



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
Departamento de Ingeniería Eléctrica

## PROYECTO FIN DE CARRERA

---

OBTENCIÓN DE EQUIVALENTES EXTERNOS  
PARA EL ESTUDIO  
DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS  
EN REDES ELÉCTRICAS

---

Autor: **Alfonso Bachiller Soler**

Directores: **Dr. José Antonio Rosendo Macías**  
**Dr. Antonio Gómez Expósito**

Sevilla, mayo de 2009.



A mi mujer y a mis hijas, por todo el tiempo que les he robado  
y por el que les seguiré robando.



*All people know the same truth.  
Our lives consist of how we choose to distort it*  
Woody Allen

*El que busca la verdad, busca a Dios, tanto si lo sabe como si no.*  
Edith Stein

*Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo.*  
Benjamin Franklin



# Agradecimientos

Al fin puedo poner punto final a cinco años de intenso trabajo, de horas de clase, de estudio, de fines de semana sin ver el sol... Han sido unos años en los que ha habido momentos realmente difíciles y momentos muy gratificantes y alentadores.

Huelga decir el gran esfuerzo que conlleva completar unos estudios como son los de Ingeniero Aeronáutico. Sin embargo, ha valido la pena por numerosas razones. Me ha permitido conocer personas muy valiosas con las que he compartido momentos realmente emocionantes. No quisiera olvidarme de profesores como D. Damián Rivas, D. Antonio Barrero, D. Oscar López, Dña. Pilar Ariza, D. Eugenio Pérez, y muchos otros con los que he disfrutado las horas que he estado sentado en las, no muy cómodas, bancas de las aulas. Naturalmente también quiero acordarme de compañeros de clase como Alfonso Valenzuela, Carlos García, Jesús Justo,...

Una vez más, tengo que agradecer a los profesores Jose Antonio Rosendo Macías y Antonio Gómez Expósito por haber confiado en mí este proyecto. También a REE por la financiación del mismo.

A mi familia natural y política también quiero dedicarle estas líneas para agradecerle todo el apoyo mostrado durante este tiempo para que pudiera lograr el objetivo.

Con especial cariño a mi esposa Lidia por su paciencia y apoyo en todos los momentos difíciles así como por todos los ratos que no le he dedicado. A mis hijas, Lidia y María, por todo el tiempo de juego que les he robado.

Quizás estas últimas palabras sean las que mas me cuesten escribir. Van dirigidas a mis padres por haberme dado la vida y ese espíritu de lucha y entrega. Quiero acordarme especialmente de mi madre que vio el comienzo de estos estudios pero el destino ha hecho que no los pueda ver concluidos.

Sevilla, mayo de 2009.



# Índice general

Índice de figuras	VI
Índice de tablas	VII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Simulación de sistemas eléctricos</b>	<b>3</b>
2.1 Introducción . . . . .	3
2.2 Concepto de simulación . . . . .	4
2.3 Tipos de simuladores de sistemas eléctricos . . . . .	6
2.3.1 Simulador analógico . . . . .	6
2.3.2 Simulador digital . . . . .	8
2.4 Tipos de estudios de sistemas eléctricos . . . . .	9
2.5 Modelado del sistema eléctrico . . . . .	10
<b>3 Transitorios electromagnéticos</b>	<b>13</b>
3.1 Aspectos generales . . . . .	13
3.2 Metodología de cálculo . . . . .	15
3.3 Ecuación de estado . . . . .	16
3.3.1 Solución explícita . . . . .	17
3.3.2 Solución numérica . . . . .	18
3.4 Método de Dommel . . . . .	21
3.4.1 Circuito equivalente de los elementos básicos . . . . .	22
3.4.1.1 Resistencia . . . . .	22
3.4.1.2 Bobina . . . . .	22
3.4.1.3 Condensador . . . . .	23
3.4.1.4 Línea . . . . .	24
3.4.2 Procedimiento de resolución de redes lineales . . . . .	26
3.4.2.1 Ecuaciones nodales . . . . .	27
3.4.2.2 Proceso de cálculo . . . . .	28
3.5 Resumen . . . . .	34

<b>4</b>	<b>Análisis de sistemas continuos y discretos</b>	<b>37</b>
4.1	Introducción . . . . .	37
4.2	Transformada $s$ . . . . .	39
4.3	Transformada $Z$ . . . . .	40
4.4	Métodos de transformación del dominio $s$ al dominio $z$ . . . . .	41
4.4.1	Transformación bilineal . . . . .	42
4.4.2	<i>Root-matching</i> o transformación $z$ adaptada . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Equivalentes de red dependientes de la frecuencia (FDNE)</b>	<b>47</b>
5.1	Introducción . . . . .	47
5.2	Obtención del FDNE . . . . .	50
5.3	Rango de frecuencias . . . . .	51
5.3.1	Relación entre el origen del transitorio y el rango de frecuencias . . . . .	52
5.3.2	Aspectos generales en la representación y clasificación del rango de frecuencias . . . . .	53
5.4	Respuesta en frecuencia . . . . .	55
5.4.1	Equivalente monopuerta . . . . .	56
5.4.2	Equivalente Bipuerta . . . . .	57
5.5	Condiciones de estabilidad y pasividad . . . . .	59
5.5.0.1	Red monopuerta lineal . . . . .	59
5.5.0.2	Red bipuerta lineal . . . . .	60
5.6	Identificación . . . . .	61
5.6.1	Identificación en el dominio $s$ . <i>Vector fitting</i> . . . . .	63
5.6.2	Identificación en el dominio $z$ . . . . .	64
5.6.3	Determinación del orden del equivalente . . . . .	65
5.7	Implementación . . . . .	65
5.7.1	Implementación de $Y(z)$ en EMTP . . . . .	66
5.7.2	Implementación de $Y(s)$ en EMTP . . . . .	67
5.8	Precisión . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Procedimiento Propuesto</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Integración numérica usando la regla trapezoidal</b>	<b>83</b>
<b>B</b>	<b>Señales <i>multisine</i></b>	<b>85</b>
<b>C</b>	<b>Técnicas de identificación</b>	<b>89</b>
C.1	Identificación en el dominio $s$ con datos del dominio frecuencial	89
C.2	<i>Vector fitting</i> . . . . .	91
C.2.1	Descripción . . . . .	91
C.2.2	Polos iniciales . . . . .	92
C.2.3	Observaciones . . . . .	93
C.3	Identificación en el dominio $z$ con datos el dominio frecuencial	93
C.4	Identificación en el dominio $z$ con datos del dominio temporal	96

# Índice de figuras

1.1	División de la red eléctrica en zona de estudio y red externa. . . . .	1
3.1	Circuito del ejemplo 3.1 . . . . .	19
3.2	Evolución temporal de las variables de estado ( $\Delta t=0,5$ s) . . . . .	21
3.3	Evolución temporal de las variables de estado ( $\Delta t=0,2$ s) . . . . .	21
3.4	Evolución temporal de las variables de estado ( $\Delta t=2$ s) . . . . .	22
3.5	Circuito equivalente de una resistencia . . . . .	22
3.6	Circuito equivalente de una bobina . . . . .	23
3.7	Circuito equivalente de un condensador . . . . .	23
3.8	Esquema de una línea ideal monofásica . . . . .	24
3.9	Circuito equivalente de una línea ideal . . . . .	25
3.10	Línea con pérdidas serie . . . . .	26
3.11	Circuito equivalente de una línea con pérdidas serie . . . . .	26
3.12	Circuito equivalente del ejemplo 3.2 . . . . .	29
3.13	Sistema eléctrico del ejemplo 3.3 . . . . .	31
3.14	Modelo discreto una vez abierto el interruptor . . . . .	32
3.15	Resultados obtenidos aplicando el método de Dommel . . . . .	34
4.1	Relaciones entre dominios. . . . .	38
5.1	Impedancia del sistema en función de la frecuencia. . . . .	48
5.2	Equivalente propuesto por Hingorani & Burberry. . . . .	48
5.3	Equivalente propuesto por Cleirici & Marzio. . . . .	49
5.4	Equivalente propuesto por Morched, Ottevangers y Martí. . . . .	49
5.5	Ejemplo de FDNE monopuerta. . . . .	51
5.6	Ejemplo de FDNE bipuerta. . . . .	52
5.7	Pasos para obtener el FDNE. . . . .	53
5.8	Equivalente a secuencia directa. . . . .	56
5.9	Equivalente a secuencia homopolar. . . . .	57
5.10	Calculo del equivalente monopuerta en redes asimétricas. . . . .	57
5.11	Calculo del equivalente monopuerta en redes asimétricas. . . . .	58
5.12	Calculo del equivalente monopuerta en redes asimétricas. . . . .	58
5.13	Equivalente bipuerta lineal trifásica. . . . .	58
5.14	Monopuerta lineal monofásica. . . . .	60
5.15	Bipuerta lineal monofásica. . . . .	61

5.16	Equivalente $\pi$ de una bipuerta lineal. . . . .	61
5.17	Opciones del proceso de identificación. . . . .	62
5.18	Equivalente Norton. . . . .	66
6.1	Esquema eléctrico desarrollado en PSCAD. . . . .	72
6.2	Geometría de la línea. . . . .	72
6.3	Datos de la torre. . . . .	73
6.4	Datos del conductor. . . . .	73
6.5	Intensidad inyectada a la línea. . . . .	74
6.6	Detalle de la intensidad inyectada a la línea. . . . .	74
6.7	Tensión obtenida en bornes de la línea. . . . .	75
6.8	Detalle de la tensión obtenida en bornes de la línea. . . . .	75
6.9	Respuesta en frecuencia del sistema. . . . .	76
6.10	Ajuste del modelo con 16 polos. . . . .	77
6.11	Desviación en magnitud y fase del ajuste con 16 polos respecto a los datos de la respuesta en frecuencia. . . . .	77
6.12	Desviación en magnitud y fase del ajuste con 20 polos respecto a los datos de la respuesta en frecuencia. . . . .	78
6.13	Ajuste del modelo en el dominio $z$ con 20 polos y $\Delta t=10 \mu s$ . . . . .	79
6.14	Esquema eléctrico propuesto para la validación del modelo. . . . .	79
6.15	Intensidades que circulan por la red externa y por el FDNE. . . . .	80
6.16	Detalle de las intensidades que circulan por la red externa y por el FDNE. . . . .	80
6.17	Detalle de las intensidades que circulan por la red externa y por el FDNE. . . . .	81
A.1	Regla trapezoidal . . . . .	84
B.1	Señal <i>multisine</i> con optimización de fase. . . . .	87
B.2	Transformada de Fourier de la señal <i>multisine</i> con optimización de fase. . . . .	87
B.3	Señal <i>multisine</i> sin optimización de fase. . . . .	88
B.4	Transformada de Fourier de la señal <i>multisine</i> sin optimización de fase. . . . .	88

# Índice de tablas

2.1	Intervalos de tiempo de fenómenos en sistemas eléctricos. . .	9
5.1	Origen del transitorio y el rango de frecuencias asociado. . . .	54
5.2	Clasificación del rango de frecuencias. . . . .	55



# Capítulo 1

## Introducción

Los estudios de transitorios electromagnéticos requieren el modelo detallado de grandes y complejas redes eléctricas. Sin embargo, esta representación detallada es prohibitiva, especialmente para aplicaciones en tiempo real y análisis estadístico. Esto da lugar al consumo de excesivos recursos computacionales en términos de tiempo de CPU y de almacenamiento, así como el tiempo requerido para obtener los archivos de datos requeridos.

En este sentido, una propuesta es dividir el sistema en dos partes (Figura 1.1):

1. La zona de estudio, la cual se encuentra afectada significativamente por el proceso transitorio que se quiere analizar.
2. El resto de la red, o comúnmente denominado red externa, el cual se representará por un equivalente.

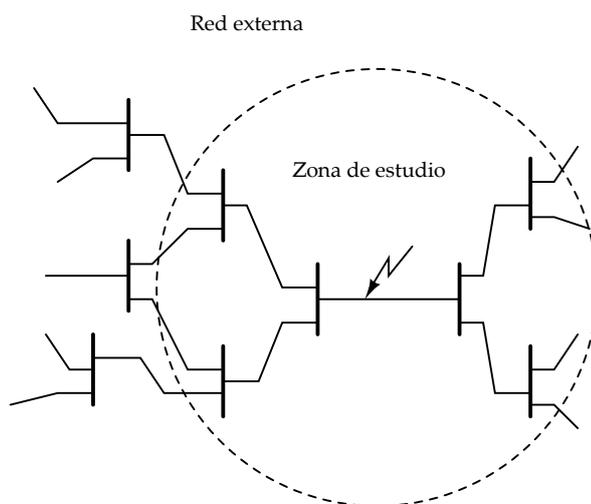


Figura 1.1: División de la red eléctrica en zona de estudio y red externa.

Dependiendo de la naturaleza y características del fenómeno transitorio, la zona de estudio deberá incluir modelos detallados de componentes, parámetros dependientes de la frecuencia y no linealidades. Por otra parte, los elementos de la red externa tienen un impacto menor sobre el fenómeno transitorio y pueden aproximarse por sus modelos lineales, incluyendo la dependencia con la frecuencia de los parámetros dentro de la banda de frecuencias de interés. Evidentemente, la red externa deberá ser elegida de forma que no afecte de forma considerable a los resultados de la simulación.

Usualmente, la zona de estudio contiene una sección relativamente pequeña del sistema mientras que la red externa incluye el resto. El objetivo principal es sustituir la red externa por un equivalente cuyo comportamiento sea similar a dicha parte de la red en un determinado rango de frecuencias. La razón que hay detrás de este modelo es que los transitorios de altas frecuencias no se propagan grandes distancias por la red debido a la alta atenuación que sufren. Sin embargo, no hay un criterio sistemático que defina la frontera entre la zona de estudio y la red externa. Es por ello, que en la mayoría de la veces esta elección se base en la experiencia. La CIGRE [1] proporciona algunas recomendaciones al respecto aunque no aseguran suficiente precisión para redes densas que contengan líneas de transporte cortas. Los factores que influyen en la decisión de a que distancia se ha de colocar el equivalente de la zona donde se produce la perturbación se basan en lo siguiente:

- La ubicación dentro de la red de los nudos y ramas donde se requieren los resultados del análisis.
- La precisión del equivalente externo.
- La precisión con la que el programa de simulación permita modelar la respuesta en frecuencia de los modelos detallados de los elementos.
- La topología de la red.
- El origen y tipo de perturbación.

Lo mas simple es que el equivalente se sitúe lo más cerca posible de la perturbación, de forma que el tamaño de la zona de estudio sea lo mas reducida posible. Sin embargo, la red externa debe ser siempre lineal e invariante en el tiempo, y las no linealidades (con un impacto pronunciado en el transitorio) se han de excluir de dicha zona (expandingo la zona de estudio). A modo de conclusión, para evitar un coste computacional excesivo, la red se divide en dos partes: la zona de estudio y un equivalente el cual representa la red externa.

El motivo de este trabajo es la descripción y evaluación de los métodos publicados en la literatura especializada para la obtención e implementación de equivalentes externos.

# Capítulo 2

## Simulación de sistemas eléctricos

El objetivo de este capítulo es introducir una serie de conceptos básicos relacionados con el modelado de un sistema eléctrico para conseguir un entendimiento satisfactorio de las herramientas de simulación.

### 2.1 Introducción

Lo primero que hay que tener claro es el propósito de la simulación, es decir, el tipo de estudio que se desea realizar. La simulación del sistema eléctrico será diferente si se realiza un flujo de cargas, un estudio de cortocircuitos, un análisis de distorsión armónica, un estudio de estabilidad del sistema o un análisis de transitorios electromagnéticos.

El tipo de estudio condiciona el modelado del sistema eléctrico. Por ejemplo, no es igual el modelo matemático de un generador, transformador, línea, etc. para un estudio en régimen permanente que para un análisis de transitorios electromagnéticos. Es decir, para cada tipo de estudio existe un modelo que resulta más adecuado y que varía según el tipo de estudio. Además, los parámetros que se deben conocer para poder desarrollar el proceso de simulación varían según el modelo. Por lo tanto, según el estudio, el nivel de detalle necesario para modelar los diversos equipos eléctricos es diferente.

Así, lo primero que se debe tener claro es el tipo de estudio que se pretende realizar, ya que condiciona el software de simulación y los datos que se deben conocer del sistema. Los paquetes de software tienen una determinada capacidad de cálculo y rara vez son adecuados para todos los tipos de estudio. Por otra parte, de nada sirve una adecuada herramienta de simulación si se desconocen los valores de los parámetros que hay que definir para caracterizar los diversos elementos.

## 2.2 Concepto de simulación

La simulación consiste [2] en una serie de técnicas que imitan o simulan las operaciones de diferentes procesos de la vida real. Para analizar estos procesos desde un punto de vista científico, a menudo hay que realizar un conjunto de suposiciones acerca de cómo se desarrollan dichos procesos. Estas suposiciones, que normalmente adoptan la forma de ecuaciones matemáticas o relaciones lógicas, constituyen los modelos.

La simulación incluye tanto la construcción del modelo como el proceso de experimentación para estudiar un sistema. Los estudios de simulación se pueden aplicar en todo tipo de áreas temáticas como: tecnología, fabricación, negocios, ecología y medio ambiente, sociedad, biociencias, etc. La simulación permite experimentar con el modelo antes que con el sistema real, permitiendo examinar el sistema y realizar cambios y nuevos diseños sin necesidad de cambios físicos o instalaciones adicionales.

Si las relaciones que componen el modelo son suficientemente simples, pueden utilizarse métodos matemáticos sencillos para obtener información exacta del comportamiento del sistema a analizar. Sin embargo, la mayoría de los sistemas reales son demasiado complejos para ser analizados mediante modelos que sean resolubles por métodos analíticos sencillos. Por lo tanto, estos modelos se deben analizar mediante técnicas más complejas. Estas técnicas utilizan ordenadores para evaluar numéricamente los modelos desarrollados durante un determinado periodo de tiempo.

Algunas de las razones que justifican la utilización de los procesos de simulación son las siguientes:

- La inmensa mayoría de los sistemas reales son suficientemente complejos y variables como para que no se puedan describir mediante modelos matemáticos de resolución analítica sencilla. Por tanto, un proceso de simulación es la única vía posible para poder analizar en profundidad el comportamiento del sistema en distintas condiciones de funcionamiento.
- La simulación permite realizar una comparación entre distintas posibilidades de diseño para determinar cuál es la que mejor se adecúa a las necesidades existentes.
- Mediante simulación se puede mantener un mejor control sobre condiciones experimentales del que sería posible cuando se ensaya sobre el propio sistema.
- Se puede analizar, de forma económica, el intervalo de tiempo deseado para sacar conclusiones acertadas acerca del comportamiento del sistema bajo las condiciones de funcionamiento a estudiar, desde los primeros microsegundos hasta varios minutos, e incluso periodos más largos.

- Es posible experimentar nuevos procedimientos, estructuras, etc. sin interrumpir la operación del sistema real.
- Se pueden probar fácilmente hipótesis de cómo y por qué se produce un fenómeno.
- Permite alcanzar un conocimiento profundo sobre qué variables son las más importantes para el resultado y cómo interactúan.
- Se pueden manipular nuevas situaciones de las que se tienen un conocimiento y experiencia limitados, para analizar y preparar eventos futuros.

Sin embargo, los procesos de simulación también presentan algunas desventajas:

- El desarrollo de los modelos necesarios para la simulación a menudo exige una gran cantidad de tiempo. Uno de los problemas más importantes a resolver es determinar si el modelo de simulación definido es una representación exacta del sistema a analizar. Además, a veces se necesitan datos de partida de los que no se dispone. La fiabilidad de los resultados dependerá de la fiabilidad de la información suministrada.
- Si el modelo desarrollado no es una representación válida del sistema a analizar, los resultados de la simulación proporcionan muy poca información útil acerca del sistema que se está analizando.
- En algunos casos, especialmente en procesos complicados, puede existir dificultad en la interpretación de los resultados.
- Los modelos usados para estudiar sistemas grandes tienden a ser muy complejos, por lo que escribir los programas de ordenador para ejecutarlos puede llegar a ser una tarea ardua. Este inconveniente se está superando actualmente gracias al desarrollo de paquetes software de aplicación específica que incorporan modelos básicos de todos los elementos a considerar en el proceso de simulación.
- En algunas ocasiones, la simulación de sistemas complejos exige gran cantidad de tiempo para completar el proceso. Un análisis adecuado puede que no sea accesible por falta de tiempo o de recursos, por lo que, a veces, es preferible una estimación rápida con métodos analíticos. Sin embargo, estos periodos de tiempo se están reduciendo considerablemente con el gran desarrollo que están experimentando los ordenadores actualmente.
- No se pueden validar los resultados de manera concluyente.

## 2.3 Tipos de simuladores de sistemas eléctricos

Para conocer la respuesta de un sistema eléctrico ante situaciones impuestas por diversas condiciones de funcionamiento, bien habituales o anómalas, se podrían realizar múltiples ensayos *in situ* sobre el mismo. En ese caso, habría que someter a la red a diversas combinaciones del conjunto de parámetros fundamentales que definen su estado de funcionamiento, tanto en situaciones normales de operación como en situaciones de funcionamiento incorrecto, que obligan a provocar sobre ese sistema cualquier tipo de contingencia.

Debido a que los sistemas eléctricos se explotan cada vez más cerca de sus límites físicos, en la actualidad resulta prácticamente imposible dejar fuera de servicio instalaciones reales para poder realizar ensayos sobre ellas, por el coste que eso supone y los riesgos de daños. Por ello, resulta necesario recurrir a un proceso de cálculo o de simulación que reproduzca el comportamiento y los fenómenos que se producen en un sistema eléctrico y que permita conocer tanto la respuesta del sistema ante condiciones de funcionamiento normal o anómalas, como las consecuencias sobre los parámetros fundamentales del sistema ante dichas situaciones.

La complejidad de los sistemas eléctricos hace que estos estudios sean difíciles, tediosos y que consuman una gran cantidad de tiempo. Por ello, hoy en día, para una realización más rápida y precisa de estos estudios, se recurre a herramientas que agilizan y simplifican el proceso de cálculo. Las herramientas disponibles para realizar estos procesos de simulación son los simuladores analógicos y los simuladores digitales. Hay que tener presente que dichas herramientas son precisamente eso, herramientas, y por lo tanto, para poder sacar provecho de las mismas y obtener resultados fiables hay que tener un conocimiento claro de las características del problema a analizar, de la información necesaria sobre el sistema eléctrico a considerar y de la herramienta que se va a utilizar en el proceso de simulación.

### 2.3.1 Simulador analógico

Inicialmente, la necesidad de resolver estos problemas y entender los fenómenos asociados condujo a modelos físicos a escala, o analizadores de redes (NA, Network Analyzer), donde se estudiaban fenómenos estacionarios. Como evolución de los NA se construyeron los primeros TNA (Transient Network Analyzer) hacia los años cincuenta, y se comenzaron propiamente los estudios de transitorios eléctricos.

Un simulador analógico consiste en un modelo físico reducido del sistema eléctrico real [2], en donde las líneas, transformadores, interruptores, etc. se representan por inductancias, capacidades y resistencias que operan con tensiones e intensidades reducidas (de 10 a 500 V y de 1 a 5 A). Las magnitudes de tensión e intensidad se pueden observar y medir en un osciloscopio o

en equipos de medida digitales conectados directamente en diferentes puntos del TNA.

Esta herramienta de simulación se utiliza principalmente para el análisis de transitorios electromagnéticos. La forma de modelar los diferentes elementos del sistema eléctrico en un TNA es la siguiente: las fuentes de alimentación se modelan mediante una fuente sinusoidal trifásica de baja impedancia, suficientemente grande como para aparecer como una fuente de potencia infinita; las líneas y cables se representan mediante un conjunto de circuitos  $\pi$  conectados en cascada, cada uno de los cuales está compuesto por resistencias e inductancias en serie y condensadores shunt; los transformadores y autotransformadores de dos o tres devanados se modelan mediante una serie de reactancias; las reactancias y los condensadores se modelan mediante inductancias y condensadores a escala; los pararrayos se suelen representar mediante un explosor en serie con una resistencia no lineal; las cargas se representan de forma estática mediante una combinación de resistencias, inductancias y condensadores. Así mismo, es obligatorio que todos los modelos utilizados tengan las mismas características a elevadas frecuencias que los elementos del sistema eléctrico a los cuales representan, lo cual permite reproducir la respuesta en el rango de frecuencias que interesa analizar.

La exactitud de los resultados proporcionados por el TNA depende de la exactitud de los datos conocidos del sistema a simular y del grado en el cual los modelos desarrollados se aproximen a las características de la situación real a analizar. Se ha comprobado que las diferencias detectadas en medidas realizadas con un TNA y confirmadas con medidas sobre el sistema real experimentan una desviación inferior al 4 %. Cuando se dispone de curvas de resultados de ensayos reales, se puede optimizar el modelo y obtener resultados con errores inferiores al 1 %.

Otro problema adicional resulta de la dificultad de construir máquinas eléctricas que sean homotéticas a las máquinas reales, en particular en lo que se refiere a las constantes de tiempo de los devanados, por lo que puede ser necesario fabricar máquinas especiales.

Las ventajas de este tipo de simulador frente a otro tipo de simuladores son:

- Proximidad al fenómeno físico real, evitando cualquier riesgo de inestabilidad numérica.
- Es muy rápido y flexible, lo que permite hacer gran cantidad de pruebas con distintos parámetros de definición del fenómeno perturbador.
- Opera en tiempo real, es decir, la respuesta del sistema ante la perturbación se produce instantáneamente igual que sucede en una situación real.

Sin embargo, estos modelos también presentan una serie de inconvenientes:

- El número de componentes del sistema eléctrico a simular está limitado.
- Pueden llegar a ser extremadamente caros para el estudio de sistemas complejos, fenómenos no lineales o fenómenos asociados con problemas de acoplamiento entre fases.
- Precisan de un mantenimiento periódico y recalibración.
- Ocupan un espacio considerable.
- Puede ser necesario fabricar equipos especiales, los cuales complican y encarecen el TNA.

Durante muchos años la velocidad de simulación de los TNA fue superior a la de las computadoras. Sin embargo, los avances que han tenido lugar en los últimos treinta años, han permitido reducir drásticamente el tiempo de cálculo, de forma que en la actualidad se emplean casi exclusivamente las simulaciones digitales en la mayoría de las aplicaciones.

### 2.3.2 Simulador digital

La extraordinaria evolución de la tecnología de los ordenadores en las últimas décadas ha supuesto un gran desarrollo en la aplicación de los procesos de cálculo. A su vez, esto ha permitido plantear modelos numéricos de procesos transitorios. Es por ello que el simulador digital se ha convertido en uno de los instrumentos básicos para el análisis, cada vez más realista, de los sistemas de energía eléctrica.

El simulador digital está basado en una serie de herramientas que simulan los distintos elementos del sistema eléctrico resolviendo las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento. Así, se obtienen de forma digital las magnitudes de los parámetros (tensión, intensidad, etc.) que aparecen en el sistema bajo diversas hipótesis de funcionamiento. En general, estos simuladores digitales cuentan con un procesador gráfico que representa la evolución de los parámetros calculados.

Las ventajas más relevantes de este tipo de herramientas de simulación son:

- Tienen capacidad para modelar sistemas eléctricos de grandes dimensiones.
- Permiten realizar múltiples variaciones de la topología del sistema analizado de forma más sencilla que los simuladores analógicos.

- Permiten elegir el incremento de tiempo utilizado en la realización de la simulación.
- Se han desarrollado métodos y algoritmos adecuados para reducir los tiempos de cálculo.
- Ocupan menos espacio físico y son más económicos.

Sin embargo, también presentan inconvenientes. Los más relevantes son:

- No operan en tiempo real.
- Pueden presentar problemas de inestabilidades numéricas como consecuencia del algoritmo de resolución o el intervalo de tiempo empleado, lo que puede conducir a errores en los resultados.

## 2.4 Tipos de estudios de sistemas eléctricos

El diseño, construcción y operación del sistema de generación, transporte y distribución de energía eléctrica se realiza con el triple objetivo de proporcionar suministro eléctrico con una adecuada calidad y seguridad, de la manera más económica posible. Para conseguir estos objetivos es necesario comprender y cuantificar, con la mayor exactitud posible, los fenómenos que afectan a los sistemas eléctricos. Estos fenómenos cubren un amplio rango de intervalos de tiempo, como se puede observar en la Tabla 2.1.

Fenómeno	Intervalo de tiempo (s)
Descargas atmosféricas	$10^{-7} \div 10^{-3}$
Conexión y desconexión de maniobra	$10^{-5} \div 10^{-1}$
Transitorio electromecánico	$10^{-2} \div 10$
Transitorio lento	$0,5 \div 1000$

**Tabla 2.1:** Intervalos de tiempo de fenómenos en sistemas eléctricos.

Al estudiar un fenómeno, hay que tener en cuenta la influencia del sistema de control. En fenómenos rápidos, el control prácticamente no afecta debido a que el tiempo de respuesta es superior a la duración del fenómeno. Sin embargo, en fenómenos más lentos sí se debe tener en cuenta.

