal experimental

5.1 Introducción

El análisis modal experimental es una técnica mediante la cual se caracteriza el comportamiento dinámico intrínseco de una estructura, obteniendo un modelo dinámico experimental. Este modelo puede utilizarse directamente para el análisis de la estructura o para la validación de modelos numéricos obtenidos por ejemplo mediante un cálculo de elementos finitos.

En este caso, la diferencia respecto al análisis de vibraciones teórico explicado en el capítulo 2 es la siguiente. Recordamos que en aquel se diferenciaban tres etapas (ruta teórica). Se comenzaba con la descripción de la estructura (modelo espacial), luego se calculaban los modos de vibración (modelo modal) y finalmente los niveles de respuesta (modelo de respuesta).

Para llevar a cabo el análisis modal experimental, se parte de un ensayo en el que se introduce una fuerza controlada a la estructura (impacto o vibración), se lleva a cabo el desarrollo de un algoritmo que permite extraer los parámetros modales: frecuencia, amortiguamiento y forma de vibración. En la siguiente figura podemos ver el camino seguido:

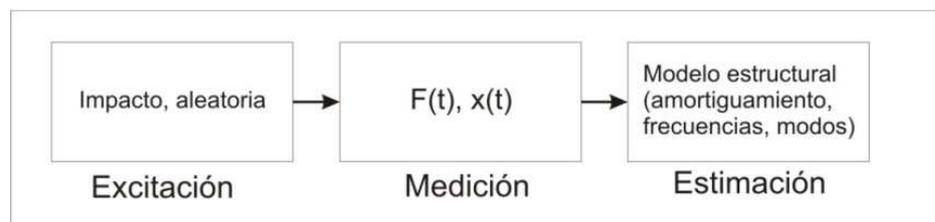


Fig. 5. 1 Ruta experimental de análisis de vibraciones

El análisis modal experimental se puede clasificar en cinco puntos. El primer punto es planear y preparar el ensayo: suspender la estructura según las condiciones de contorno apropiadas, la elección de los puntos de toma de medidas y puntos de excitación, colocar los transductores, la calibración anterior...

Posteriormente se procede a la toma y adquisición de las distintas señales necesarias, y normalmente, a la estimación de la función de respuesta en frecuencia. La tercera fase es la fase de identificación del sistema. Se determinan las características de vibración a través de las señales de entrada (excitación) y salida (respuesta) una vez se ha tratado la señal.

Una cuarta fase se dedica a la validación de los resultados obtenidos. Se comprueba si los resultados están encuadrados dentro de los esperados y predichos por los análisis numéricos. En la última etapa, usando la información obtenida anteriormente, se mejora el modelo teórico de una forma consecuyente.

5.2 Preparación del ensayo

Antes de realizar cualquier medida o movimiento de los equipos y sistemas de medida se debe programar un test virtual, el cual ayude a decidir, de forma ordenada, qué datos se deben medir y la manera de realizarlo. Por otro lado el medio adecuado para excitar la estructura en cuanto a la obtención óptima de los datos requeridos. Mediante este “planning” se procede a tener de manera global los distintos pasos a seguir, para evitar de esta forma errores y tener que comenzar en pasos anteriores.

Existen tres aspectos de importante relevancia en el proceso experimental. El primero de ellos es presentar distintas cuestiones como por ejemplo la manera de soportar la estructura, para reflejar de una manera realista las condiciones de operación. En un segundo caso la búsqueda de optimización de la elección de los elementos de excitación, los puntos de medida...Por último la selección apropiada de los algoritmos de análisis de datos.

Si partimos de un modelo resuelto numéricamente, y usamos el análisis modal experimental para realizar una validación, se consideran tres asuntos importantes:

- Mecanismo de soporte, para una interferencia despreciable en las propiedades de vibración.
- Puntos de excitación de la estructura de tal forma que los modos buscados estén todos excitados de manera adecuada.
- Buscar las funciones de respuesta más adecuadas para realizar una validación válida.

Para el primer punto, mecanismo de soporte, se puede usar una cantidad descrita en la referencia [1], llamada ADPR (average driving point residue), cuya definición es:

$$ADPR(j) = \sum_r \frac{\phi_{rj}^2}{\omega_r^2} \quad (5.1)$$

Las regiones donde el nivel de respuesta medio sea menor, serán las mejores zonas de unión de la suspensión a usar, pues són zonas donde las respuesta de los modos lejanos son menores.

Otra consideración importante es la elección de los mejores puntos de excitación de la estructura, de tal forma que se genere aproximadamente iguales niveles de

respuesta en varios modos de interés. Si se está interesado en los modos pertenecientes en un rango de frecuencias dado, deberemos fijarnos en la manera de excitarlos.

Para asegurar que un conjunto de modos es excitado, es necesario asegurar que los puntos de excitación no son o no están cercanos a los puntos nodales. Para ello, se define un criterio para puntos buenos y mal excitados, el ODP (optimum driving point).

$$ODP(j) = \prod_r |\phi_{jr}| \quad (5.2)$$

Esta función proporciona una medida de la observabilidad acumulativa de todos los modos seleccionados. Mediante la representación de esta función, se tendrá una idea de aquellos puntos que se encuentran más alejados de los nodos (puntos con mayores valores de ODP).

Por otro lado, al mismo tiempo, al excitar por impacto mediante un martillo por ejemplo, se prefieren puntos que no sean demasiado móviles para que se produzcan doble impacto, o rebote del mecanismo. Para ello se define el Non-Optimum Driving Point (NODP).

$$NODP(j) = \min_j (\|\phi_{jr}\|) \quad (5.3)$$

De nuevo, observando el valor de esta función, podremos observar los puntos que se deben evitar.

Comparando los contornos ODP y NODP se podrá decidir de una forma justificada la localización de los puntos de excitación.

El tercer punto hace referencia a las posiciones o puntos de medida de respuesta. Entre las distintas consideraciones en este caso, sobresalen dos: (i) qué puntos deben ser tomados como medidas para presentar posteriormente una animación con suficiente información de los distintos modos y (ii) cuáles de ellos son necesarios para asegurar una correlación no ambigua entre el test y los modelos numéricos. El segundo de los casos es el más restrictivo, en el proceso de validación.

