

## Capítulo 5

# Extensiones del método de control

En el planteamiento del problema existen algunos detalles que han quedado fuera del modelo de control estudiado. En este capítulo se recogen algunos de ellos y las mejoras que aportan al problema.

### 5.1. Norma L1

Según se explicó en el capítulo 1, uno de los objetivos de la misión era el de minimizar el consumo de combustible. Sin embargo, la función objetivo propuesta no lleva a cabo esa función exactamente. La función objetivo era de la forma:

$$J = u_S^T Q_S u_S + x_S^T R_S x_S.$$

La cual minimiza el error cuadrático en la posición final (segundo término) y la norma L2 de la señal de control (primer término). Para cumplir el objetivo de la misión sería necesario efectuar la minimización de la norma L1. Para ello debería emplearse una función objetivo distinta:

$$J = Q_{L1} |u_S| + x_S^T R_S x_S.$$

Esta nueva función objetivo no es ni lineal ni cuadrática y la resolución del problema no se podrá abordar de acuerdo con lo planteado. Antes de ver como se debe tratar este problema, reescribamos la función objetivo de acuerdo a como se empleó anteriormente:

$$J = u^T H u + f^T u = u^T (Q_S + G_u^T R_S G_u) u + 2G_u^T R_S^T (F x(k) + G_\delta \bar{\delta}_S).$$

Es decir, hay dos contribuciones cuadráticas y una lineal. Únicamente se quiere replantear la minimización del consumo de combustible, no la del error en posición. Por tanto, la función objetivo deseada deberá mantener las contribuciones debidas al error de posición. Dicho de otra forma, se deberá tomar en lo sucesivo  $Q_S = 0$ , mientras que  $R_S$  tendrá la misma forma que antes, en la ecuación (2.8).

### Formulación del problema

El nuevo objetivo consiste en obtener, sujeto a las restricciones:

$$\text{mín} \sum |u_i|.$$

Para sortear el valor absoluto, se hará uso de unas variables auxiliares  $\alpha_i$  de modo que:

$$|u_i| \leq \alpha_i. \quad (5.1)$$

Esto permite reescribir el objetivo como:

$$\text{mín} \sum \alpha_i.$$

Es fácil ver que  $\text{mín} \sum |u_i|$  es equivalente a  $\text{mín} \sum \alpha_i$ . Ahora bien, la ecuación (5.1) establece unas relaciones (restricciones) entre las variables  $u_i$  y las  $\alpha_i$  que se pueden expresar sin el valor absoluto mediante:

$$u_i - \alpha_i \leq 0,$$

$$-u_i - \alpha_i \leq 0,$$

de donde se deduce que  $\alpha_i \geq 0$ . Estas inecuaciones también pueden escribirse como:

$$A_\alpha \begin{bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{bmatrix} = A_\alpha \tilde{u} \leq b_\alpha.$$

La nueva variable  $\tilde{u}$  es un vector que contiene a todas las variables  $u_i$  y  $\alpha_i$ , siendo su dimensión  $[6 \cdot N_p, 1]$ . Este vector  $\tilde{u}$  sustituirá en el problema al vector  $u_i$ , por lo que será necesario reescribir las restricciones del problema. Hasta ahora, se habían expresado las restricciones mediante  $Au_i \leq b$ , por lo que será necesario reescribir dichas restricciones de forma que:

$$\tilde{A}\tilde{u} \leq \tilde{b}.$$

Si para cada instante de tiempo se estaban imponiendo  $k$  restricciones, entonces:

$$\tilde{A} = [A \ \Theta_{k \cdot N_p \ 3N_p}],$$

$$\tilde{b} = b,$$

donde  $\Theta_{k \cdot N_p \ 3N_p}$  es una matriz de ceros de dimensión  $[k \cdot N_p, 3N_p]$ . Hasta ahora  $k = 9$ , dado que para cada intervalo se imponen 3 restricciones para el valor máximo de cada componente de  $u$ , otras 3 restricciones para el valor mínimo, y 3 restricciones que definen el cono de visibilidad. A estas restricciones habrá que añadir además aquellas relativas a las variables  $\alpha_i$  que hemos introducido. Por lo tanto, todas las restricciones serán ahora:

$$A_T \tilde{u} \leq b_T,$$

$$A_T = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ A_\alpha \end{bmatrix},$$

$$b_T = \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ b_\alpha \end{bmatrix}.$$

