

## Capítulo 2

# **PROBLEMAS DE CORTE Y EMPAQUETADO**

### **2.1. INTRODUCCIÓN**

Este capítulo está dedicado a clasificar los distintos problemas de corte y empaquetado. Para ello, en la primera parte, se definen las variables que intervienen en el problema así como su estructura lógica.

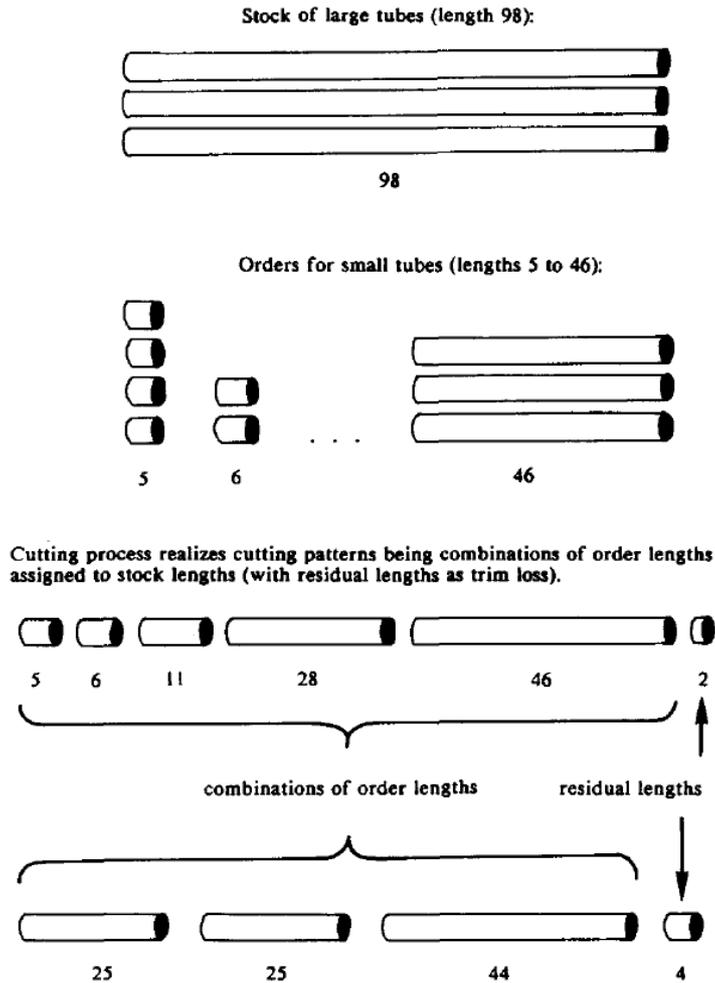
En su segunda parte se analizan las características básicas del problema y se realiza una primera clasificación elemental de los tipos de problemas de corte y empaquetado en función de dichas características básicas.

En la tercera parte se establece la clasificación definitiva de los tipos de problemas de corte y empaquetado.

## 2.2. ESTRUCTURA LÓGICA BÁSICA

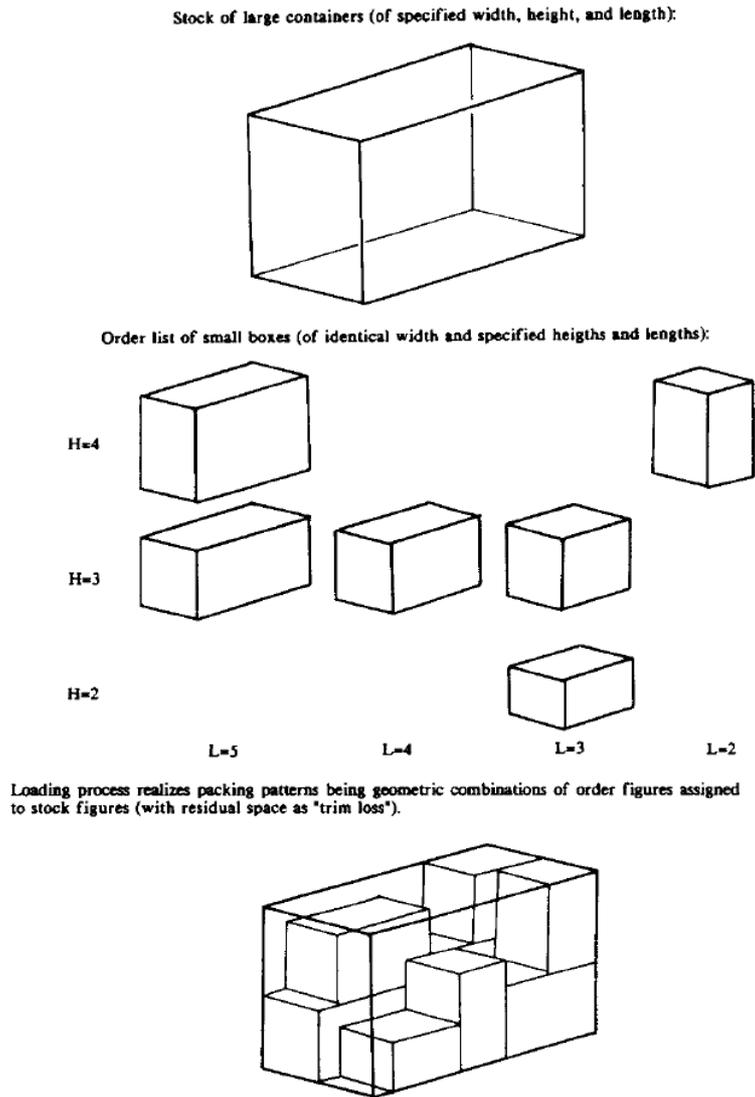
Las investigaciones publicadas últimamente tratan con aspectos particulares de ciertos tipos especiales de problemas de corte y empaquetado, principalmente con métodos de solución y algoritmos. No hay, sin embargo, demasiadas investigaciones en el ámbito de los problemas de corte y empaquetado que integre sistemáticamente las muchas clases de problema. Para lograr agrupar todos estos problemas Dyckhoff desarrolló una tipología fundada en la estructura lógica básica de los problemas de corte y empaquetado (Dyckhoff, 1990). Esto permite la identificación de propiedades comunes de problemas que, a primera vista, parecen no estar relacionados. De manera contraria, las diferencias entre problemas aparentemente semejantes llegan a ser más claras analizando sus características principales. Las características pueden ser utilizadas para distinguir varios tipos elementales y combinados de problemas.