Queda claro que la matriz de autovectores (modos de vibración) definida por m modos de vibración cada uno por n grados de libertad es no singular. Si esto no se consiguiese, se encontrarían dificultades en la búsqueda de correlación de modos (MAC, del que posteriormente se describirá). Por tanto la cuestión es encontrar un conjunto de grados de libertad como puntos de medida que maximicen la independencia lineal de los modos de vibración buscados.

Para llevar a cabo este estudio preliminar, se trabaja con los modos de vibración obtenidos en el estudio numérico. Una matriz $A_{m \times N}$ (predictor), y una asociada, $E_{N \times N}$, son calculadas para el conjunto de m modos definidas de la forma:

$$[A]_{m \times m} = [\phi]_{m \times N}^T [\phi]_{N \times m} ; [E]_{N \times N} = [\phi]_{N \times m} [A]_{m \times m}^{-1} [\phi]_{m \times N}^T \quad (5.4)$$

La matriz E se usa para eliminar satisfactoriamente aquellos DOFs del conjunto de N componentes que contribuyen menos a su rango, proceso que continua hasta que el rango sea completo ($r < m$). La esencia del método es mostrar como objetivo el conjunto de DOFs que guarda la independencia, incluso cuando el número de elementos de cada vector es restringido severamente.

A la hora de elegir la manera de excitar la estructura, debemos tener en cuenta que existen diversas fuentes. Dependiendo de la que se elija, tendremos unas características u otras. Entre las que se verán: barrido discreto en frecuencia de una onda senoidal, barrido senoidal, excitación aleatoria y transitoria.

El caso de barrido discreto en frecuencia se proporciona mediante el excitador una senoide discreta con amplitud y frecuencia fija. Para cubrir el rango de interés, la frecuencia va aumentando de forma que se obtenga la densidad de puntos necesarios. La complejidad es que se requiere alcanzar condiciones estacionarias antes de realizar las medidas. En la práctica, este último fenómeno es complicado en las zonas cercanas a las resonancias.

Normalmente, las curvas FRF tienen zonas donde la curva no cambia significativamente (zonas entre resonancias). De este modo, se puede ir más deprisa, tomando puntos más alejados en frecuencia. En las zonas de resonancia se puede hacer un refino en el paso de frecuencia, para tomar de forma más clara los cambios producidos en esa zona.

El barrido senoidal es el método tradicionalmente utilizado para medir la respuesta en frecuencia. Varía lentamente pero alcanza un gran rango de interés. De nuevo, como en el caso anterior, es necesario alcanzar condiciones estacionarias antes de tomar las medidas. La casuística empleada, en función de la velocidad de barrido, es realizar dos barridos, con velocidades de barrido diferentes, y ver las diferencias.

La excitación aleatoria las produce un mecanismo externo, como puede ser un generador de ruido. Se consideran que las señales aleatorias son periódicas, aunque de periodo infinito, cumpliéndose la condición de Dirichlet, necesaria para poder aplicar la transformada de Fourier.

Se introducen dos parámetros, uno en el dominio del tiempo y otro en el de la frecuencia: función de correlación y densidad espectral, respectivamente. Se define la función de autocorrelación $R_{ff}(\tau)$, a través de la $f(t)$ como:

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t) \cdot f(t + \tau)] \quad (5.5)$$

A esta función, si existe, se le calcula la transformada de Fourier, resultando el parámetro denominado densidad espectral:

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.6)$$

Estos conceptos son necesarios para poder obtener las relaciones de entrada y salida. En análisis de estos sistemas se basan en la relación en el dominio del tiempo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \check{t}) f(\check{t}) d\check{t} \quad (5.7)$$

Se puede llegar a demostrar que a través de la aplicación de lo visto anteriormente se llega a:

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \quad (5.8)$$

Esta ecuación no describe completamente el proceso, pues sólo contiene información del módulo de la respuesta, y no de la fase. Se obtiene una segunda ecuación a través de las correlaciones cruzadas entre excitación y respuesta:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \quad (5.9)$$

$$H_2(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} \quad (5.10)$$

Se denomina coherencia γ^2 a la relación de las dos expresiones anteriores. Si las medidas son perfectas, la coherencia será unidad. Normalmente, debido a ruido en las medidas, comportamiento no lineal... este variará.

Por último veremos la vibración transitoria. Esta no puede tratarse como periódica, porque las señales de excitación y respuesta no lo son. Sin embargo, es posible extender las funciones de Fourier a funciones que no son periódicas. De esta forma tratamos a la fuerza (martillo instrumentado). Si la fuerza cumple la condición de Dirichlet, su transformada se puede definir con periodo infinito. Pasará lo mismo con la respuesta generada con este tipo de excitación.

Con estas herramientas, se puede proceder a fijar una serie de datos necesarios para realizar el test. Este se define como sigue:

- Tipo de excitación. Esta puede ser aleatoria, senoidal, de impacto...
- La banda de frecuencia de excitación. Generalmente es necesario permitir que la frecuencia del sistema de excitación salga de la banda de frecuencia de interés. Sin embargo, este haría que se necesitase más memoria y menos exactitud.
- Definición de canales. Cada canal debe ser conectado a un transductor específico. Este proceso de asignación se debe realizar con cuidado, para evitar errores en la asignación.
- Definición del trigger. La excitación por impacto requiere de un pretigger, para asegurar que se capta el impulso.

- Parámetros de proceso de señal. Se debe definir el tamaño de bloque, la banda de frecuencias de medida (acelerómetros) y el número de medias a realizar. En este punto también se debe seleccionar el filtro anti-aliasing, las ventanas...

Por último, y en cuanto al momento del experimento, es recomendable disponer de los resultados teóricos a mano para poder comparar in situ los resultados que se puedan ir obteniendo.

Tras ver estos puntos y con multitud de sistemas disponibles, el procedimiento a seguir deberá ser siempre una solución de compromiso entre tiempo y costo y exactitud y fiabilidad.

5.3 Adquisición de datos y estimación de FRF

Una vez definido el objetivo y el procedimiento se procede a realizar el test. Una serie de medidas sirven de base de validación para el test. Una vez que esas mediciones convencen al responsable del ensayo, se inicia la medida de los datos.