Para terminar, será necesario reformular también la función objetivo. Para minimizar estrictamente el consumo, la función objetivo que habría que emplear sería:

$$f^T \begin{bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{bmatrix} = [\Theta \ c]^T \begin{bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}.$$

Si se combina esta función objetivo con las contribuciones procedentes de minimizar el error en posición que se comentaron:

$$J = \tilde{u}^T H \tilde{u} + \begin{bmatrix} f \\ c \end{bmatrix}^T \tilde{u} = \tilde{u}^T \begin{bmatrix} G_u^T R_S G_u & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix} \tilde{u} + [2G_u^T R_S^T (Fx(k) + G_\delta \bar{\delta}_S) \ c^T] \tilde{u}.$$

Es necesario precisar que el valor del parámetro  $\gamma$  que daba forma a la matriz  $R_S$  no tendrá en este nuevo modelo ninguna relación con los valores empleados hasta ahora. Éste parámetro servía para establecer la importancia relativa de un objetivo frente a otro. Dado que el problema ha cambiado, es de esperar que el valor que debe tomar el parámetro para establecer la misma importancia sea en principio totalmente distinto.

## 5.2. Cono de visión

Al establecer las restricciones se impuso que la trayectoria no podía salir de un cono, llamado cono de visión. Para describir esta situación se impuso que:

$$-x_0 - c_v y \leq x \leq x_0 + c_v y,$$

$$y \geq 0.$$

Esta restricción planteada realmente no cumple la condición deseada. La restricción planteada traslada la condición del cono a su proyección en el plano  $xy$ , lo cual, no es exactamente lo deseado. No obstante, los resultados que se observaron en el capítulo anterior muestran un buen comportamiento en las simulaciones tridimensionales.

Puede parecer que no es necesaria ninguna modificación del modelo; sin embargo, las soluciones que se obtienen al implementar la corrección anterior pueden llegar a salir del cono de visión.

El principal problema que surge al tratar de formular la restricción en forma de cono es que ésta se volvería no lineal. Esta no linealidad no sería compatible con el método lineal planteado. Por ello, se puede relajar la condición del cono imponiendo que:

$$-x_0 - c_v y \leq x \leq x_0 + c_v y,$$

$$-z_0 - c_v y \leq z \leq z_0 + c_v z,$$

$$y \geq 0,$$

donde simplemente se ha añadido la misma restricción al plano  $yz$ . El recinto que delimitan estas restricciones no será realmente un cono, pero puede cumplir perfectamente la función de seguridad buscada. El recinto propuesto puede verse en la figura 5.1.