Así, el tipo de estudio o análisis del sistema eléctrico y los elementos a considerar en el modelo están relacionados con la duración del fenómeno a analizar. De esta forma, los estudios que analizan el sistema eléctrico en diferentes condiciones de funcionamiento son:

- Condiciones de régimen permanente, bajo las cuales todas las variables y parámetros se consideran constantes durante el periodo de estudio. Este tipo de estudios consiste en el análisis del sistema eléctrico para conocer su funcionamiento en estado estacionario. Los principales estudios para este tipo de análisis son: el cálculo de flujo de cargas, el cálculo de cortocircuitos y la propagación de armónicos.
- Condiciones transitorias lentas, que se corresponden con los patrones normales de cambio de topología y las acciones de los controles automáticos. En este tipo de estudios se analiza la evolución del sistema eléctrico en periodos de tiempo que van desde minutos hasta varias horas. Su objetivo consiste en estudiar la dinámica del sistema asociada con el control de la tensión y de la frecuencia.
- Condiciones transitorias electromecánicas, que se corresponden con las oscilaciones electromecánicas de las máquinas y las acciones de los sistemas de control primario de tensión y frecuencia. En este tipo de estudios se analizan fenómenos transitorios rápidos provocados por las oscilaciones electromecánicas de los rotores de los generadores y las interacciones con los dispositivos de control. Su objetivo consiste en estudiar la estabilidad de ángulo y de tensión.
- Condiciones transitorias electromagnéticas, que se corresponden con fenómenos electromagnéticos rápidos en los cuales es importante considerar la velocidad de propagación del fenómeno y se pueden despreciar los fenómenos electromecánicos. Estos estudios analizan fenómenos muy rápidos, de forma que las ondas de tensión e intensidad ya no se pueden suponer como sinusoides de 50 Hz. Este tipo de estudios requieren una representación detallada de la dinámica de algunos de los elementos del sistema que intervienen en el estudio. Los fenómenos que se incluyen en el ámbito de los transitorios electromagnéticos son: sobretensiones provocadas por ondas tipo rayo, sobretensiones provocadas por maniobras de interruptores y seccionadores, fenómenos de ferorresonancia, resonancia subsíncrona, respuesta de sistemas de protección de alta velocidad, etc.

## 2.5 Modelado del sistema eléctrico

Los estudios realizados sobre sistemas eléctricos se basan en la simulación de fenómenos reales usando modelos que representan el mismo comportamiento que el sistema real. En la práctica, en el sistema eléctrico se presentan todo tipo de fenómenos, algunas veces simultáneamente. Dadas las diferentes características entre dichos fenómenos, no es posible definir

un único modelo capaz de dar una imagen real para todo el rango de constantes de tiempo.

La tarea de desarrollar un modelo de un sistema se puede dividir en dos partes: la determinación de la estructura del modelo y el hecho de proporcionar los datos a dicho modelo. La determinación de la estructura fija las características que se deben considerar del sistema eléctrico, mientras que los datos suministran los valores de dichas características.

Para poder modelar y simular cualquier elemento del sistema eléctrico, primero hay que tener un profundo conocimiento de las características de funcionamiento y los parámetros que definen cada uno de los equipos que integran el sistema a simular. En caso contrario los resultados pueden carecer de validez por haber utilizado una metodología o unos modelos que no son apropiados. Por lo tanto, habrá que tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Cómo se puede representar cada componente del sistema eléctrico de forma que se puedan realizar análisis y estudios sobre dicho sistema.
- Cuáles, entre las distintas representaciones o modelos, son las que describen mejor el sistema para realizar el análisis de un estudio determinado.
- Qué expresiones matemáticas describen las características de cada elemento del sistema para que puedan ser incluidas en la herramienta de simulación.

A la hora de diseñar el modelo hay que decidir qué parámetros es necesario incluir en el mismo para disponer de información suficientemente significativa y qué otros parámetros se pueden obviar. Una vez que el modelo está desarrollado, el ajuste del mismo se realiza comparando los resultados obtenidos con datos reales medidos sobre el sistema real. Únicamente de esta forma es posible garantizar que el modelo diseñado es el adecuado.

Existen, por tanto, diferentes tipos de modelos, cada uno correspondiente al análisis de determinados fenómenos, de manera que en función de la constante de tiempo que define el fenómeno se pueden suponer distintas simplificaciones o aproximaciones. Esto constituye un punto fundamental en los procesos de simulación.



## Capítulo 3

# Transitorios electromagnéticos

En los comienzos de la electrotecnia, los ingenieros se centraban fundamentalmente en el estudio del régimen permanente de un sistema eléctrico. En base a estos estudios, mediante ciertos coeficientes basados en la experiencia, se decidía el diseño de los equipos de red. Sin embargo, hay situaciones en las que un sistema eléctrico abandona el régimen permanente para seguir un proceso transitorio en el cual las magnitudes eléctricas, tensión e intensidad, pueden sufrir variaciones importantes.

Estos fenómenos transitorios pueden ser originados por maniobras, faltas, descargas atmosféricas o variaciones bruscas en la demanda de energía. Normalmente, su duración es muy pequeña comparada con el tiempo de operación en régimen permanente, sin embargo, son de gran importancia debido al efecto que pueden tener en el funcionamiento del sistema o sobre los equipos que forman parte de él. Por tanto, su estudio juega un papel importante en el diseño y operación de un sistema eléctrico.

En este capítulo se hará una breve descripción de los aspectos generales de los transitorios electromagnéticos así como de la metodología de cálculo.

### 3.1 Aspectos generales

La operación del sistema de energía eléctrica supone un intercambio continuo de energía electromecánica y electromagnética entre los diferentes componentes del sistema. Así, cualquier perturbación o maniobra que altere ese intercambio estable de energía provoca la aparición de un fenómeno transitorio que se amortigua para recuperar un nuevo estado de funcionamiento estable.

Es decir, el término transitorio electromagnético se refiere a los transitorios debidos a la interacción entre la energía almacenada en forma de campos magnéticos en las bobinas y en forma de campos eléctricos en los condensadores del sistema. Estos transitorios electromagnéticos provocan sobreintensidades o sobretensiones, que someten a los equipos del sistema

eléctrico a unas sollicitaciones que pueden provocar la destrucción de los mismos, siendo los intervalos de tiempo involucrados en este tipo de estudios del orden de microsegundos o milisegundos. Una sobrecorriente puede dañar a un equipo eléctrico por una disipación excesiva de calor o bien por una excesiva sollicitación mecánica. Una sobretensión puede provocar una ruptura dieléctrica si la parte dañada es un material aislante interno, sólido o líquido; o un contorneo si se produce una descarga en un aislamiento externo, es decir, a través del aire.

Cuando aparece una sobretensión en un punto cualquiera de la red eléctrica, esta empieza a propagarse a través de la misma. En dicha propagación, el valor de la sobretensión debe ir disminuyendo al ir derivándose a tierra, por ejemplo, a través de la toma de tierra de una torre, una autoválvula, las resistencias paralelo, el efecto corona, etc. Aún así, puede ocurrir que la sobretensión llegue con un valor excesivo a los transformadores, generadores eléctricos, etc. Hay que tener en cuenta que los aislamientos de los generadores y transformadores no son autorregenerables, es decir, o pierden sus condiciones dieléctricas o no las recobran totalmente después de una descarga disruptiva. En consecuencia, para conseguir una protección adecuada frente a ambos tipos de sollicitaciones, es necesario conocer las condiciones más adversas que se pueden presentar así como los procesos transitorios con los que se originan.

Algunos de los fenómenos que pueden producir sobretensiones son: conexión/desconexión de baterías de condensadores y reactancias, caída de rayos sobre líneas de transporte, energizaciones y desenergizaciones de líneas y transformadores, resonancias, ferromresonancias, etc.

Por otro lado, los problemas de análisis de transitorios en sistemas eléctricos tienen una serie de características comunes a la gran mayoría de ellos, algunas de las cuales son:

- Gran complejidad. Gran cantidad de componentes definidos por ecuaciones integro-diferenciales con numerosos vínculos y condiciones iniciales.
- Posibles no linealidades producidas especialmente en los modelos integro diferenciales de los componentes.
- Variabilidad en el tiempo, tanto de ciertos parámetros de los modelos de los componentes como de las ecuaciones de vínculo.
- Dependencia de la frecuencia, que afecta a la respuesta de los componentes.
- Numerosas variantes a analizar para cada caso de estudio, modificando tanto los parámetros de los componentes como las ecuaciones de vínculo o las condiciones iniciales.

- Precisión limitada debido a la dificultad de conocer muchos de los parámetros físicos reales, a las variaciones aleatorias, a las simplificaciones inherentes en los modelos matemáticos, etc.

El objetivo de los estudios de transitorios electromagnéticos es analizar las sollicitaciones adicionales que van a actuar sobre los distintos equipos del sistema eléctrico. Los resultados de estos estudios permiten especificar niveles de aislamiento, intensidad, energía, etc. que eviten que se produzcan daños en cualquiera de los equipos que se vean afectados. En otras palabras, permiten mantener bajo control los intercambios de energía que ocurren durante los periodos transitorios.

## 3.2 Metodología de cálculo

En los fenómenos de transitorios electromagnéticos de alta velocidad, las ondas de tensión e intensidad no se pueden considerar como ondas sinusoidales de 50 Hz. Estos fenómenos afectan a la respuesta dinámica del sistema en rangos de frecuencia de hasta varios MHz para lo cual se pueden adoptar dos tipos de modelado de los elementos:

- La representación mediante parámetros concentrados, que da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.
- La representación mediante parámetros distribuidos, donde se considera la propagación de la onda electromagnética. Este tipo de representación es necesaria cuando se modelan líneas de transporte y cables para analizar fenómenos que involucran frecuencias mayores de 100 Hz en líneas de longitud superior a 100 km.

Son muchos los métodos que se han desarrollado para el cálculo de transitorios eléctricos mediante un ordenador digital. Estos métodos se pueden dividir fundamentalmente en dos categorías: métodos en el dominio del tiempo y métodos en el dominio de la frecuencia.

Dentro de los métodos en el dominio del tiempo están los que parten directamente del circuito real, y los que parten de un circuito equivalente resistivo. Si se parte directamente del circuito real, el objetivo es obtener un modelo matemático que refleje fielmente el comportamiento del circuito. En general, este modelo se puede traducir a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, conocidas como ecuaciones de estado, que habrá que resolver bien analíticamente o bien numéricamente.

En el segundo caso, el equivalente resistivo del circuito se ha de resolver numéricamente. Hay muchos paquetes de software diseñados para analizar transitorios eléctricos numéricamente, el más popular de los cuales se basa en el algoritmo desarrollado por H.W. Dommel [3], que combina la regla trapezoidal y el método de Bergeron. Este algoritmo fue el origen

del EMTP (ElectroMagnetic Transient Program) [4] y desarrollos posteriores (PSCAD,...).

Los métodos en el dominio del tiempo tienen la ventaja de poder simular con cierta facilidad sistemas no lineales. Sin embargo, para sistemas *stiff*, además de requerir pasos de integración pequeños pueden dar lugar a inestabilidades numéricas.

Los métodos en el dominio de la frecuencia utilizan las bien conocidas transformadas de Fourier, Laplace y la transformada Z. Una de las limitaciones de estos métodos es que no proporcionan una representación local del transitorio en ambos dominios, temporal y frecuencial.

### 3.3 Ecuación de estado

En el dominio del tiempo, la dinámica de un circuito eléctrico lineal e invariante en el tiempo se puede formular como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de coeficientes constantes. Esta formulación tiene las siguientes ventajas:

- La solución, analítica y numérica, de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden es bien conocida.
- Este tipo de representación se puede extender a circuitos que varían con el tiempo o bien a circuitos no lineales.
- Estas ecuaciones son fáciles de programar en un computador digital para sistemas de gran dimensión.

En un instante dado, la respuesta de circuitos puramente resistivos sólo depende de las fuentes de excitación en dicho instante. Sin embargo, en circuitos donde, además de resistencias, hay bobinas y/o condensadores, la respuesta en un instante depende no sólo de las fuentes de excitación en dicho instante sino también del estado del circuito en algún instante de tiempo anterior  $t_0$ . El **estado** de un circuito tiene las dos propiedades siguientes:

- a) El estado y las excitaciones en cualquier instante  $t_0$  determinan de manera única los valores de todas las variables del circuito en  $t_0$ .
- b) El estado en cualquier instante posterior  $t > t_0$  se determina de manera única a partir del estado en el instante  $t_0$  y de las excitaciones para  $t > t_0$ .

En resumen, el estado de un circuito incorpora toda la información necesaria y suficiente sobre el pasado para calcular los valores presentes y para predecir el comportamiento futuro.

Cada una de las componentes que conforman el estado de un circuito se denominan **variables de estado**, y a su número se le llama orden de complejidad. El estado de un circuito es un conjunto híbrido de variables que puede incluir tensiones e intensidades. Éstas son la tensión de cada condensador y la intensidad de cada bobina, las cuales pueden utilizarse de forma directa para expresar la energía almacenada en el circuito en cualquier instante. Es decir, describen el estado de energía del circuito.

### 3.3.1 Solución explícita

Sea un circuito eléctrico lineal e invariante en el tiempo de orden de complejidad  $n$  y caracterizado por su ecuación de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de salidas o de respuestas,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de excitaciones, y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  y  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  son matrices conocidas.

La solución de (3.1) se puede expresar como [5], [6]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_h(t)) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{x}_f(t)$  es la respuesta forzada o respuesta en régimen permanente, y  $\mathbf{x}_h(t)$  es la respuesta natural, también conocida como respuesta a entrada cero, la cual satisface el sistema homogéneo,

$$\dot{\mathbf{x}}_h(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_h(t) \quad (3.3)$$

sujeto a las condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_h(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f(0) \quad (3.4)$$

Formalmente, la solución de (3.3) se puede expresar como [7]

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_h(0), \quad (3.5)$$

donde la función exponencial de una matriz está definida mediante un desarrollo en serie de potencias,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \quad (3.6)$$

Existen numerosos métodos [8] para obtener  $e^{\mathbf{A}t}$ , de forma que se pueda obtener la solución de forma explícita. Este trabajo se centrará fundamentalmente en métodos numéricos de resolución que pueden ser aplicados de forma fácil en los simuladores digitales de sistemas eléctricos.

### 3.3.2 Solución numérica

Se han desarrollado numerosos métodos numéricos para resolver la ecuación de estado, muchos de los cuales se pueden encontrar en [9], [10] y [11]. En este trabajo se ha optado por utilizar la regla trapezoidal por su estabilidad numérica, baja distorsión y razonable precisión entre otras cualidades. En [12] y [13] se pueden encontrar ejemplos de aplicación de la regla trapezoidal para integrar numéricamente la ecuación de estado.

Aplicando la regla trapezoidal, la ecuación de estado (sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.7)$$

se convierte en el sistema de ecuaciones en tiempo discreto,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{A}(\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)] \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{x}_n$  y  $\mathbf{u}_n$  son magnitudes evaluadas en  $t=n\Delta t$ , y  $\Delta t$  es el paso de integración. Agrupando de forma conveniente algunos términos de (3.8) se obtiene,

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}(\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}) \quad (3.9)$$

En consecuencia, para obtener la solución de la ecuación de estado (3.7) es necesario realizar un proceso iterativo en el que en cada iteración se resuelva un sistema algebraico como el (3.9). De esta forma, se va obteniendo el vector de estados para distintos instantes de tiempo sucesivos,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ . Obsérvese que si el paso de integración ( $\Delta t$ ) permanece constante en todo el proceso,  $\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}\right)$  también permanecerá constante, de forma que de una iteración a otra sólo variará el término independiente de (3.9). Esto hace que la técnica de resolución con menor coste computacional sea la factorización LU. Esta técnica tiene la ventaja de que factorizando la matriz  $\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}\right)$  en la primera iteración, nos sirve para el resto de iteraciones.

Así pues, el proceso de resolución numérica de la ecuación de estado se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Antes de comenzar el proceso iterativo:

a) Obtener la factorización LU de la matriz  $\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}\right)$  ya que, como se ha dicho, permanece constante en todo el proceso.

2. En cada iteración:

a) Obtener el término independiente de (3.9), para lo cual se necesitan los resultados de la iteración precedente.

b) Realizar la sustitución hacia adelante y la sustitución hacia atrás para obtener  $\mathbf{x}_{n+1}$ .

El número de iteraciones necesarias depende del paso de integración y de la duración requerida del periodo transitorio:

$$\text{N}^\circ \text{ iteraciones} = \frac{\text{Duración transitorio}}{\Delta t}$$

Una vez calculado el vector  $\mathbf{x}_{n+1}$ , en cada paso de integración el vector de salidas es el siguiente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_{n+1} \quad (3.10)$$

### Ejemplo 3.1

Este ejemplo servirá para ilustrar la aplicación de la regla trapezoidal para resolver la ecuación de estado del circuito de la Figura (3.1). Por simplicidad sólo interesa obtener la respuesta natural, de forma que no habrá fuentes de excitación.

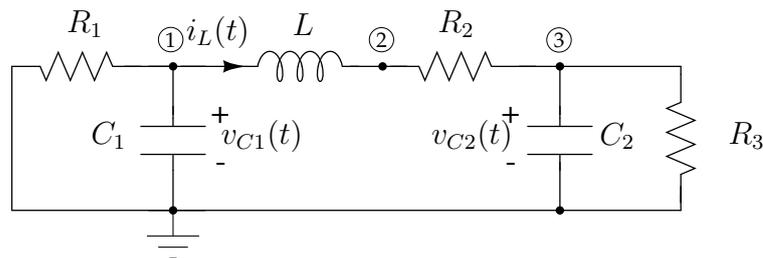


Figura 3.1: Circuito del ejemplo 3.1

El valor de cada uno de los elementos es

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega ; L = 2 \text{ H} ; C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$$

mientras que las condiciones iniciales son las siguientes:

$$v_{C1}(0) = 1 \text{ V} ; v_{C2}(0) = 2 \text{ V} ; i_L(0) = 1 \text{ A}$$

El objetivo es obtener la tensión en cada condensador y la intensidad que circula por la bobina, considerando un paso de integración de 0,5 s y una duración del transitorio de 10 s.

La ecuación de estado de dicho circuito

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & \frac{-1}{R_3 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

la cual, sustituyendo valores, resulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

Según se ha visto, aplicando la regla trapezoidal, este sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en el siguiente sistema de ecuaciones algebraico:

$$\begin{bmatrix} 1,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1,25 & 0,25 \\ -0,125 & 0,125 & 1,125 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,125 & -0,125 & 0,875 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n \quad (3.11)$$

siendo:

$$\mathbf{x}_0 = [ 1 \quad 2 \quad 1 ]^T$$

Aplicando la factorización LU, el sistema de ecuaciones (3.11) queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,1 & 0,1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1,125 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,125 & -0,125 & 0,875 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n$$

Una vez realizada la factorización se comienza el proceso iterativo. Como ejemplo, en la primera iteración el sistema resultante es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,1 & 0,1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1,125 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,75 \\ 0,75 \end{bmatrix}$$

cuya resolución pasa por aplicar la sustitución hacia adelante y la sustitución hacia atrás.

En la Figura 3.2 se representan los resultados obtenidos una vez completados los 20 pasos necesarios, acorde con el paso de integración de 0,5 s y la duración del transitorio de 10 s.

Aprovechando este mismo ejemplo, se puede ver la influencia que tiene sobre la precisión de la solución una variación del paso de integración. Para ello se ha vuelto a aplicar la regla trapezoidal para dos pasos de integración distintos,  $\Delta t=0,2$  s y  $\Delta t=2$  s, dando lugar a los resultados que se muestran en las Figuras 3.3 y 3.4 respectivamente. Hay que destacar que cuando se disminuye el paso de integración se gana en precisión. Así mismo, cuando se utiliza un paso de integración de 2 s se pierde precisión en los resultados aunque la respuesta sigue siendo estable.

---

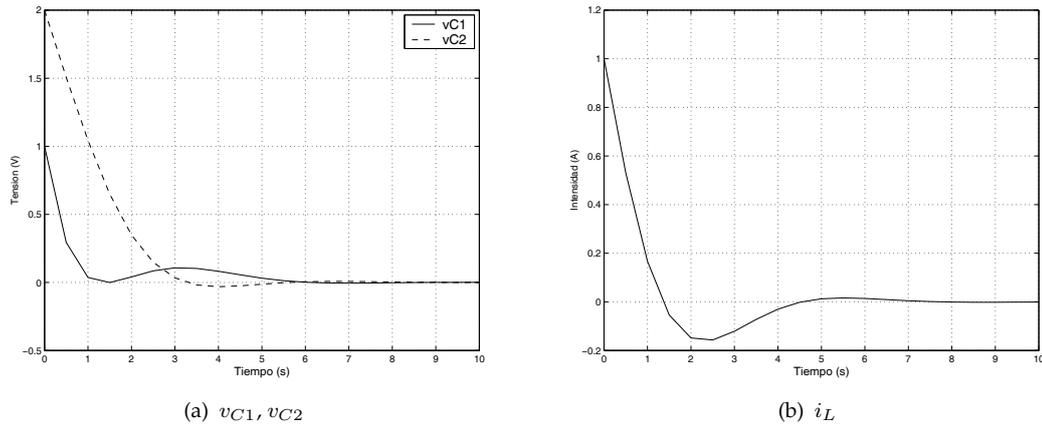


Figura 3.2: Evolución temporal de las variables de estado ( $\Delta t=0,5$  s)

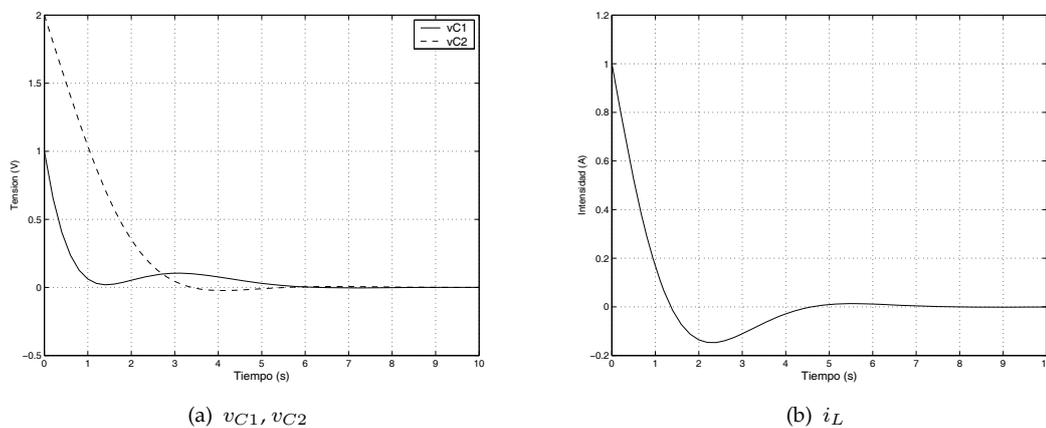


Figura 3.3: Evolución temporal de las variables de estado ( $\Delta t=0,2$  s)

### 3.4 Método de Dommel

En esta sección se presentan los fundamentos del cálculo numérico de procesos transitorios mediante el método de Dommel, que es la solución implementada en la mayoría de programas dedicados a la simulación de transitorios electromagnéticos en sistemas eléctricos. Se basa en la aplicación de la regla trapezoidal (Apéndice A), la cual es empleada en la obtención de los modelos discretos de los elementos de un circuito representados con parámetros concentrados, y el método de Bergeron [14], que se utiliza para obtener el modelo discreto de una línea ideal, representada con parámetros distribuidos.

A continuación se resume la aplicación de la regla trapezoidal y el método de Bergeron en la deducción de los circuitos equivalentes de los elementos básicos de un circuito.

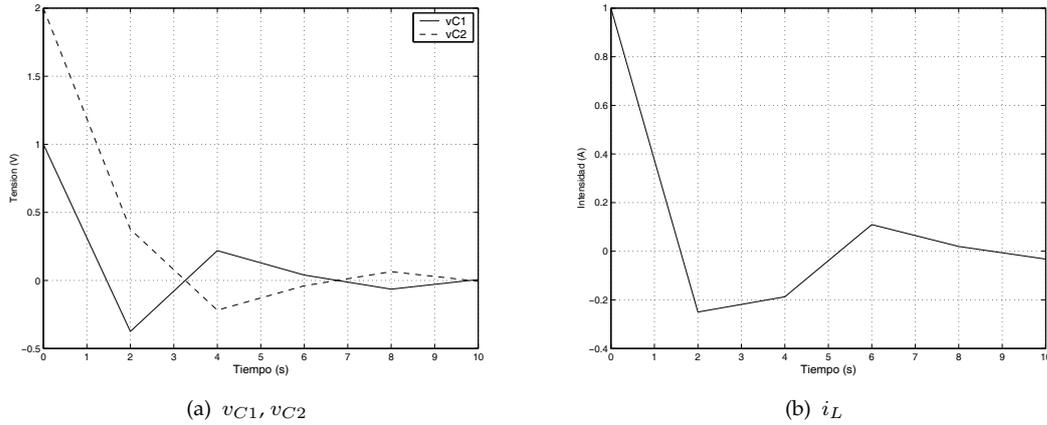


Figura 3.4: Evolución temporal de las variables de estado ( $\Delta t=2$  s)

### 3.4.1 Circuito equivalente de los elementos básicos

#### 3.4.1.1 Resistencia

La ecuación en régimen transitorio de una resistencia (Figura 3.5) es la siguiente:

$$v_{km}(t) = R_{km} i_{km}(t) \quad (3.12)$$

Aplicando la regla trapezoidal resulta la misma expresión ya que el comportamiento de una resistencia no implica ninguna relación integro-diferencial entre sus variables ( $v_{km}(t)$  e  $i_{km}(t)$ ).

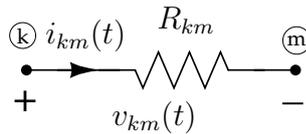


Figura 3.5: Circuito equivalente de una resistencia

#### 3.4.1.2 Bobina

La ecuación en régimen transitorio de una bobina (Figura 3.6(a)) es la siguiente:

$$v_{km}(t) = L_{km} \frac{di_{km}(t)}{dt} \quad (3.13)$$

Aplicando la regla trapezoidal con un paso de integración ( $\Delta t$ ) constante resulta:

$$i_{km}(t) = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L_{km}} [v_{km}(t) + v_{km}(t - \Delta t)] \quad (3.14)$$

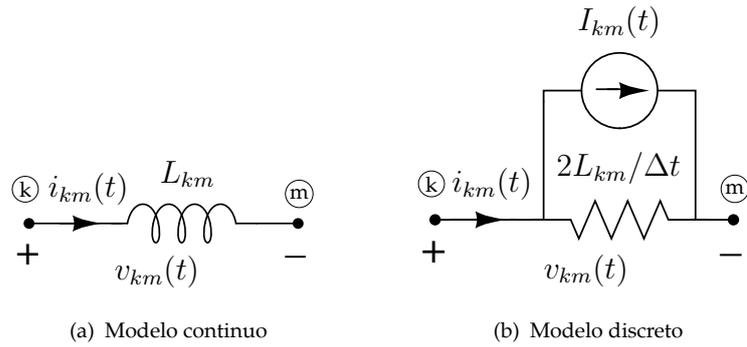


Figura 3.6: Circuito equivalente de una bobina

Esta expresión se puede poner en forma compacta según

$$i_{km}(t) = \frac{\Delta t}{2L_{km}}v_{km}(t) + I_{km}(t) \quad (3.15)$$

donde

$$I_{km}(t) = \frac{\Delta t}{2L_{km}}v_{km}(t - \Delta t) + i_{km}(t - \Delta t) \quad (3.16)$$

es conocido como *término de historia*, ya que depende de los valores de tensión e intensidad en un instante de tiempo ( $\Delta t$ ) anterior.

En la Figura 3.6(b) se representa el modelo discreto que corresponde a la relación tensión-intensidad (3.15) de una bobina.

### 3.4.1.3 Condensador

La ecuación en régimen transitorio de un condensador (Figura 3.7(a)) es la siguiente:

$$i_{km}(t) = C_{km} \frac{dv_{km}(t)}{dt} \quad (3.17)$$

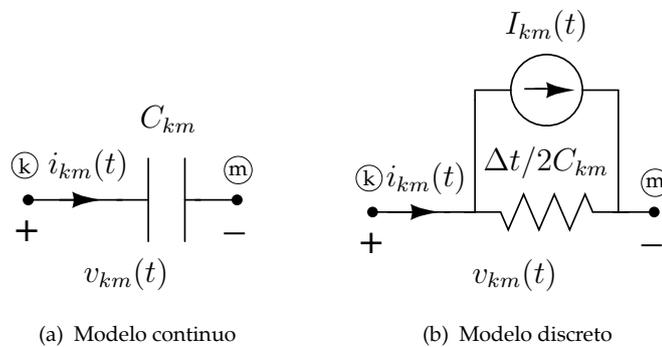


Figura 3.7: Circuito equivalente de un condensador

Aplicando la regla trapezoidal con un paso de integración ( $\Delta t$ ) constante resulta:

$$v_{km}(t) = v_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2C_{km}} [i_{km}(t) + i_{km}(t - \Delta t)] \quad (3.18)$$

Esta expresión se puede poner en forma compacta según

$$i_{km}(t) = \frac{2C_{km}}{\Delta t} v_{km}(t) + I_{km}(t) \quad (3.19)$$

donde

$$I_{km}(t) = \frac{-2C_{km}}{\Delta t} v_{km}(t - \Delta t) - i_{km}(t - \Delta t) \quad (3.20)$$

según se ha dicho es un *término de historia*.

En la Figura 3.7(b) se representa el modelo discreto que corresponde a la relación tensión-intensidad (3.19) de un condensador.

#### 3.4.1.4 Línea

Con objeto de mostrar la simplicidad del método de Dommel, en esta sección se usa la línea monofásica ideal y el modelo de la línea con pérdidas serie.

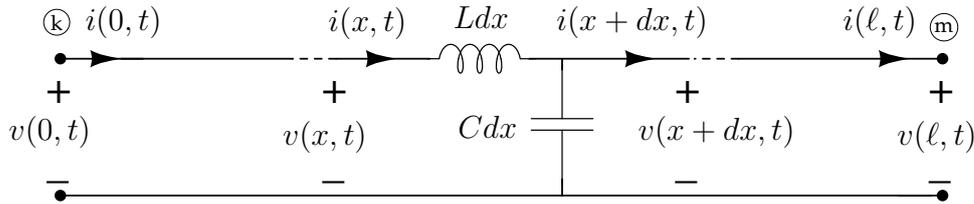


Figura 3.8: Esquema de una línea ideal monofásica

Las ecuaciones de una línea monofásica ideal (sin pérdidas) son las siguientes ([13], [15], [16]) (Figura 3.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} &= -C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $L$  y  $C$  son, respectivamente, la inductancia y capacidad de la línea por unidad de longitud.

Según D'Alembert [4], la solución general de dichas ecuaciones se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= Z_c [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)] \\ i(x, t) &= f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones de  $(x - vt)$  y  $(x + vt)$  respectivamente, siendo

$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$  la impedancia característica de la línea.