La estructura lógica básica de los problemas de corte y empaquetado llega a ser obvia mirando algún ejemplo sencillo. La Figura 2.1 ilustra un problema de corte de tubos para unidades de calor de radiador (descrito por Heicken y Krnig, 1980). Hay por una parte un stock ilimitado de tubos grandes de longitud 98 utilizados para producir tubos más pequeños. Por otro lado hay una lista de pequeños tubos de longitudes de 5 a 46 que tienen que ser producidos para satisfacer la demanda semanal. Estos dos grupos, el stock de objetos grandes y el libro de orden para los pequeños artículos, constituyen los datos básicos del problema de corte de stock. Las órdenes para pequeños tubos se combinan formando las pautas de corte que se asignan a los objetos grandes del stock. El proceso tiene que obedecer a ciertos objetivos y limitaciones que son específicos para el problema en cuestión.



**Figura 2.1.** Corte de tubos [1].

Como un segundo ejemplo, la Figura 2.2 ilustra un problema de carga de contenedor (Gehring, 1990; Haessler y Talbot, 1990). Esta clase de problema exhibe también dos grupos de datos básicos, por una parte un stock de objetos grandes que consisten en uno o más contenedores, y por otro lado una lista de artículos más pequeños que pueden ser empacados en los contenedores. Aparte de ciertos objetivos y las limitaciones, el aspecto principal de la carga de contenedores consiste en la combinación geométrica de pequeños artículos para crear pautas que puedan ser asignadas a contenedores del stock.



**Figura 2.2.** Carga de contenedores [1].

De ahí que la estructura lógica común de los problemas de corte y empaquetado pueda ser determinada de la siguiente manera:

(A) Hay dos grupos de datos básicos cuyos elementos definen los cuerpos geométricos de las formas fijas (las "figuras") en una o más dimensiones espaciales de números reales: el stock de objetos grandes por una parte, y la lista de piezas o libro de órdenes de los artículos pequeños por otro lado.

(B) El proceso de corte o empaquetado crea pautas que son combinaciones geométricas de pequeños artículos asignadas a objetos grandes. Los pedazos residuales, es decir las

figuras que se encuentran en las pautas sin pertenecer a pequeños artículos, son tratados generalmente como 'recortes de pérdida'.

Los problemas de carga y empaquetado en sentido estricto se caracterizan por objetos grandes definidos como el espacio vacío útil de los vehículos, los coches, los pallets, los contenedores, los cajones, etcétera. Empaquetar pequeños artículos materiales en estos objetos puede ser visto también como cortar el espacio vacío de los objetos grandes en pedazos de espacios vacíos algunos de los cuales son ocupados por pequeños artículos, el resto son 'recortes de pérdida'. Opuestamente, los problemas de corte de stock pueden ser vistos como el empaquetado del espacio ocupado por los pequeños artículos en el espacio ocupado por los objetos grandes. Una fuerte relación entre corte y empaquetado surge como resultado de la dualidad de la materia y el espacio, es decir la dualidad entre un cuerpo material y el espacio ocupado por el.