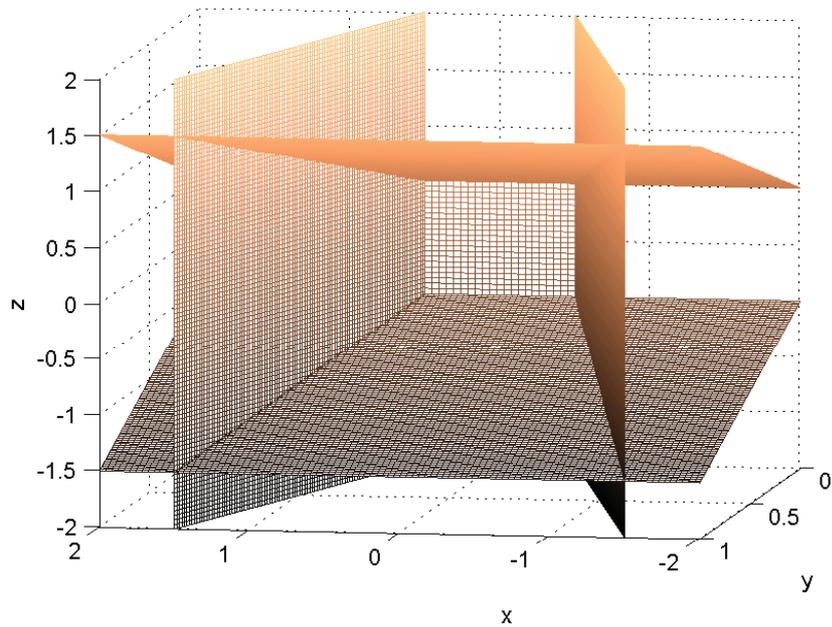


Figura 5.1: Región admisible modificada

### 5.3. Resultados

En esta sección se presentan tres simulaciones distintas. Todas ellas corresponden al modelo de horizonte fijo con condición de parada mediante la función objetivo. Los tres casos considerados son:

1. Minimización de la norma L1 sin modificación del *cono de visión* ( $\gamma = 0,0001$ ). Figuras 5.2 a 5.4.
2. Minimización de la norma L1 con modificación del *cono de visión* ( $\gamma = 0,001$ ). Figuras 5.5 a 5.7.
3. Minimización de la norma L1 con modificación del *cono de visión* ( $\gamma = 0,0001$ ). Figuras 5.8 a 5.10.

## Caso 1

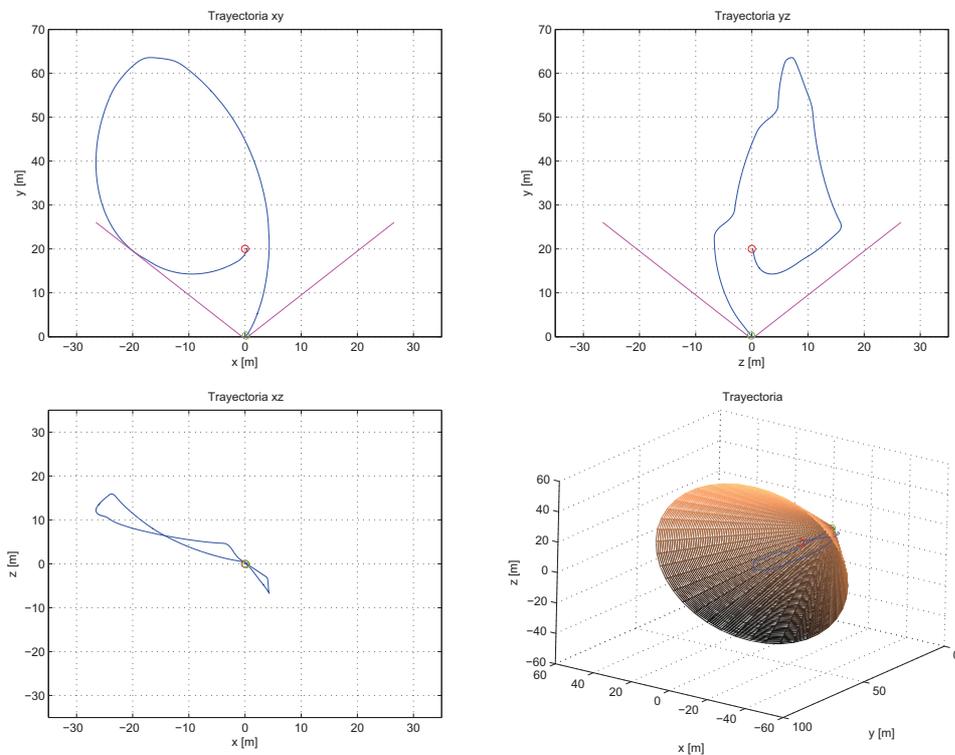


Figura 5.2: Trayectoria para el caso 1

Se observa como las trayectorias son más cortas que en el modelo anterior. En concreto en la última de las gráficas se puede ver que la trayectoria sale del cono, pese a que se cumplen las restricciones aplicadas. Es decir, la proyección de la trayectoria en el plano  $xy$  esta contenida en la proyección del cono sobre dicho plano.

