

### **3.- CALCULADOR**

### **3.1.- INTRODUCCIÓN**

TRAJECTORY© es una herramienta creada por el Departamento de Ingeniería Aeroespacial de la Universidad de Sevilla que permite el cálculo de las variables que describen la trayectoria. En la herramienta desarrollada en este documento, TRAJECTORY© es el calculador básico que permite obtener dichas variables en función del tiempo y correspondientes a cada segmento de vuelo que conforma la trayectoria global tipo. Para ello TRAJECTORY© necesita las condiciones iniciales, las ligaduras que definen el segmento y al menos una condición de finalización o parada del mismo.

### 3.2.- ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Para la descripción del movimiento de la aeronave TRAJECTORY© emplea un modelo de masa puntual con 3 grados de libertad, apropiado para tareas de predicción de trayectorias y similar a los usados en CTAS, PHARE y ATOMS [CDA]. De este modo, las ecuaciones describen el movimiento del centro de masas de la aeronave considerado éste como un cuerpo de masa variable. Para un sistema inercial de ejes ligados a Tierra las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{V}_g \\ m \frac{d\vec{V}_g}{dt} &= \vec{F}_A + \vec{F}_T + m\vec{g} \\ \frac{dm}{dt} &= -\dot{m}_F\end{aligned}$$

donde  $\vec{x}$  es el vector de posición de la aeronave,  $\vec{V}_g$  es la velocidad sobre el terreno de la aeronave,  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_T$  y  $m\vec{g}$  son las fuerzas aerodinámicas, propulsivas y gravitacionales, respectivamente,  $m$  es la masa de la aeronave,  $\dot{m}_F$  es el flujo de combustible consumido y  $t$  es el tiempo.

El vuelo en cada segmento se desarrolla en rutas loxodrómicas definidas por rumbo constante,  $\chi = \chi_A$ , lo cual es equivalente a volar en planos verticales en un modelo de tierra plana.

Para la obtención de las ecuaciones escalares se han aplicado las siguientes hipótesis generales [MIE]:

- Tierra esférica y sin rotación
- Aeronave simétrica y rígida
- Vuelo simétrico en un plano vertical
- Empuje paralelo a la velocidad aerodinámica de la aeronave

Hipótesis que son apropiadas para aeronaves subsónicas de transporte.

Las ecuaciones escalares del movimiento son [MIE]:

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= T - D(v, h, L) - mg \sin \gamma \\
 mV \frac{d\gamma}{dt} &= L - mg \cos \gamma \\
 \frac{dm}{dt} &= -c(M, h)T \\
 (R_E + h) \frac{d\varphi}{dt} &= V \cos \gamma \cos \chi_A \\
 (R_E + h) \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} &= V \cos \gamma \sin \chi_A \\
 \frac{dh}{dt} &= V \sin \gamma \\
 \frac{dr}{dt} &= V \cos \gamma \frac{R_E}{R_E + h}
 \end{aligned}$$

donde  $r$  es la distancia horizontal recorrida por la aeronave sobre la superficie terrestre;  $V, \gamma, \chi$  son el módulo de la velocidad aerodinámica verdadera, el ángulo de asiento de la trayectoria y el rumbo;  $\varphi, \lambda, h$  son las coordenadas geodésicas del centro de masas de la aeronave (latitud, longitud y altitud);  $T$  es el empuje,  $L$  es la sustentación,  $D$  es la resistencia aerodinámica;  $c$  el consumo específico de combustible (definido como masa de combustible consumido por unidad de empuje y unidad de tiempo) y  $R_E$  el radio terrestre.

Para cerrar el problema es necesario proporcionar las variables de control  $L$  y  $T$ , o de forma equivalente, 2 condiciones o ligaduras que cierren el problema. En general son necesarias 3 condiciones, pero en este caso ya se ha impuesto el vuelo a rumbo constante  $\chi = \chi_A$ . Esta tercera condición va asociada a una tercera variable de control, el ángulo de balance  $\mu$ ; que en este caso resulta ser  $\mu = 0$ .