$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la velocidad de propagación de las ondas en la línea.

Según el método de Bergeron [14], a partir de la solución genérica (3.22) se pueden deducir las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} i_{km}(t) &= \frac{v_k(t)}{Z_c} - \left[ \frac{v_m(t-\tau)}{Z_c} + i_{mk}(t-\tau) \right] = \frac{v_k(t)}{Z_c} - I_{km}(t) \\ i_{mk}(t) &= \frac{v_m(t)}{Z_c} - \left[ \frac{v_k(t-\tau)}{Z_c} + i_{km}(t-\tau) \right] = \frac{v_m(t)}{Z_c} - I_{mk}(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde:

$$\begin{aligned} I_{km}(t) &= \left[ \frac{v_m(t-\tau)}{Z_c} + i_{mk}(t-\tau) \right] \\ I_{mk}(t) &= \left[ \frac{v_k(t-\tau)}{Z_c} + i_{km}(t-\tau) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

son los *términos de historia*,  $\tau = \ell\sqrt{LC}$  es el tiempo de propagación de las ondas,  $\ell$  la longitud de la línea y  $k, m$  representan los extremos de dicha línea respectivamente.

La Figura 3.9 muestra el circuito equivalente de una línea monofásica ideal (sin pérdidas). Según se aprecia, gracias al método de Bergeron ha sido posible obtener un modelo de parámetros concentrados de una línea de parámetros distribuidos.

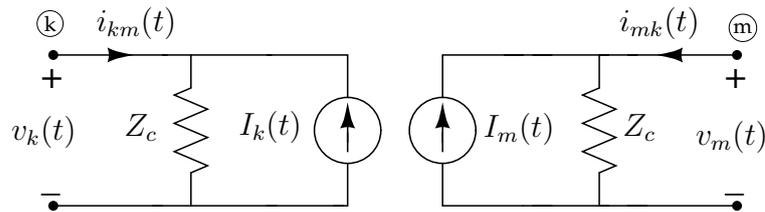


Figura 3.9: Circuito equivalente de una línea ideal

En una línea real, las pérdidas que se producen en la resistencia serie se pueden modelar ([17], [18]) conectando una resistencia de valor  $R\ell/4$  en ambos extremos de la línea, y una resistencia de  $R\ell/2$  en medio (Figura 3.10). Según [17], el error que se comete con este modelo es aceptable si  $R\ell \ll Z_c$ .

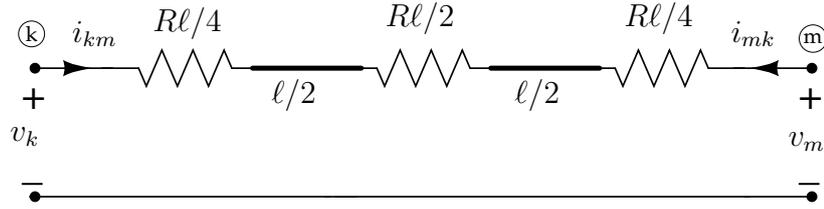


Figura 3.10: Línea con pérdidas serie

A partir de este modelo de la línea con pérdidas se puede obtener el circuito equivalente mostrado en la Figura 3.11, donde [19]:

$$I_k(t) = \left(\frac{1+h}{2}\right) \left[\frac{1}{Z}v_k(t-\tau) + hi_k(t-\tau)\right] + \left(\frac{1-h}{2}\right) \left[\frac{1}{Z}v_m(t-\tau) + hi_m(t-\tau)\right] \quad (3.25)$$

$$I_m(t) = \left(\frac{1+h}{2}\right) \left[\frac{1}{Z}v_k(t-\tau) + hi_k(t-\tau)\right] + \left(\frac{1-h}{2}\right) \left[\frac{1}{Z}v_m(t-\tau) + hi_m(t-\tau)\right] \quad (3.26)$$

y

$$Z = Z_c + \frac{Rl}{4} ; h = \frac{Z_c - Rl/4}{Z_c + Rl/4} \quad (3.27)$$

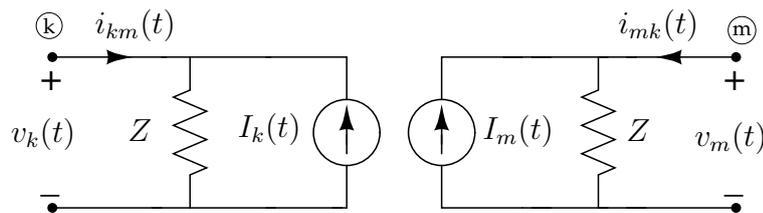


Figura 3.11: Circuito equivalente de una línea con pérdidas serie

### 3.4.2 Procedimiento de resolución de redes lineales

Según se ha visto en la sección anterior, la regla trapezoidal y el método de Bergerón han servido para convertir las ecuaciones diferenciales de los componentes de una red en ecuaciones algebraicas que relacionan tensiones, intensidades y "términos de historia". A partir de estas ecuaciones

algebraicas se han obtenido unos circuitos equivalentes que constan de resistencias, de valor constante si  $\Delta t$  es fijo, y fuentes de intensidad, cuyo valor hay que actualizarlo en cada paso de integración.

Generalmente, el método utilizado para resolver la red resultante, una vez sustituido cada elemento por su circuito equivalente, se basa en las ecuaciones nodales.

### 3.4.2.1 Ecuaciones nodales

En notación matricial, la ecuación nodal de la red, una vez sustituido cada elemento por su equivalente, es:

$$\mathbf{G}\mathbf{v}(t) = \mathbf{i}(t) - \mathbf{I}(t) \quad (3.28)$$

donde:

$\mathbf{G}$  es la matriz, simétrica y constante ( $\Delta t$  fijo), de conductancias nodales.

$\mathbf{v}(t)$  es el vector de las tensiones nodales.

$\mathbf{i}(t)$  es el vector de las fuentes externas de intensidad.

$\mathbf{I}(t)$  es el vector de las fuentes de intensidad que representan a los “términos de historia”.

En un circuito real, es frecuente que haya fuentes de tensión conectadas entre algún nudo y tierra, en cuyo caso la tensión de dichos nudos es conocida. En tal circunstancia se puede reducir el orden de las ecuaciones (3.28) de forma que sólo aparezcan en el vector  $\mathbf{v}(t)$  aquellos nudos cuya tensión sea desconocida. Dividiendo los nudos de la red en dos conjuntos, el  $A$ , cuyas tensiones son desconocidas, y el  $B$ , cuyas tensiones son conocidas, entonces la ecuación nodal (3.28) se puede expresar como sigue [4], [20], [15]:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{AA} & \mathbf{G}_{AB} \\ \mathbf{G}_{BA} & \mathbf{G}_{BB} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{v}_A(t) \\ \mathbf{v}_B(t) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i}_A(t) \\ \mathbf{i}_B(t) \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \mathbf{I}_A(t) \\ \mathbf{I}_B(t) \end{array} \right] \quad (3.29)$$

A partir de (3.29), las tensiones nodales desconocidas se pueden obtener resolviendo la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{G}_{AA}\mathbf{v}_A(t) = \mathbf{i}_A(t) - \mathbf{I}_A(t) - \mathbf{G}_{AB}\mathbf{v}_B(t) \quad (3.30)$$

Adicionalmente, una vez obtenidas las tensiones de los nudos  $A$ , la intensidad que circula por cada fuente de tensión se puede calcular a partir de la ecuación:

$$\mathbf{i}_B = \mathbf{G}_{BA}\mathbf{v}_A(t) + \mathbf{G}_{BB}\mathbf{v}_B(t) + \mathbf{I}_B(t) \quad (3.31)$$

### 3.4.2.2 Proceso de cálculo

La solución obtenida resolviendo el sistema de ecuaciones (3.30), además de ser sólo válida para un instante de tiempo  $t$ , depende de la historia del circuito a través del vector  $\mathbf{I}_A(t)$ . Para obtener la solución en un intervalo de tiempo será necesario resolver el sistema (3.30) tantas veces como el paso de integración ( $\Delta t$ ) esté contenido en el intervalo considerado. En este sentido habrá que realizar un proceso iterativo partiendo de unas determinadas condiciones iniciales al principio del intervalo. El procedimiento general de resolución se puede resumir en los siguientes pasos:

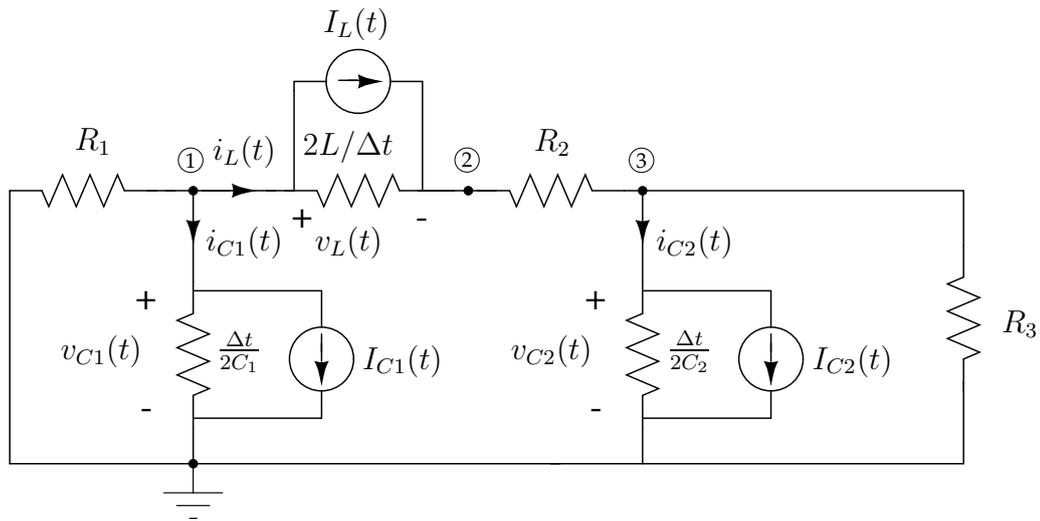
1. Antes de comenzar el proceso iterativo:
  - a) Calcular las matrices:  $\mathbf{G}_{AA}$  y  $\mathbf{G}_{AB}$ , cuyos coeficientes permanecen constantes durante todo el proceso iterativo si  $\Delta t$  es fijo.
  - b) Efectuar la factorización LU de la matriz simétrica  $\mathbf{G}_{AA}$ .
2. En cada iteración:
  - a) Actualizar el vector  $\mathbf{I}_A(t)$ , que representa la historia pasada de cada componente, a partir de los resultados obtenidos en la iteración anterior, es decir en  $(t - \Delta t)$ .
  - b) Actualizar los vectores correspondientes a las fuentes externas:  $\mathbf{i}_A(t)$ ,  $\mathbf{v}_B(t)$ .
  - c) Efectuar las operaciones necesarias para obtener el segundo miembro de (3.30).
  - d) Realizar la sustitución hacia adelante (forward) y la sustitución hacia atrás (backward) para obtener  $\mathbf{v}_A(t)$ .

Hay que indicar que la selección del paso de integración puede ser crítica. Por ejemplo, en un sistema donde se produce un fenómeno resonante si se simula con un paso de integración de 50 o 100 ms se puede no detectar el fenómeno, mientras que si el paso de integración es de 10 ms, se detectaría con seguridad. Una posibilidad de comprobar si es válido un determinado paso de integración es reducir el paso y comparar los resultados con los que se han obtenido en una simulación anterior con un paso de integración mayor. Si se detecta un cambio apreciable en torno a la frecuencia de resonancia, entonces el paso de integración era demasiado grande.

**Ejemplo 3.2**

Partiendo del mismo circuito del ejemplo 3.1 (Figura 3.1), el objetivo es obtener la tensión en cada condensador y la intensidad que circula por la bobina, utilizando el método de Dommel y considerando un paso de integración de 0,5 s y una duración del transitorio de 10 s.

El primer paso es obtener el esquema resultante (Figura 3.12) de considerar el circuito equivalente de cada componente del circuito.



**Figura 3.12:** Circuito equivalente del ejemplo 3.2

Aplicando el método de nudos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{2C_1}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2L} & \frac{-\Delta t}{2L} & 0 \\ \frac{-\Delta t}{2L} & \frac{1}{R_2} + \frac{\Delta t}{2L} & \frac{-1}{R_2} \\ 0 & \frac{-1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{2C_2}{\Delta t} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ v_2(t) \\ v_{C2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{C1}(t) - I_L(t) \\ I_L(t) \\ -I_{C2}(t) \end{bmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} I_L(t) &= \frac{\Delta t}{2L}v_L(t - \Delta t) + i_L(t - \Delta t) \\ I_{C1}(t) &= \frac{-2C_1}{\Delta t}v_{C1}(t - \Delta t) - i_{C1}(t - \Delta t) \\ I_{C2}(t) &= \frac{-2C_2}{\Delta t}v_{C2}(t - \Delta t) - i_{C2}(t - \Delta t) \end{aligned}$$

Por otra parte, del circuito de la Figura 3.12 se pueden deducir las expresiones necesarias para obtener la tensión e intensidad en la bobina y las

intensidades por los condensadores:

$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= \frac{1}{R_2}(v_2(t) - v_{C2}(t)) \\
 v_L(t) &= v_{C1}(t) - R_2 i_L(t) - v_{C2}(t) \\
 i_{C1}(t) &= -i_L(t) - \frac{v_{C1}(t)}{R_1} \\
 i_{C2}(t) &= i_L(t) - \frac{v_{C2}(t)}{R_3}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ahora se inicia un proceso iterativo, obteniendo las variables solicitadas ( $v_{C1}, v_{C2}, i_L$ ) en los instantes de tiempo  $\Delta t, 2\Delta t, \dots$ . Como ejemplo, se va a desarrollar la 1ª iteración, en la cual el sistema que hay que resolver es:

$$\begin{bmatrix} 5,125 & -0,125 & 0 \\ -0,125 & 1,125 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1}(\Delta t) \\ v_2(\Delta t) \\ v_{C2}(\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{C1}(\Delta t) - I_L(\Delta t) \\ I_L(\Delta t) \\ -I_{C2}(\Delta t) \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

donde  $I_{C1}(\Delta t)$ ,  $I_{C2}(\Delta t)$  e  $I_L(\Delta t)$  se obtienen a partir de las condiciones iniciales

$$v_{C1}(0) = 1 \text{ V} ; v_{C2}(0) = 2 \text{ V} ; i_L(0) = 1 \text{ A} \tag{3.34}$$

y de las expresiones (3.32) particularizadas para  $t=0$ :

$$\begin{aligned}
 v_L(0) &= v_{C1}(0) - R_2 i_L(0) - v_{C2}(0) = -2 \text{ V} \\
 i_{C1}(0) &= -i_L(0) - \frac{v_{C1}(0)}{R_1} = -2 \text{ A} \\
 i_{C2}(0) &= i_L(0) - \frac{v_{C2}(0)}{R_3} = -1 \text{ A}
 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
 I_L(\Delta t) &= \frac{\Delta t}{2L} v_L(0) + i_L(0) = 0,75 \text{ A} \\
 I_{C1}(\Delta t) &= \frac{-2C_1}{\Delta t} v_{C1}(0) - i_{C1}(0) = -2 \text{ A} \\
 I_{C2}(\Delta t) &= \frac{-2C_2}{\Delta t} v_{C2}(0) - i_{C2}(0) = -7 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema (3.33) se obtienen las tensiones nodales

$$v_{C1}(\Delta t) = -0,375 \text{ V} ; v_2(\Delta t) = 0,125 \text{ V} ; v_{C2}(\Delta t) = 0,375 \text{ V}$$

a partir de las cuales se puede calcular la intensidad por la bobina

$$i_L(\Delta t) = \frac{1}{R_2}(v_2(\Delta t) - v_{C2}(\Delta t)) = -0,25 \text{ A}$$

y las restantes variables que se usarán en la siguiente iteración:

$$v_L(\Delta t) = v_{C1}(\Delta t) - R_2 i_L(\Delta t) - v_{C2}(\Delta t) = -0,5 \text{ V}$$

$$i_{C1}(\Delta t) = -i_L(\Delta t) - \frac{v_{C1}(\Delta t)}{R_1} = 0,625 \text{ A}$$

$$i_{C2}(\Delta t) = i_L(\Delta t) - \frac{v_{C2}(\Delta t)}{R_3} = -0,625 \text{ A}$$

Los resultados obtenidos tras completar todas las iteraciones coinciden exactamente con los que se obtuvieron en el ejemplo 3.1 mediante la integración numérica de la ecuación de estado, aplicando la regla trapezoidal.

### Ejemplo 3.3

Con este ejemplo se pretende mostrar cómo se trabaja cuando en un circuito eléctrico aparecen líneas de transmisión. El sistema eléctrico de partida se muestra en la Figura 3.13. Es un sistema de 220 kV formado por una carga resistiva de  $R_r=96 \Omega$ , una fuente de tensión con  $R_s=2 \Omega$ ,  $L_s=0.06 \text{ H}$ , y una línea de transmisión de 100 km con  $R=0.07 \Omega/\text{km}$ ,  $L=10^{-3} \text{ H}/\text{km}$ ,  $C=12 \cdot 10^{-9} \text{ F}/\text{km}$ . La conductancia paralelo de la línea será despreciada.

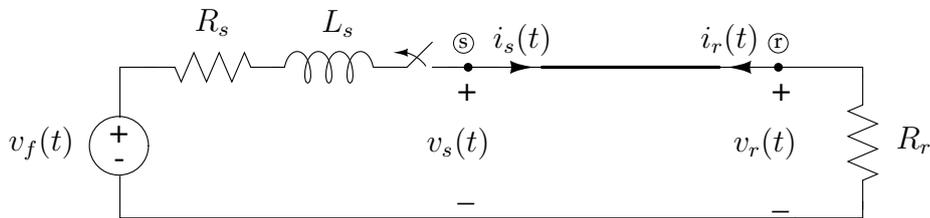


Figura 3.13: Sistema eléctrico del ejemplo 3.3

Inicialmente, la línea se encuentra en régimen permanente alimentada por una fuente de tensión sinusoidal de 50 Hz,  $v_f(t) = 220\sqrt{2} \sin(100\pi t) \text{ kV}$ . En el instante  $t = 20 \text{ ms}$  se da la orden de apertura al interruptor, abriendo efectivamente sus contactos en el siguiente paso por cero de la corriente ( $t = t_0$ ). Se trata de obtener la evolución de la tensión al principio y al final de la línea durante un periodo de 5 ms tras la apertura del interruptor y con un paso de integración de  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ .

Para  $t \leq t_0$ , la tensión e intensidad de la carga se han obtenido analizando el sistema en régimen permanente,

$$\begin{aligned} v_r(t) &= 259,2 \sin(100\pi t - 0,45) \text{ kV} \\ i_r(t) &= -2700 \sin(100\pi t - 0,45) \text{ A} \end{aligned} \tag{3.35}$$

igualmente se ha obtenido la tensión e intensidad al principio de la línea

$$\begin{aligned} v_s(t) &= 289,43 \sin(100\pi t - 0,15) \text{ kV} \\ i_s(t) &= 2686 \sin(100\pi t - 0,41) \text{ A} \end{aligned} \quad (3.36)$$

El instante de tiempo en el que se produce la apertura efectiva del interruptor se calcula de la siguiente forma:

$$i_s(t_0) = 2686 \sin(100\pi t_0 - 0,41) = 0 \Rightarrow t_0 = 21,3 \text{ ms}$$

Una vez que el interruptor ha abierto efectivamente sus contactos, el modelo discreto del sistema resultante se muestra en la Figura 3.14.

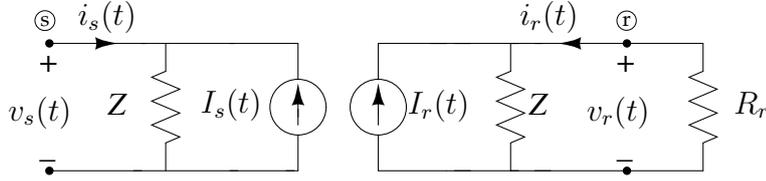


Figura 3.14: Modelo discreto una vez abierto el interruptor

Aplicando el método de nudos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z} + \frac{1}{R_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \\ v_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s(t) \\ I_r(t) \end{bmatrix}$$

que, una vez resuelto, permite obtener la intensidad por la carga  $i_r(t)$ , la cual se necesitará en el instante  $t + \tau$ :

$$i_r(t) = \frac{-v_r(t)}{R_r} \quad (3.37)$$

Los términos de historia  $I_s(t)$  y  $I_r(t)$  se obtienen según (3.25) y (3.26):

$$\begin{bmatrix} I_s(t) \\ I_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1+h)}{2Z} & \frac{h(1+h)}{2} \\ \frac{(1-h)}{2Z} & \frac{h(1-h)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r(t - \tau) \\ i_r(t - \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(1-h)}{2Z} & \frac{h(1-h)}{2} \\ \frac{(1+h)}{2Z} & \frac{h(1+h)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t - \tau) \\ i_s(t - \tau) \end{bmatrix}$$

donde

$$Z = Z_c + \frac{R\ell}{4} ; \quad h = \frac{Z_c - R\ell/4}{Z_c + R\ell/4} ; \quad \tau = \ell\sqrt{LC}$$

que para este caso particular toman los siguientes valores:

$$Z_c = 288,67 \Omega ; \quad Z = 290,43 \Omega ; \quad h = 0,9879 ; \quad \tau = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Ahora se inicia un proceso iterativo, para obtener las tensiones al principio y al final de la línea ( $v_s, v_r$ ) en los instantes de tiempo  $t_0 + \Delta t, t_0 +$

$2\Delta t, \dots, t_0 + 5 \text{ ms}$ . Para resolver la primera iteración es necesario calcular previamente los términos de historia en el instante  $t = t_0 + \Delta t$ , para lo cual hay que conocer el valor de  $v_s, i_s, v_r$  e  $i_r$  en el instante  $t = t_0 + \Delta t - \tau$ :

$$\begin{aligned} v_s(t_0 + \Delta t - \tau) &= 289,43 \sin(100\pi(t_0 + \Delta t - \tau) - 0,15) = 43,71 \text{ kV} \\ i_s(t_0 + \Delta t - \tau) &= 2686 \sin(100\pi(t_0 + \Delta t - \tau) - 0,41) = -290,61 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_r(t_0 + \Delta t - \tau) &= 259,2 \sin(100\pi(t_0 + \Delta t - \tau) - 0,45) = -38,33 \text{ kV} \\ i_r(t_0 + \Delta t - \tau) &= -2700 \sin(100\pi(t_0 + \Delta t - \tau) - 0,45) = 399,23 \text{ A} \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_s(t_0 + \Delta t) \\ I_r(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3,44 \cdot 10^{-3} & 0,9819 \\ 2,08 \cdot 10^{-5} & 5,98 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -38,33 \cdot 10^3 \\ 399,23 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 2,08 \cdot 10^{-5} & 5,98 \cdot 10^{-3} \\ 3,44 \cdot 10^{-3} & 0,9819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43,71 \cdot 10^3 \\ -290,61 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 259,32 \\ -133,40 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Una vez calculados los términos de historia se resuelven las ecuaciones nodales:

$$\begin{bmatrix} 3,44 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 1,39 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t_0 + \Delta t) \\ v_r(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 259,32 \\ -133,40 \end{bmatrix}$$

proporcionando las tensiones al principio y al final de la línea para el instante  $t_0 + \Delta t$ :

$$v_s(t_0 + \Delta t) = 75,38 \text{ kV} ; v_r(t_0 + \Delta t) = -9,6 \text{ kV}$$

A su vez, esto permite obtener la intensidad por la carga, la cual se necesitará en el instante  $t_0 + \Delta t + \tau$ :

$$i_r(t_0 + \Delta t) = \frac{-v_r(t_0 + \Delta t)}{R_r} = 100 \text{ A}$$

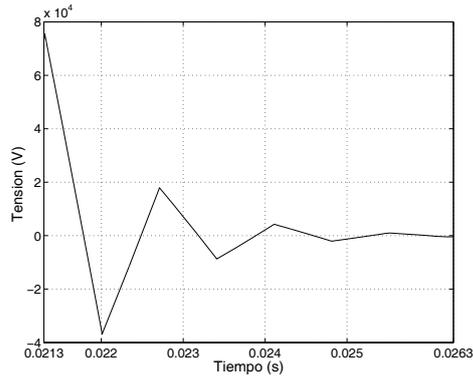
Para  $t \geq t_0$  la intensidad  $i_s$  es cero.

Una vez ilustrada la primera iteración, para el resto de iteraciones, hasta completar el tiempo de simulación de 5 ms, se procede del siguiente modo:

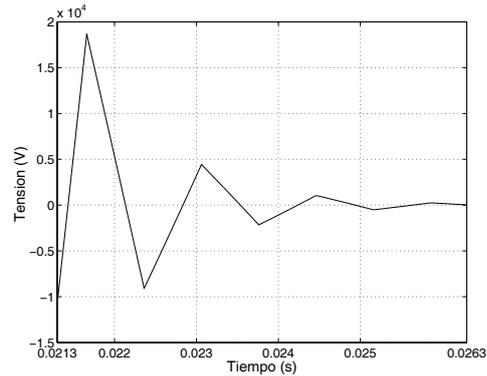
1. Se calculan los términos de historia a partir de los valores de  $v_s, i_s, v_r$  e  $i_r$  en un instante  $\tau$  s anterior.
2. Se resuelven las ecuaciones nodales, obteniendo las tensiones al principio y al final de línea. Así mismo se obtiene la intensidad por la carga.

- Se aumenta el tiempo de simulación en  $\Delta t$ , y se comprueba si se ha superado el tiempo máximo de simulación. En caso afirmativo se para el proceso, en caso contrario se regresa al paso 1.

En las Figuras 3.15(a) y 3.15(b) se representan los valores obtenidos de la tensión al principio y al final de la línea una vez completadas todas las iteraciones.



(a) Tensión al **principio** de la línea.



(b) Tensión al **final** de la línea.

**Figura 3.15:** Resultados obtenidos aplicando el método de Dommel

## 3.5 Resumen

En general, el cálculo de transitorios electromagnéticos de redes eléctricas de gran dimensión se realiza mediante técnicas numéricas salvo en situaciones con una topología muy particular en la que se puede aplicar la resolución analítica de la ecuación de estado.

A continuación se hará una breve reseña de las técnicas numéricas descritas en las secciones anteriores:

- En la primera de las técnicas se integra numéricamente la ecuación de estado, con el inconveniente de que hay que formular dicha ecuación, es decir, construir la matriz  $\mathbf{A}$ , lo cual en el caso de redes de gran dimensión puede consumir mucho tiempo y memoria. Sin embargo, su integración mediante la regla trapezoidal se reduce simplemente a aplicar las técnicas bien conocidas de resolución de sistemas lineales. Por otro lado, este método no es aplicable cuando en la red hay líneas de transmisión largas, ya que no se pueden incluir directamente en la ecuación de estado. En tal caso se puede modelar la línea de transporte conectando varios circuitos de parámetros concentrados.

- La segunda de las técnicas es el método de Dommel, basado en la integración numérica de cada una de las ecuaciones de los elementos básicos de la red, y en la aplicación del método de Bergeron para elementos de parámetros distribuidos. Sus principales ventajas son su simplicidad (la red se modela con resistencias y fuentes de intensidad de forma que su matriz de admitancias nodales es fácil de construir) y su robustez ya que hace uso de la regla trapezoidal, que es numéricamente estable. Sin embargo, también tiene algunas desventajas como son:
  - Cambiar el paso de integración durante la ejecución del método resulta costoso, ya que las resistencias han de ser recalculadas en cada paso, lo que implica volver a obtener la matriz de admitancias nodales.
  - La matriz de admitancias nodales está mal condicionada. El valor de la resistencia que modela a cada condensador es proporcional al paso de integración, mientras que la que modela a cada bobina es inversamente proporcional al paso de integración. Esto puede dar lugar a inestabilidades numéricas.
  - La solución del transitorio electromagnético no es una función explícita del tiempo, lo cual motiva un tratamiento posterior para poder extraer la información que se requiera en cada caso.

Según Dommel [4], existe la sospecha de que el resultado que produce su método es idéntico al que se obtiene aplicando la regla trapezoidal a la ecuación de estado de la red. En los ensayos realizados sobre el mismo circuito, dicha sospecha ha podido ser corroborada experimentalmente.



# Capítulo 4

## Análisis de sistemas continuos y discretos

En este capítulo se exponen los distintos métodos de representación de un sistema continuo y discreto tanto en el dominio del tiempo como en el dominio frecuencial. Es un capítulo que sirve de base para el desarrollo de los equivalentes dependientes de la frecuencia, que se verán en el capítulo 5.

En primer lugar se expondrá brevemente la formulación mediante la transformada  $s$  y la transformada  $Z$ , para posteriormente pasar a describir los distintos métodos para transformar una función del dominio  $s$  al dominio  $z$ , así como para pasar del dominio  $z$  al dominio temporal.

### 4.1 Introducción

Un sistema eléctrico de potencia es básicamente un sistema continuo con la excepción de algunos elementos auxiliares como por ejemplo los controladores digitales. Por otro lado, las simulaciones realizadas en un ordenador personal son por su propia naturaleza procesos discretos de forma que solo proporcionan la solución a las ecuaciones diferenciales y algebraicas implicadas en una serie de instantes de tiempo.

La representación discreta de un sistema siempre se puede expresar como una ecuación en diferencias, donde las salidas para un instante de tiempo se obtienen a partir de las salidas en instantes de tiempo anteriores y las entradas presentes y pasadas. Por tanto, la representación digital se puede sintetizar y analizar de forma similar a un sistema discreto.

Hay que tener muy presente que para simular cualquier sistema en un ordenador, cuya naturaleza es inherentemente digital, lo mas conveniente es obtener una ecuación en diferencias similar a la obtenida en el capítulo 3 mediante la integración numérica.