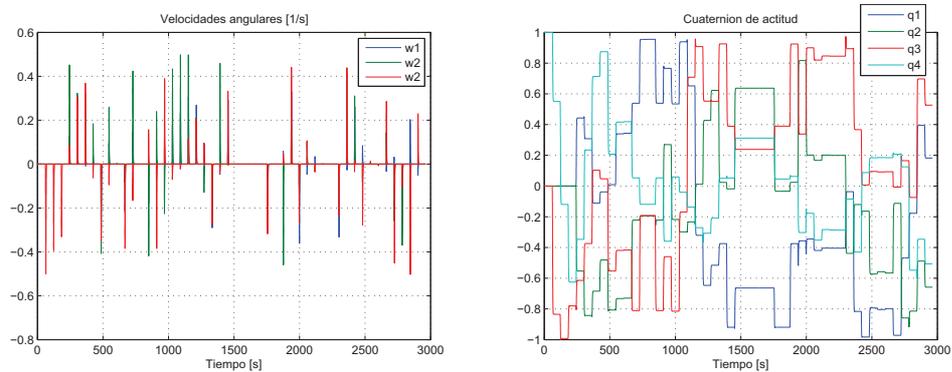


Figura 5.3: Variables orientación para el caso 1

Se puede observar mucha mayor actividad en el problema de orientación. Es decir, los cambios de orientación entre impulsos sucesivos son más acusados ahora.

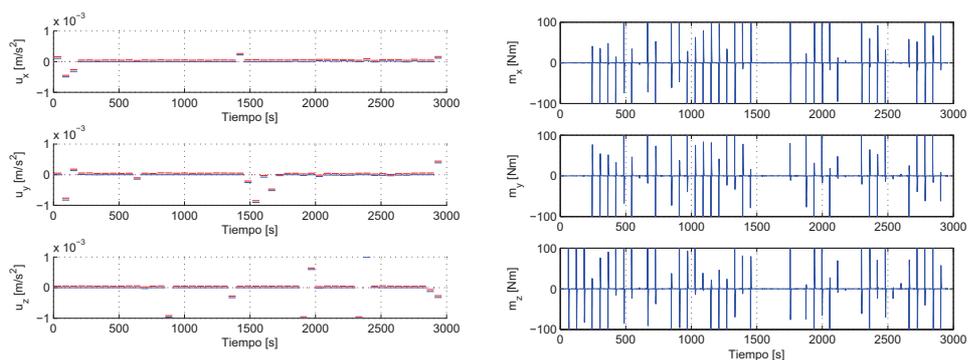


Figura 5.4: Señales de control para el caso 1

En cuanto a las señales de control, en las relativas a la trayectoria se observan menores valores. En la orientación por su parte, se aprecia que la saturación tampoco supone un problema ahora.