La validación pre-test se utiliza como medidas para validar eficiencia en las entradas, reciprocidad, comportamiento de los puntos excitados, linealidad y correlación de las fuerzas excitadoras.

El primer “check” consiste en una investigación de la entrada. En el caso de excitación con martillo instrumentado, la entrada debe ser limpia e incorporar la frecuencia máxima de interés. Una onda muy aguda en el espectro generalmente indica doble impacto, y posiblemente un error. En caso de excitación aleatoria, el espectro tendrá ruido, pero este debe mantenerse sobre el mismo nivel sobre la frecuencia de interés. En caso contrario será inaceptable.

Si se realiza un ensayo con múltiples puntos de excitación, se debe comprobar la reciprocidad de la función de respuesta en frecuencia: $H_{ij} = H_{ji}$. Si la forma de las amplitudes es la misma para ambas funciones, pero sin embargo difieren en un factor constante, probablemente exista un error de calibración de fuerza.

Si excitamos un punto de la estructura con un acelerómetro añadido, se debe comprobar que la parte imaginaria debe ser negativa, para toda l rango de frecuencia.

Por otro lado, si el comportamiento de la estructura es lineal, la función de respuesta en frecuencia debería ser independiente del nivel de fuerza. Es interesante medir funciones de respuesta en frecuencia usando varios niveles de fuerzas para comprobar este hecho.

Para cada elemento de medida, correspondiente a las localizaciones asignadas de cada acelerómetro, se debe realizar como mínimo una doble comprobación, para evitar errores posteriores. Además, comprobar que los factores de amplificación no conllevan a saturaciones. Si tras realizar estas primeras medidas se han obtenido resultados positivos en cuanto a la validación del pre-test, el ensayo puede comenzar.

Dependiendo de los sistemas usados y software disponibles, la adquisición se hará de distintas formas. No obstante, mediante los distintos procesos de media, se podrá observar la coherencia de los datos que se adquieran y vislumbrar si existen fallos.

Antes de comenzar con el análisis modal o cualquier estudio con los datos obtenidos en el ensayo, es siempre prudente realizar unas primeras comprobaciones para asegurarnos de que no se pierde el tiempo debido a datos erróneos. No siempre es posible asegurar tras una inspección visual que las medidas son válidas, pero existen ciertas características que son inherentes, y siempre será deseable tenerlas presente.

La primera de las características a examinar debe ser el comportamiento a bajas frecuencias (por debajo de la primera resonancia). Esta zona vendrá determinada por el comportamiento correspondiente a las condiciones de soporte escogida. Si la estructura ha sido agarrada al suelo, se debería observar claramente una rigidez característica a bajas frecuencias, apareciendo como una línea asintótica que converge a la rigidez de dicha estructura en ese punto. Si por el contrario, si nuestra estructura ha sido testeada en condición libre, se espera observar una línea que converja a las consideraciones de cuerpo rígido.

Por otro lado, también se deben observar el comportamiento a altas frecuencias. De nuevo, como pasaba en el comportamiento a bajas frecuencias, tenderá a una línea másica o de rigidez.

Otra comprobación necesaria debería ser el de las características resonantes y antirresonantes. La primera de ellas es la antirresonancia, que ocurre entre resonancias adyacentes. Una segunda comprobación en este sentido es que los picos de resonancia y los picos de las antirresonancia exhiben la misma forma en una representación log-log.

Finalmente, una última comprobación se puede realizar si se representa el diagrama de Nyquist. En este, cada región de resonancia debería describir al menos un arco de circunferencia, que depende fuertemente de la interacción con otros modos. Para un sistema estructural con modos bien separados, se espera que cada resonancia genere la mayor parte del círculo posible. Si estos modos no están suficientemente separados o el amortiguamiento es fuerte, estos arcos serán menores.

5.4 Extracción de parámetros modales

En este punto se analizan diversas etapas de análisis que deben llevarse a cabo para conseguir el objetivo de construir un modelo. Una mayor parte de este análisis consiste en ajustar una curva teórica para cada función de respuesta en frecuencia medida.

Se describirán diversos procedimientos disponibles para conseguir dicha curva, pero prácticamente todos se basan en el mismo fin: encontrar los coeficientes en la expresión teórica para obtener una curva lo más parecida posible a la medida experimentalmente.

En estos métodos, una gran mayoría opera en frecuencia, pero existen otros que lo hacen en el tiempo. Estos últimos se basan en que la transformada inversa de la FRF es otra función característica del sistema: Respuesta Impulso, que representa la respuesta del sistema a una entrada simple unitaria.

Por tanto, es necesario antes de comenzar las explicaciones, realizar una clasificación de los distintos métodos. Primero, y atendiendo al dominio de definición de trabajo, se pueden clasificar en:

- Métodos en el dominio de la frecuencia (FRF)
- Métodos en el dominio del tiempo (IRF)

La implementación en el dominio del tiempo esta normalmente mejor condicionada que las del dominio en frecuencia. Una de las razones es que evitan la mayoría de los problemas de procesado de señal, como son el leakage o el aliasing. Sin embargo, si las condiciones de medida son ruidosas, el promediado es más fácil y eficiente en el dominio de la frecuencia. Además, si el efecto de los modos fuera de la banda de medida es importante, los métodos en el dominio de la frecuencia tienen mejor comportamiento.

Como regla general se puede decir que si el amortiguamiento es inferior al 5%, son preferibles los métodos basados en el dominio del tiempo. Si superan el 3% los de frecuencia.