Además, se pueden considerar dimensiones no espaciales, en sentido generalizado, para los problemas de corte y empaquetado (Figura 2.3). Ejemplos con respecto a dimensiones de varias naturalezas son:

- knapsacking (problema “mochila”, Dantzig, 1957) y la carga de vehículos (Eilon y Christofides, 1971) para la dimensión del peso,
- equilibrado de cadena de montaje (Wee y Magazine, 1982) y planificación de multiprocesadores (Coffman, 1978) para la dimensión de tiempo,
- presupuestos de capital (Lorie y Savage, 1955) para dimensiones financieras, o
- asignación de memoria para dimensiones de almacenamiento de datos (Garey y Johnson, 1981).

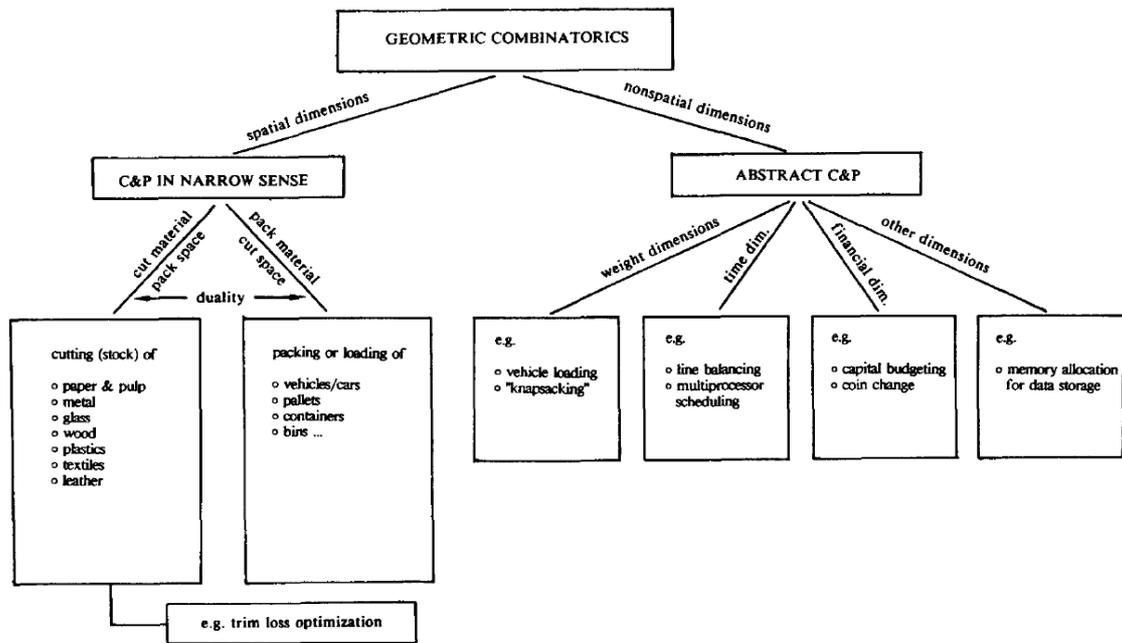


Figura 2.3. Problemas de corte y empaquetado [1].

### 2.3. CARACTERÍSTICAS Y TIPOS ELEMENTALES

La estructura lógica de los problemas de corte y empaquetado proporciona un esquema para una sistematización más profunda. Las filas de la Tabla 2.1 diferencian características principales de corte y empaquetado con respecto a si se refieren a

- el stock de objetos grandes,
- la lista de pequeños artículos,
- las pautas como combinaciones geométricas de pequeñas figuras para cada figura grande, o a
- la asignación de pequeños artículos a pautas así como de pautas a objetos grandes.

Las columnas de la Tabla 2.1 agrupan las características principales en geométricas, combinatorias y otras características.

Características de:	Características geométricas	Características combinatorias:	Otras características:
Objetos grandes:	Dimensionalidad Forma de las figuras	Medida de la cantidad Variedad Disponibilidad	Objetivos Estado de información Variabilidad
Pequeños artículos:	En principio como las de los objetos grandes		
Combinaciones geométricas:	Dimensionalidad Restricciones de las pautas (número de cortes; tipo de cortes; distancias; orientación ...)	Restricciones de las pautas (número de cortes; número y combinación de las figuras ...)	Objetivos Estado de información Variabilidad
Asignación:		Restricciones por el número de etapas, orden o frecuencia de las figuras ...	Objetivos Estado de información Variabilidad

**Tabla 2.1.** Características principales [1].

### 2.3.1. Dimensionalidad

La característica más importante es la dimensionalidad. En vez de ser considerada separadamente para los objetos grandes y los pequeños artículos, se atribuye al problema o más precisamente a las pautas. La dimensionalidad es el número mínimo de dimensiones de números reales necesarias para describir la geometría de las pautas. Los tipos elementales son:

- unidimensional,
- bidimensional,
- tridimensional, y
- los problemas multi-dimensionales (más de tres dimensiones).