## Caso 2

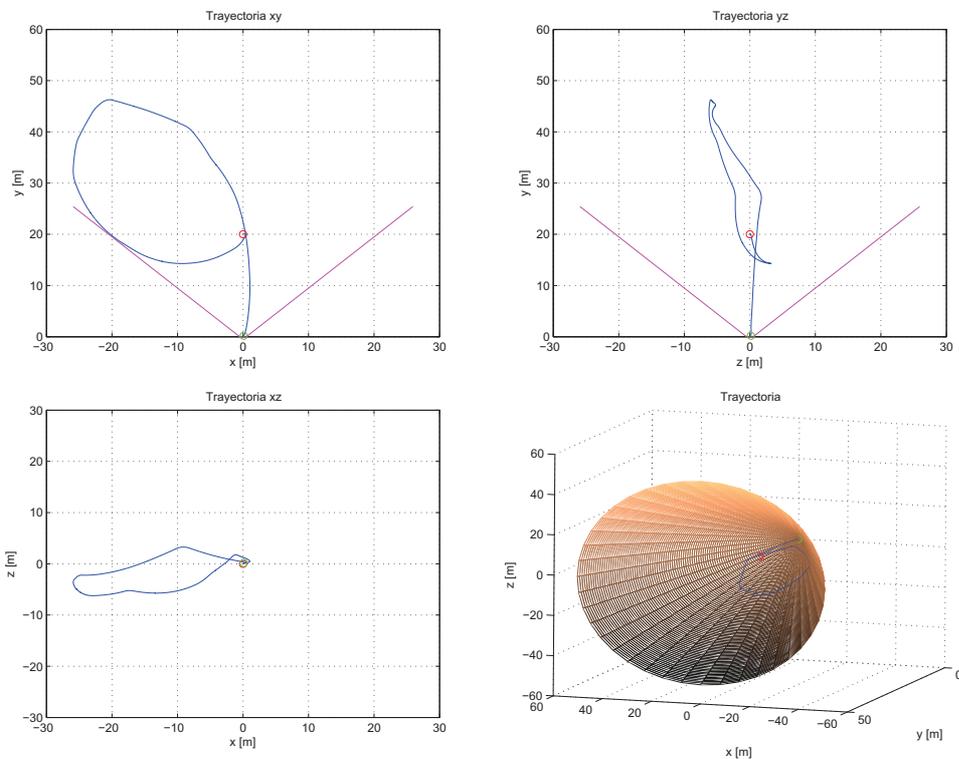


Figura 5.5: Trayectoria para el caso 2

Como se puede observar, al imponer las nuevas restricciones, pese a que no definen estrictamente un cono, la trayectoria no se sale del cono de visión.