Luego, es apropiado considerar el rango de frecuencia que cada análisis individual realiza:

- Métodos SDOF
- Métodos MDOF

Si por último, se piensa en los diferentes grupos de FRF que se pueden generar, podemos tener: SISO (Single-input, Single-output), SIMO (Single-input, Multi-output) medida en distintos puntos con un único punto de excitación, y los MIMO (Multi-input, Multi-output) donde diversos puntos sirven para medir la respuesta siendo excitada la estructura en diversos puntos. Teniendo esto presente, la última clasificación que se puede hacer atendiendo al número de curvas que se analizan a la vez:

- Single-FRF
- Multi-FRF

En la siguiente tabla se muestran algunos de los métodos más conocidos clasificados según sea SDOF o MDOF, y entre ellos los que se describirán en los puntos siguientes:

	Método	Dominio	Parámetro	Estimación	Excitación
SDOF	Peak Peaking	Frecuencia	Polo	Local	Simple
	Mode Picking	Frecuencia	Modo propio	Local	Simple
	Circle Fit	Frecuencia	Polo Modo Propio	Local	Simple
MDOF	LSCE	Tiempo	Polo Modo Propio	Global	Múltiple

Tabla 5. 1 Clasificación de métodos de extracción de parámetros

5.4.1 Métodos en el dominio de la frecuencia

5.4.1.1 Métodos SDOF en frecuencia

Este método no quiere decir que la estructura en estudio deba ser modelada mediante un solo grado de libertad. Quiere decir que sólo se reconoce resonancias de una en una, de modo secuencial, y que un estudio de este tipo extrae las propiedades de uno de los modos cada vez.

Para poder aplicar este tipo de métodos de extracción, se debe asumir una serie de condiciones. Este método de SDOF se basa en el hecho de que en la zona cercana a la resonancia, el comportamiento del sistema está dominado por un único modo. Algebraicamente significa que la magnitud de la respuesta en frecuencia está controlada por sólo uno de los términos de la serie. Esta descomposición en serie se describió en el apartado 3. Se puede expresar por tanto la respuesta como:

$$h_{ij}(\omega = \omega_r) = \sum_{s=1}^N \frac{sA_{jk}}{\omega_s^2 - \omega + i\eta_s \omega_s^2} \cong \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega + i\eta_r \omega_r^2} + rB_{jk} \quad (5.11)$$

Donde rB_{jk} es aproximadamente independiente de la frecuencia.

Existen limitaciones en este caso. Por ejemplo, si se presentan modos muy cercanos (modos con frecuencias naturales parecidas), no es sencillo determinarlos. Si aún así se decide aplicar este tipo de métodos se debe realizar con cautela. La parte positiva es que permiten una rápida implementación debido a su simplicidad, y es útil en las fases preliminares del test.

La implementación de los métodos SDOF abarcan desde el método peak-picking hasta el clásico ajuste de círculo, que se explicarán a continuación. Ambos se pueden aplicar tanto en los SIMO como en los SISO.

5.4.1.1.1 Peak Peaking

En este método, se asume que la respuesta es gobernada por un solo modo en cierto rango de frecuencias (como son los SDOF), pero además, se supone que el término independiente rB_{jk} es nulo. Tiene un buen comportamiento con estructuras que exhiben modos bien separados, ligeramente no amortiguados, para poder encontrar el punto máximo, y ni en exceso, para que la respuesta en resonancia no se vea tan afectada por otros modos.

A pesar de las limitaciones que implica este método, es usado para las primeras estimaciones, pues es rápido y sencillo.

Este método se aplica del siguiente método:

- ✓ Se detectan los picos de resonancia en la curva FRF, tomándose la frecuencia de la respuesta máxima como la frecuencia natural de ese modo (ω_r).
- ✓ Luego, se denota el valor máximo de ese pico como $|\bar{H}|$, y el ancho de frecuencias $\Delta\omega$ como aquel que une los puntos $|\bar{H}|/\sqrt{2}$.
- ✓ El amortiguamiento de este modo se puede aproximar ahora con la fórmula:

$$\eta_r \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_r} \quad (5.12)$$

$$2\xi_r = \eta_r \quad (5.13)$$

- ✓ Por último, se calcula la constante modal. Como se ha asumido que la respuesta es debida sólo al término del modo en cuestión:

$$|\bar{H}| = \frac{A_r}{\omega_r^2} \quad (5.14)$$

En la siguiente figura podemos ver las variables comentadas:

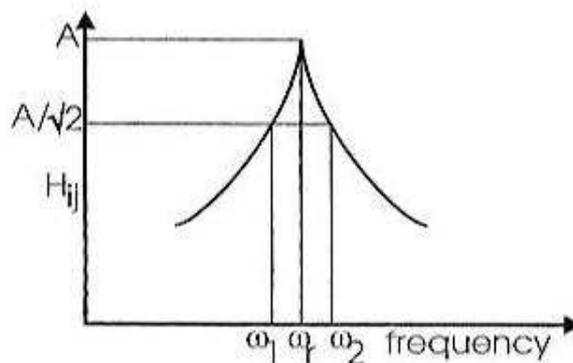


Fig. 5. 2 Método Peak Peaking

5.4.1.1.2 Método Ajuste a círculo

Se sabe que la representación de la FRF en Nyquist produce una curva que se asemeja a un círculo. Si los parámetros son adecuadamente elegidos, produce un círculo exacto.

El tratamiento seguido en la explicación de este método estará basado en un sistema con amortiguamiento estructural y se usarán los datos provenientes de una FRF que produjese un círculo perfecto.

En el caso de asumir un sistema con amortiguamiento estructural, la función básica de respuesta es:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2(1-(\omega/\omega_r)^2+i\eta_r)} \quad (5.15)$$

En esta expresión no aparece el residuo, pues sólo conllevaría un escalado (su módulo) y una rotación (su fase).

Para cada frecuencia ω , se pueden escribir las relaciones:

$$\tan(\gamma) = \frac{\eta_r}{1-(\omega/\omega_r)^2} \quad (5.16)$$

$$\tan(90^\circ - \gamma) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-(\omega/\omega_r)^2}{\eta_r} \quad (5.17)$$

Con estas expresiones podemos llegar a la expresión:

$$\omega^2 = \omega_r^2 \left(1 - \eta_r \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (5.18)$$

Si se dispone de dos puntos específicos del círculo, uno correspondiente a ω_b por debajo de la frecuencia natural, y otro valor ω_a por encima, se puede llegar a la expresión deducida en [1]:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2(\tan(\theta_a/2) + \tan(\theta_b/2))} \quad (5.19)$$

Es una expresión exacta, para todos los valores de amortiguamiento.