Los problemas cuádrimensionales pueden ser obtenidos cuándo los problemas de empaquetado tridimensionales en el espacio tienen al tiempo como cuarta dimensión, por ejemplo cuándo tenemos cajas que tienen que ser almacenadas en un contenedor por espacios fijos de tiempo sin interrupciones. Un tipo muy especial de un problema multidimensional es el llamado problema de “vectorpacking” (Garey y Johnson, 1981), por ejemplo en el caso del presupuesto multi-periodo de capital (Lorie y Savage, 1955).

Aunque pueda parecer estar clasificando forzosamente un problema con respecto a sus dimensiones, este no es el caso. Por ejemplo, la carga de pallets es considerada

generalmente como de dos dimensiones. Si, sin embargo, se restringe la altura del pallet aparece una tercera dimensión (Dowland, 1985). De la misma forma, los contenedores a menudo son cargados construyendo primero los montones verticales y localizando después los montones horizontalmente en la base del contenedor (Gehring, 1990; Haessler y Talbot, 1990). En ambos casos quizás se hable de dimensionalidad '2 + 1' en vez de 3. Entonces, los problemas donde láminas de vidrio se cortan utilizando sólo cortes de guillotina tendrían que ser caracterizados como de '1 + 1 dimensiones'.

### **2.3.2. Medida de la cantidad**

Otra característica principal es la forma en la que se mide la cantidad de los objetos grandes y de los pequeños artículos, respectivamente. Se distinguen dos casos:

- medida discreta (o "entera"), es decir por números naturales, y
- medida continua (o "fraccionaria"), es decir por números reales.

El primer caso se refiere a la frecuencia o el número de objetos o artículos de una cierta forma. Por otro lado, las cantidades fraccionarias miden la longitud total de varios objetos o artículos que tienen la misma forma (figura) con respecto a las dimensiones relevantes, la suma de longitud de los objetos o artículos con respecto a una dimensión adicional no es relevante para la geometría de las pautas. En vez de una longitud puede ser también un peso o un diámetro.

El tipo combinado de problemas unidimensionales con medida continua a menudo es llamado '1,5 dimensional' (Dyckhoff, 1985).

### **2.3.3. La forma de las figuras**

Otra característica principal de los problemas de corte y empaquetado directamente relacionada con la dimensionalidad es la forma de las figuras de los objetos grandes y los artículos pequeños. La figura de un objeto o un artículo está definida como su representación geométrica en el espacio de dimensiones pertinentes.

Los objetos o los artículos de la misma figura poseen la misma representación geométrica menos algunas traslaciones dentro del espacio de dimensiones pertinentes. A parte de tales traslaciones una figura está determinada inequívocamente por su

- forma,
- tamaño, y
- orientación.

Las figuras de la misma forma difieren como mucho en su tamaño u orientación (o la posición) en el espacio pertinente. Para los problemas de más de una dimensión una pregunta importante es si la forma de las figuras es

- regular, o
- irregular.

Las formas regulares pueden ser descritas por unos pocos parámetros. La inmensa mayoría de problemas considerados en la literatura se preocupa por tales formas regulares, especialmente formas rectangulares o de bloque. Las formas irregulares con formas no convexas y no simétricas son, sin embargo, típicas para algunas industrias (por ejemplo la industria del metal, el textil, el calzado, o de la carpintería).

Las figuras que difieren como mucho en su tamaño se pueden hacer idénticas (mediante traslaciones y) cambiando la escala de la medida igualmente en todas las dimensiones pertinentes. Dependiendo de la dimensionalidad, el tamaño de una figura puede ser medido por su longitud, por su área, o por su volumen.

Las figuras de la misma forma y tamaño difieren como mucho con respecto a su orientación (y su posición), es decir, son congruentes. Se pueden distinguir tres casos importantes con respecto a la orientación:

- Si 'se permite cualquier orientación' entonces los objetos y artículos con figuras congruentes son idénticos para el problema en cuestión.
- Si 'sólo se permiten giros de 90 grados' entonces sólo los objetos y artículos con figuras producto de estos giros son considerados como idénticos.
- Si el 'la orientación es fija' entonces objetos y artículos con figuras congruentes son diferentes salvo aquellos que se puedan hacer idénticos mediante traslaciones.

Con estas definiciones uno puede constatar que las figuras unidimensionales tienen todas formas y orientaciones iguales: sólo difieren en su tamaño, es decir sus

longitudes. Ejemplos de formas regulares definidas de dos dimensiones son los círculos y los cuadrados mientras que los rectángulos con proporciones distintas de anchura y longitud constituyen formas regulares diferentes.

#### **2.3.4. Variedad**

No sólo las formas de las figuras sino también su variedad es importante para caracterizar un problema de corte y empaquetado. La variedad viene dada por las formas y el número de figuras permitidas. Uno puede distinguir si aparecen formas diferentes o todos objetos y los artículos, respectivamente, tienen la misma forma. En ambos casos las figuras pueden ser diferentes, siendo muchas o sólo unas pocas figuras diferentes. En el segundo caso de formas idénticas las diferencias entre figuras resultan de sus tamaños o sus orientaciones. Tipos especiales importantes surgen cuando las figuras son congruentes o idénticas.