A continuación se describe la relación entre los métodos en el dominio

del tiempo y los métodos en el dominio de la frecuencia, tanto para el caso continuo como para el caso discreto. Este tipo de relaciones serán de gran utilidad en el desarrollo de equivalentes externos y su posterior incorporación a un programa de simulación, que por su naturaleza es un sistema discreto. Para facilitar la comprensión, en la Figura 4.1 se han representado dichas relaciones, las cuales se comentaran seguidamente.

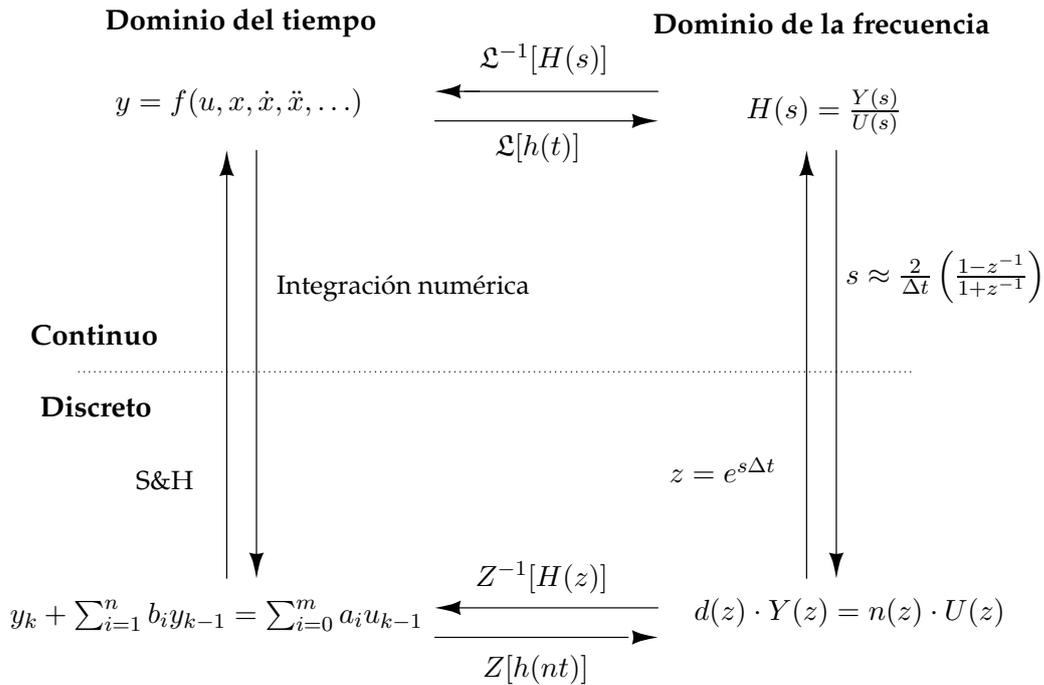


Figura 4.1: Relaciones entre dominios.

En el dominio del tiempo, una función continua se puede expresar como una ecuación diferencial de elevado orden o bien como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (por simplicidad, en la Figura 4.1 solo no se ha representado el sistema de ecuaciones). Esta ecuación diferencial se puede representar en el dominio del tiempo discreto mediante la aplicación de alguna técnica de integración numérica como por ejemplo la regla trapezoidal A, forward rectangular, backward rectangular, etc. Así se obtiene la expresión que relaciona la salida en un instante de tiempo con la salida y la entrada en instantes de tiempo anteriores, dando lugar a una formulación de tipo recursivo. Este proceso de integración numérica equivale al proceso de muestreo necesario para convertir una señal en el dominio del tiempo continuo al dominio del tiempo discreto. El proceso inverso, convertir una señal de tiempo discreto a tiempo continuo se realiza mediante técnicas de S&H (Sample and Hold).

Una función continua se puede expresar en el dominio de la frecuencia (plano  $s$ ) mediante la aplicación de la transformada de Laplace. Esta función en el plano  $s$  se puede transformar al dominio  $z$  mediante alguna ecuación

ción que relacione  $s$  con  $z$ , como por ejemplo la técnica “Root-matching”, la transformación bilineal, etc. De igual forma, la conversión de una función en el dominio  $z$  al dominio  $s$  se realiza teniendo en cuenta la relación:  $z = e^{s\Delta t}$ .

La transformada  $z$  representa el mismo papel en el análisis de señales y sistemas discretos LTI que la transformada de Laplace en el análisis de señales y sistemas continuos LTI. Finalmente, la transformada  $Z$  y la transformada inversa  $Z^{-1}$  se usan, respectivamente, para transformar una ecuación en diferencias en una función de transferencia en el dominio  $z$  y viceversa.

Es necesario destacar que las técnicas de transformación constituyen una importante herramienta en el análisis de señales y sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI).

## 4.2 Transformada $s$

Un sistema continuo se puede expresar mediante una función de transferencia en el dominio  $s$  según

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ps^p} \quad (4.1)$$

donde  $m \leq p$ , y  $s$  es la frecuencia compleja  $s = \sigma + j\omega$ . Es bien conocido que  $Y(s)$  es la transformada de Laplace de la respuesta impulsional de la red externa. Con esta forma de función de red se incluye la dependencia de la frecuencia de numerosos elementos de la red como por ejemplo las líneas.

Así,  $Y(s)$  será una combinación de las funciones de transferencia de los elementos que forman parte del sistema externo. Elementos de parámetros concentrados dan lugar a funciones de transferencia racionales, sin embargo las líneas de transporte producen funciones transcendentales, hiperbólicas, debido a su carácter distribuido. De esta forma,  $Y(s)$  será en general una función transcendente cuya obtención de forma analítica resulta una tarea prácticamente inviable [21]. Cabe la posibilidad de aproximar las funciones hiperbólicas como una función racional con un número suficiente de polos, o bien acudir a la simulación para obtener la respuesta en frecuencia para, posteriormente, aproximarla mediante una función racional. Este será uno de los puntos importantes en el desarrollo de redes equivalentes dependientes de la frecuencia y en particular de los equivalentes externos.

Cuando el orden de  $Y(s)$  es elevado, es conveniente descomponer la ecuación (4.1) en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \sum_{k=1}^{N_r} \frac{R_k}{s - \lambda_k} + \sum_{k=1}^{N_c} \left( \frac{\hat{R}_k}{s - \hat{\lambda}_k} + \frac{\hat{R}_k^*}{s - \hat{\lambda}_k^*} \right) + D \quad (4.2)$$

donde  $R_k$  y  $\widehat{R}_k$  son los residuos,  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, N_r$ ) son los polos reales y  $\widehat{\lambda}_k$  ( $k = 1, \dots, N_c$ ) son los polos complejos conjugados, y

$$D = \begin{cases} a_m & \text{si } m = p \\ 0 & \text{si } m < p \end{cases}$$

Con objeto de eliminar la aritmética compleja de (4.2), se pueden reagrupar los términos complejos conjugados obteniendo lo siguiente:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \sum_{k=1}^{N_r} \frac{R_k}{s - \lambda_k} + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{2 \cdot \text{Re}[R_k] \cdot s - 2 \cdot \text{Re}[\widehat{R}_k \cdot \widehat{\lambda}_k^*]}{s^2 - 2 \cdot \text{Re}[\widehat{\lambda}_k] \cdot s + |\widehat{\lambda}_k|^2} + D \quad (4.3)$$

Esta representación tiene, además, las siguientes ventajas:

1. La conversión al dominio del tiempo continuo es inmediata.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_k R_k \cdot e^{\lambda_k t} + D \cdot \delta(t) \quad (4.4)$$

2. La reducción del sistema es mas sencilla, ignorando aquellos modos que tengan los residuos mas pequeños.
3. Permite identificar la función racional del sistema a partir de la información incluida en la respuesta del sistema a alguna fuente de excitación. Esto es muy útil para la identificación del sistema en el dominio del tiempo.
4. Hace posible el uso del método de Prony, que constituye una herramienta importante para el análisis de señales en el dominio del tiempo.

### 4.3 Transformada Z

Un sistema discreto se puede expresar en el dominio  $z$  según

$$Y(z) = \frac{I(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_p z^{-p}} \quad (4.5)$$

donde  $m \leq p$ .

Si  $Y(z)$  es tal que  $a_i=0$  para  $i = 1, 2, \dots, m$  pero  $a_0 \neq 0$ , entonces se tiene un modelo autoregresivo (AR), de forma que la salida actual depende de la salida en instantes de tiempo anteriores y solo de la entrada actual. Es decir, la salida no depende de la entrada en instantes de tiempo anteriores.

Si  $b_i=0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces se tiene un modelo de media móvil (MA), de forma que la salida actual es un promedio de la entrada actual y en

instantes de tiempo anteriores, no dependiendo de la salida en instantes de tiempo anteriores. En el tratamiento digital de señales este tipo de sistemas corresponde a los filtros FIR (Finite Impulse Response).

En un caso genérico, en el que existan polos y ceros, (4.5) representa un modelo ARMA, el cual se corresponde con los filtros IIR (Infinite Impulsive Response). Así, a partir de (4.5):

$$U(z) \cdot (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) = I(z) \cdot (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_p z^{-p}) \quad (4.6)$$

Reordenando términos

$$I(z) = -I(z) \cdot (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_p z^{-p}) + U(z) \cdot (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) \quad (4.7)$$

Transformando la expresión (4.7) al dominio del tiempo mediante la transformada inversa  $z$  ( $z^{-1}$ ) resulta

$$i(k) = -[b_1 \cdot i(k-1) + b_2 \cdot i(k-2) + \dots + b_p \cdot i(k-p)] + [a_0 \cdot u(k) + a_1 \cdot u(k-1) + a_2 \cdot u(k-2) + \dots + a_m \cdot u(k-m)] \quad (4.8)$$

Reordenando convenientemente los términos de (4.8) se obtiene la siguiente relación

$$i(k) = a_0 \cdot u(k) + [a_1 \cdot u(k-1) + a_2 \cdot u(k-2) + \dots + a_m \cdot u(k-m)] - [b_1 \cdot i(k-1) + b_2 \cdot i(k-2) + \dots + b_p \cdot i(k-p)] \quad (4.9)$$

Según se observa, la salida en el instante  $k$  depende de la entrada en el mismo instante y de la entrada y salida en instantes de tiempo anteriores. En este sentido, al conjunto de todos los términos relacionados con instantes de tiempo anteriores se le denomina término de historia. Así

$$i(k) = a_0 \cdot u(k) + \text{Historia} \quad (4.10)$$

En relación con los sistemas eléctricos, este tipo de ecuación tiene la ventaja de que se puede representar mediante un equivalente Norton o con ciertas modificaciones mediante un equivalente Thevenin.

La respuesta dinámica de un sistema discreto viene determinada por la ubicación de los polos, los cuales deben estar situados dentro del círculo unidad del plano  $z$  si el sistema es estable.

## 4.4 Métodos de transformación del dominio $s$ al dominio $z$

Una vez hallada la función de transferencia en el dominio  $s$ , el objetivo ahora es transformarla al dominio  $z$ , a partir de la cual se obtiene la ecuación en diferencias tal y como se ha descrito en el apartado anterior.

Básicamente se usan dos métodos: la transformación bilineal y el método *root-matching*.

### 4.4.1 Transformación bilineal

La relación entre  $s$  y  $z$  es la siguiente [22], [23]:

$$z = e^{s\Delta t} \iff z^{-1} = e^{-s\Delta t} \quad (4.11)$$

Expresando  $e^{-s\Delta t}$  como dos funciones exponenciales y usando un desarrollo en serie se obtiene lo siguiente:

$$z^{-1} = e^{-s\Delta t} = \frac{e^{-s\frac{\Delta t}{2}}}{e^{s\frac{\Delta t}{2}}} \approx \frac{1 - \frac{s\Delta t}{2}}{1 + \frac{s\Delta t}{2}} \quad (4.12)$$

Despejando  $s$  y reordenando términos

$$s \approx \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})} \quad (4.13)$$

se obtiene la relación buscada.

Es fácil probar que la aproximación bilineal produce la misma ecuación en diferencias que el uso de la regla trapezoidal como método de integración numérica para transformar un sistema del dominio de tiempo continuo al dominio de tiempo discreto [23].

---

#### Ejemplo 4.1

En este ejemplo se obtendrá la ecuación en diferencias de una bobina ideal mediante el uso de la regla trapezoidal y mediante la transformación bilineal.

La ecuación que define el comportamiento de una bobina ideal es la siguiente:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.14)$$

Aplicando la regla trapezoidal con un paso de integración ( $\Delta t$ ) constante resulta:

$$i_k = i_{k-1} + \frac{\Delta t}{2L} [v_k + v_{k-1}] \quad (4.15)$$

Transformando la relación (4.14) al dominio  $s$  resulta:

$$U(s) = Ls \cdot I(s)$$

Usando la transformación bilineal (4.13) se obtiene la ecuación de la bobina en el dominio  $z$

$$U(z) = L \cdot \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})} \cdot I(z)$$

a partir de la cual es fácil comprobar que da lugar a la misma ecuación en diferencias que (4.15).

---

### Ejemplo 4.2

En este ejemplo se obtendrá la ecuación en diferencias de un sistema de primer orden mediante la transformación bilineal.

Sea el siguiente sistema de primer orden definido por la función de transferencia:

$$\frac{I(s)}{U(s)} = \frac{R}{s + p}$$

Usando la transformación bilineal (4.13)

$$\frac{I(z)}{U(z)} = \frac{R \cdot (1 + z^{-1})}{\left(\frac{2}{\Delta t} + p\right) \cdot \left(p - \frac{2}{\Delta t}\right) \cdot z^{-1}}$$

a partir de la cual se obtiene la ecuación en diferencias

$$i_k = \frac{1}{\left(p + \frac{2}{\Delta t}\right)} \left[ R(u_k + u_{k-1}) - \left(p - \frac{2}{\Delta t}\right) \cdot i_{k-1} \right] \quad (4.16)$$


---

### 4.4.2 Root-matching o transformación $z$ adaptada

El propósito de este método es hacer corresponder los polos y ceros del plano de  $Y(s)$  directamente con polos y ceros en el plano  $z$ . Esto asegura que la ecuación en diferencias que se obtenga sea apropiada para simular el sistema correctamente.

Mientras que la estabilidad en el dominio  $s$  está asegurada si los polos están ubicados en el semiplano izquierdo, en el caso del plano  $z$  dicha estabilidad está asegurada si los polos se ubican en el interior del círculo unidad.

Para asegurar que una ecuación en diferencias sea adecuada para simular un sistema continuo, los polos, ceros y el valor final de dicha ecuación deben ajustarse a los correspondientes al sistema real. Si se cumplen estas condiciones la ecuación en diferencias será intrínsecamente estable, siempre que el sistema real sea estable, independientemente del paso de integración.

La ecuación en diferencias generada por este método da lugar a funciones exponenciales ya que se usa la relación  $z^{-1} = e^{-s\Delta t}$  en vez de una aproximación (como ocurría en la aproximación bilineal). Sea la admitancia  $Y(s)$  expresada en forma factorizada [24]

$$Y(s) = \frac{\prod_{k=1}^p (s - z_k)}{\prod_{k=1}^p (s - p_k)} \quad (4.17)$$

donde  $z_k$  y  $p_k$  son, respectivamente, los ceros y los polos. Entonces  $Y(z)$  es

$$Y(z) = \frac{\prod_{k=1}^p (1 - e^{z_k T} z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - e^{p_k T} z^{-1})} \quad (4.18)$$

donde  $T$  es el periodo de muestreo. Así, cada factor de la forma  $(s - a)$  en  $Y(s)$  se corresponde con el factor  $(1 - e^{aT} z^{-1})$  en  $Y(z)$ . Esta correspondencia se denomina transformación  $z$  adaptada.

Para preservar la característica de respuesta en frecuencia de  $Y(s)$ , el intervalo de muestreo,  $T$ , se debe seleccionar apropiadamente para ubicar los polos y los ceros en las posiciones equivalentes del plano  $z$ . De esta forma, el aliasing se debe evitar seleccionando  $T$  suficientemente pequeño [24].

La aplicación de este método requiere seguir los siguientes pasos [23], [25]:

1. Todos los polos y ceros de  $H(s)$  se convierten al dominio  $z$  usando la relación  $z = e^{s\Delta t}$ . De esta forma se asegura que los polos y ceros se ubican en el lugar correcto. También es necesario añadir una constante para permitir el ajuste del valor final.
2. Calcular el valor final de  $H(s)$  ante una entrada en escalón usando el teorema del valor final.
3. Calcular el valor final de  $H(z)$  ante una entrada en escalón y ajustar la constante a su valor correcto.
4. Añadir ceros extras dependiendo del tipo de variación que se haya supuesto entre los puntos de la solución.
5. Escribir la ecuación resultante en el dominio  $z$  en la forma de una ecuación en diferencias.

El valor final de  $H(s)$  no debe ser cero para permitir el ajuste de la constante en la función  $H(z)$ . En el caso de que sea cero entonces se usa otro tipo de función de entrada como por ejemplo una rampa.

La ventaja mas importante de este método es que elimina los errores de truncamiento, y por tanto las oscilaciones numéricas, independientemente del tamaño de paso usado.

---

### Ejemplo 4.3

Se trata de obtener la ecuación en diferencias del sistema de primer orden

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{R}{s + p}$$

usando la transformación  $z$  adaptada.

El polo de  $Y(s)$  en  $s = -p$  se convierte en un polo de  $Y(z)$  en  $e^{-p\Delta t}$ , por tanto:

$$Y(z) = \frac{I(z)}{U(z)} = \frac{k}{z - e^{-p\Delta t}}$$

Para calcular el valor de  $k$  hay que calcular el valor final de  $I(s)$  e  $I(z)$  ante una entrada en escalón:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s)Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{R}{s + p} = \frac{R}{p}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)I(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)U(z)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{k}{z - e^{-p\Delta t}} = \frac{k}{1 - e^{-p\Delta t}}$$

Igualando términos se obtiene el valor de  $k$ :

$$\frac{R}{p} = \frac{k}{1 - e^{-p\Delta t}} \implies k = \frac{R \cdot (1 - e^{-p\Delta t})}{p}$$

Por tanto:

$$Y(z) = \frac{I(z)}{U(z)} = \frac{R \cdot (1 - e^{-p\Delta t})}{p} \cdot \frac{1}{z - e^{-p\Delta t}} = \frac{R \cdot (1 - e^{-p\Delta t})}{p} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}e^{-p\Delta t}}$$

La ecuación en diferencias asociada es la siguiente:

$$i_k = \frac{R \cdot (1 - e^{-p\Delta t})}{p} \cdot u_{k-1} + e^{-p\Delta t} \cdot i_{k-1}$$


---



# Capítulo 5

## Equivalentes de red dependientes de la frecuencia (FDNE)

El objetivo fundamental de este capítulo es analizar los diversos métodos desarrollados en la literatura especializada para modelar el comportamiento de un sistema eléctrico en un rango de frecuencias determinado.

### 5.1 Introducción

En muchos de los estudios transitorios que se realizan para el cálculo de sobretensiones en coordinación de aislamiento, para evaluar la respuesta dinámica de sistemas AC/DC o para la evolución del sistema en instantes posteriores a una determinada falta, la zona de estudio se reduce a una pequeña parte del sistema de potencia. Además, la mayoría de estos estudios se realizan de forma repetitiva variando algún parámetro. En este sentido, trabajar con una representación detallada del sistema eléctrico completo puede ser prohibitivo desde el punto de vista de los requerimientos de cálculo y de la consecuente necesidad de recursos computacionales, sobre todo cuando el sistema es de gran dimensión. En estos casos, el uso de un equivalente adecuado que modele parte de la red reducirá la complejidad de la red de forma significativa y consecuentemente el tiempo de estudio. Es usual denominar *red externa* a la porción del sistema de potencia que será sustituido por un FDNE (Frequency-Dependent Network Equivalent).

Un equivalente adecuado deberá representar con cierta exactitud el comportamiento de la red en un determinado rango de frecuencias, el cual dependerá del fenómeno transitorio que se quiera analizar. Cabe destacar que la impedancia de cortocircuito convencional, obtenida para la frecuencia fundamental, no representa con exactitud el comportamiento dinámico de la red para el espectro de frecuencias que aparece durante un transitorio, tal y como se muestra en la Figura 5.1.

Los primeros FDNE aparecieron en el año 1960. En estos modelos, la

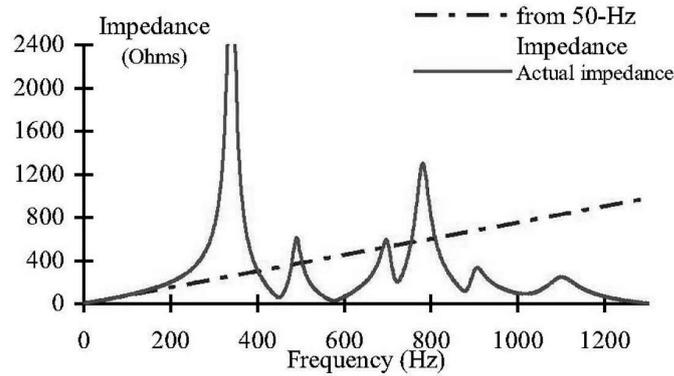


Figura 5.1: Impedancia del sistema en función de la frecuencia.

red externa se sustituye por redes discretas  $R, L, C$ , cuyos valores se calculan para que su respuesta en frecuencia coincida con la de la red externa. Hingorani y Burberry [26] desarrollaron equivalentes de 1 terminal usando una conexión paralelo de elementos  $RLC$  conectados en serie. Tal y como muestra la Figura 5.1, la impedancia tiene una serie de máximos y de mínimos. Esto permite dividir el conjunto de frecuencias en dos grupos: frecuencias de máxima resonancia y frecuencias de mínima resonancia. La idea de Hingorani y Burberry es sintetizar un circuito formado por la conexión en paralelo de elementos  $RLC$  conectados en serie (Figura 5.2). Dicho modelo presenta una impedancia con una serie de máximos y mínimos, similar a la mostrada en la Figura 5.1. Además, es posible identificar las frecuencias mínimas con las frecuencias de resonancia de cada  $RLC$  individual. La primera rama,  $R_1, L_1$ , modela el comportamiento para la frecuencia 0, mientras que la última rama  $R_n, L_n, C_n$  modela el último mínimo de frecuencia. Las máximas frecuencias dependen de la relación entre las bobinas y las frecuencias de resonancia, lo cual matemáticamente corresponde a las raíces del polinomio del numerador de la admitancia para dicha red [27].

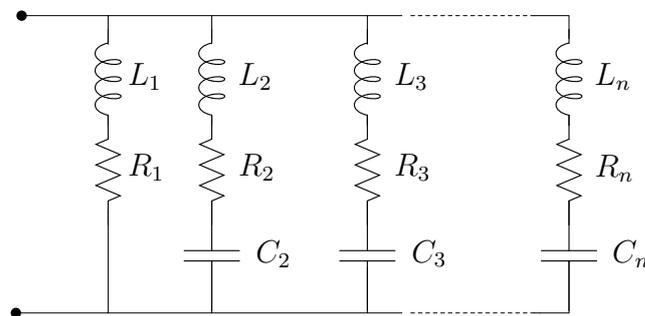


Figura 5.2: Equivalente propuesto por Hingorani & Burberry.

En la misma línea, Morched y Brandwajn [28] también usaron una configuración en paralelo como la mostrada en la Figura 5.2 pero el cálculo de

las resistencias del modelo lo hicieron mediante un método iterativo.

Cleirici y Marzio presentaron en [29] una configuración consistente en la conexión serie de elementos  $RLC$  en paralelo (Figura 5.3).

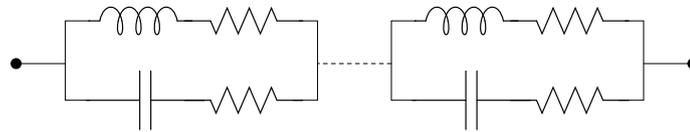


Figura 5.3: Equivalente propuesto por Cleirici & Marzio.

Por otro lado, Do y Gavrilovic [30] desarrollaron un método iterativo para optimizar el cálculo de los elementos  $RLC$  del equivalente de 1 terminal.

Más recientemente, en [31] se propone un modelo de equivalente basado también en la conexión en paralelo de redes  $RLC$  tal y como se muestra en la Figura 5.4. Es una extensión de los conceptos desarrollados en [28]. En este modelo, los valores de  $L_1, \dots, L_n$  y  $C_1, \dots, C_n$  se calculan a partir de las frecuencias de resonancia. Los valores de  $R_1, \dots, R_n$  se eligen de forma que la admitancia equivalente tenga el mismo módulo que la admitancia del sistema en las frecuencias de resonancia. Los valores  $C_\infty$  y  $R_\infty$  se eligen de forma que se disminuya el error de ajuste en altas frecuencias y los valores de  $C_0$  y  $R_0$  en bajas frecuencias [27].

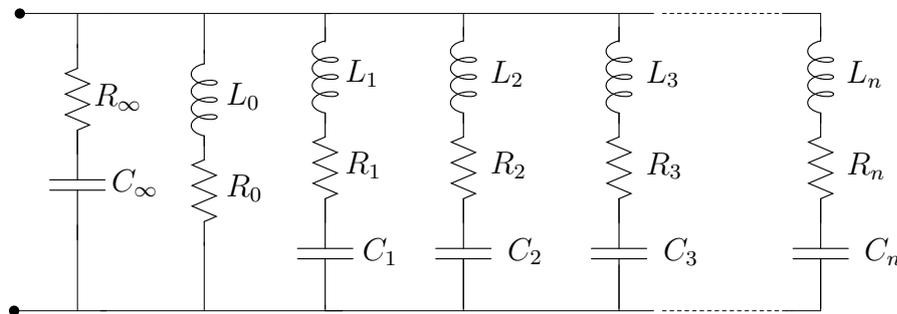


Figura 5.4: Equivalente propuesto por Morched, Ottevangers y Martí.

La ventaja principal de estos modelos es que pueden ser implementados en los programas de transitorios existentes con escasos cambios, sin embargo tienen las siguientes desventajas [27]:

- Ausencia de un procedimiento simple para obtener las frecuencias de resonancia.
- La localización de las frecuencias de resonancia con suficiente precisión exige incrementar la resolución de la respuesta en frecuencia.
- No se puede predecir la respuesta en frecuencia de un sistema externo con objeto de seleccionar el rango de frecuencias apropiado.

- El cálculo de las resistencias del modelo equivalente es poco preciso, pero se necesitan valores precisos para ajustar el módulo de la impedancia en los correspondientes mínimos.

En la actualidad, se usan equivalentes más generales basados en el ajuste de funciones racionales en el dominio  $s$  o  $z$  con datos en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia [32], [33], [23]. En el presente trabajo, los equivalentes de red se basarán en el ajuste de una función racional, aunque puede haber determinados elementos de la red para los que se use un modelo de redes  $RLC$  como los descritos anteriormente.

## 5.2 Obtención del FDNE

En el desarrollo del FDNE se pueden considerar básicamente dos posibilidades:

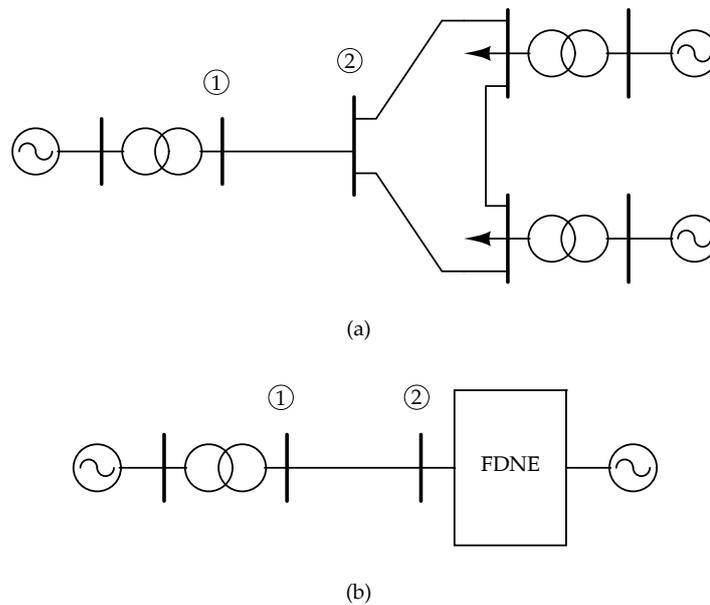
1. El FDNE sustituye a una parte del sistema visto desde un nudo y se representa mediante una red *monopuerta*.
2. La parte del sistema a incluir en el equivalente es vista desde varios nudos desde la parte del sistema a representar con detalle, y el FDNE es representado mediante una red *multiuerta*.

En la Figura 5.5(a) se muestra el sistema de potencia del que se obtiene el FDNE monopuerta visto desde el nudo 2, dando lugar al sistema de potencia resultante mostrado en la Figura 5.5(b). Por otro lado, en la Figura 5.6(a) se muestra un ejemplo de red de potencia a partir del cual se representa dentro del FDNE la parte del sistema comprendida entre los nudos 1 y 2; el sistema resultante se muestra en la Figura 5.6(b).

En términos generales, para obtener el FDNE son necesarios los siguientes pasos (Figura 5.7):

1. Obtener la respuesta en frecuencia del sistema, bien sea en forma de impedancia o admitancia, que ha de ser representado por el equivalente.
2. Ajuste de los parámetros del modelo. A este proceso se le conoce como *identificación*.
3. Implementación del FDNE en el programa de simulación.

La respuesta en frecuencia proporciona información del comportamiento en frecuencia de la red que se quiere modelar mediante el equivalente. El proceso de identificación ayudará a expresar mediante una función matemática dicha respuesta en frecuencia. Este proceso de identificación se



**Figura 5.5:** Ejemplo de FDNE monopuerta.

puede llevar a cabo en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia ( $s$  o  $z$ ). Por último, y no menos importante, es necesario incorporar el modelo obtenido mediante la identificación, en el programa de simulación que se desee utilizar. En las siguientes secciones se analizarán de forma detallada cada uno de estos puntos.