Una última propiedad permanece en el diámetro del círculo, cuyo valor es $(1/\omega_r^2 \eta_r)$. Si se vuelve a introducir el valor del residuo, el escalado nos dará:

$$rD_{jk} = \frac{|rA_{jk}|}{\omega_r^2 \eta_r} \quad (5.20)$$

En la figura siguiente se esboza el principio de este método:

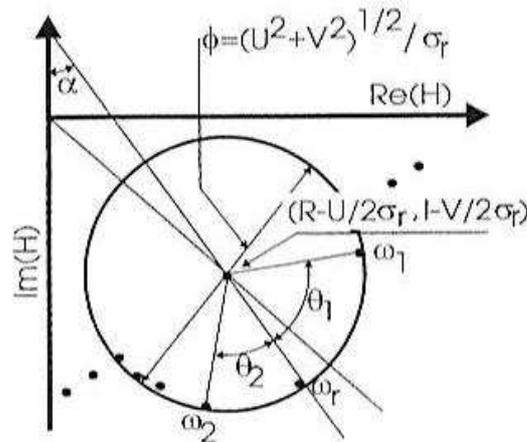


Fig. 5. 3 Método Ajuste a círculo

El procedimiento para implementar este método de ajuste a círculo es el siguiente:

- ✓ Seleccionar los puntos a usar del diagrama de Nyquist
- ✓ Generar el círculo, calculando la calidad de la aproximación
- ✓ Localizar la frecuencia natural, obteniendo el amortiguamiento estimado
- ✓ Determinar el módulo y argumento de la constante modal

Para buscar la frecuencia natural, se suelen usar las definiciones:

- ✓ Frecuencia de máxima respuesta
- ✓ Frecuencia de máxima receptancia imaginaria
- ✓ Frecuencia de receptancia real nula

Una vez realizado, sería deseable construir una figura FRF teórica generada a través de los datos obtenidos para poder determinar la contribución de la resonancia de los otros modos. Para ello, se mide, se requiere simplemente la distancia del diámetro principal al origen, siendo esta cantidad el valor de la constante que el método anterior se despreciaba.

Cabe destacar que en la gráfica real que obtengamos, aparecerán tantos círculos como grados de libertad tengamos. Será función del usuario seleccionar las frecuencias para poder trabajar de una forma adecuada con el círculo de cada modo.

5.4.1.1.3 Residuos de modos lejanos

En los métodos anteriores hemos visto que se han estudiado la respuesta del sistema gobernado en cada momento por un modo determinado (una sola de las expresiones del sumatorio). Los términos residuales aparecen como solución para tener en cuenta aquella influencia de los otros modos en la FRF.

Normalmente, es necesario limitar el rango de frecuencias de medida o de trabajo. En ella, imponemos estos residuos para tener una solución que se aproxime más a la realidad. Si se genera una curva FRF a partir de los parámetros modales obtenidos mediante los términos anteriores, tendríamos:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{s=m1}^{m2} \frac{sA_{jk}}{\omega_s^2 - \omega + i\eta_s \omega_s^2} \quad (5.21)$$

Donde se muestra en los límites del sumatorio, que no siempre empezará en el primer modo ni acabará en el último, sino dentro de un rango. Existen entonces modos fuera de rango que perturban el valor de la función. La fórmula exacta sería:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{s=1}^N \frac{sA_{jk}}{\omega_s^2 - \omega + i\eta_s \omega_s^2} \quad (5.22)$$

Esta última expresión puede descomponerse en tres sumatorios, en los intervalos:

$$[s = 1 \text{ a } s = m1 - 1; s = m1 \text{ a } s = m2; s = m2 + 1 \text{ a } s = N]$$

El primer término representarían las bajas frecuencias, el segundo las frecuencias de estudio y el tercero el de altas frecuencias. Este comportamiento se puede representar como:

$$H_{ij}(\omega) \approx \frac{1}{K_{Rij}} + \sum_{s=m1}^{m2} \frac{sA_{jk}}{\omega_s^2 - \omega + i\eta_s \omega_s^2} - \frac{1}{\omega^2 M_{Rij}} \quad (5.23)$$

Las expresiones K y M son llamadas masa y rigidez residuales. En la siguiente gráfica se puede ver las contribuciones comentadas de los modos fuera de rango:

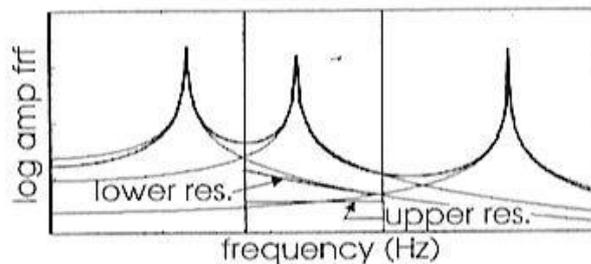


Fig. 5. 4 Residuos de modos lejanos

Para el cálculo de estas variables se minimiza el error cuadrático medio entre la gráfica FRF (datos del ensayo) y la curva generada teóricamente incluyendo los términos residuales.

5.4.1.2 Métodos MDOF en frecuencia

Uno de los principales problemas que presentan los métodos anteriores es la dificultad de obtener resultados coherentes cuando existen modos con frecuencias naturales muy cercanas, o cuando al seleccionar el rango de frecuencia del modo estudiado aparecen otros modos cercanos en alguna de las frecuencias de corte. Amortiguamientos grandes también dificultan este proceso.

Cuando se requiere mayor exactitud se necesitan métodos menos restrictivos. El método que se describirá en este punto puede definirse como una extensión del método ajuste a círculo.

5.4.1.2.1 Aproximación general de ajuste a círculo

En el primer método de ajuste a círculo visto, se asumía que cerca de la resonancia bajo estudio, el efecto de los otros modos podía representarse bajo una constante. Una vez obtenido el resultado se puede relajar esta condición y proceder a un análisis más preciso.

Podemos escribir la expresión de receptancia como:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{1}{K_{Rij}} + \sum_{s=1}^{m2} \frac{sA_{jk}}{\omega_s^2 - \omega + i\eta_s\omega_s} - \frac{1}{\omega^2 M_{Rij}} \quad (5.24)$$

Donde todos los parámetros que aparecen deben ser determinados. Se puede definir un error individual como el siguiente:

$$\varepsilon_l = (H_l^m - H_l) \quad (5.25)$$

La cantidad escalar se define:

$$E_l = |\varepsilon_l^2| \quad (5.26)$$

La idea es minimizar el valor del sumatorio de los errores en cada punto de la curva FRF medida, a través de los coeficientes. Este objetivo se puede conseguir diferenciando dicha función con la variable q , que es el vector que contiene todos los parámetros de la función teórica.