Por ejemplo, la carga de pallets y empaquetado de cajas se refieren generalmente a problemas con objetos grandes de la misma figura mientras que los pequeños artículos tienen figuras congruentes para la carga de pallets y figuras muy diferentes para el empaquetado de cajas.

Otra pregunta es si todas las figuras permitidas pueden ser combinadas. Los problemas de selección de variedad se preocupan por el hecho que sólo una o unas pocas figuras diferentes permitidas pueden ser escogidas realmente. Como ejemplo tenemos anchura producida de las máquinas de papel y las dimensiones estándar de los paquetes para ser cargados en pallets.

#### **2.3.5. Disponibilidad**

La variedad no dice nada acerca de la cantidad de objetos y artículos considerados. Esto se ve en la próxima característica principal, la disponibilidad de objetos o artículos de las figuras permitidas. Se refiere a:

- límites inferior y superior en cantidad,
- su sucesión u orden, así como

- la fecha cuando un objeto o artículo pueden ser o tienen que ser cortados o empaquetados.

Uno puede distinguir entre infinito y un número finito de objetos o artículos. En el segundo caso es posible que haya muchos o sólo unos pocos objetos o artículos. Los problemas clásicos de empaquetado de cajas y corte de stock se conciben típicamente con un número infinito de objetos todos de la misma figura grande; hay, sin embargo, sólo unos pocos artículos para cada pequeña figura (de muchas diferentes) en el empaquetado de cajas mientras que en el corte de stock hay muchos artículos para cada pequeña figura (de relativamente pocas diferentes). La carga de pallets o los problemas de mochila (knapsack) se caracterizan generalmente por sólo un objeto grande.

Arriba, el número de objetos y artículos dados ha sido interpretado como un límite superior de la disponibilidad para el proceso de corte o empaquetado. En la mayoría de los casos hay límites inferiores, también, que pueden ser idénticos con los superiores. Por ejemplo, el objeto grande de un problema de carga de pallet o mochila tiene que ser empaquetado (con ciertos pequeños artículos). Opuestamente, todos los pequeños artículos dados de un problema clásico de empaquetado de cajas o corte de stock tienen que ser empacados (en cajones) o cortados (del stock). Límites superior e inferior distintos representan tolerancias respecto a los artículos.

Se obtienen propiedades adicionales con respecto a la disponibilidad cuando existe un cierto orden para los objetos y artículos o cuándo el tiempo juega un papel explícito. Las barras de acero candente como objetos grandes tienen que ser cortadas no sólo en la sucesión producida, sino también sin demora. Los pequeños artículos que tienen que ser empaquetados en contenedores pueden tener fechas de caducidad diferentes que son importantes a la hora de enviar los contenedores.

### **2.3.6. Restricciones de las pautas**

Las características discutidas se refieren hasta ahora a propiedades de los objetos grandes y a análogas de los pequeños artículos, respectivamente. La mayor parte de ellas, sin embargo, tienen impactos inmediatos en las pautas como combinaciones geométricas, así como en la asignación de artículos a objetos. En el primer caso la

construcción de las pautas individuales es específica, teniendo como resultado restricciones geométricas o combinatorias. En el segundo caso han de ser tenidas en cuenta restricciones con respecto al número, el orden, o la combinación de las pautas. Estos aspectos se discuten ampliamente en la literatura de los problemas de corte y empaquetado y requerirían una investigación separada. Sólo una vista general se da aquí, sin entrar mucho detalle.

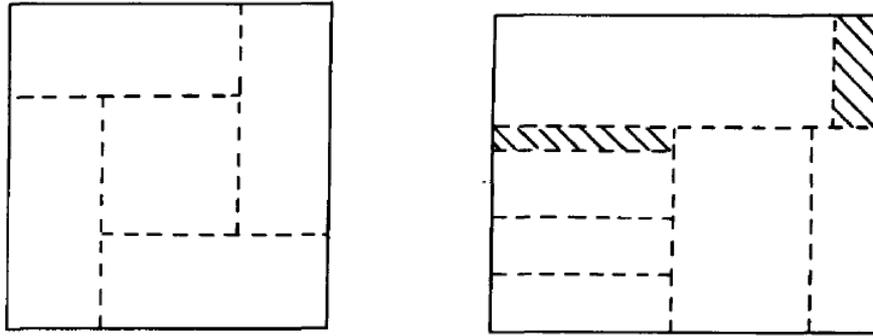
Se pueden distinguir cuatro grupos importantes de restricciones de pauta que pueden tener que ser consideradas para la construcción de combinaciones geométricas de pequeñas figuras para una figura grande:

- Las distancias mínimas o máximas entre pequeñas figuras o entre los cortes que dividen las figuras grandes son a menudo importantes, por ejemplo al romper vidrio o cargar contenedores.