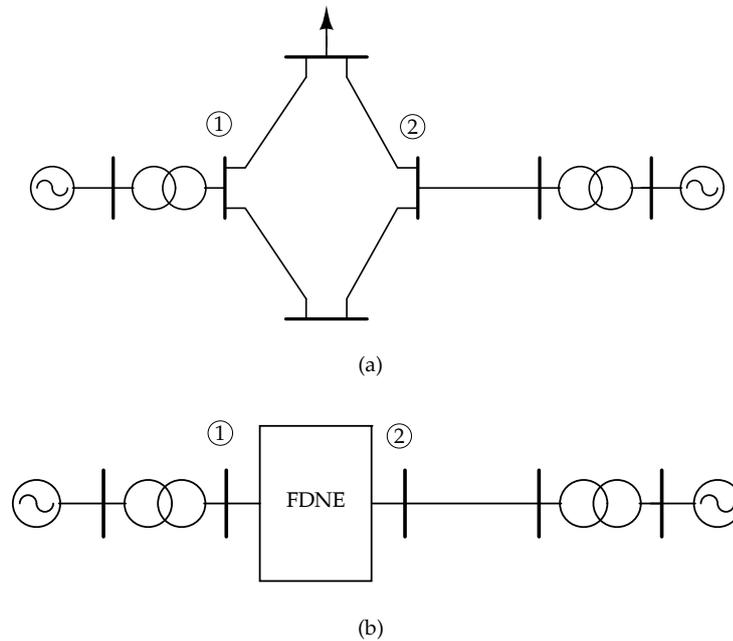
Este mismo proceso es aplicable para la obtención de modelos equivalentes de elementos simples como líneas, cables, transformadores, cargas, etc.

Además, es importante destacar que el FDNE no puede modelar “no linealidades”. Por tanto, cualquier componente que tenga un comportamiento no lineal se ha de sacar del equivalente, lo cual incrementará su número de puertas.

### 5.3 Rango de frecuencias

El rango de frecuencias para el que se obtiene un FDNE depende del fenómeno transitorio que se desee analizar y, en todo caso, deberá extenderse por encima de la máxima frecuencia del mismo. Además, la primera frecuencia de resonancia por encima de la máxima frecuencia debe ser incluida también en el rango de escaneo, ya que afectará a la respuesta en frecuencia en la parte superior del rango de frecuencias requerido.

Otro factor importante es la selección del intervalo entre frecuencias. Se debe asegurar que todos los extremos queden perfectamente determinados. La respuesta del sistema en frecuencias intermedias se puede obtener por



**Figura 5.6:** Ejemplo de FDNE bipuerta.

interpolación, lo cual es computacionalmente más eficiente que usar intervalos de escaneo más pequeños. Así por ejemplo, un intervalo de 5 Hz junto con una interpolación cúbica da lugar a una respuesta similar que la obtenida con un intervalo de escaneo de 1 Hz.

### 5.3.1 Relación entre el origen del transitorio y el rango de frecuencias

El estudio de transitorios eléctricos en sistemas de potencia involucra a un rango de frecuencias que va desde la corriente continua hasta los 50 MHz e incluso en ciertos casos frecuencias superiores. En general, las frecuencias superiores a la fundamental corresponden a fenómenos electromagnéticos, mientras que frecuencias inferiores están ligadas a transitorios de tipo electromecánico en máquinas rotativas.

Según se ha dicho con anterioridad, el fenómeno transitorio aparece como transición entre un régimen estacionario y otro. La primera causa de dichas alteraciones es debida al cierre o apertura de interruptores u otros elementos similares, a cortocircuitos, a faltas a tierra y a impactos de rayos. Como consecuencia se producen ondas viajeras en las líneas, cables y embarrados así como oscilaciones de energía entre las bobinas y condensadores del sistema. Las frecuencias de estas oscilaciones se determinan a partir de la impedancia característica y de los tiempos de propagación de las líneas interconectadas, así como de las bobinas y condensadores involucrados.

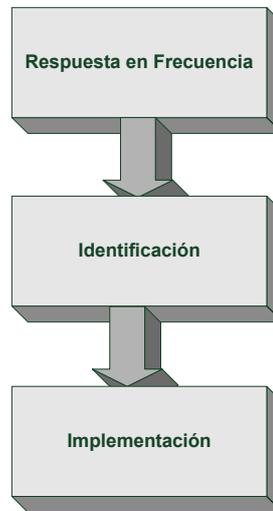


Figura 5.7: Pasos para obtener el FDNE.

En la tabla 5.1 [34] se muestra una relación del origen de diversos transitorios así como el rango de frecuencias en el que normalmente tienen lugar.

En algunos casos, la duración total del transitorio es mayor que la indicada en la tabla 5.1 (por ejemplo el fenómeno de la saturación durante la energización de grandes transformadores), pero normalmente solo tiene interés su comportamiento durante pequeños periodos de tiempo. Por otro lado, las secuencias largas de apertura y cierre de los interruptores pueden separarse en una serie de periodos de pequeña duración si entre ellas se alcanzan condiciones casi estacionarias.

### 5.3.2 Aspectos generales en la representación y clasificación del rango de frecuencias

En la práctica, no es posible obtener un equivalente de red que sea válido para todo el rango de frecuencias comprendido entre 0 Hz (DC) y 50 MHz. Es por ello que aquellas características físicas de un determinado elemento que tengan un efecto importante sobre parte del fenómeno transitorio de interés deberán modelarse de forma detallada. Así por ejemplo:

- Las características de saturación de transformadores y reactancias pueden ser importantes en el caso de *fault clearing*, energización de transformadores y en el caso de que se prevean sobretensiones temporales.
- Cuando se maniobra una línea, si el interés principal se concentra en la máxima sobretensión que aparece, las características de la línea y la red de alimentación son de importancia. Sin embargo, si la pendiente inicial de la sobretensión es también de importancia, entonces también

Origen	Rango de frecuencias
Transformer energization	(DC) 0,1 Hz ÷ 1 kHz
Load rejection	0,1 Hz ÷ 3 kHz
Fault clearing	50 Hz ÷ 3 kHz
Fault initiation	50 Hz ÷ 20 kHz
Line energization	50 Hz ÷ 20 kHz
Line reclosing	(DC) 50 Hz ÷ 20 kHz
Transient recovery voltage	
Terminal faults	50 Hz ÷ 20 kHz
Short line faults	50 Hz ÷ 100 kHz
Multiple restrikes of circuit breaker	10 kHz ÷ 1 MHz
Lightning surges, faults in substations	10 kHz ÷ 3 MHz
Disconnecter switching and faults in GIS	100 kHz ÷ 50 MHz

**Tabla 5.1:** Origen del transitorio y el rango de frecuencias asociado.

es necesario detallar las características de la subestación (transformadores de medida, número de líneas de salida y sus impedancias características).

- En estudios de fenómenos cuyas frecuencias son superiores a 1 MHz como por ejemplo transitorios muy rápidos en GIS causados por re-enganches de algún interruptor, no solo las ondas viajeras en los embarrados son de importancia sino también las capacidades muy pequeñas e inductancias de los transformadores de medida, aisladores y en algunos casos los codos en los embarrados tubulares.

En consecuencia, la representación de elementos individuales deberá corresponder al rango de frecuencias específico del fenómeno transitorio a estudiar. Por esta razón, los rangos de frecuencia de los transitorios eléctricos mostrados en la tabla 5.1 se han clasificado en cuatro grupos, tal y como se muestra en la tabla 5.2.

Grupo	R. frecuencias	Forma Onda	Representación
I	0,1 Hz ÷ 3 kHz	Osc. de baja frecuencia	Temporary overvoltages
II	50 Hz ÷ 20 kHz	Frente lento	Switching overvoltages
III	10 kHz ÷ 3 MHz	Frente rápido	Lightning overvoltages
IV	100 kHz ÷ 50 MHz	Frente muy rápido	Restrike overvoltages

Tabla 5.2: Clasificación del rango de frecuencias.

## 5.4 Respuesta en frecuencia

Una red lineal e invariante en el tiempo se puede describir mediante sus ecuaciones de nudos. Para una frecuencia determinada estas ecuaciones se expresan en forma compacta:

$$\mathbf{Y}(\omega_i)\mathbf{U}(\omega_i) = \mathbf{I}(\omega_i)$$

donde  $\mathbf{U}(\omega_i)$  es un vector formado por las tensiones de los nudos,  $\mathbf{I}(\omega_i)$  es un vector formado por las intensidades inyectadas en los nudos, a una determinada frecuencia  $\omega_i$ . Por otra parte,  $\mathbf{Y}(\omega_i)$  es la matriz de admitancias nodales correspondientes a la frecuencia  $\omega_i$ .

El cálculo de un FDNE se puede realizar a partir de las ecuaciones nodales de la parte de la red que se incluirá en dicho equivalente. Para ello es necesario conocer la matriz de admitancias nodales en el rango de frecuencias en el que se quiere obtener el equivalente. Sin embargo, la matriz de admitancias nodales de una red no es generalmente conocida, especialmente cuando se trata de analizar la red en régimen transitorio, donde es necesario incluir los efectos dependientes de la frecuencia que surgen fundamentalmente de las corrientes de Foucault en materiales conductores y de la impedancia de tierra en líneas de transporte, y que se traducen en una variación de las resistencias e inductancias usadas en la formulación del modelo.

Lo normal es que se conozca el modelo escogido para representar cada componente de la red y que éste haya sido introducido mediante el código adecuado para el programa o herramienta a utilizar en las simulaciones, como por ejemplo PSCAD, Matlab, ATP, etc. Una vez introducido el código, o bien representada la parte de red de la que se quiere obtener el FDNE, es necesario incorporar inyecciones de intensidad o de tensión en los nudos frontera con objeto de obtener las correspondientes admitancias o impedancias. Dichas inyecciones se pueden realizar en el dominio del tiempo, con funciones de excitación *multisine* (Apéndice B), o en el dominio de la

frecuencia, donde cada frecuencia se considera de forma independiente. En caso de usar funciones de excitación temporales tipo *multisine* es necesario realizar un desarrollo en serie de Fourier para obtener los correspondientes fasores para cada una de las frecuencias pertenecientes al rango que se esté considerando.

Si se usan inyecciones de tensión ideales, el proceso no es simple, y si se acompañan de una conductancia serie grande, se puede alterar numéricamente a alguno de los parámetros que se quieren identificar. Sin embargo, el uso de inyecciones de corriente carece de este problema y es el método que se ha utilizado en este trabajo.

### 5.4.1 Equivalente monopuerta

En primer lugar, es necesario realizar una distinción entre redes con simetría cíclica y redes sin ella. En el caso de estas redes simétricas, el equivalente se puede obtener mediante el cálculo de las impedancias en secuencias. En el caso de las líneas, las impedancias en directa e inversa coinciden. En las Figuras 5.8 y 5.9 se muestran los procedimientos a utilizar para obtener la impedancia equivalente a secuencia directa y homopolar:

$$\bar{Y}_1(\omega) = \frac{\bar{I}_1(\omega)}{\bar{U}_1(\omega)} \approx \bar{Y}_2(\omega) ; \bar{Y}_0(\omega) = \frac{\bar{I}_0(\omega)}{\bar{U}_0(\omega)} \quad (5.1)$$

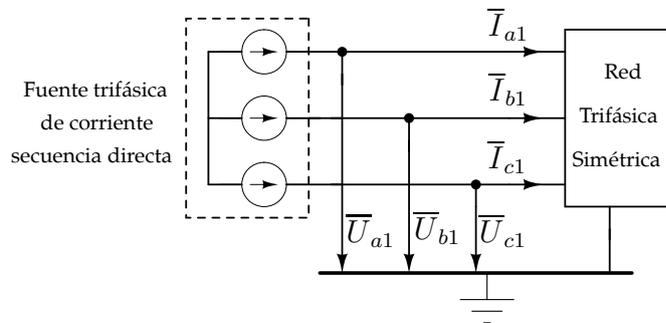


Figura 5.8: Equivalente a secuencia directa.

En el caso de redes asimétricas será necesario calcular los elementos de la matriz de admitancias de la red vista desde los nudos frontera:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{11}(\omega) & \bar{Y}_{12}(\omega) & \bar{Y}_{13}(\omega) \\ \bar{Y}_{21}(\omega) & \bar{Y}_{22}(\omega) & \bar{Y}_{23}(\omega) \\ \bar{Y}_{31}(\omega) & \bar{Y}_{32}(\omega) & \bar{Y}_{33}(\omega) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

En las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 se muestra un procedimiento para obtener cada una de las admitancias.

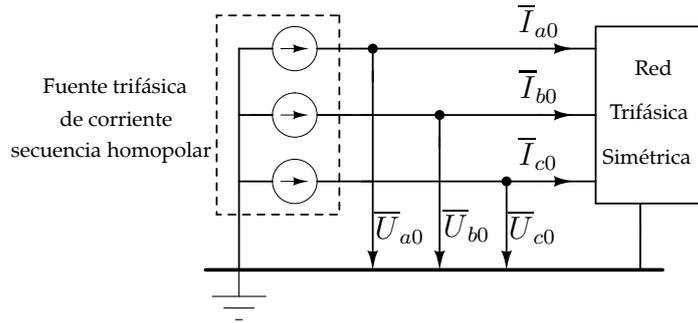


Figura 5.9: Equivalente a secuencia homopolar.

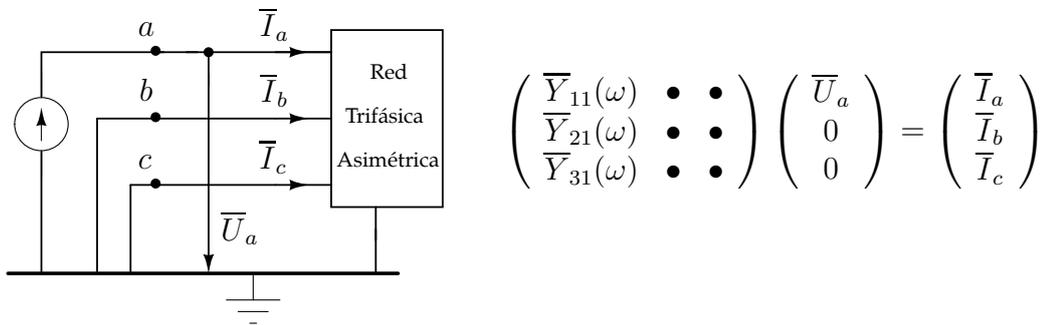


Figura 5.10: Cálculo del equivalente monopuerta en redes asimétricas.

Hay que tener en cuenta que, a pesar de que la red sea asimétrica, la matriz de admitancias es simétrica de forma que

$$\bar{Y}_{12}(\omega) = \bar{Y}_{21}(\omega) ; \bar{Y}_{13}(\omega) = \bar{Y}_{31}(\omega) ; \bar{Y}_{23}(\omega) = \bar{Y}_{32}(\omega) \quad (5.3)$$

y por tanto sólo es necesario obtener seis respuestas diferentes, las cuales se obtienen a partir de tres inyecciones de intensidad.

A modo de resumen, cuando la red es simétrica sólo será necesario calcular la respuesta en frecuencia de dos admitancias mientras que si la red no es simétrica será necesario el cálculo de seis admitancias.

### 5.4.2 Equivalente Bipuerta

En el caso más general, el cálculo será mucho más complicado y laborioso que el de un equivalente monopuerta.

Las ecuaciones de admitancias nodales de una red bipuerta trifásica como la de la Figura 5.13 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}(\omega) & \mathbf{Y}_{12}(\omega) \\ \mathbf{Y}_{21}(\omega) & \mathbf{Y}_{22}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1(\omega) \\ \mathbf{U}_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1(\omega) \\ \mathbf{I}_2(\omega) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

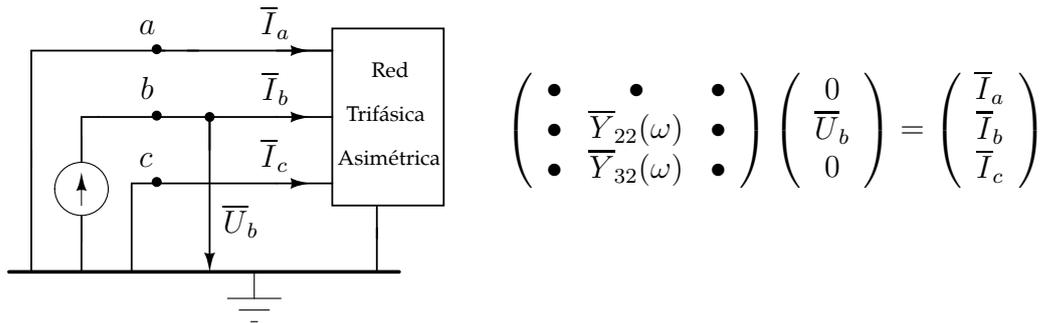


Figura 5.11: Calculo del equivalente monopuerta en redes asimétricas.

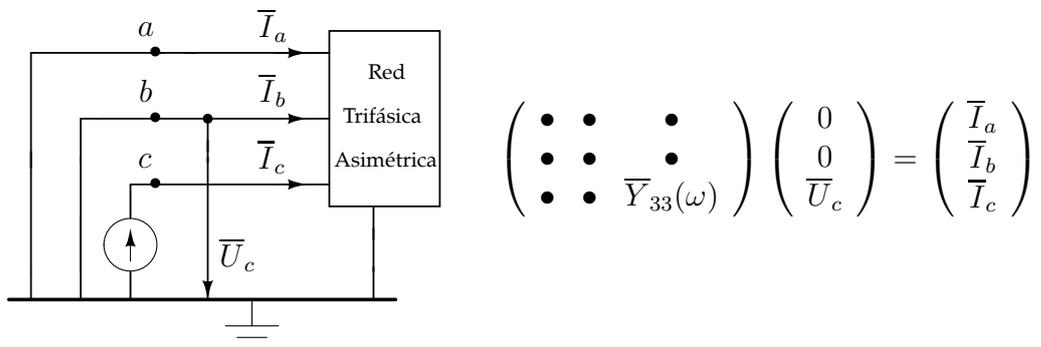


Figura 5.12: Calculo del equivalente monopuerta en redes asimétricas.

donde

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} \bar{U}_{ia} \\ \bar{U}_{ib} \\ \bar{U}_{ic} \end{pmatrix} \quad \mathbf{I}_i = \begin{pmatrix} \bar{I}_{ia} \\ \bar{I}_{ib} \\ \bar{I}_{ic} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{iaja} & \bar{Y}_{iajb} & \bar{Y}_{iajc} \\ \bar{Y}_{ibja} & \bar{Y}_{ibjb} & \bar{Y}_{ibjc} \\ \bar{Y}_{icja} & \bar{Y}_{icjb} & \bar{Y}_{icjc} \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2 \quad (5.5)$$

Si la red no contiene transformadores con desfase se cumple la igualdad entre submatrices:

$$\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21} \quad (5.6)$$

El cálculo de los elementos de cada submatriz se realizará de acuerdo

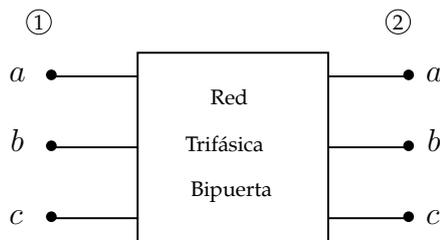


Figura 5.13: Equivalente bipuerta lineal trifásica.

con las siguientes expresiones:

- Submatriz  $\mathbf{Y}_{11}$

$$\bar{Y}_{1i1i}(\omega) = \frac{\bar{I}_{1i}(\omega)}{\bar{U}_{1i}(\omega)} ; \bar{Y}_{1k1i}(\omega) = \frac{\bar{I}_{1k}(\omega)}{\bar{U}_{1i}(\omega)} \quad (5.7)$$

$$\bar{U}_{1k}(\omega) = 0 \text{ para } k \neq i \text{ con } \bar{U}_{2a} = \bar{U}_{2b} = \bar{U}_{2c} = 0 \quad (5.8)$$

- Submatriz  $\mathbf{Y}_{21}$

$$\bar{Y}_{2k1i}(\omega) = \frac{\bar{I}_{2k}(\omega)}{\bar{U}_{1i}(\omega)} \quad (5.9)$$

$$\bar{U}_{1k}(\omega) = 0 \text{ para } k \neq i \text{ con } \bar{U}_{2a} = \bar{U}_{2b} = \bar{U}_{2c} = 0 \quad (5.10)$$

- Submatriz  $\mathbf{Y}_{22}$

$$\bar{Y}_{2i2i}(\omega) = \frac{\bar{I}_{2i}(\omega)}{\bar{U}_{2i}(\omega)} ; \bar{Y}_{2k2i}(\omega) = \frac{\bar{I}_{2k}(\omega)}{\bar{U}_{2i}(\omega)} \quad (5.11)$$

$$\bar{U}_{2k}(\omega) = 0 \text{ para } k \neq i \text{ con } \bar{U}_{1a} = \bar{U}_{1b} = \bar{U}_{1c} = 0 \quad (5.12)$$

## 5.5 Condiciones de estabilidad y pasividad

El primer requisito que ha de cumplir la aproximación matemática de la respuesta en frecuencia es que sea físicamente realizable, es decir que sea posible sintetizar una red que presente la misma función de transferencia. El que los polos de la red equivalente sean estables es una condición necesaria pero no suficiente para que la simulación del sistema completo sea estable [35], [36]. Además, se requiere que el modelo identificado se comporte como una red pasiva vista desde sus terminales. Por tanto, para asegurar que una matriz de admitancias represente a una red pasiva, y por tanto sea realizable físicamente, es necesario que se verifiquen las condiciones de estabilidad y de pasividad.

A continuación se comentan las condiciones de realizabilidad para redes monopuertas y bipuertas monofásicas lineales.

### 5.5.0.1 Red monopuerta lineal

La transformada de Laplace de la admitancia de entrada de una monopuerta lineal (Figura 5.14), se puede expresar como sigue:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n} \quad (5.13)$$

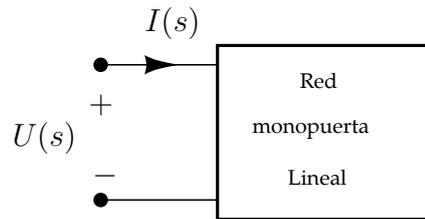


Figura 5.14: Monopuerta lineal monofásica.

Las condiciones que ha de cumplir esta función para que se pueda sintetizar un circuito lineal con la misma respuesta se pueden resumir de la siguiente forma [37]:

- Todos los coeficientes tanto del numerador,  $a_i$ , como del denominador,  $b_i$ , han de ser reales.
- No debe haber ni polos ni ceros con parte real positiva.
- Los polos complejos deben existir en pares conjugados.
- Los polos con valor imaginario puro deben ser simples y tener residuos reales positivos.
- $Y(j\omega)$  debe tener una parte real positiva o nula y un módulo finito para todo valor de  $\omega$ .
- La diferencia entre los máximos exponentes del numerador y del denominador debe ser como máximo 1.

### 5.5.0.2 Red bipuerta lineal

El comportamiento de una red bipuerta lineal se puede describir mediante sus ecuaciones de admitancias nodales (Figura 5.15). Una vez obtenidos los elementos de la matriz de admitancias a partir de la respuesta en frecuencia de la bipuerta, se puede sintetizar un circuito lineal como el equivalente  $\pi$  de la Figura 5.16.

Las condiciones que han de cumplir los elementos de la matriz de admitancias de una red bipuerta lineal para que pueda sintetizarse su equivalente  $\pi$  se pueden resumir de la siguiente forma [37]:

- Los elementos  $Y_{11}(s)$  e  $Y_{22}(s)$  deben cumplir todas las condiciones exigidas a la admitancia de entrada de una monopuerta lineal.
- $Y_{12}(s)$  no debe tener ni polos ni ceros con parte real positiva.

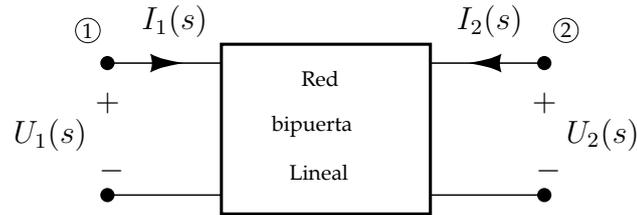


Figura 5.15: Bipuerta lineal monofásica.

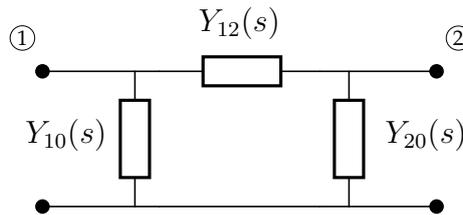


Figura 5.16: Equivalente  $\pi$  de una bipuerta lineal.

- Todos los polos de  $Y_{12}(s)$  con valor imaginario puro deben ser simples y sus residuos deben satisfacer la siguiente condición:

$$R_{11} \cdot R_{22} - R_{12}^2 \geq 0 \tag{5.14}$$

donde  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  y  $R_{12}$  son, respectivamente, los residuos de  $Y_{11}(s)$ ,  $Y_{22}(s)$  e  $Y_{12}(s)$  en un determinado polo.

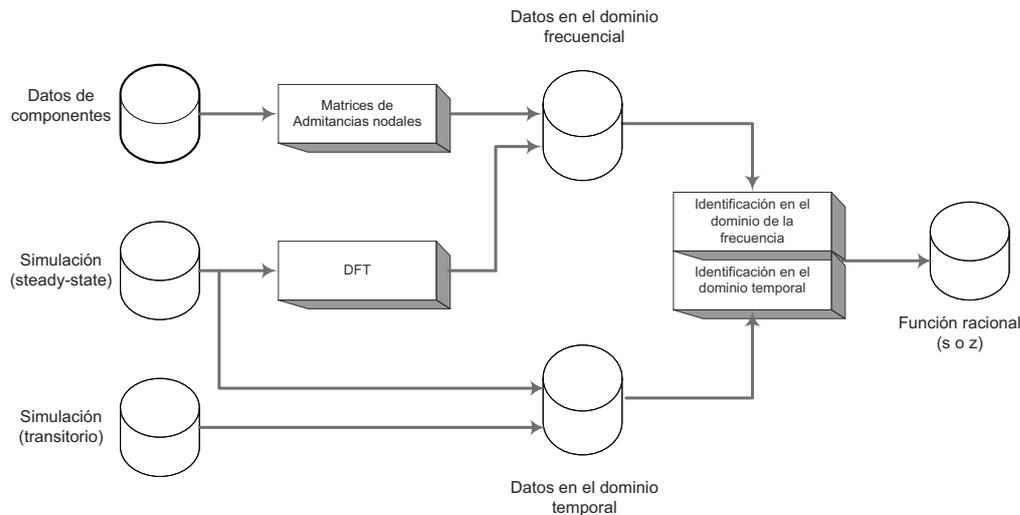
- Todo polo imaginario de  $Y_{12}(s)$  debe ser también polo de  $Y_{11}(s)$  e  $Y_{22}(s)$ .
- Las partes reales de  $Y_{11}(s)$ ,  $Y_{22}(s)$  e  $Y_{12}(s)$  deben cumplir las siguientes condiciones para todo valor de  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [Y_{11}(j\omega)] &\geq 0 \\ \operatorname{Re} [Y_{22}(j\omega)] &\geq 0 \\ \operatorname{Re} [Y_{11}(j\omega)] \cdot \operatorname{Re} [Y_{22}(j\omega)] - (\operatorname{Re} [Y_{12}(j\omega)])^2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

## 5.6 Identificación

Una vez calculada la respuesta en frecuencia, tanto de una red monopuerta como de una red multipuerta, se debe sintetizar una función o matriz de transferencia que aproxime el comportamiento de la red a reducir en el rango de frecuencias de interés.

En general los datos experimentales que pudieran estar disponibles no son suficientes para la identificación del modelo. En consecuencia hay que



**Figura 5.17:** Opciones del proceso de identificación.

recurrir a la simulación de la red externa, tal y como se ha descrito en la sección 5.4.

En la Figura 5.17 se muestran las posibilidades para obtener el modelo de la red externa. La identificación del sistema se puede realizar tanto en el dominio de la frecuencia ( $s$  o  $z$ ) como en el dominio del tiempo:

- En el caso de la identificación en el dominio de la frecuencia, el conjunto de datos requerido se puede obtener a partir de simulaciones en el dominio temporal o en el dominio frecuencial, o a partir de la matriz de admitancias obtenida para el rango de frecuencias considerado.

Las simulaciones en el dominio del tiempo se pueden realizar mediante fuentes de excitación del tipo *multisine* (Apéndice B) y usando la transformada de Fourier, la respuesta a dichas excitaciones se convierten al dominio de la frecuencia.

Las simulaciones en el dominio de la frecuencia se realizan a partir de fuentes de excitación donde cada frecuencia se considera independientemente.

- La identificación en el dominio temporal se realiza a partir de simulaciones en dicho dominio. En [38] se presenta un método de ajuste en el dominio discreto del tiempo basado en la respuesta de la red externa a un escalón de tensión. Es un método que hace uso de las técnicas de matrices dispersas para reducir la carga computacional.

La identificación en el dominio de la frecuencia tiene las siguientes ventajas frente a la identificación en el dominio temporal [35]:

1. El modelo de numerosos elementos está hecho en el dominio de la frecuencia para incluir las características de la dependencia con la frecuencia. Las simulaciones en el dominio temporal de redes que dependen de la frecuencia se pueden obtener mediante métodos basados en la convolución numérica. Sin embargo, la simulación resultante no es computacionalmente eficiente.
2. La identificación en el dominio de la frecuencia proporciona cierta flexibilidad para modelar elementos complejos a partir de un número reducido de muestras. Por contra, la identificación en el dominio del tiempo requiere un elevado número de muestras.
3. En el dominio de la frecuencia, es relativamente sencillo combinar datos de diferentes medidas.
4. El modelo de una red basado en la identificación en el dominio temporal requiere un conjunto de condiciones iniciales. Sin embargo, la identificación en el dominio de la frecuencia no requiere la estimación inicial de la red.
5. Usando excitaciones sinusoidales se pueden obtener estimaciones lo suficientemente precisas de la respuesta en frecuencia como para validar un modelo basado en la identificación en el dominio de la frecuencia.