Sin embargo, este proceso es complicado, se obtienen ecuaciones no lineales y no se puede resolver directamente. Se pueden realizar simplificaciones, pero

inevitablemente se deben realizar iteraciones. Existe un método que realiza este proceso: NLLS.

5.4.1.2.2 Cálculo de los modos de vibración

Para el desarrollo siguiente, es necesario tener la función FRF. El objetivo es encontrar las componentes de los modos de vibración de cada modo.

Dada la FRF del ensayo, tenemos por un lado que:

$$H(p) = Z^{-1}(p) = \frac{adj(Z(p))}{|Z(p)|} \rightarrow Z(p)adj(Z(p)) = |Z(p)| I \quad (5.27)$$

Si se particulariza en la frecuencia de los polos:

$$Z(\lambda_r)adj(Z(\lambda_r)) = |Z(\lambda_r)| I = 0 \quad (5.28)$$

Con esta ecuación anterior, podemos ver que para cualquier columna i se cumple:

$$Z(\lambda_r)adj(Z(\lambda_r))_i = 0 \quad (5.29)$$

Los autovalores y autovectores cumplen:

$$(\lambda_r^2 m + \lambda_r c + k)\psi_r = Z(\lambda_r)\psi_r \quad (5.30)$$

Se deduce por un lado que $adj(Z(\lambda_r))_i$ es proporcional a ψ_r para toda i . Pero como se vio en el punto 2, $adj(Z(\lambda_r))$ es simétrica, por lo que debe cumplirse:

$$\left(adj(Z(\lambda_r))^t \right)_i \text{ proporcional a } \psi_r \quad (5.31)$$

Para toda i . Con este desarrollo se llega a que el residuo es entonces para cada frecuencia de modo:

$$A_r = Q_r \psi_r \psi_r^t = Q_r \begin{bmatrix} \psi_1 \psi_1 & \dots & \psi_N \psi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N \psi_1 & \dots & \psi_N \psi_N \end{bmatrix}_r \quad (5.32)$$

Sólo es necesaria una columna para definir la matriz, excepto si un punto coincide con un nodo de algún nodo.

5.4.2 Métodos en el dominio del tiempo

En este caso no existe posibilidad de hacer estudios SDOF. La familia de métodos, conocidos como Métodos Exponencial Complejos, permite un análisis semiautomático de la información discreta derivada de la transformada inversa de la FRF: Función de Respuesta al Impulso (IRF). La base de estos métodos es que cualquier IRF pueden expresarse por una serie de exponenciales complejos. Cada uno de ellos contiene las propiedades de autovalor y autovector de cada modo.

5.4.2.1 Complex Exponential Method

La principal característica de estos métodos, que se diferencian en procesos para hacerlos más eficientes, es que no necesitan de estimaciones iniciales de los parámetros modales como era requerido en el MDOF en el dominio de la frecuencia.

Al trabajar con IRF, tiene como requisito solo la incorporación de amortiguamiento viscoso (el estructural presenta problemas).

Mediante teoría clásica, como se describe en [1], se puede obtener la Función de Respuesta al Impulso (IFR) mediante la transformada inversa de la receptancia, obteniendo:

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} rA_{jk} e^{s_r t}; s_r = -\omega_r \xi_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (5.33)$$

Se debe ordenar convenientemente el conjunto de valores experimentales. Se realiza de la siguiente forma:

$$h_0, h_1, \dots, h_q = h(0), h(\Delta t), \dots, h(q\Delta t)$$

En este punto debemos reescribir la ecuación anterior mediante los cambios:

$$rA_{jk} \rightarrow A_r; e^{s_r \Delta t} \rightarrow V_r$$

Podemos escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$h_l = \sum_{r=1}^{2N} A_r V_r^l \quad (5.34)$$

Si escribimos la serie anterior para cada valor h_j (tenemos q), y multiplicamos cada una de ellas por un factor β_j , tendremos:

$$\begin{aligned}
\beta_0 h_0 &= \beta_0 A_1 + \dots + \beta_0 A_{2N} \\
\beta_1 h_1 &= \beta_1 A_1 V_1 + \dots + \beta_1 A_{2N} V_{2N} \\
\beta_q h_q &= \beta_1 A_1 V_1^q + \dots + \beta_1 A_{2N} V_{2N}^q
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Hay que estar seguro de que q excede al menos 4N. Sumando estas ecuaciones tenemos:

$$\sum_{i=0}^q \beta_i h_i = \sum_{j=1}^{2N} (A_j \sum_{i=0}^q \beta_i V_j^i) \tag{5.36}$$

La elección de los coeficientes β_j ha sido arbitraria. Estos se toman tal que se cumpla:

$$\sum_{i=0}^q \beta_i V^i = 0 \tag{5.37}$$

A través de esta ecuación se podría acceder al valor de V_r , es decir, a las frecuencias naturales. Tenemos q puntos de la función IFR, mientras que N es el número de grados de libertad del modelo con el que trabajamos. Se fuerza a que $q = 2N$.

Mediante esto se cumplen las condiciones impuestas en las ecuaciones anteriormente descritas:

$$\sum_{i=0}^{2N} \beta_i V_r^i = 0 \text{ para } r = 1, 2N \tag{5.38}$$

Y por otro lado:

$$\sum_{i=0}^{2N} \beta_i h_i = 0 \tag{5.39}$$

Si sacamos de esta última ecuación el último término, suponiendo que $\beta_{2N} = 1$, tenemos:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \beta_i h_i = -h_{2N} \tag{5.40}$$

Repitiendo esto para otro conjunto de valores de h, por ejemplo que coincida parcialmente con el antecesor, podremos llegar a un conjunto de ecuaciones 2N:

$$[h]_{2N \times 2N} \{\beta\}_{2N \times 1} = -\{\check{h}\}_{2N \times 1} \tag{5.41}$$

De esta obtendremos los coeficientes β_i , y resolviendo la imposición que se puso al principio, las raíces V_i . De estas últimas se obtendrán las frecuencias naturales y amortiguamientos.