Las ligaduras pueden ser de control, como por ejemplo un rating de motor; o ligaduras asociadas al movimiento, como altitud de vuelo constante, Mach de vuelo constante. De forma general las ligaduras son de la forma:

$$g(V, \gamma, \chi, m, \varphi, \lambda, h, T, L, \mu, t) = 0$$

Las ligaduras impuestas deben cerrar el problema matemático, es decir, deben ser compatibles entre ellas.

Finalmente, se deben proporcionar condiciones iniciales compatibles con las ligaduras y, al menos, una condición de parada de la integración también compatible con las ligaduras. Esta condición de parada puede ser un tiempo de integración o combinación de las variables. De forma general la condición de parada tendrá la forma:

$$s(V, \gamma, \chi, m, \varphi, \lambda, h, T, L, \mu, t) = 0$$

Las ecuaciones del movimiento más las ligaduras forman un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE). El método empleado en TRAJECTORY para la resolución de las DAE's se basa en la obtención explícita de las variables de control a partir del sistema DAE y su sustitución en las ecuaciones del movimiento, obteniendo por tanto un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), que se resuelve numéricamente.

Para las carreras de despegue y aterrizaje, basta añadir a la ecuación que gobierna la evolución de la velocidad la reacción horizontal debida al contacto con el suelo

$$R = -\mu(mg - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L)$$

que no es más que una resistencia adicional. En esta reacción  $\mu$  es el coeficiente de fricción (típicamente  $\mu = 0.02$  para el despegue y  $\mu = 0.3$  para el aterrizaje, en este último caso mayor pues contempla la aplicación de frenos) y  $C_L$  es conocido.

### 3.2.1.- MODELOS APLICADOS

Para resolver las ecuaciones es necesario la consideración de 3 modelos: modelo de Tierra, aerodinámico y propulsivo. El modelo de Tierra tiene las siguientes características:

- Tierra esférica de radio  $R_E = 6356,766$  km,
- Gravedad constante  $g = 9.80665$  m/s<sup>2</sup>,
- Modelo de atmósfera no estándar  $ISA + \Delta\Theta$ , que define la densidad ( $\rho$ ), presión ( $p$ ) y temperatura ( $\Theta$ ) como función de la altura ( $h$ ) para un valor dado de  $\Delta\Theta$

El modelo de aeronave proporciona las características de actuaciones requeridas tanto aerodinámicas como propulsivas. El modelo aerodinámico define la resistencia como

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

donde  $C_D$ , coeficiente de resistencia, es conocido como polar del avión

$$C_D = C_D(M, C_L)$$

El coeficiente de sustentación  $C_L$  está definido por  $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$ , donde  $\rho$  es la densidad del aire y  $S$  la superficie alar de referencia. El número de Mach viene dado

como  $M = \frac{V}{\sqrt{\kappa R_a \Theta(h)}}$ , donde  $\kappa = 1.4$  es el cociente de calores específicos y  $R_a$  es la constante del aire. La expresión de  $C_D$  es necesario modificarla en función de la configuración de la aeronave (flaps y tren de aterrizaje). El modelo detallado de  $C_D$  se puede ver en el Anexo B.

El modelo propulsivo define el empuje disponible y el consumo específico. Para el empuje disponible se considera el siguiente modelo

$$T = W_{TO} \delta C_T(M, N_c)$$

donde  $W_{TO}$  es el peso de referencia en despegue,  $\delta = \frac{P}{P_{SL}}$  es el cociente de presiones ( $P_{SL}$  es la presión de referencia a nivel del mar en el modelo de atmósfera ISA), y  $C_T$  es el coeficiente de empuje, en general función del número de Mach y del parámetro de control del motor  $N_c$ . Dado un rating de motor (take off, climb o idle), el parámetro de control es función del número de Mach y la altitud ( $N_c(M, h)$ ), y por tanto se puede definir el modelo como