Por ello, el uso de funciones racionales en el dominio  $s$  o  $z$  es más general y es el enfoque dominante en la actualidad [32] para la obtención de equivalentes externos.

A continuación se describen los métodos más destacados de identificación en el dominio  $s$  y en el dominio  $z$ .

### 5.6.1 Identificación en el dominio $s$ . *Vector fitting*

La función racional en el dominio  $s$  que deberá ser ajustada con datos en el dominio de la frecuencia es la siguiente:

$$Y(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_p s^p}{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_p s^p} \quad (5.16)$$

En términos de los coeficientes desconocidos  $\{a_0, \dots, a_p\}$  y  $\{b_1, \dots, b_p\}$ , la ecuación (5.16) es no lineal. Sin embargo, se puede expresar como un sistema de ecuaciones lineales (Apéndice C). En general, dicho sistema está mal condicionado y escalado [39], lo cual hace que el método quede limitado a aproximaciones de sistemas de muy bajo orden.

La dificultad de formular una metodología general de ajuste ha dado lugar a muchos métodos aplicables solo en determinados problemas [40],

[41]. Un intento de formular un método general de ajuste fue introducido en [42], denominado *vector fitting*, el cual fue muy útil para funciones suaves, sin embargo posteriores investigaciones mostraron que dicho método fallaba cuando se intentaba ajustar funciones con muchos picos de resonancia. Estas limitaciones fueron superadas en [39] mediante el uso de polos iniciales complejos. En la actualidad los métodos basados en *vector fitting* son los más utilizados (ver Apéndice C). Además este método es la base de la función implementada en Matlab, *rationalfit*, para el ajuste de una función racional a partir de un conjunto de datos obtenidos para una banda de frecuencia.

### 5.6.2 Identificación en el dominio $z$

Uno de los motivos para investigar métodos de ajuste en el dominio  $z$  es que se puede implementar directamente en un programa de simulación digital. Debido a que es una formulación discreta, se realiza sin pérdida de precisión. Por contra, el ajuste en el dominio  $s$  siempre requiere una discretización posterior con la consecuente aproximación.

La red externa se puede representar mediante su admitancia en el dominio  $z$  según:

$$Y(z) = \frac{I(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_pz^{-p}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_pz^{-p}} \quad (5.17)$$

Un método muy similar al descrito en el caso de la identificación en el dominio  $s$  consiste en identificar los parámetros  $\{a_0, \dots, a_p\}$  y  $\{b_1, \dots, b_p\}$  a partir de datos en el dominio de la frecuencia. Nuevamente da lugar a un problema de mínimos cuadrados que se resolverá aplicando las técnicas ya conocidas tal y como se detalla en el Apéndice C.

Por otro lado, Singh y Abur [43] propusieron el uso de *two-side recursion formulation* (modelo ARMA) para el desarrollo del FDNE. La identificación se realiza directamente en el dominio  $z$  a partir de datos en el dominio temporal obtenidos mediante la simulación de la red usando señales *multisine* (Apéndice B).

Aplicando la transformada inversa de  $Z$  a (5.17) se obtiene la siguiente ecuación en diferencias

$$i(t) = - \sum_{k=1}^p a_k \cdot i(t - k \cdot \Delta t) + \sum_{l=1}^p b_l \cdot v(t - l \cdot \Delta t) \quad (5.18)$$

donde los parámetros  $a_k$  y  $b_l$  deberán ser estimados.

En el apéndice C se muestran los detalles del método.

### 5.6.3 Determinación del orden del equivalente

El orden del equivalente,  $p$ , determina el número de variables que deberán ser identificadas ( $2p + 1$ ). Evidentemente, un orden elevado implica un mayor número de variables a determinar. Según [44], para obtener una representación exacta de cada línea de transporte es necesario un “orden infinito” (con un paso de integración infinitesimal), aunque se pueden obtener resultados suficientemente precisos si se utiliza un paso de integración razonablemente pequeño. Es importante tener en cuenta que hay una relación intrínseca entre el paso de integración, la longitud del sistema externo y el orden del equivalente.

Si el sistema externo se reduce a una línea en vacío alimentada por una fuente ideal de tensión, el orden debe ser el doble del tiempo de propagación dividido por el paso de integración. Como se desprende de este ejemplo tan simple, el orden del equivalente se determina por la aparición de eventos tales como el tiempo que tarda en llegar la onda reflejada al extremo de la línea donde se conecta la fuente. De este análisis también se desprende que, para tener en cuenta los retrasos y las múltiples reflexiones debido a la presencia de líneas de transporte, se debe usar el mismo orden para los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  [38], [44]. Cuando el sistema externo está formado por numerosas líneas interconectadas, es difícil asignar un orden al equivalente basándose solamente en la configuración y la longitud de las líneas.

Un procedimiento para estimar los límites del orden  $p$  se basa en la longitud de la red expresada como número de pasos de integración y en el número de componentes discretos almacenadores de energía (bobinas y condensadores) [38]. El límite inferior para la longitud de la red se define como el doble del tiempo requerido por una señal para ir de un nudo frontera al nudo más alejado de la red a través del camino más corto, dividido por el paso de integración. El límite superior se obtiene como el doble de la suma de todos los tiempos de propagación de las líneas dividido por el paso de integración. Normalmente, un valor apropiado del orden se encuentra entre estos dos límites. Una red radial tiene un orden  $p$  cercano al límite inferior, mientras que el de una red mallada es cercano al límite superior.

El análisis anterior muestra que  $p$  crece con la longitud de la red. Sin embargo, según [44], un red de gran dimensión se puede aproximar de forma precisa con un orden reducido. Esto es debido a la presencia de pérdidas en la red y a su longitud. Las pérdidas hacen que las ondas vayan perdiendo amplitud cuando viajan a lo largo de la línea.

## 5.7 Implementación

Según se ha visto con anterioridad, las funciones racionales se han usado con objeto de simplificar la representación de una red eléctrica compleja en las simulaciones en el dominio del tiempo. Dichas funciones racionales se

pueden establecer en el dominio  $s$  o en el dominio  $z$ . Así mismo, también se ha descrito que, aplicando la aproximación bilineal o bien *root matching*, se puede realizar la conversión de los polos y ceros del dominio  $s$  al dominio  $z$ . Toda esta teoría funciona bien para funciones de orden bajo, entorno a 15, sin embargo para funciones de orden superior los resultados obtenidos no son aceptables debido a los errores de redondeo inherentes cuando se trabaja con precisión finita. Este problema se puede evitar descomponiendo en fracciones simples la función racional en el dominio de la frecuencia [45].

A continuación se analizan las formas más importantes de incluir las funciones en el dominio  $s$  o en el dominio  $z$  en un programa de simulación basado en EMTP, como puede ser ATP, PSCAD, etc.

### 5.7.1 Implementación de $Y(z)$ en EMTP

Tras el proceso de identificación, la admitancia en el dominio  $z$  es

$$Y(z) = \frac{I(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_p z^{-p}} \quad (5.19)$$

la cual se puede convertir en la siguiente ecuación en diferencias:

$$i(k) = a_0 \cdot u(k) + i_H(k) \quad (5.20)$$

donde

$$i_H(k) = [a_1 \cdot u(k-1) + a_2 \cdot u(k-2) + \dots + a_m \cdot u(k-m)] - [b_1 \cdot y(k-1) + b_2 \cdot y(k-2) + \dots + b_n \cdot y(k-n)] \quad (5.21)$$

El término  $a_0$  se incluye en EMTP como una conductancia e  $i_H(k)$  depende de la historia pasada y se incluye como una fuente de intensidad.

El resultado es un equivalente Norton como el que se muestra en la Figura 5.18.

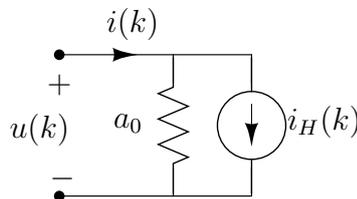


Figura 5.18: Equivalente Norton.

Hay que destacar que las últimas versiones del programa ATP admiten directamente la función racional (5.19). Sin embargo, en el programa comercial PSCAD es necesario obtener la ecuación en diferencias y programarla en lenguaje Fortran.

Cabe también la posibilidad de expresar (5.19) como una suma de fracciones parciales:

$$Y(z) = a_0 + \sum_{i=1}^p \frac{a_i}{z^{-1} - z_{pi}^{-1}} \quad (5.22)$$

donde cada término en la suma da lugar a la siguiente contribución a la corriente:

$$\Delta i_i(k) = -\frac{a_i \cdot u(k) - \Delta i_i(k-1)}{z_{pi}^{-1}} \quad (5.23)$$

Según [45], esta expresión no reduce apenas el tiempo de cálculo pero, sin embargo, disminuye a la mitad el espacio de memoria necesario.

### 5.7.2 Implementación de $Y(s)$ en EMTP

Tras el proceso de identificación, la admitancia en el dominio  $s$  es la siguiente:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} \quad (5.24)$$

Para la incorporación de esta función en un programa basado en EMTP es necesario convertirla al dominio  $z$  y de esta forma obtener la correspondiente ecuación en diferencias. En la sección 4.4 se han expuesto los dos métodos más usados para la transformación de una función de transferencia del dominio  $s$  al dominio  $z$ , como son la transformación bilineal y el método denominado *root-matching*. Al final se obtiene un circuito equivalente Norton como el mostrado en la Figura 5.18.

En este caso también cabe la posibilidad de expresar la función  $Y(s)$  como suma de fracciones simples:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^p \frac{a_i}{s - s_{pi}} + s \cdot C + G \quad (5.25)$$

donde los valores de  $C$  y  $G$  serán 0 dependiendo de la diferencia de órdenes entre el numerador y denominador de (5.24).

Esta representación mediante fracciones simples permite obtener una red ficticia formada por una serie de ramas conectadas en paralelo, tal y como se ha descrito en la sección 5.1.

Otra alternativa es transformar cada uno de los sumandos de (5.25) al dominio  $z$ , y así obtener una ecuación en diferencias por cada uno de ellos, las cuales se incorporarán a EMTP de la misma forma que (5.20). Sin embargo, un problema de carácter práctico surge cuando  $s_{pi}$  es complejo conjugado. Es conveniente asociar los polos conjugados en el dominio  $z$  antes de obtener la ecuación en diferencias:

$$\Delta Y(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}} \quad (5.26)$$

De esta forma todos los coeficientes serán números reales.

## 5.8 Precisión

Los métodos descritos para incluir una función racional en los programas comerciales basados en EMTP dan lugar a diferentes resultados numéricos. Básicamente hay tres causas de dichas discrepancias [45]:

1. Debido a las aproximaciones introducidas en el dominio de la frecuencia por los diferentes métodos existentes para obtener la función racional. Es difícil evaluar la calidad de una aproximación en el dominio de la frecuencia. En la práctica, se selecciona un método y se van ajustando los parámetros para un determinado orden del numerador y denominador hasta que la aproximación sea aceptable. En el caso de que no se logre tal aproximación se deberá aplicar otro método de identificación.
2. La inexactitud provocada por la linealización realizada en cada paso de integración. Está relacionada con la elección del paso de integración en EMTP. No hay una solución única en la elección de dicho paso para obtener unos buenos resultados. Lo usual es reducir el paso de integración a la mitad y examinar la influencia que tiene sobre las variables de salida.
3. Errores de redondeo que aparecen cuando se usan polinomios de orden elevado junto con pequeños pasos de integración. En la práctica, para sistemas de orden menor de 10 no se observan errores de redondeo. Sin embargo, hay muchos casos reales que requieren un orden superior a 10 para obtener un buen ajuste. Evidentemente este tipo de errores están relacionados con el uso de la doble precisión de la mayoría de los programas de cálculo numérico comerciales.

En [45] se hace un análisis de los errores de redondeo que se producen cuando se emplea uno u otro método de implementación en EMTP. De dicho análisis se puede sacar como conclusión que para trabajar con funciones racionales de orden elevado lo idóneo es que, antes de efectuar la transformación del dominio  $s$  al dominio  $z$ , se realice una descomposición en fracciones simples tal y como se describe en la sección 4.2.

# Capítulo 6

## Procedimiento Propuesto

A continuación se propone un procedimiento para obtener el equivalente externo de una red eléctrica para el estudio de transitorios electromagnéticos. Son muchas las dificultades que entraña la obtención de un equivalente de estas características, sobre todo cuando el rango de frecuencias para el que debe ser válido es relativamente amplio. Aparte de las dificultades de modelado de cada uno de los elementos, siempre están presentes los errores numéricos provocados por el empleo de una precisión finita que puede llevar al fracaso de una determinada metodología.

A continuación se expone el procedimiento a modo de pseudocódigo. Cuando proceda, en cada ítem se hará un breve recordatorio de los métodos existentes así como el que se propone.

### 1. Delimitación de la zona de estudio.

La red eléctrica se deberá dividir en dos partes: una zona de estudio, próxima a donde se ha producido la falta, que tiene gran influencia en el transitorio; y una zona relativamente alejada de la falta, denominada red externa, la cual será sustituida por un equivalente.

De entre los factores más importantes que influyen en la división de la red cabe destacar la propia topología de la red y el tipo de transitorio que se quiere analizar. El tipo de transitorio está íntimamente relacionado con el rango de frecuencias implicadas, y por tanto con la penetración de la falta hasta zonas más o menos profundas de la red. En general, cuanto más alta es la frecuencia menor es la penetrabilidad en la red debido a la atenuación.

### 2. Modelado de la zona de estudio.

La zona de estudio deberá representarse con buenos modelos ya que tienen gran influencia en el transitorio. En este punto se propone que se usen los mejores modelos incorporados por los propios programas comerciales, como por ejemplo los que incorpora PSCAD.

### 3. Respuesta en frecuencia de la red externa.

La red externa se sustituirá por un equivalente que sea capaz de reproducir de forma precisa su comportamiento para el rango de frecuencias de interés, el cual viene determinado por el tipo de transitorio que se desee estudiar. Para ello, es necesario obtener la respuesta en frecuencia de la red externa dentro de un rango de interés. Esencialmente, esta respuesta se puede obtener a partir de medidas reales de la propia red bajo ciertos tipos de excitaciones, o mediante simulación. Debido a la dificultad inherente de la obtención de medidas reales, se propone obtener la respuesta en frecuencia de la red externa mediante la simulación.

Para simular la red externa es necesario en primer lugar modelarla, lo que conlleva el tener que adoptar ciertos modelos para los elementos que la forman. Sin embargo, como esta parte de la red tiene una influencia en el transitorio menor que la zona de estudio, se pueden adoptar modelos simplificados que faciliten la simulación sin perjudicar considerablemente su exactitud.

Respecto al tipo de excitación que se usará en dicha simulación, hay varias posibilidades. Entre ellas, se propone utilizar el tipo de señal *multisine*, que no es más que la superposición de una serie de fuentes de intensidad sinusoidales de distintas frecuencias y de valor eficaz unidad.

A partir de la simulación se obtiene la respuesta temporal y usando la transformada discreta de Fourier se obtiene la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de la red externa.

### 4. Identificación del modelo.

A partir de la respuesta en frecuencia se identifican los parámetros del modelo. Para ello, hay varias opciones que van desde la identificación directa de redes *RLC* a la identificación de los parámetros de modelos matemáticos en el dominio  $s$ ,  $z$  o en el dominio discreto del tiempo.

Se propone usar la identificación de parámetros de una función racional en el dominio  $s$  cuyo orden deberá ser estimado convenientemente. Una de las razones, además de su precisión, de usar este tipo de función es que existen métodos robustos desarrollados al efecto, por lo que facilitará el proceso.

### 5. Implementación.

La razón última del equivalente externo es poder sustituir a la red externa. Esto quiere decir que deberá incorporarse con relativa facilidad dentro del programa comercial de simulación con el que se trabaje. En este estudio se ha considerado únicamente la implementación del modelo en el programa comercial PSCAD.

Dado que la identificación se ha realizado en el dominio  $s$ , que corresponde al dominio continuo de la frecuencia, es necesario convertir dicha función al dominio discreto de la frecuencia mediante algunas de las técnicas existentes de discretización. Una vez convertida al dominio  $z$  se puede obtener la ecuación en diferencias asociada en el dominio discreto del tiempo, la cual se puede incorporar con facilidad en PSCAD.

En este punto cabe destacar que es probable que aparezcan problemas numéricos debidos a la precisión finita que pueden acarrear que se tenga que cambiar el método de identificación, sobre todo cuando el orden del ajuste sea elevado.

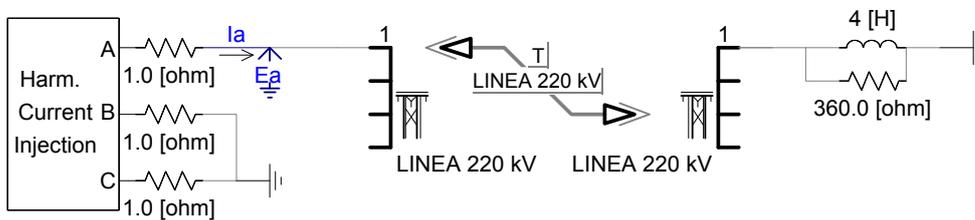
#### 6. Validación del modelo.

En sistemas de potencia de gran dimensión resulta inviable acometer una simulación del sistema completo. Por ello, si se quiere validar el modelo la única solución es hacer pruebas reales con el sistema y comparar las medidas de algún registrador con las estimadas mediante la simulación con el equivalente externo.

Para la validación de distintos métodos se usarán sistemas de potencia de pequeña dimensión de forma que las pruebas reales con todo el sistema se sustituyan por simulaciones. Aunque esto solo será válido a nivel de desarrollo.

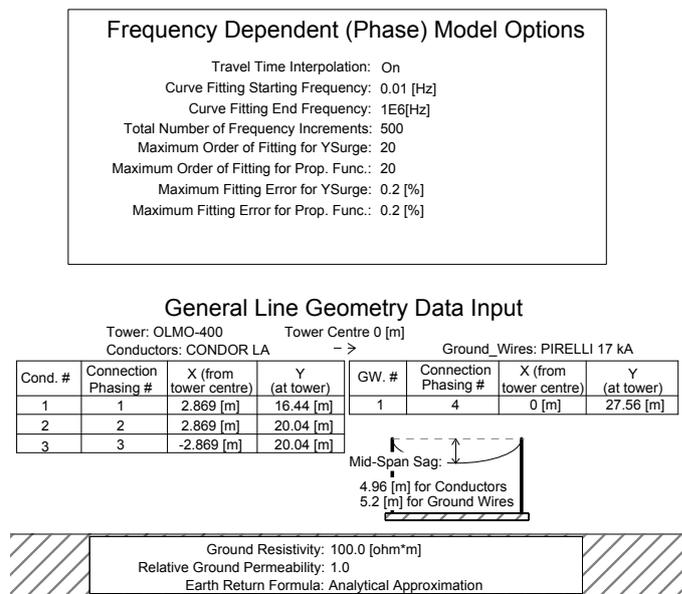
**Ejemplo 6.1**

El objetivo de este ejemplo es mostrar los resultados obtenidos al implementar el procedimiento propuesto usando los programas comerciales MATLAB y Pscad. En la Figura 6.1 se muestra el esquema eléctrico realizado en PSCAD para obtener la respuesta en frecuencia de la red externa, la cual está formada por la línea de 220 kV y por la conexión en paralelo de una resistencia y una bobina a modo de carga. El equivalente se obtendrá para el rango de frecuencias del tipo II, que corresponde a ondas de frente lento. Se obtendrá la respuesta en frecuencia en el intervalo [10, 30 000] kHz.

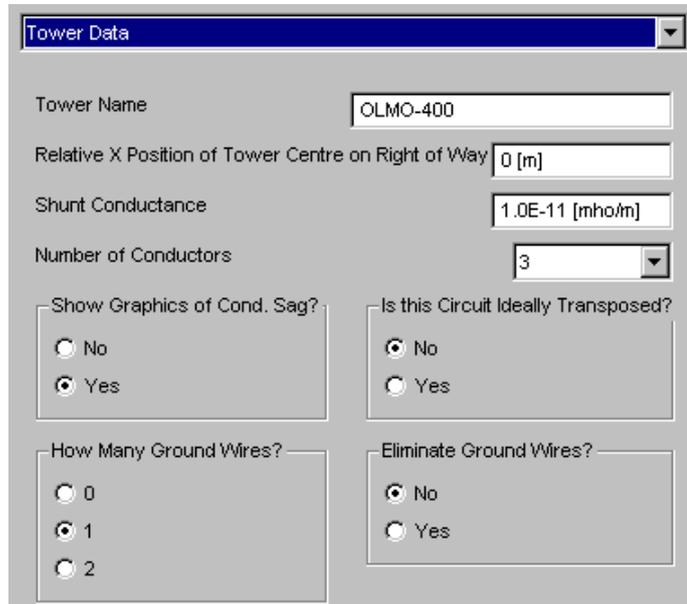


**Figura 6.1:** Esquema eléctrico desarrollado en PSCAD.

En la Figura 6.2 aparecen los datos de la geometría de la línea así como los parámetros de lo modelo de representación. Así mismo, en las Figuras 6.3 y 6.4 se muestran los datos de la torre y del conductor.



**Figura 6.2:** Geometría de la línea.



Tower Data

Tower Name: OLMO-400

Relative X Position of Tower Centre on Right of Way: 0 [m]

Shunt Conductance: 1.0E-11 [mho/m]

Number of Conductors: 3

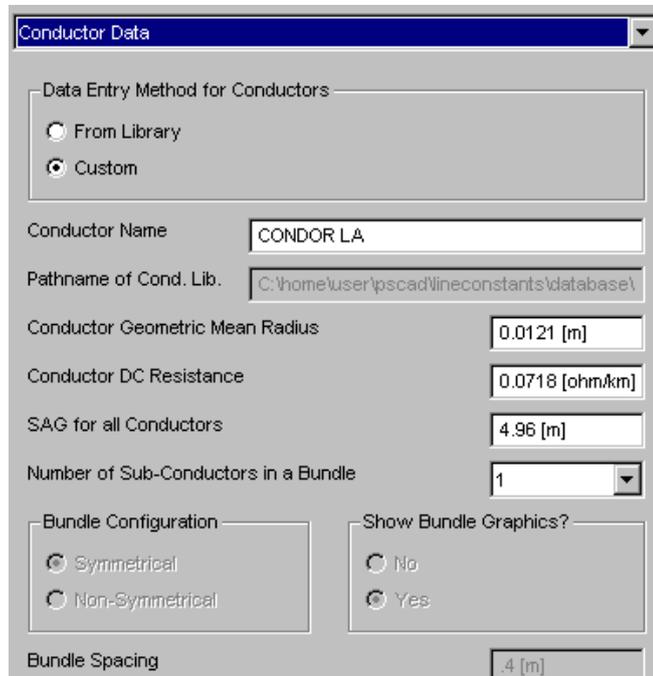
Show Graphics of Cond. Sag?
   
 No
   
 Yes

Is this Circuit Ideally Transposed?
   
 No
   
 Yes

How Many Ground Wires?
   
 0
   
 1
   
 2

Eliminate Ground Wires?
   
 No
   
 Yes

Figura 6.3: Datos de la torre.



Conductor Data

Data Entry Method for Conductors
   
 From Library
   
 Custom

Conductor Name: CONDOR LA

Pathname of Cond. Lib.: C:\home\user\pscad\lineconstants\database\

Conductor Geometric Mean Radius: 0.0121 [m]

Conductor DC Resistance: 0.0718 [ohm/km]

SAG for all Conductors: 4.96 [m]

Number of Sub-Conductors in a Bundle: 1

Bundle Configuration
   
 Symmetrical
   
 Non-Symmetrical

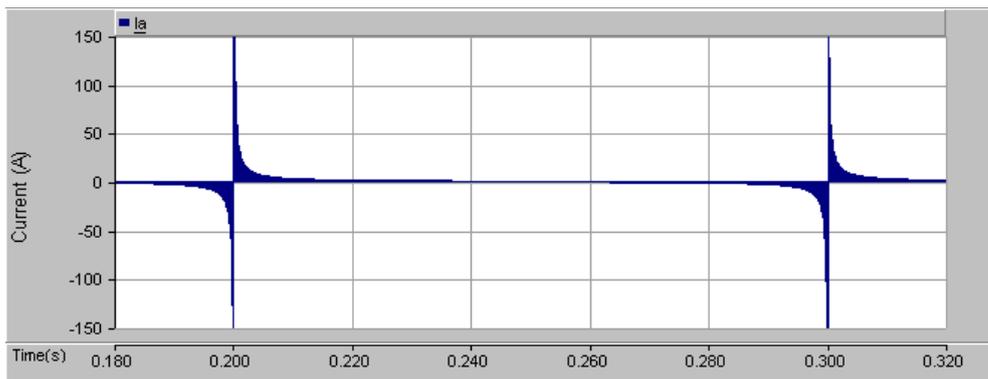
Show Bundle Graphics?
   
 No
   
 Yes

Bundle Spacing: .4 [m]

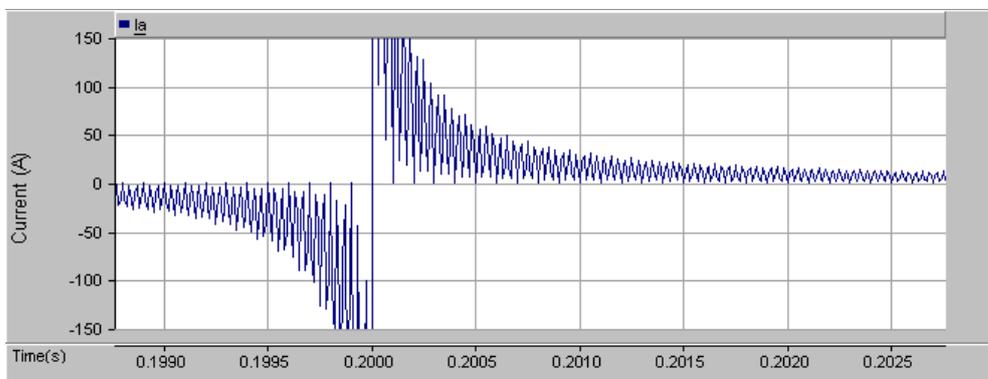
Figura 6.4: Datos del conductor.

La fuente de intensidad es del tipo *multisine* de las siguientes características:  $A_k=1$ ,  $f_{max}=30$  kHz,  $\Delta f=10$  Hz,  $\phi_0=0^\circ$ . Los parámetros de simulación elegidos son:  $\Delta t=10$   $\mu$ s,  $T_{max}=0,4$  s. La línea de 220 kV tiene una longitud de 20 km y se ha representado mediante un modelo de parámetros distribuidos dependientes de la frecuencia.

En la Figura 6.5 se muestra un periodo de la evolución temporal de la intensidad. Así mismo, en la Figura 6.6 se muestra un detalle de dicha evolución.



**Figura 6.5:** Intensidad inyectada a la línea.



**Figura 6.6:** Detalle de la intensidad inyectada a la línea.

En la Figura 6.7 se muestra un periodo de la evolución temporal de la tensión en bornes de la línea. Así mismo, en la Figura 6.8 se muestra un detalle de dicha evolución.

Como la inyección de intensidad se ha elegido de modulo unidad y desfase nulo, la onda de tensión equivale a la impedancia equivalente vista desde los bornes de la línea. Para obtener la característica frecuencial de dicha señal se calculará su transformada de Fourier usando el programa comercial Matlab. En la Figura 6.9 se muestra el módulo y el desfase de la impedancia equivalente del sistema en función de la frecuencia.

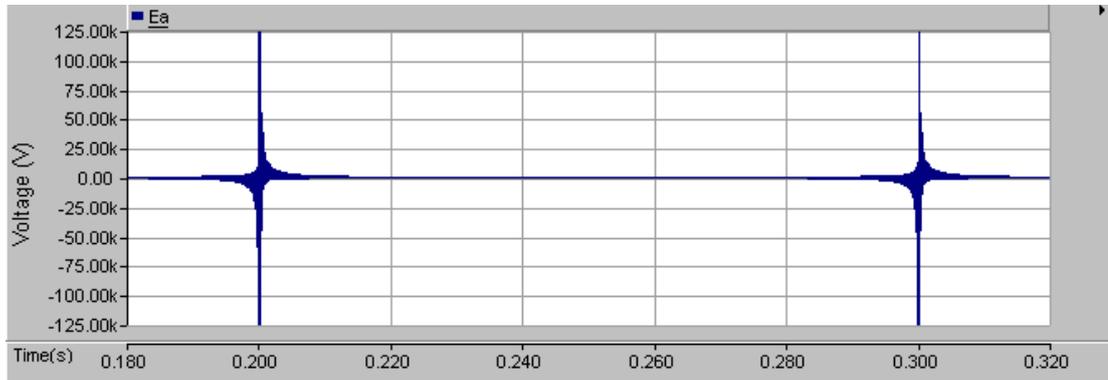


Figura 6.7: Tensión obtenida en bornes de la línea.

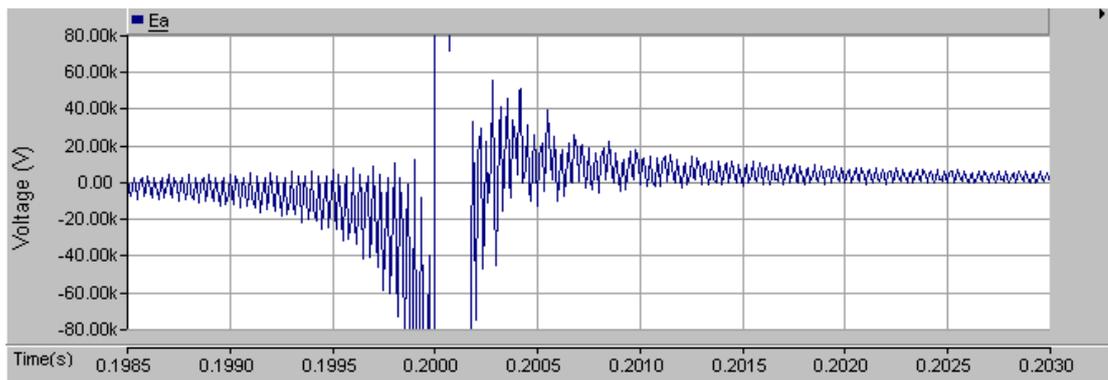


Figura 6.8: Detalle de la tensión obtenida en bornes de la línea.