- La orientación relativa de las pequeñas figuras con respecto a otras pequeñas figuras y/o a la figura grande puede ser tenida en cuenta, por ejemplo al cortar telas estampadas o al cargar bienes frágiles en pallets.

- Puede haber restricciones con respecto a la frecuencia de pequeños artículos o figuras en una pauta, especialmente con respecto a la combinación o número de pequeñas figuras diferentes o el número de pequeños artículos, sean en suma o relativos a ciertas figuras. Esto incluye, por ejemplo, cantidades máximas de desecho así como números máximos de gamas de tamaño u órdenes.

- El tipo y el número de “cortes” permitidos son esenciales, especialmente si los objetos y los artículos son de forma rectangular o de bloque. Tras estas líneas se distinguen pautas no-ortogonales y ortogonales. Estas últimas pueden ser pautas anidadas o pautas guillotina. La complejidad de pautas guillotina depende del número de cambios de la dirección cortante (las etapas) así como del número de cortes paralelos por la etapa. Las Figuras 2.4 (a) y (b) exponen ambas una pauta ortogonal de dos dimensiones: Una pauta anidada para 5 pequeños artículos de 3 figuras distintas y 2 formas diferentes, ver Figura 2.4 (a), y una pauta guillotina de 3 etapas para 6 pequeños artículos con 2 pedazos residuales, Figura 2.4 (b). Puede haber también pautas no-ortogonales que resulten de cortes de guillotina. A causa de su débil estabilidad, los “cortes” de guillotina son generalmente de interés secundario para la carga de pallets.



**Figura 2.4.** (a) Pauta ortogonal bidimensional anidada. (b) Pauta ortogonal bidimensional con tres etapas de guillotina [1].

### 2.3.7. Restricciones de asignación

Se puede considerar que la asignación de pequeños artículos a objetos grandes sucede en dos etapas, arreglar primero los pequeños artículos en pautas convenientes, y en segundo lugar asignando las pautas a los objetos grandes apropiados. Es posible que haya las restricciones con respecto a

- la clase de asignación,
- el número de las etapas de asignación,
- el número, la frecuencia, o la secuencia de las pautas,
- la dinámica de la asignación.

Una propiedad importante es la clase de asignación. Para los objetos grandes y los pequeños artículos dados, tiene que ser claro si sólo una selección o todos ellos tienen que ser asignados a las pautas correspondientes. Al principio, esta diferenciación lleva a cuatro categorías posibles (fuertemente conectadas con la disponibilidad de objetos y artículos discutida en la Sección 2.3.5). Dos categorías juegan un papel fundamental en la literatura (por lo que se han identificado como tipos principales en la Sección 2.4). Los problemas de knapsack y de empaquetado de cajas dual son ejemplos de la categoría donde una selección de artículos dados tiene que ser combinada en pautas de forma que a cada uno de los objetos dados se le asigne una pauta no trivial. En la categoría opuesta, que es la típica para los problemas clásicos de corte de stock y empaquetado de cajas, todos los artículos tienen que ser asignados a una selección apropiada de objetos.

El número de etapas se refiere a si los pequeños artículos son cortados de objetos grandes, o empacados en objetos grandes, simultáneamente en un único paso o sucesivamente en varios pasos. En el primer caso sólo son admisibles los objetos grandes de los datos originales del problema, en el segundo caso las figuras residuales (a menudo pequeñas) de algunas pautas llegan a ser las figuras “grandes” de otras pautas. Tales procesos multi-etapa de asignación pueden tener un número limitado o ilimitado de etapas. Se puede limitar el orden o la sucesión de pautas dentro del proceso de asignación, por ejemplo pueden ser inducidas por el orden o la conexión de objetos o artículos o por la tecnología de los procesos de corte y empaquetado. Restricciones adicionales se refieren a la frecuencia de pautas, siendo el número de tipos diferentes de pautas o el número de pautas del mismo tipo.

La asignación de artículos a objetos puede ser de naturaleza constante o dinámica. Las asignaciones constantes pueden, no obstante, estar en procesos en línea donde, por contraste al caso de fuera de línea, los objetos o los artículos se asignan sucesivamente sin reasignación posible y sin conocer los objetos o los artículos posteriores. En procesos dinámicos, diferentes puntos o espacios de tiempo juegan un papel explícito.

### **2.3.8. Objetivos**

No siempre es posible decidir definitivamente si una característica es geométrica o combinatoria. Algunas incluyen ambos aspectos, alguna ninguno. Los objetivos de los problemas de corte y empaquetado a menudo tienen aspectos geométricos así como combinatorios. Además, estos pueden ser atribuidos a los objetos, a los artículos, a las pautas, o al proceso de asignación (Tabla 2.1). Aquí un “objetivo” es un criterio que ha de ser maximizado o minimizado. Los criterios que han de ser satisfechos hasta un cierto nivel son tratados como limitaciones del proceso de corte o empaquetado, por ejemplo la restricción que para propósitos de manejo de pequeños artículos sólo los que pertenecen a la misma orden de cliente deben estar contenidos en una pauta.