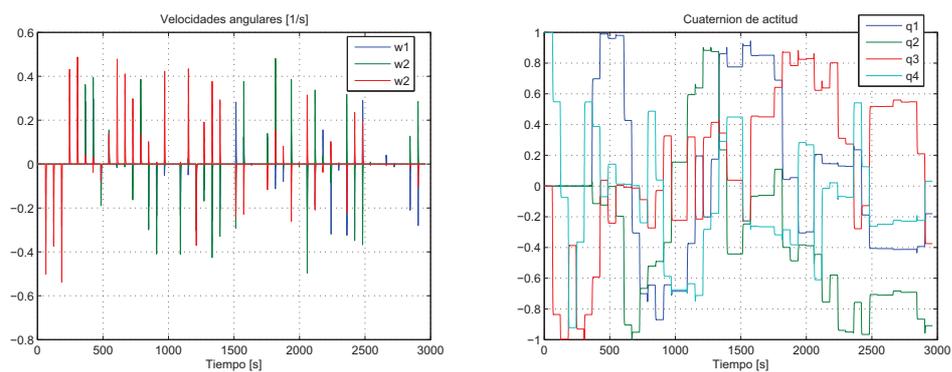


Figura 5.6: Variables orientación para el caso 2

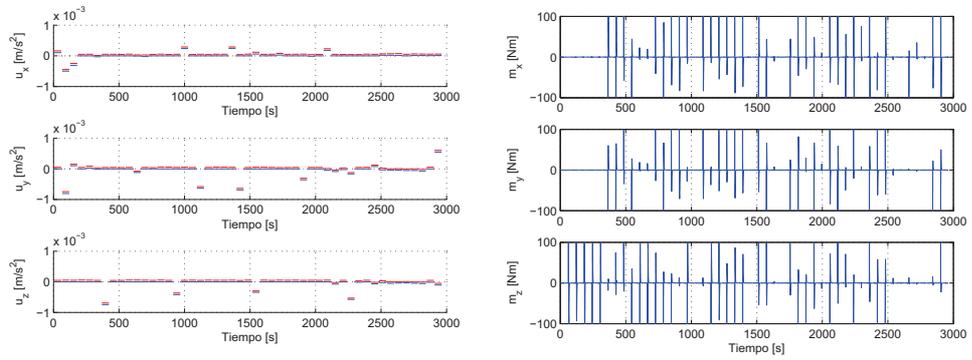


Figura 5.7: Señales de control para el caso 2

### Caso 3

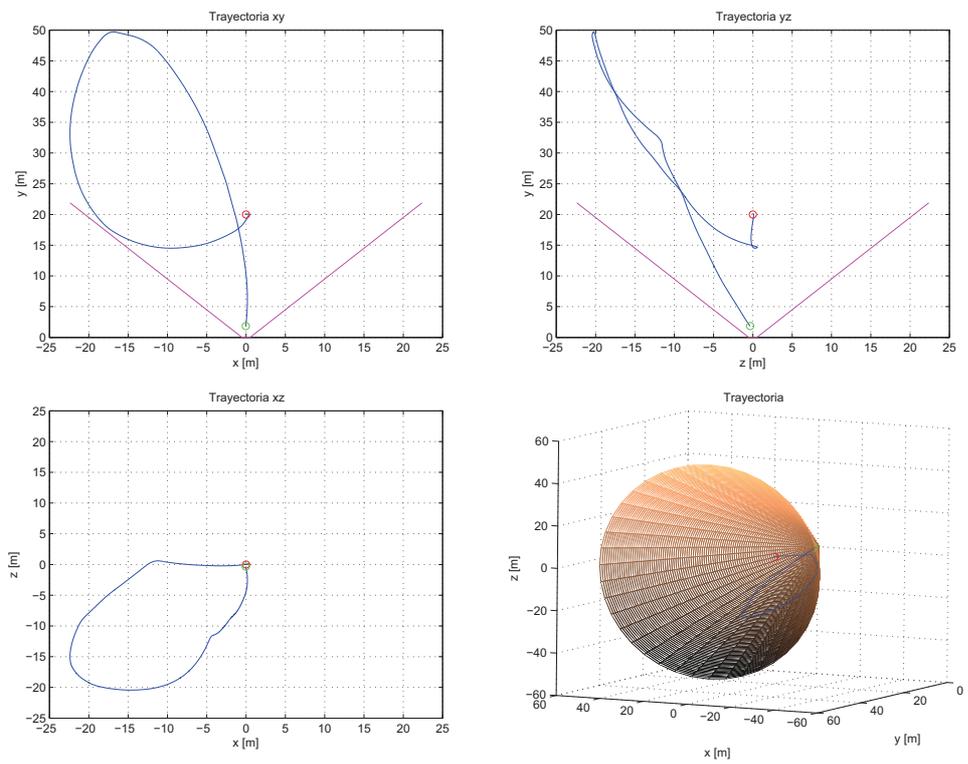


Figura 5.8: Trayectoria para el caso 3

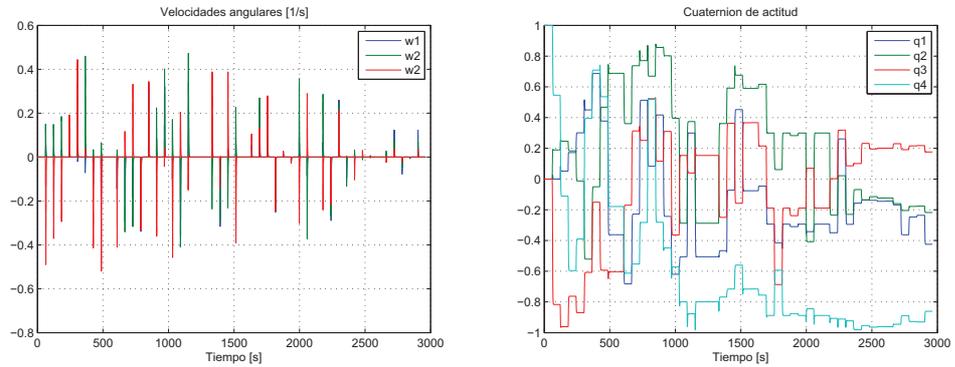


Figura 5.9: Variables orientación para el caso 3

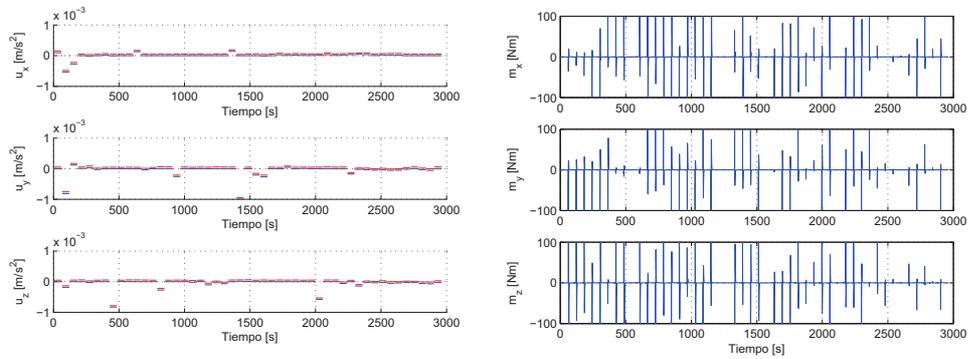


Figura 5.10: Señales de control para el caso 3

No se aprecian diferencias cualitativas entre este caso y el segundo. Para observar en que difieren será necesario atender a los resultados numéricos que se comentan a continuación.

### Comparación

En la siguiente tabla se recogen los resultados para los casos calculados.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Modelo antiguo
Consumo [m/s]	18.89	19.90	17.88	25.80
Velocidad Final [mm/s]	-7 / -5 / 3	-5 / -3 / -2	-3 / -28 / 17	-7 / -3 / 2
Tiempo Cálculo [s]	14.41	14.33	14.88	2.11

Cuadro 5.1: Resultados de las extensiones del método

En primer lugar se observa efectivamente una disminución importante en el

consumo de combustible, lo cual era la principal motivación de las correcciones efectuadas. Además, al imponer las nuevas restricciones para el cono de visión, se obtiene un combustible aún menor.

El segundo efecto más evidente es el gran aumento del tiempo de cálculo. Esto se debe principalmente a que, al considerar las variables  $\alpha_i$  se está duplicando la dimensión del problema. Por su parte, el efecto de ampliar las restricciones relativas al *cono de visión*, tiene un efecto muy pequeño en el aumento del tiempo de cálculo. A diferencia del efecto de las variables  $\alpha_i$ , esta otra corrección no aumenta la dimensión del problema, sino que únicamente añade dos restricciones a cada instante.