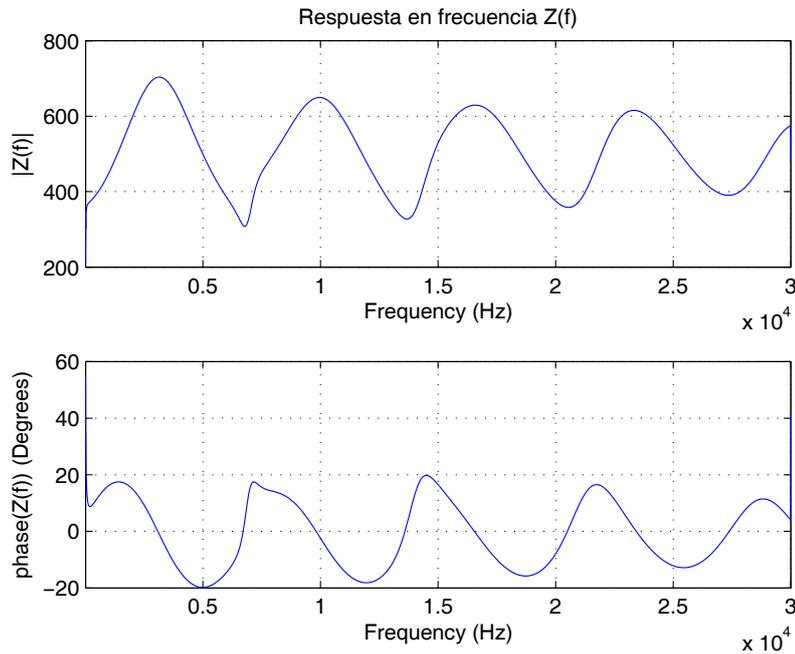


Figura 6.9: Respuesta en frecuencia del sistema.

Una vez obtenida la respuesta en frecuencia de la red externa, el siguiente paso es la identificación del modelo. El proceso de identificación se realizará sobre la admitancia en vez de la impedancia ya que el modelo final será de la forma de equivalente Norton. Según lo expuesto en la sección 5.6.3, para obtener una estimación del orden del equivalente hay que calcular la longitud de la red expresada como número de pasos e integración

$$\ell_r = \frac{2 \cdot \tau}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \ell}{\Delta t \cdot v} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 290 \cdot 10^6} \sim 14 \quad (6.1)$$

y el número de elementos discretos almacenadores de energía, que en este caso es solo una bobina. Por lo tanto, una estimación del orden es la siguiente:

$$p = \ell_r + 1 \sim 15 \quad (6.2)$$

El algoritmo usado para el ajuste de los parámetros utiliza unos valores iniciales de los polos que son todos complejos conjugados. En consecuencia se adoptarán 16 polos como punto de partida para el ajuste. En la Figura 6.10 se muestra el resultado obtenido usando 16 polos. Con objeto de evaluar la bondad del ajuste, en el Figura 6.11 se ha representado la desviación de módulo y fase del ajuste con 16 polos con respecto a los datos obtenidos de la respuesta en frecuencia. Según se observa la desviación es pequeña en términos absolutos, aunque en la zona de bajas frecuencias se puede apreciar una diferencia mayor.

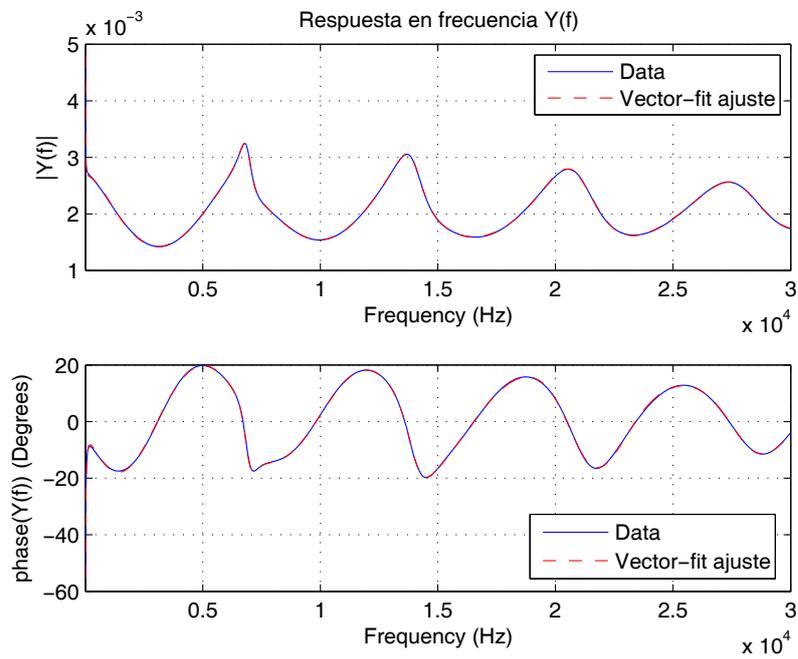


Figura 6.10: Ajuste del modelo con 16 polos.

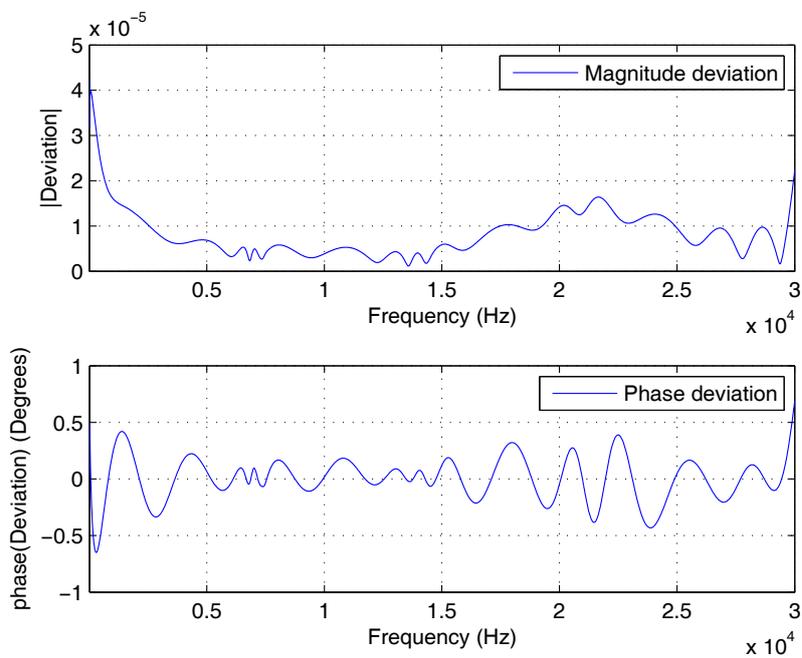
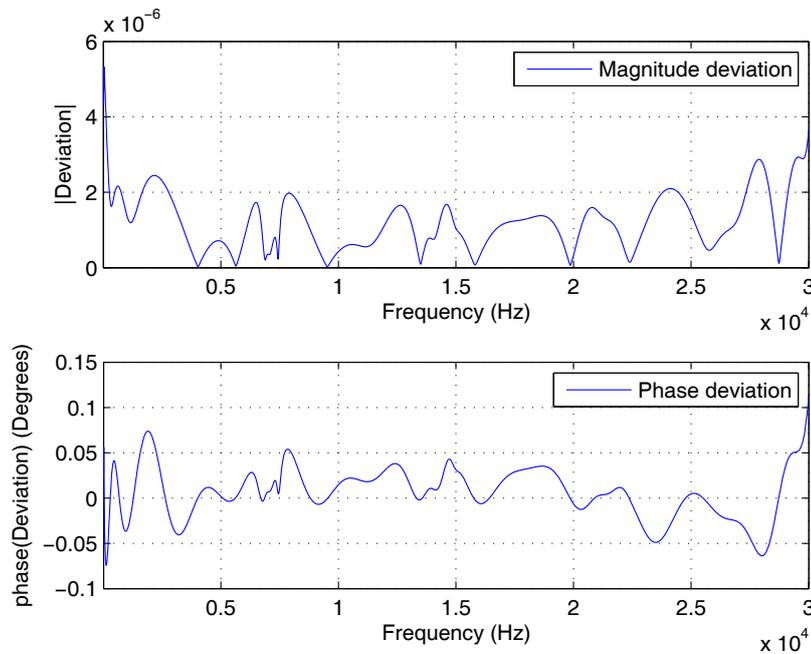


Figura 6.11: Desviación en magnitud y fase del ajuste con 16 polos respecto a los datos de la respuesta en frecuencia.

Con objeto de comprobar la influencia del número de polos en el ajuste, en la Figura 6.12 se muestra la desviación obtenida usando 20 polos. Se puede observar que el ajuste con 20 polos disminuye en un orden de magnitud la desviación. El resto del ejemplo se basará en el ajuste con 20 polos.



**Figura 6.12:** Desviación en magnitud y fase del ajuste con 20 polos respecto a los datos de la respuesta en frecuencia.

A continuación se convierte la función obtenida en el dominio  $s$  al dominio del tiempo discreto mediante la aplicación de la técnica *root-matching*. Para realizar esta conversión es necesario especificar un paso de integración, que será el que se use posteriormente para la simulación en el dominio temporal. En este caso se ha elegido un paso de integración de  $10 \mu\text{s}$ . Con objeto de comprobar que la discretización es correcta, en la Figura 6.13 se ha representado la respuesta en frecuencia de la función en el dominio  $z$ . Se puede comprobar que la aproximación es bastante buena, aunque se podría mejorar disminuyendo el paso de integración. Sin embargo, esto puede dar lugar a problemas numéricos derivados de la precisión numérica finita.

A partir de la función racional en el dominio  $z$  se obtiene la ecuación en diferencias asociada en el dominio discreto del tiempo, la cual se puede incorporar con facilidad en PSCAD. El resultado es un módulo programado en Fortran a partir de los coeficientes del numerador y denominador de la función racional en el dominio  $z$  y que representa a la red externa en el rango de frecuencias  $[10, 30\,000]$  Hz.

Con objeto de comprobar el correcto comportamiento del módulo, se ha propuesto el esquema eléctrico de la Figura 6.14. Se han conectado a un mis-

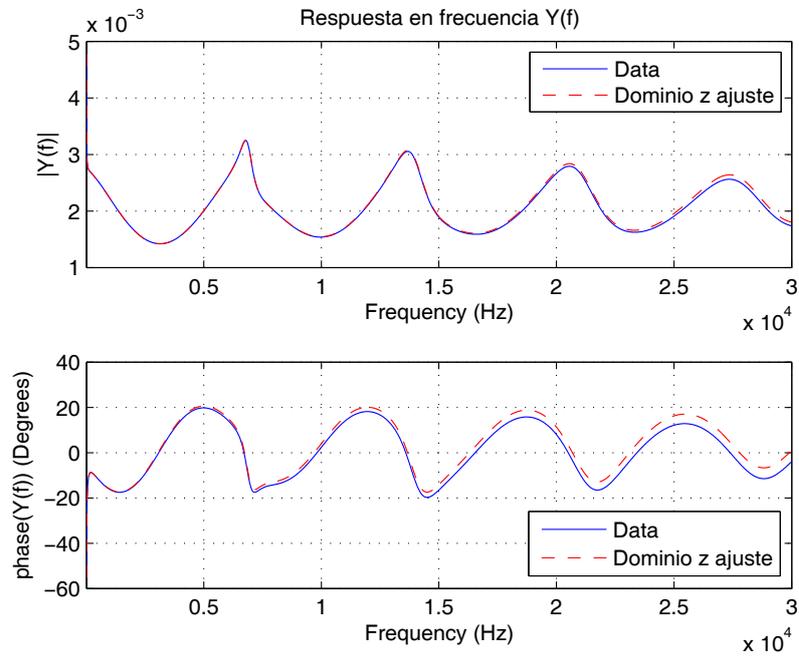


Figura 6.13: Ajuste del modelo en el dominio  $z$  con 20 polos y  $\Delta t=10 \mu s$ .

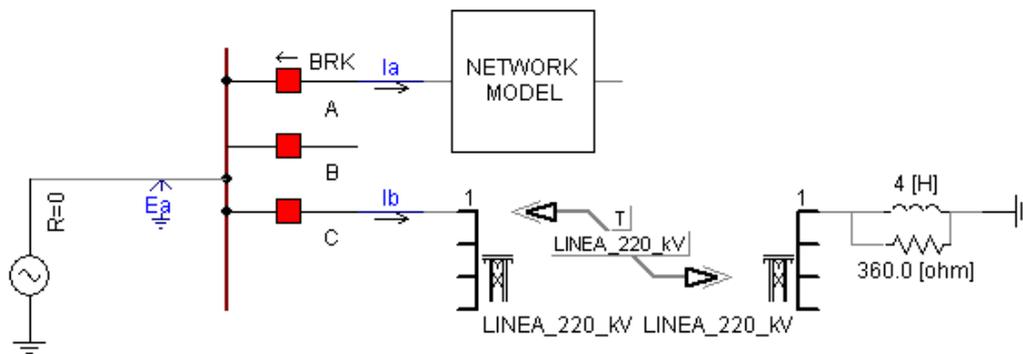
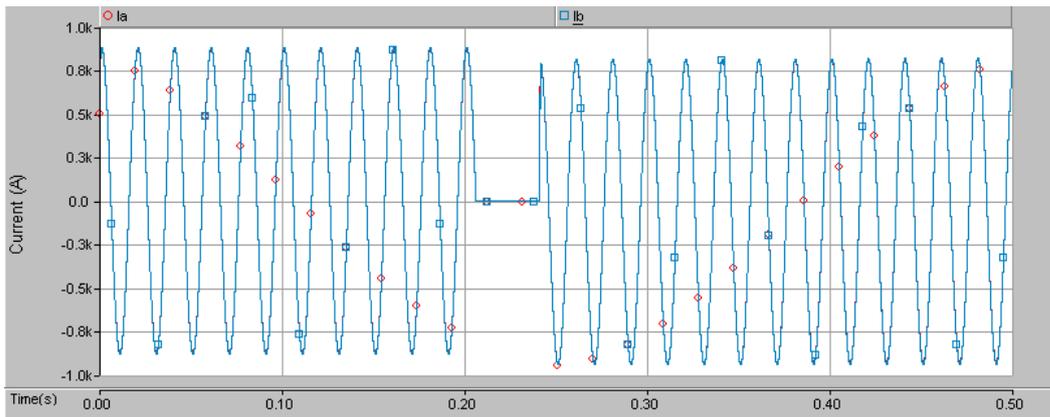
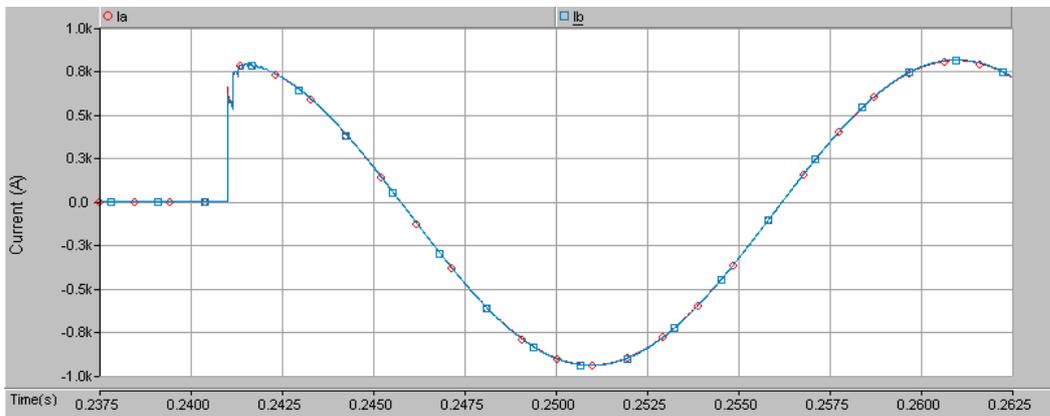


Figura 6.14: Esquema eléctrico propuesto para la validación del modelo.

mo embarrado, el sistema externo completo y el FDNE. La alimentación a dicho embarrado se ha realizado con una fuente de tensión de impedancia nula para que no se produzcan caídas de tensión y ambos sistemas funcionen como si estuvieran aislados. El interruptor se abre a los 0,2 s y se vuelve a cerrar a los 0,241 s lo cual provoca la aparición de un transitorio de intensidad en ambos sistemas que habrá que comparar. En las Figuras 6.16 y 6.17 se muestra una ampliación de las intensidades. Se puede apreciar la gran similitud de ambas señales dando por válido el FDNE obtenido.



**Figura 6.15:** Intensidades que circulan por la red externa y por el FDNE.



**Figura 6.16:** Detalle de las intensidades que circulan por la red externa y por el FDNE.

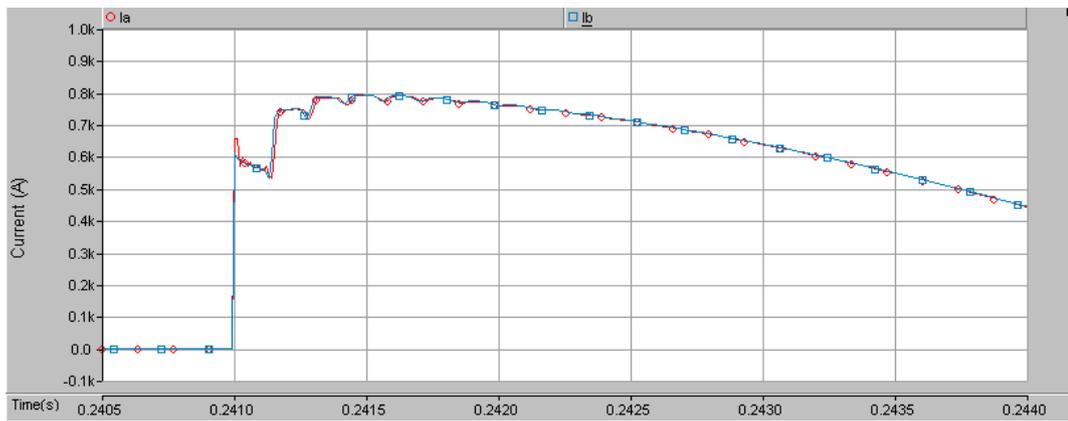


Figura 6.17: Detalle de las intensidades que circulan por la red externa y por el FDNE.



# Apéndice A

## Integración numérica usando la regla trapezoidal

Supongamos que la ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento dinámico de un componente eléctrico se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = x(t) \quad (\text{A.1})$$

Esta ecuación se puede expresar también en forma integral según:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t x(z)dz \quad (\text{A.2})$$

La figura A.1 muestra el principio en el que se basa la regla trapezoidal, que permite aproximar el valor de la integral sumando las áreas de los trapecios correspondientes a cada paso de integración. Suponiendo conocido el valor de  $y$  en el instante  $t_{n-1}$ , el valor en el instante  $t_n$  se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \cdot (t_n - t_{n-1}) \quad (\text{A.3})$$

Si el paso de integración es constante,

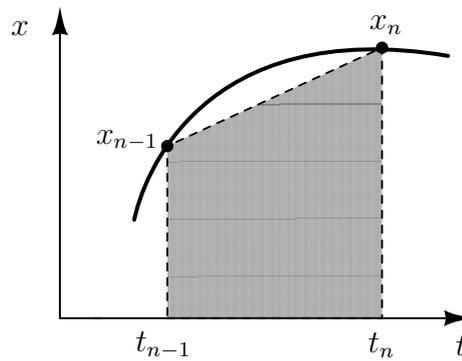
$$t_n - t_{n-1} = \Delta t, \quad \forall n \quad (\text{A.4})$$

el proceso de cálculo se puede expresar de la siguiente forma:

$$y(t) = y(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2}(x(t - \Delta t) + x(t)) \quad (\text{A.5})$$

Además, según [9], el error cometido en la estimación de  $y(t)$  es:

$$\varepsilon(t) = \frac{-\Delta t^3}{12} \cdot \frac{d^2x(\xi)}{dt^2}, \quad t - \Delta t \leq \xi \leq t \quad (\text{A.6})$$



**Figura A.1:** Regla trapezoidal

En términos generales, la precisión de la solución [46] de un sistema discreto depende del tamaño del paso de integración ( $\Delta t$ ) y de la regla de integración utilizada. A su vez, el paso de integración determina la máxima frecuencia que se puede simular, mientras que la regla de integración determina la distorsión de la solución para diferentes frecuencias.

Frente a otras técnicas [23] de integración numérica (Forward Euler, Backward Euler, Gear, ...), la regla trapezoidal, tal y como ha sido descrita, se caracteriza por su simplicidad, estabilidad numérica en sistemas *stiff* y su razonable precisión en la mayoría de los problemas. Sin embargo, puede producir oscilaciones numéricas bajo determinadas condiciones. En [47] y [46] se pueden encontrar varias técnicas para controlar o reducir estas oscilaciones numéricas, aunque en este estudio no se han considerado.

# Apéndice B

## Señales *multisine*

Una señal *multisine* está formada por la suma de una serie de armónicos cuyas amplitudes se pueden programar y sus fases se optimizan para minimizar el factor de cresta de la señal [48]. Dicha señal está definida como sigue

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \sin(2\pi f_k t + \phi_k), \quad f_k = \frac{l_k}{T} \quad (\text{B.1})$$

donde  $T$  es el periodo de la medida,  $l_k$  es un número entero positivo,  $A_k$  y  $\phi_k$  son, respectivamente, la amplitud y la fase del armónico  $k$ .

La expresión para la optimización de las fases [48] es la siguiente:

$$\phi_m = \phi_1 - 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \cdot p_k, \quad m = 2, \dots, N \quad (\text{B.2})$$

donde  $N$  es el número de componentes de frecuencia y  $p_k$  es la potencia relativa de la componente  $k$ .

La señal *multisine* aprovecha la idea de que se pueden generar muchas frecuencias simultáneamente dentro de una banda de interés, de forma que aproximadamente toda la energía de la señal se reparta en todo el ancho de banda y constructivamente contribuya a las medidas en un sistema lineal. Una señal *multisine* con un espectro de amplitudes plano y un número de líneas espectrales uniformemente distribuidas sobre el ancho de banda de interés es, por tanto, altamente deseable. En tal caso, (B.2) se reduce a [48]

$$\phi_m = \phi_1 - \frac{m(m-1)}{N} \pi, \quad m = 2, \dots, N \quad (\text{B.3})$$

La señal *multisine* se usa fundamentalmente para obtener la respuesta en frecuencia de un sistema eléctrico. Para ello, es necesario definir una serie de valores tales como la amplitud de los armónicos ( $A_k$ ), la fase de los armónicos ( $\phi_k$ ) y el conjunto de frecuencias ( $f_k$ ) (depende del proceso transitorio que se desee analizar). A partir de estos valores se obtienen los parámetros básicos de simulación que tienen una gran importancia.

Así, si  $A_k = 1$ ,  $\phi_k = 0$ ,  $\forall k$  y  $f_k \in [f_{min}, f_{max}]$  en pasos  $\Delta f$ , entonces los parámetros de simulación son los siguientes [43]:

- Periodo de la medida,  $T_{max}$  que es igual al periodo de la señal *multisine*. Este periodo se obtiene a partir de la frecuencia mas pequeña que aparece dentro de la señal *multisine*. En este caso:

$$\begin{aligned} T_{max} &= \frac{1}{f_{min}} & \text{si } f_{min} \neq 0 \\ T_{max} &= \frac{1}{\Delta f} & \text{si } f_{min} = 0 \end{aligned} \quad (B.4)$$

Sin embargo para asegurar el régimen permanente de la respuesta del sistema a la señal *multisine* es necesario excitar al sistema unos 3 o 4 periodos de la señal *multisine*. Para analizar la respuesta se debe utilizar alguno de los últimos periodos. Por tanto, el tiempo de simulación debe ser:

$$T = 3 \div 4T_{max} \quad (B.5)$$

- La frecuencia de muestreo,  $\Delta t$ , ha de elegirse de forma que se evite el aliasing. Es decir,  $\Delta t$  debe satisfacer el criterio de Nyquist. Lo usual es fijar la frecuencia de muestreo en torno a 4 veces la frecuencia del armónico mayor:

$$\Delta t = \frac{1}{4 \cdot f_{max}} \quad (B.6)$$

A modo de ejemplo, se obtendrá la señal *multisine* de las siguientes características:  $A_k=1$ ,  $f_{max}=5\,000$  Hz,  $\Delta f=100$  Hz,  $\phi_0=0^\circ$ . Los parámetros de simulación elegidos son:  $\Delta t = \frac{1}{16 \cdot f_{max}} = 12,5 \mu\text{s}$ ,  $T_{max} = \frac{4}{\Delta f} = 0,04$  s.

En las Figuras B.1 y B.2 se han representado, respectivamente, la señal *multisine* obtenida usando la optimización de fase propuesta y su transformada de Fourier.

Con objeto de comparar el efecto que tiene la optimización de fase sobre el factor de cresta, en las Figuras B.3 y B.4 se han representado, respectivamente, la señal *multisine* obtenida sin usar optimización de fase y su transformada de Fourier.

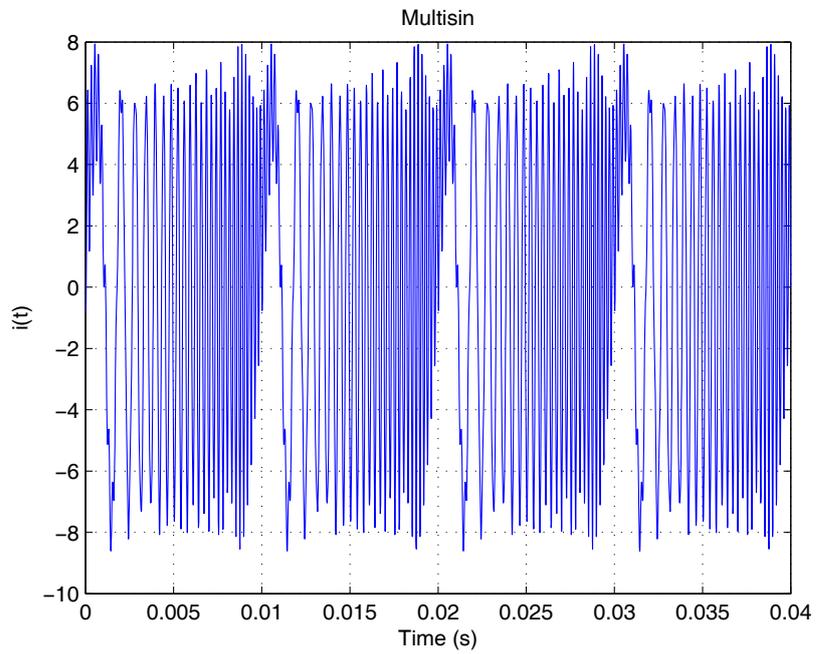


Figura B.1: Señal *multisine* con optimización de fase.

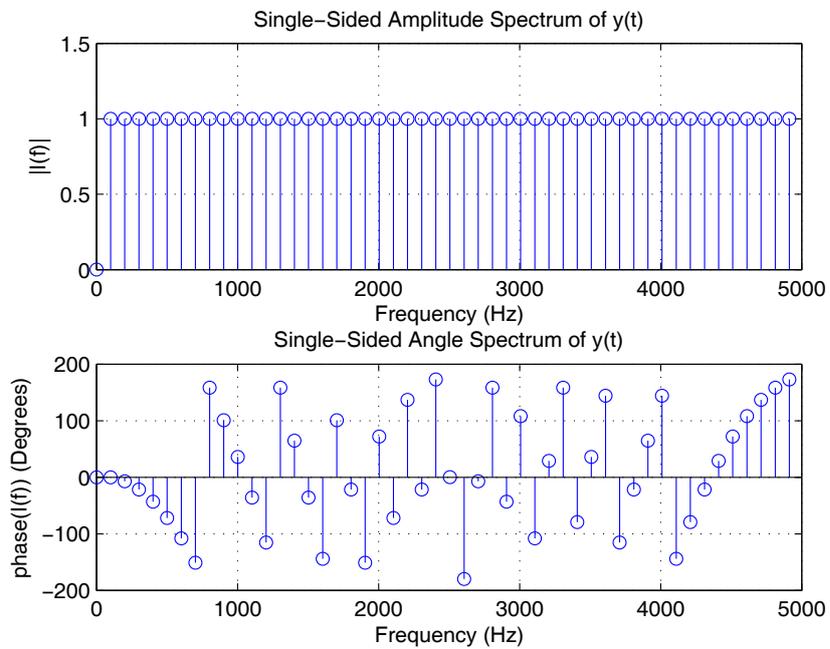
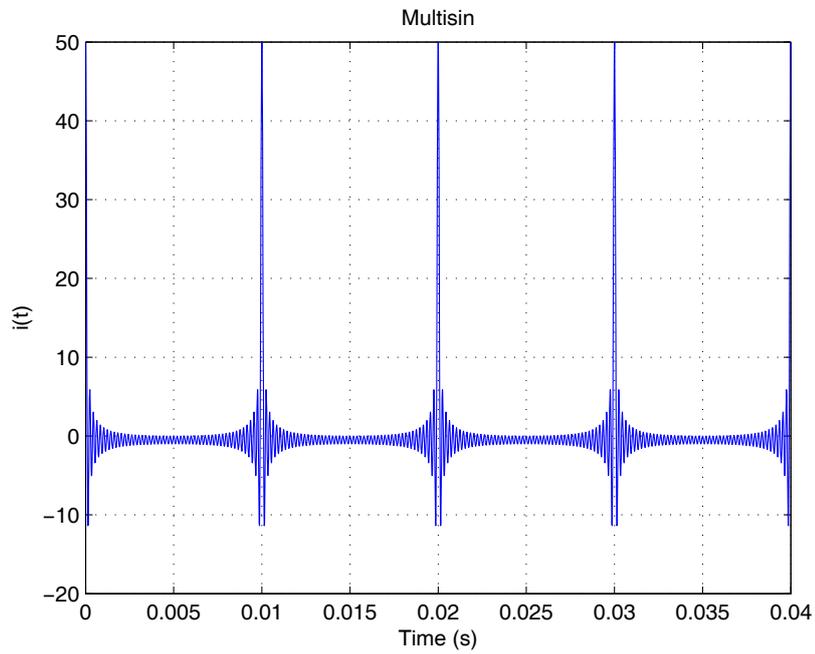
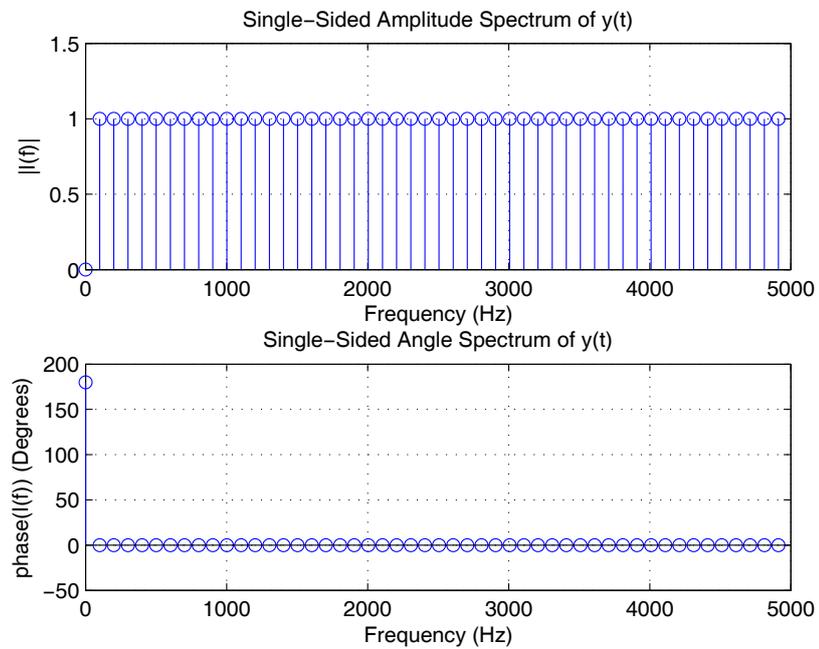


Figura B.2: Transformada de Fourier de la señal *multisine* con optimización de fase.