Falta por determinar las constantes modales A_1, A_2, \dots, A_N , mediante la primera de las ecuaciones:

$$[V]\{A\} = \{h\} \quad (5.42)$$

La manera de aplicar este método es la siguiente. Se realiza una estimación inicial del número de grados de libertad N , y se realiza los pasos descritos. Una vez completado, mediante los parámetros modales encontrados se genera la FRF, ver [1], y se compara con la curva obtenida experimentalmente. Se computa un error entre dichas curvas.

Se repite de nuevo usando un número distinto de grados de libertad, y se va generando unos datos de error de gráficas con el número de grados de libertad. Al llegar al grado de libertad que corresponda, este error será mínimo. Sin embargo, si se eligen más números de grados de libertad que los que aparecen, se producirán imperfecciones, pues estaremos introduciendo modos computacionales que no existen.

Cabe hacer varias apreciaciones tras ver los distintos métodos de extracción de los parámetros modales.

En el último método visto, uno de los principales problemas es la determinación exacta de los polos que influyen en el análisis. Se ha visto uno de los métodos, generar la FRF en función de los parámetros obtenidos, comparando el error de esta con la obtenida experimentalmente. Existen otros procedimientos que ayudan a elegir de una manera coherente el número de polos.

Otro de ellos es determinar el número de polos contando directamente el número de picos que aparecen en las FRF. La suma de las amplitudes de todas las FRF sintetiza de manera única esta información. Los picos más altos de la curva indican resonancias con altos desplazamientos modales, mientras que los picos más bajos indican pequeños desplazamientos o modos locales. Hay que recordar que el número de picos será siempre una cota inferior del número real de polos.

Otro proceso usado para esta asignación es el uso del MIF (Mode Indicator Function). Se tratan de curvas en el dominio de la frecuencia que presentan mínimos locales en las frecuencias de resonancia. La curva MIF1 presentará mínimos en todas las frecuencias de resonancia. La curva MIF2 presentará mínimos locales en aquellas frecuencias que sean raíces dobles y así sucesivamente. Estas funciones se basan en que, en la resonancia y en caso de modos normales, la respuesta está desfasada 90° con respecto a la excitación.

Un proceso óptimo para calcular este número de modos a incluir es el diagrama de estabilización. Se comparan las estimaciones de las frecuencias y de los amortiguamientos que se calculan mediante modelos con distinto número de modos. Las frecuencias y amortiguamientos de los modos reales no cambiarán al aumentar el número de modos. Los computacionales o generados por el modelo matemático sí que cambiarán.

El cálculo comienza suponiendo la existencia de un número pequeño de polos en el ancho de banda seleccionado. Cuando se encuentra un polo que no se había encontrado antes en una banda determinada el sistema lo marca con una "o". Suponiendo la existencia de un número mayor de polos, esas marcas pasan a ser "f", "d", "v" y/o "s", indicando respectivamente que a esa frecuencia ya se había encontrado un polo antes, que a esa frecuencia ya se había encontrado antes un polo con ese amortiguamiento, que a esa frecuencia ya se había encontrado un polo antes con el mismo vector asociado o que todos los parámetros se han estabilizado.

5.5 Validación

La validación es el último paso del proceso de análisis modal experimental, tal y como se describió en la introducción de este punto. La finalidad de esta fase es verificar los resultados del paso anterior (estimación de los parámetros modales). Se concreta en una serie de herramientas para evaluar la calidad del modelo modal estimado.

Este proceso de validación se puede estructurar en tres fases. La primera de ellas es intuitiva, sin requisito de herramientas matemáticas. Se trata de una inspección visual, de los modos de vibración y comparando las frecuencias naturales con los estimados en el problema numérico.

En el segundo nivel se requiere de ciertas herramientas matemáticas para cuantificar la calidad del modelo estimado. Se verá en puntos posteriores algunas de ellas, como el MAC (Model Assurance Criterion), participación modal, reciprocidad, complejidad del modo...

Ya en el tercer nivel de la validación, se realiza una validación implícita, donde el modelo se usa para análisis de sensibilidad, prediciendo el efecto de cambios en la estructura, actualizando de esta forma el modelo de elementos finitos que se haya generado.

5.5.1 Síntesis de FRFs

La validez del modelo modal estimado se puede comprobar comparando las FRFs sintetizadas con las FRFs medidas que no se han incluido en el análisis. Se define un coeficiente de correlación entre estas:

$$COR = \frac{|\sum(S_i x M_i)|^2}{|\sum(S_i x S_i)| |\sum(M_i x M_i)|} \quad (5.43)$$

Y un error:

$$L\text{Error} = \frac{\sum(S_i - M_i)x(S_i - M_i)^*}{\sum(S_i x S_i^*)} \quad (5.44)$$

Se fija un error que se toma por aceptable, teniendo mediante estas definiciones información útil sobre la calidad de las FRF sintetizadas. Sin embargo, obtener un bajo en la síntesis de las FRF no garantiza una correcta generación de modelo, pues se podría ajustar la FRF con polos no reales.

5.5.2 MAC (Modal Assurance Criterion) y MSF (Modal Scale Factor)

El MSF, o factor de escala modal, y el MAC, o criterio de seguro modal son herramientas matemáticas que comparan dos vectores. Se asume que X e Y son dos vectores de la misma longitud. Se definen estas herramientas como:

$$MSF(X/Y) = \frac{\{X\}^*t[W]\{Y\}}{\{Y\}^*t[W]\{Y\}} \quad (5.45)$$

$$MAC_{XY} = \frac{|\{X\}^*t[W]\{Y\}|^2}{(\{Y\}^*t[W]\{Y\})(\{X\}^*t[W]\{X\})} \quad (5.46)$$

Donde W es una matriz de peso.