Por último, como cabía esperar, las velocidades relativas al final siguen siendo pequeñas con el nuevo modelo, ya que nada ha cambiado en ese aspecto.

## 5.4. Conclusiones

Es posible que la necesidad de implementar la mejora del cono de visión no sea crucial; sin embargo este cambio sólo precisa de la inclusión de dos nuevas restricciones. Esto no cambia cualitativamente la dimensión del problema, por lo que el tiempo de cálculo no se ve incrementado mucho.

La minimización de la norma L1 por contra, aumenta cualitativamente la dimensión del problema, provocando un grandísimo aumento del tiempo de cálculo. Sin embargo, este tiempo sigue siendo pequeño comparado con el tiempo de muestreo. A la vista de los resultados la mejora en el consumo es más que notable, lo cual pone de manifiesto la necesidad de efectuar esta corrección.

Aparentemente la idea de minimizar la norma L2 no cumple bien el objetivo del problema ya que es posible encontrar rutas con un consumo menor al cambiar el modelo. Este hecho no debe hacer olvidar que los resultados obtenidos anteriormente no son muy distintos a los obtenidos con la corrección. Se obtienen trayectorias similares y comportamientos similares.

El tiempo de simulación es una variable que no se ha comentado por no ser interesante a la hora de una aplicación real; sin embargo, a la hora de efectuar simulaciones puede cobrar cierto interés. Este tiempo se ve notablemente incrementado al introducir estos cambios en el modelo, lo cual hace que las simulaciones sean muy costosas en términos de tiempo.

En definitiva, emplear la norma L2 permite una aproximación al problema con un tiempo de cálculo y simulación mucho menor. En este sentido, ese primer modelo es útil para estudiar el funcionamiento del problema, mientras que la mejora de la norma L1 permite perfilar la solución para mejorarla.