$$T = T_{RATE}(M, h)$$

Para el consumo específico se considera el siguiente modelo

$$c = \frac{a_{SL} \sqrt{\theta}}{L_H} C_C(M, C_T)$$

donde  $a_{SL}$  es la velocidad del sonido al nivel del mar,  $\theta = \frac{\Theta}{\Theta_{SL}}$  es el cociente de temperaturas ( $\Theta_{SL}$  es la temperatura de referencia a nivel del mar en atmósfera ISA),  $L_H$  es el calor latente del combustible y  $C_C$  es el coeficiente de consumo específico de combustible, el cual en general es función del número de Mach y del coeficiente de empuje  $C_T$ . La dependencia de  $C_C$  con el  $C_T$  es despreciable, por el contrario la dependencia de  $C_C$  con el número de Mach es importante para turbofanés de alta relación de derivación y por tanto debe ser tenido en consideración. De este modo, el modelo de consumo específico considerado es

$$c = c_{SL}(M) \sqrt{\theta}$$

Para más detalle acerca del modelo propulsivo, puede referirse al Anexo B.

### 3.3.- INTERFAZ DE TRAJECTORY

La comunicación con TRAJECTORY se realiza mediante un conjunto de datos de entrada, a partir de los cuales TRAJECTORY será capaz de calcular la trayectoria y proporcionar las variables que definen la trayectoria como datos de salida. Los datos de entrada necesarios para el funcionamiento de TRAJECTORY son:

- Condiciones iniciales.

TAS : velocidad verdadera  
PTH : ángulo de asiento de la trayectoria  
HDG : rumbo geográfico  
m : masa de la aeronave  
LAT : latitud  
LONG: longitud  
ALT : altitud  
DST : distancia sobre la superficie terrestre  
t : tiempo

- Ligaduras o constraints (CONS). Como se indicó anteriormente, cada segmento de vuelo está definido por dos ligaduras. Los tipos de ligaduras necesarias para generar una trayectoria global tipo son:

- SPD, mantener velocidad de vuelo constante.

- o Tipos:

- CAS
- MACH

- ALT, mantener altitud de vuelo constante.

- o Tipos:

- $h_{AGL}$ . El nivel de referencia para medir alturas es con respecto al nivel de QFE.
- $h_p$ . La referencia para medir alturas es con respecto al nivel de 1013 hPa.

- ENG, mantener rating del motor constante.

- o Tipos:

- TO
- CLB
- IDLE

- PTH, mantener ángulo de trayectoria vertical de vuelo constante.

- HDG, mantener rumbo geográfico constante.

- Eventos (EVENT). Los eventos se utilizan para definir el punto de finalización de un segmento de vuelo unitario correspondiente a la trayectoria global tipo. Cuando una variable de vuelo, velocidad, altitud, distancia, way point; alcanza el valor de un evento asociado a esa variable se

finaliza el cálculo de ese segmento. Trajectory permite chequear varios eventos a la vez, estando cada uno de ellos definidos por 3 campos:

- Events.Function
- Events.Option.Type
- Events.Option.Data

Por otra parte, los datos de salida generados por TRAJECTORY © son:

TAS	: velocidad verdadera
PTH	: ángulo de asiento de la trayectoria
HDG	: rumbo geográfico
m	: masa de la aeronave
LAT	: latitud
LONG	: longitud
ALT	: altitud
DST	: distancia sobre la superficie terrestre
BNK	: ángulo de balance
L	: sustentación
T	: empuje
t	: tiempos en los que se evalúa la integración
TE	: tiempo en el que se alcanzó el evento
YE	: valor del evento alcanzado
IE	: evento alcanzado

que son vectores que expresan la evaluación de dichas variables en el vector de tiempos  $t$ .

Con estos datos se podrá obtener tanto las condiciones iniciales así como las ligaduras aplicables al siguiente segmento.