De la misma forma que las últimas dos subdivisiones, sólo una diferenciación muy tosca de objetivos se dará aquí. Distintos tipos aparecen dependiendo de si se refieren a

- las cantidades de objetos grandes o pequeños y piezas residuales asignados a las pautas,
- la geometría de las pautas (disposición-optimización) o
- la sucesión, la combinación, o el número de pautas.

Las funciones objetivo que son lineales con respecto a las cantidades puede valorar los objetos o los artículos por su tamaño (disminución de pérdida o reducción de material de aporte) o, más generalmente, por sus precios (algunos casos de reducción de coste). Los objetivos no lineales, por ejemplo, aparecen si se minimiza 'la pérdida relativa' o si se han de tener en cuenta cargas fijas para las pautas. Es, además, típico para muchos problemas de corte y empaquetado que se tengan que considerar más de un objetivo (Wäscher, 1990).

### **2.3.9. Estado de la información y variabilidad**

Las características “estado de la información” y “variabilidad” de la Tabla 2.1 son pertinentes no sólo para los problemas de corte y empaquetado. Uno tiene que indicar si los datos del problema son deterministas, estocásticos, o inciertos, y si estos son estrictos o pueden ser variable en ciertas gamas. Por ejemplo, los rollos de plástico cinematográfico tomado del stock pueden tener defectos de borde al fluctuar al azar el tamaño. Otro ejemplo es la producción continua de chapas de metal, trozos de tamaños definidos con precisión se cortan de lingotes cuyos tamaños no pueden ser producidos exactamente. La demanda para pequeños artículos de la lista de orden, generalmente determinista, puede de hecho ser variable si ciertas desviaciones son aceptadas por los clientes. La inexactitud de la medida en la práctica puede ser también una razón para la variabilidad de datos.

## 2.4. TIPOS COMBINADOS

En vista de la gran variedad de problemas de corte y empaquetado del mundo real (Hinxman, 1980; Dowsland, 1985; Dyckhoff, 1985) las características consideradas hasta ahora verdaderamente no proporcionan una lista completa de todas las propiedades posibles. Además, algunas pueden superponerse. Por ejemplo, hay una relación fuerte entre los límites de disponibilidad, la clase de asignación, y aquellos objetivos que se refieren a las cantidades de objetos y artículos. No obstante, las características de la Sección 2.3 parecen ser las más importantes, y el esquema propuesto permite incluir propiedades adicionales de manera coherente y sistemática.

Como un primer paso en esta dirección, Dyckhoff propone un sistema sencillo de 96 tipos combinados de problemas que pueden ser relacionados con enunciados y soluciones de la literatura. Lo logra combinando algunos tipos principales de cuatro características importantes. Su importancia se debe a que estos tipos tienen un impacto decisivo en la elección y la complejidad de la aproximación a la solución. Además, han sido escogidos de tal manera que la mayor parte de los 96 tipos combinados son reales y necesitan generalmente métodos individuales de solución. Las cuatro características así como sus tipos principales, denotados por símbolos apropiados, son los siguientes:

### 1. Dimensionalidad

- (1) Unidimensional.
- (2) Bidimensional.
- (3) Tridimensional.
- (N) N-dimensional con  $N > 3$ .

### 2. Clase de asignación

- (B) Todos objetos y una selección de artículos.
- (V) Una selección de objetos y todos artículos.

### 3. Variedad de objetos grandes

- (O) Un objeto.
- (I) Figuras idénticas.
- (D) Figuras diferentes.

#### 4. Surtido de pequeños artículos

(F) Pocos artículos (de figuras diferentes).

(M) Muchos artículos de muchas figuras diferentes.

(R) Muchos artículos de relativamente pocas figuras diferentes (no congruentes).

(C) Figuras congruentes.

Con respecto a la complejidad implicada por la geometría, es claramente la dimensionalidad la que tiene que ser indicada primero (Sección 2.3.1). El tipo de asignación juega un papel principal adicional (Sección 2.3.7); las dos categorías prominentes (de las cuatro principalmente posibles) consideradas aquí son:

- Una selección de pequeños artículos tiene que ser combinada en pautas de forma que a cada objeto grande se le asigne una pauta no trivial (“Beladeproblem” en alemán).

- Todos los pequeños artículos tienen que ser combinados en pautas que son asignadas a una selección apropiada de objetos grandes (“Verladeproblem” en alemán).

Se distinguen tres tipos principales con respecto a la variedad de objetos grandes:

- Hay sólo un objeto grande (por ejemplo knapsacking o la carga de pallets).

- Todos objetos grandes son de la misma figura (por ejemplo el empaquetado de cajas).

- Los objetos grandes tienen figuras diferentes (por ejemplo el corte de stocks de objetos grandes que contienen los pedazos residuales de etapas previas).