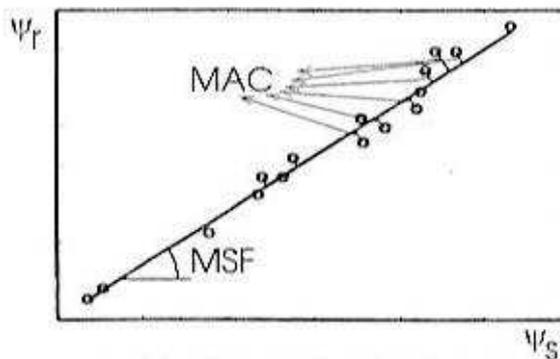


Fig. 5. 5 Representación MSF y MAC

El factor de escala modal proporciona la relación entre los vectores. El MAC es un factor de correlación. Si el MAC proporciona un valor unidad, ambos vectores son idénticos, salvo una escala, el MSF. Si el MAC proporciona sin embargo un valor cero, no existe relación lineal entre los vectores, y el MSF en este caso no tiene significado.

Usando estas definiciones matemáticas, el MAC puede usarse como herramienta para comparar conjuntos de modos de vibración o para investigar la validez de los modos estimados. Se define entonces el MAC de dos modos de vibración como:

$$MAC(\psi_r, \psi_s) = \frac{|\{\psi_r\}^{*t}\{\psi_s\}|^2}{(\{\psi_r\}^{*t}\{\psi_r\})(\{\psi_s\}^{*t}\{\psi_s\})} \quad (5.47)$$

Comparando la misma columna (es decir, mismo punto de excitación), ambos valores deben ser unidad. Si se comparan dos columnas diferentes el valor debería tender a cero.

El resultado que se genera tras realizar el MAC es una matriz de valores, donde se comparan los valores propios. Los valores esperados se mueven en el rango entre 0 y 1 (o escalado en porcentaje). El valor será cero o muy bajo entre vectores que describen modos distintos y valores cercanos a uno si son los mismos modos. La naturaleza de esta herramienta no es más que comprobar su ortogonalidad.

Como interpretaciones generales podemos nombrar:

- Si el valor del MAC de dos estimaciones del mismo modo físico es baja (menos del 90%), al menos una de las dos estimaciones es incorrecta. Bien porque una de ellas se origina en un ensayo en el que ese modo no estaba suficientemente excitado o bien porque se trata de un pequeño modo local.
- Si el valor del MAC de dos estimaciones de diferentes modos próximos en frecuencia es alta (mayor del 35%) indica que al menos existen ciertas partes en la estructura donde ambos modos se pueden considerar similares.
- Si el valor del MAC entre dos estimaciones de diferentes modos a frecuencias suficientemente alejadas es superior al 35%, indica que no se ha discretizado lo suficiente el modelo y ambos modos son muy similares cuando en realidad son distintos.

5.5.3 Participación modal

Se trata de una herramienta para investigar la importancia relativa de los diferentes modos en ciertas frecuencias y la eficiencia de los puntos seleccionados como grados de libertad:

$$MP_{ij} = \sum_{j=1}^N A_{oij} \quad (5.48)$$

Que representa la contribución de las respuestas de cada punto por cada modo y por cada entrada. Por tanto, representa la contribución del modo r de todos los grados de libertad. Comparando los términos de MP para diferentes inputs se podrá ver cómo excita cada modo. Se obtiene así un valor característico de cómo ese punto de excitación excita los distintos modos.

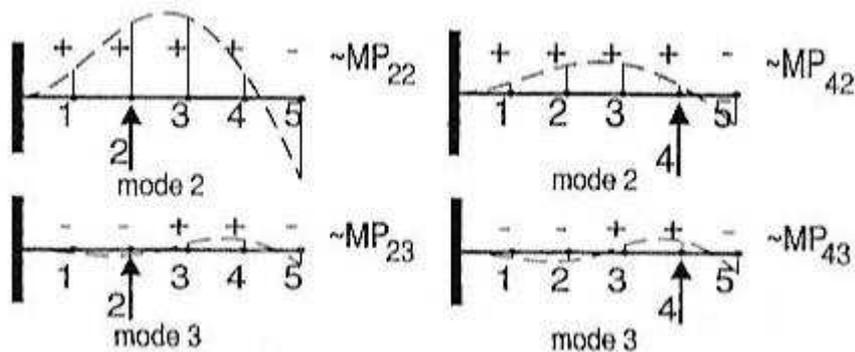


Fig. 5. 6 Participación modal

Esta información ayuda a seleccionar los mejores y más eficientes grados de libertad. Representaciones características en distintos software dan una visión rápida. Aparece normalmente una columna Total Modes que estima la contribución total de cada excitador en el sistema. Un buen test debe tener una distribución casi idéntica sobre los diferentes puntos de excitación. La fila Total Inputs indica la contribución de cada modo en la energía total suministrada al sistema. Tienden a disminuir al aumentar la frecuencia.

5.5.4 Reciprocidad

Uno de los principios en los que se basa la teoría generada es el principio de Maxwell: la respuesta en el punto p debida a una excitación en el punto q es idéntica a la respuesta en el punto q debida a la misma excitación en el punto p. Esta hipótesis conduce a matrices de masa, rigidez y FRF simétricas en la teoría de análisis modal vista.

Si se dispone de medidas de varias entradas esta condición se puede comprobar en la siguiente forma:

$$H_{pq}(\omega) = H_{qp}(\omega) \quad (5.49)$$

A nivel del modelo modal, se debe comprobar:

$$\frac{L_{rq}}{\psi_{qr}} = \frac{L_{rp}}{\psi_{pr}} \quad (5.50)$$

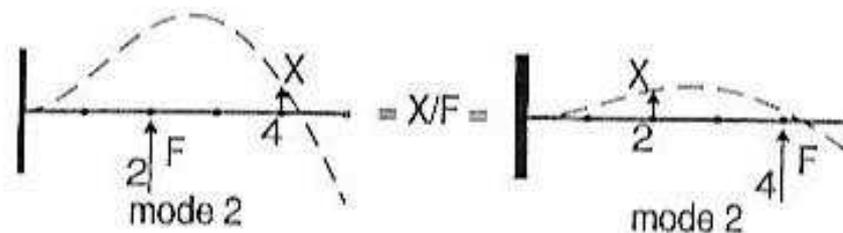


Fig. 5. 7 Reciprocidad

Si se usan múltiples puntos de excitación y un algoritmo de estimación de parámetros modales que estimen los modos y los factores de participación modal independiente, la ecuación anterior comprueba la validez de la hipótesis de reciprocidad.