**Figura B.3:** Señal *multisine* sin optimización de fase.



**Figura B.4:** Transformada de Fourier de la señal *multisine* sin optimización de fase.

# Apéndice C

## Técnicas de identificación

### C.1 Identificación en el dominio $s$ con datos del dominio frecuencial

En el modelado de sistemas de potencia, es importante encontrar una función racional que sea una buena aproximación de los valores discretos obtenidos mediante medidas o simulación.

La función racional en el dominio  $s$  que deberá ser ajustada con datos en el dominio de la frecuencia es la siguiente:

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n} \quad (\text{C.1})$$

donde  $m \leq n$ .

En términos de los coeficientes desconocidos  $\{a_0, \dots, a_m\}$  y  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , la ecuación (C.1) es no lineal. Sin embargo, se puede expresar como un problema lineal tal y como se muestra a continuación.

La respuesta en frecuencia se obtiene sustituyendo  $s$  por  $j\omega$  en la ecuación (C.1):

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k (j\omega)^k}{1 + \sum_{k=0}^n b_k (j\omega)^k} \quad (\text{C.2})$$

Sea  $c_i + jd_i$  una muestra del sistema correspondiente a la frecuencia  $w_i$ , entonces:

$$c_i + jd_i = H(jw_i) = \frac{(a_0 - a_2w_i^2 + a_4w_i^4 - \dots) + j(a_1w_i - a_3w_i^3 - a_5w_i^5 - \dots)}{(1 - b_2w_i^2 + b_4w_i^4 - \dots) + j(b_1w_i - b_3w_i^3 - b_5w_i^5 - \dots)} \quad (\text{C.3})$$

Separando en parte real e imaginaria resulta:

$$c_i \cdot (1 - b_2w_i^2 + b_4w_i^4 - \dots) - d_i \cdot (b_1w_i - b_3w_i^3 - b_5w_i^5 - \dots) = (a_0 - a_2w_i^2 + a_4w_i^4 - \dots) \quad (\text{C.4})$$

$$c_i \cdot (b_1w_i - b_3w_i^3 - b_5w_i^5 - \dots) + d_i \cdot (1 - b_2w_i^2 + b_4w_i^4 - \dots) = (a_1w_i - a_3w_i^3 - a_5w_i^5 - \dots) \quad (\text{C.5})$$

Por cada muestra se obtienen dos ecuaciones similares a (C.4) y (C.5). El número de incógnitas que hay que identificar es  $m+n+1$ , que corresponde a  $\{a_0, \dots, a_m\}$  y  $\{b_1, \dots, b_n\}$ . En consecuencia, el mínimo número de muestras ( $N$ ) que será necesario obtener para identificar todos los parámetros es el siguiente:

$$N \geq \frac{m+n+1}{2} \quad (\text{C.6})$$

A partir de las ecuaciones (C.4), (C.5) y considerando las  $N$  muestras obtenidas de simulación o a partir de experimentos reales sobre el sistema, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_1^4 & \cdots & -d_1\omega_1 & -c_1\omega_1^2 & d_1\omega_1^3 & \cdots \\ -1 & 0 & \omega_2^2 & 0 & -\omega_2^4 & \cdots & -d_2\omega_2 & -c_2\omega_2^2 & d_2\omega_2^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \omega_N^2 & 0 & -\omega_N^4 & \cdots & -d_N\omega_N & -c_N\omega_N^2 & d_N\omega_N^3 & \cdots \\ 0 & -\omega_1 & 0 & \omega_1^3 & 0 & \cdots & c_1\omega_1 & -d_1\omega_1^2 & -c_1\omega_1^3 & \cdots \\ 0 & -\omega_2 & 0 & \omega_2^3 & 0 & \cdots & c_2\omega_2 & -d_2\omega_2^2 & -c_2\omega_2^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -\omega_N & 0 & \omega_N^3 & 0 & \cdots & c_N\omega_N & -d_N\omega_N^2 & -c_N\omega_N^3 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_N \\ -d_1 \\ -d_2 \\ \vdots \\ -d_n \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

el cual se puede expresar en forma de bloques como sigue:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [a_{il}]; \quad a_{il} = -\cos\left(\frac{-(l-1)\pi}{2}\right) \omega_i^{(l-1)} \\ \mathbf{B} &= [b_{il}]; \quad d_{il} = -\cos\left(\frac{(l-1)\pi}{2}\right) \omega_i^{(l-1)} d_i - \sin\left(\frac{(l-1)\pi}{2}\right) \omega_i^{(l-1)} c_i \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{C} = [c_{il}]; \quad c_{il} = \sin\left(\frac{-(l-1)\pi}{2}\right) \omega_i^{(l-1)}$$

$$\mathbf{D} = [d_{il}]; \quad b_{il} = \sin\left(\frac{-(l-1)\pi}{2}\right) \omega_i^{(l-1)} d_i + \cos\left(\frac{(l-1)\pi}{2}\right) \omega_i^{(l-1)} c_i$$

$$i = 1, \dots, N; \quad l = 1, \dots, m+1. \quad (\text{C.10})$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= (a_0, a_1, \dots, a_m) \\ \mathbf{b}^T &= (b_1, \dots, b_n) \\ \mathbf{c}^T &= (-c_1, -c_2, \dots, -c_N) \\ \mathbf{d}^T &= (-d_1, -d_2, \dots, -d_N) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

## C.2 Vector fitting

A continuación se describe brevemente el método de ajuste denominado *vector fitting* tal y como fue propuesto por Gustavsen & Semlyem en [39].

### C.2.1 Descripción

Sea la siguiente función racional expresada como suma de fracciones simples:

$$f(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - a_i} + d + sh \quad (\text{C.12})$$

donde los residuos,  $c_i$  y polos  $a_i$  son números reales o parejas de números complejos conjugados y  $d$  y  $h$  son números reales.

El problema consiste en estimar todos los coeficientes de (C.12) de forma que se obtenga una aproximación de  $f(s)$  en el sentido de los mínimos cuadrados para un rango de frecuencias determinado. Hay que destacar que la función (C.12) es no lineal respecto a las incógnitas del problema debido a que los  $a_i$  aparecen en el denominador.

*Vector fitting* resuelve el problema (C.12) secuencialmente como un problema lineal en dos pasos:

#### Paso 1: Identificación de polos

Se especifica un conjunto de polos iniciales  $\bar{a}_i$ , se multiplica  $f(s)$  por una función desconocida  $\sigma(s)$  y se introduce una aproximación de  $\sigma(s)$ . Esto da lugar al siguiente problema:

$$\begin{bmatrix} \sigma(s)f(s) \\ \sigma(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - a_i} + d + sh \\ \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{c}_i}{s - \bar{a}_i} + 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Obsérvese que la aproximación de  $\sigma(s)$  tiene los mismos polos que la aproximación de  $\sigma(s)f(s)$  y además se ha eliminado la ambigüedad en la solución de  $\sigma(s)$  forzando a que para altas frecuencias tenga valor unidad.

Multiplicando la segunda fila de (C.13) por  $f(s)$  da lugar a la siguiente relación:

$$\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \bar{a}_i} + d + sh = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{c}_i}{s - \bar{a}_i} + 1 \right) f(s) \quad (\text{C.14})$$

o bien:

$$(\sigma f)_{fit}(s) = \sigma_{fit}(s)f(s) \quad (\text{C.15})$$

La ecuación (C.14) es lineal respecto a las incógnitas  $c_i$ ,  $d$ ,  $h$  y  $\tilde{c}_i$ . Escribiendo la ecuación (C.14) para una serie de frecuencias se obtiene el problema lineal sobredeterminado

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{C.16})$$

que se resuelve aplicando mínimos cuadrados.

De esta forma, se puede obtener una aproximación de  $f(s)$ . Escribiendo cada función de (C.14) como una fracción:

$$(\sigma f)_{fit}(s) = h \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \bar{a}_i)} \quad (\sigma)_{fit}(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s - \tilde{z}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \bar{a}_i)} \quad (\text{C.17})$$

entonces:

$$f(s) = \frac{(\sigma f)_{fit}(s)}{\sigma_{fit}(s)} = h \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \tilde{z}_i)} \quad (\text{C.18})$$

La ecuación (C.18) muestra que los polos de  $f(s)$  son iguales a los ceros de  $\sigma_{fit}(s)$ . Además, los polos iniciales se han cancelado al efectuar la división anterior. De esta manera, calculando los ceros de  $\sigma_{fit}(s)$  se obtiene una buena aproximación de los polos de  $f(s)$ .

Hay ocasiones en las que alguno de los nuevos polos son inestables y es necesario invertir el signo de la parte real.

## Paso 2: Identificación de residuos

En principio se podría calcular los residuos directamente de (C.18), sin embargo se obtiene un resultado mas exacto resolviendo el problema original (C.12) con los ceros de  $\sigma(s)$  como nuevos polos para  $f(s)$ . Esto da lugar nuevamente a un problema sobredeterminado que habrá de resolverse aplicando mínimos cuadrados.

### C.2.2 Polos iniciales

La aplicación del método *vector fitting* requiere de un conjunto de polos iniciales. Una mala elección de dicho conjunto puede dar lugar a las siguientes dificultades:

- Si los polos iniciales son reales, el problema lineal (C.16) puede estar mal condicionado y en consecuencia la solución no será precisa. Esto se puede solucionar mediante el uso de polos iniciales complejos.
- Una gran diferencia entre los polos iniciales y los polos correctos puede resultar en grandes variaciones en  $\sigma(s)$  y  $\sigma(s)f(s)$ . Debido al uso de mínimos cuadrados para resolver (C.16), dará lugar a un mal ajuste donde aquellas funciones sean pequeñas. Este problema se puede

solucionar mediante una elección adecuada de la localización de los polos iniciales así como el uso de los nuevos polos como polos iniciales en un proceso iterativo.

En general, para funciones con distintos picos de resonancia los polos iniciales deberán ser complejos conjugados con parte imaginaria  $\beta$  linealmente distribuida en el rango de frecuencias de interés. Cada par se elige como sigue:

$$p_n = -\alpha + j\beta ; p_{n+1} = -\alpha - j\beta \quad (\text{C.19})$$

donde

$$\alpha = \frac{\beta}{100} \quad (\text{C.20})$$

Este procedimiento tan simple da lugar a polos iniciales con una parte real suficientemente pequeña como para evitar al mal condicionamiento.

Para funciones suaves se usarán polos reales linealmente o logarítmicamente distribuidos, ya que en este caso no da lugar a un mal condicionamiento.

En [49] se propone una modificación del método de forma que se reduce la importancia de los polos iniciales sobre la convergencia y la solución final.

### C.2.3 Observaciones

Según se puede observar, el numerador y el denominador de  $\sigma_{fit}(s)$  tienen el mismo orden. Esto implica que, si los polos iniciales son correctos entonces los nuevos polos (ceros de  $\sigma_{fit}$ ) son iguales a los polos iniciales ( $\sigma_{fit}(s) = 1$ ). En aplicaciones prácticas, esto hace que la aproximación racional converja si los nuevos polos se usan como polos iniciales en un proceso iterativo.

Este método se puede aplicar también para el ajuste de vectores, sin más que reemplazar  $f(s)$  por un vector. Esto da lugar a que todos los elementos del vector tengan los mismos polos. La ventaja de usar los mismos polos en un vector es que las convoluciones en el dominio del tiempo son el doble de rápidas [50].

## C.3 Identificación en el dominio $z$ con datos el dominio frecuencial

La función racional en el dominio  $z$  que deberá ser ajustada con datos en el dominio de la frecuencia es la siguiente:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}} \quad (\text{C.21})$$

Evaluando la respuesta en frecuencia de la función racional (C.21) en el dominio  $z$  e igualando a los datos muestreados  $(c(j\omega) + jd(j\omega))$ , entonces:

$$c(j\omega) + jd(j\omega) = H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k e^{-kj\omega\Delta t}}{1 + \sum_{k=1}^n b_k e^{-kj\omega\Delta t}} \quad (\text{C.22})$$

Multiplicando ambos lados de (C.22) por el denominador resulta:

$$-c(j\omega) - jd(j\omega) = - \sum_{k=1}^n ((b_k(c(j\omega) + jd(j\omega)) - a_k) e^{-kj\omega\Delta t}) + a_0 \quad (\text{C.23})$$

Separando en parte real e imaginaria resulta:

$$\sum_{k=1}^n (b_k (c(j\omega) \cos(k\omega\Delta t) + d(j\omega) \sin(k\omega\Delta t)) - a_k \cos(k\omega\Delta t)) - a_0 = -c(j\omega) \quad (\text{C.24})$$

$$\sum_{k=1}^n (b_k (d(j\omega) \cos(k\omega\Delta t) - c(j\omega) \sin(k\omega\Delta t)) + a_k \sin(k\omega\Delta t)) = -d(j\omega) \quad (\text{C.25})$$

Por cada muestra se obtienen dos ecuaciones similares a (C.24) y (C.25).

Combinando las ecuaciones (C.24) y (C.25) para cada muestra se llega a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad (\text{C.26})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= (a_0, a_1, \dots, a_n) \\ \mathbf{b}^T &= (b_1, \dots, b_n) \\ \mathbf{c}^T &= (-c(j\omega_1), -c(j\omega_2), \dots, -c(j\omega_N)) \\ \mathbf{d}^T &= (-d(j\omega_1), -d(j\omega_2), \dots, -d(j\omega_N)) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -\cos(\omega_1\Delta t) & \cdots & -\cos(n\omega_1\Delta t) \\ -1 & -\cos(\omega_2\Delta t) & \cdots & -\cos(n\omega_2\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -\cos(\omega_N\Delta t) & \cdots & -\cos(n\omega_N\Delta t) \end{pmatrix} \quad (\text{C.28})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\omega_1\Delta t) & \cdots & \sin(n\omega_1\Delta t) \\ 0 & \sin(\omega_2\Delta t) & \cdots & \sin(n\omega_2\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \sin(\omega_N\Delta t) & \cdots & \sin(n\omega_N\Delta t) \end{pmatrix} \quad (\text{C.29})$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= [R_{ik}]; \quad R_{ik} = c(j\omega_i) \cdot \cos(k\omega_i\Delta t) + d(j\omega_i) \cdot \sin(k\omega_i\Delta t) \\ \mathbf{D} &= [S_{ik}]; \quad S_{ik} = d(j\omega_i) \cdot \cos(k\omega_i\Delta t) - c(j\omega_i) \cdot \sin(k\omega_i\Delta t) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

$$i = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{C.31})$$

El número de incógnitas que hay que identificar es  $2n + 1$ , que corresponde a  $\{a_0, \dots, a_n\}$  y  $\{b_1, \dots, b_n\}$ . En [51] se recomienda que el número de muestras ( $N$ ) sea tal que la matriz del sistema C.26 tenga de 2 a 3 veces más filas que columnas, de forma que:

$$N \approx \frac{3}{2}(2n + 1) \quad (\text{C.32})$$

En general el sistema sobredeterminado (C.26) no tendrá rango completo y por tanto para resolverlo habrá que aplicar una técnica numérica apropiada como por ejemplo la descomposición  $QR$  con intercambio de columnas o la descomposición en valores singulares (SVD) [52]. Lo normal es que la función de transferencia resultante tenga un orden mayor que el necesario. Si el ajuste es bueno, habrá cancelación de polos y ceros, aunque esto no será lo normal. Un método de reducir el orden es forzar la cancelación de polos y ceros que estén próximos. Otras veces aparecen polos extraños en frecuencias que no están presentes en la señal. La descomposición en valores singulares tiene la ventaja de detectar el rango numérico del sistema en presencia de errores de redondeo y otras incertidumbres en la medida, lo que hace posible la estimación del orden [44], aunque también tiene un coste computacional mayor que la descomposición  $QR$ .

Como el objetivo del ajuste por el método de los mínimos cuadrados es minimizar el error en el rango de frecuencias de interés, puede provocar una pérdida de precisión en el régimen permanente. Mediante el uso de coeficientes de ponderación se puede obligar a que el ajuste para la frecuencia nominal (típicamente 50 Hz) sea mejor que para el resto de frecuencias del espectro. Usualmente se elige un factor de ponderación de 100 para la frecuencia de 50 Hz y un factor de 1 para el resto de frecuencias. Estos factores se añaden en las ecuaciones (C.24) y (C.25) resultando:

$$\begin{aligned} -c(j\omega)w(j\omega) &= \sum_{k=1}^n (w(j\omega)b_k (c(j\omega) \cos(k\omega\Delta t) + d(j\omega) \sin(k\omega\Delta t))) \\ &\quad - a_k w(j\omega) \cos(k\omega\Delta t)) - w(j\omega)a_0 \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

$$\begin{aligned} -d(j\omega)w(j\omega) &= \sum_{k=1}^n (w(j\omega)b_k (d(j\omega) \cos(k\omega\Delta t) - c(j\omega) \sin(k\omega\Delta t))) \\ &\quad + w(j\omega)a_k \sin(k\omega\Delta t)) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

## C.4 Identificación en el dominio $z$ con datos del dominio temporal

Singh y Abur [43] propusieron el uso de *two-side recursion formulation* (modelo ARMA) para el desarrollo del FDNE. La identificación se realiza directamente en el dominio  $z$  a partir de datos en el dominio temporal usando señales *multisine* (Apéndice B).

La red externa se puede representar mediante su impedancia en el dominio  $z$  según:

$$Y(z) = \frac{I(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_pz^{-p}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_pz^{-p}} \quad (\text{C.35})$$

Mediante la transformada inversa de  $Z$  se obtiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$i(t) = - \sum_{k=1}^p a_k \cdot i(t - k \cdot \Delta t) + \sum_{l=1}^p b_l \cdot v(t - l \cdot \Delta t) \quad (\text{C.36})$$

Como la respuesta en frecuencia de una red formada por elementos de parámetros distribuidos tiene múltiples resonancias serie/paralelo, el orden  $p$  está relacionado con el rango de frecuencias para el que el modelo ha de ser válido. Una vez especificado el orden  $p$ , los parámetros  $a_k$  y  $b_l$  tienen que ser estimados, constituyendo el proceso de identificación. Es necesario resolver un problema de mínimos cuadrados mal condicionado, para lo cual es necesario usar técnicas numéricas apropiadas como la descomposición  $QR$  con intercambio de columnas o la descomposición en valores singulares (SVD) [52].

Las muestras de intensidad en la ecuación (C.36) representan la respuesta de la red externa a la señal de excitación aplicada en forma de fuente de tensión en los nudos frontera de la red externa. Dicha señal de excitación es del tipo *multisine*, que permite tener un espectro de amplitudes plano, factor de cresta bajo y ratio señal/ruido elevado.

El proceso de identificación se lleva a cabo a través de un proceso iterativo. Para un orden  $p$ , se estiman los parámetros del modelo y se calcula el error rms ( $e_{rms}$ ) de dicha estimación:

$$e_{rms} = \frac{1}{N - p} \sqrt{\sum_{k=p+1}^N \left( i(k\Delta t) - \hat{i}(k\Delta t) \right)^2} \quad (\text{C.37})$$

donde  $N$  es el número total de  $\Delta t$  de la simulación realizada en EMTP,  $i(k\Delta t)$  es la corriente en el instante  $k\Delta t$ ,  $\hat{i}(k\Delta t)$  es la corriente estimada mediante (C.36) en el instante  $k\Delta t$ . Si  $e_{rms}$  es mayor que un cierto valor prefijado, se debe incrementar el orden del modelo,  $p$ , y repetir el proceso.

Este método se puede extender a equivalentes multipuerta.

Un método similar al descrito se propone en [44], donde la identificación se realiza a partir de datos en el dominio del tiempo obtenidos mediante un escalón unidad como señal de excitación. Sin embargo, en vez de utilizar un proceso recursivo propone el uso de la descomposición en valores singulares (SVD) para estimar el orden del sistema. Es una técnica que hace uso de las técnicas de matrices dispersas con la consecuente reducción del coste computacional.



# Bibliografía

- [1] CIGRE-WG13.05-III, "Transmission line representation for energization and reenergization for complex feeding networks," in *Electra*, vol. 62, January 1979, pp. 45–78.
- [2] M. I. Zamora, Ángel Javier Mazón, E. Fernández, K. J. Sagastabeitia, I. Albizu, P. Eguía, E. Torres, and V. Valverde, *Simulación de sistemas eléctricos*. Madrid: Prentice-Hall, 2005.
- [3] H. Dommel, "Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiple networks," *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. 88, no. 4, April 1969.
- [4] ———, *Electromagnetic Transients Program (EMTP theory Book)*. Portland: Bonneville Power Administration, 1995.
- [5] D. E. Johnson, J. R. Johnson, and J. L. Hilburn, *Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.
- [6] A. B. Carlson, *Circuits*. Stamford, CT: Thomson Learning, 2000.
- [7] R. I. Madrigal, *Circuitos Eléctricos*. Madrid: Ediciones Pirámide, S.A., 1977.
- [8] C. Moler and C. V. Loan, "Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix," *SIAM Review*, vol. 20, no. 4, pp. 801–836, 1978.
- [9] E. Isaacson and H. B. Keller, *Analysis of numerical methods*. New York: Wiley, 1966.
- [10] L. O. Chua and P. Y. Lin, *Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.
- [11] Y. Wallach, "On the numerical solution of state equations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 408–409, August 1969.
- [12] R. M. Nelms, G. B. Sheble, S. R. Newton, and L. L. Grigsby, "Using a personal computer to teach power system transients," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 4, no. 3, pp. 1293–1297, August 1989.

- [13] S. R. Newton, R. M. Nelms, L. L. Grigsby, and G. B. Sheble, "A modular state variable approach to the electromagnetic transients problem," in *Proc. Twenty-First Southeastern Symposium on System Theory*, March 1989, pp. 118–122.
- [14] *The Bergeron Method: A Graphic Method for Determining Line Reflections in Transient Phenomena*, Texas Instruments, 1994.
- [15] A. Gómez Expósito, *Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica*. McGrawHill, 2002.
- [16] M. S. Mamis and A. Nacaroglu, "Transient voltage and current distributions on transmission lines," in *IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib.*, vol. 149, no. 6, November 2002, pp. 705–711.
- [17] J. R. Martí, L. Martí, and H. W. Dommel, "Transmission line models for steady-state and transient analysis," in *Proc. IEEE/NTVA Athens Power Tech Conference*, Athens, September 1993.
- [18] A. Ibrahim and H. Dommel, "Transmission line model for large step size transient simulations," in *Proc. of the 1999 IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Edmonton, Alberta, Canada, May 1999, pp. 1191–1194.
- [19] R. M. Mathur and X. Wang, "Real-time digital simulator of the electromagnetics transients," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 4, no. 2, April 1989.
- [20] A. Greenwood, *Electrical transients in Power Systems*. New York: Wiley, 1991.
- [21] J.-H. Hong and J.-K. Park, "A time-domain approach to transmission network equivalents via prony analysis for electromagnetic transients analysis," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 10, no. 4, pp. 1789–1797, November 1995.
- [22] T. Noda and A. Ramírez, "z-transform-based methods for electromagnetic transient simulations," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 22, no. 3, pp. 1799–1805, July 2007.
- [23] N. Watson and J. Arrillaga, *Power Systems Electromagnetic Transient Simulation (IEE Power and Energy Series 39)*. London, U.K.: The Institution of Electrical Engineers, 2003.
- [24] J. Proakis and D. Manolakis, *Tratamiento digital de señales*. Madrid: Prentice Hall, 1998.

- [25] N. Watson and G. Irwin, "Electromagnetic transient simulation of power systems using root-matching techniques," *IEE Proc-G*, vol. 145, no. 5, pp. 481–486, September 1998.
- [26] G. Hingorani and M. Burberry, "Simulation of ac system impedance in hvdc system studies," *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-89, no. 5/6, pp. 820–828, May/June 1970.
- [27] A. Ibrahim, "Frequency dependent network equivalents for electromagnetic transients studies: a bibliographical survey," *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 25, pp. 193–199, 2003.
- [28] A. Morched and V. Brandwajn, "Transmission network equivalents for electromagnetic transients studies," *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-102, no. 9, pp. 2984–2994, September 1983.
- [29] A. Cleirici and L. Marzio, "Coordinated use of tna and digital computer for switching surge studies: Transient equivalent of a complex network," *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-89, no. 8, pp. 1717–1726, November/December 1970.
- [30] V. Q. Do and M. M. Gavrilovic, "A synthesis method for one-port and multi-port equivalent networks for analysis of power system transients," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. PWRD-1, no. 2, pp. 103–111, April 1986.
- [31] A. S. Morched, J. H. Ottevangers, and L. Martí, "Multi-port frequency dependent network equivalents for the emtp," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 8, no. 3, pp. 1402–1412, July 1993.
- [32] Y. Wang and N. Watson, "Z-domain frequency-dependent ac-system equivalent for electromagnetic transient simulation," *IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib.*, vol. 150, no. 2, pp. 141–146, March 2003.
- [33] N. Watson, A. Gole, G. Irwin, and O. Nayak, "Z-domain frequency-dependent network equivalent for electromagnetic transient studies," in *International Conference on Power Systems Transients*, Budapest, June 1999, pp. 37–42.
- [34] C. W. G. 33.02, *Guidelines for representation of network elements when calculating transients*. Cigré, 1990.
- [35] A. Mousavi, "Frequency-domain equivalents for passive networks," Ph.D. dissertation, Univ. of Toronto, Canada, 1999.
- [36] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Application of vector fitting to state equation representation of transformers for simulation of electromagnetic transients," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 13, no. 3, July 1998, pages =.

- [37] J. A. M. Velasco, *Coordinación de aislamiento en redes eléctricas de alta tensión*. Madrid: McGrawHill, 2008.
- [38] W. Boaventura, A. Semlyem, M. Iravani, and A. Lopes, "Sparse network equivalent based on time-domain fitting," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 17, no. 1, pp. 182–189, January 2002.
- [39] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1052–1061, July 1999.
- [40] J. R. Martí, "Accurate modelling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic transient simulations," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 101, no. 1, pp. 147–157, January 1982.
- [41] A. Morched, L. Martí, and J. Ottevangers, "A high frequency transformer model for the emtp," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 8, no. 3, pp. 1615–1626, July 1993.
- [42] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Simulation of transmission line transients using vector fitting and modal decomposition," in *IEEE/PES Winter Meeting, New York, 1997*.
- [43] A. Abur and H. Singh, "Time domain modelling of external systems for electromagnetic transients programs," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 671–679, May 1993.
- [44] W. Boaventura, A. Semlyem, M. Iravani, and A. Lopes, "Robust sparse network equivalent for large systems: Part i-methodology," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 19, no. 1, pp. 157–163, February 2004.
- [45] T. Henriksen, "Including high order rational functions in emtp a comparison between alternative methods with emphasis on accuracy," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 12, no. 1, pp. 372–379, January 1997.
- [46] J. Marti and J. Lin, "Suppression of numerical oscillations in the EMTP," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 4, no. 2, pp. 739–747, May 1989.
- [47] F. L. Alvarado, R. H. Lasseter, and J. J. Sanchez, "Testing of trapezoidal integration with damping for the solution of power transient problems," *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-102, no. 12, pp. 3783–3790, December 1983.
- [48] J. Schoukens, R. Pintelon, E. V. der Ouderaa, and J. Renneboog, "Survey of excitation signals for fft based signal analyzers," *IEEE Instrum. Meas. Mag.*, vol. 37, no. 3, pp. 342–352, September 1988.

- [49] B. Gustavsen, "Improving the pole relocating properties of vector fitting," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 21, no. 3, pp. 1587–1592, July 2006.
- [50] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Simulation of transmission line transients using vector fitting and modal decomposition," in *PES Winter Meeting*, 1997.
- [51] J. Smith, J. Hauer, and D. Trudnowski, "Transfer function identification in power system applications," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 8, no. 3, pp. 1282–1290, August 1993.
- [52] D. S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*. New York: Wiley, 2002.