De la misma forma, se indican cuatro tipos principales con respecto a la variedad de pequeños artículos:

- Hay relativamente pocos pequeños artículos generalmente con figuras diferentes (por ejemplo la carga de vehículos con cerca de 10 artículos).

- Hay muchos pequeños artículos la mayor parte de ellos con figuras diferentes (por ejemplo el empaquetado de centenares de artículos de longitudes distribuidas entre 0 y 1 en cajones de longitud 1).

- Hay muchos pequeños artículos pero de relativamente pocas figuras diferentes y no congruentes (por ejemplo el corte de miles de artículos de menos de 50 figuras diferentes).

- Todos los pequeños artículos son congruentes (por ejemplo la carga de pallets).

Combinando los tipos principales distintivos de dimensionalidad, de asignación, y de variedad uno obtiene  $4 \times 2 \times 3 \times 4 = 96$  tipos diferentes de problemas, que se denotan por una cuádrupla de símbolos respectivos  $x/x/x/x$  por ejemplo, 3/B/O/F denota todo problema de corte y empaquetado tridimensional donde un objeto grande tiene que ser empacado con una selección de unos pocos pequeños artículos.

La Tabla 2.2 muestra la relación entre los problemas más comunes de corte y empaquetado y su notación corta. (Un símbolo perdido en una característica significa que todas las propiedades respectivas son posibles).

El problema de la carga de vehículos como fue originalmente analizado por Eilon y Christofides (1971) es unidimensional. Sólo unos pocos textos discuten los problemas de carga tridimensional, y principalmente usando contenedores como objetos grandes (por ejemplo Gehring, 1990; Haessler y Talbot, 1990; Dowsland, 1985).

Como se hace patente por la notación, los problemas de carga clásica de vehículos, empaquetado de cajas, y corte de stock pertenecen al mismo tipo combinado con respecto a las primeras tres características. Sin embargo, difieren esencialmente en su variedad de pequeños artículos. En el caso de dos dimensiones existe una diferencia adicional con respecto a los objetos grandes. El empaquetado de cajas bidimensional se concibe el empaquetado de artículos en un objeto de anchura dada y de longitud mínima (o altura). Esto equivale a un problema de la selección de variedad donde el stock está dado por un número infinito de objetos de esta anchura y de todas longitudes posibles y donde sólo un objeto tiene que ser escogido del stock, el de longitud mínima.

Existe una diferencia fundamental entre esta tipología y otras con notaciones cortas aparentemente semejantes. En particular, las notaciones utilizadas en la teoría de planificación de colas determinan problemas muy especiales como tipos básicos cada uno descrito por un modelo matemático. Esto significa que cualquier desviación de un tipo básico, por ejemplo a causa de una restricción adicional o un objetivo modificado, lleva a un nuevo tipo diferente. Aquí, la notación determina los tipos generales (de los problemas de corte y empaquetado) que engloban una variedad de problemas todavía distintos. Por ejemplo, nada se dice acerca de la forma de los objetos y artículos en dos o más dimensiones, por ejemplo, si son regulares o irregulares.

De ahí que para identificar completamente los problemas uno tenga que extender la tipología. Es realista escoger características adicionales y tipos principales de los discutidos en la Sección 2.3. Sin embargo, en vista de la gran variedad de problemas de corte y empaquetado que existe, una extensión general no tiene mucho sentido.

Problema	Notación
(Classical) knapsack problem	1/B/O/
Pallet loading problem	2/B/O/C
More-dimensional knapsack problem	/B/O/
Dual bin packing problem	1/B/O/M
Vehicle loading problem	1/V//F, or 1/V//M
Container loading problem	3/V//, or 3/B/O/
(Classical) bin packing problem	1/V//M
Classical cutting stock problem	1/V//R
2-dimensional bin packing problem	2/V/D/M
Usual 2-dimensional cutting stock problem	2/V//R
General cutting stock or trim loss problem	1 /// , 2 /// , or 3 ///
Assembly line balancing problem	1/V//M
Multiprocessor scheduling problem	1/V//M
Memory allocation problem	1/V//M
Change making problem	1/B/O/R
Multi-period capital budgeting problem	n/B/O/

**Tabla 2.2.** Nombre del problema y tipo combinado correspondiente [1].

## 2.5. RESUMEN

En este capítulo se ha definido la estructura lógica básica de los problemas de corte y empaquetado y se han identificado y clasificado las características principales de dichos problemas, y se han clasificado dichos problemas en función de cuatro de sus características: dimensionalidad, clase de asignación, variedad de objetos grandes y surtido de pequeños artículos.

Gracias a todo esto se ha comprobado la dualidad entre los problemas de corte y empaquetado a través de la dualidad entre el espacio y la materia. También se ha observado que muchos de los problemas de la literatura poseen las mismas características y la solución hallada para un problema se puede aplicar en otros.