

Capítulo 1

Introducción

1.1. El problema de rendezvous

El objetivo de una maniobra de rendezvous consiste en llevar un vehículo espacial a la posición de otro, produciéndose un encuentro o acoplamiento. El concepto de vehículo espacial es completamente general, podemos referirnos tanto a un pequeño satélite como a la Estación Espacial Internacional (ISS). En este proyecto, se considera que uno de los vehículos implicados es el *objetivo* y se encuentra en una órbita concreta. El otro vehículo será llamado *perseguidor* y será el que realice la maniobra de aproximación.

Desde un punto de vista general, el punto de partida de la misión debería ser un lugar en la superficie del planeta desde el cual el vehículo perseguidor inicia su misión. En este sentido resulta útil dividir la misión completa en diferentes fases en función de las características y problemas asociados a cada una de ellas.

1. **Fase de lanzamiento:** esta fase comprende al proceso completo de puesta en órbita del vehículo perseguidor. El estado final del vehículo perseguidor será una órbita¹, en general diferente a la órbita del vehículo objetivo. Durante esta fase es de especial interés emplear las condiciones de lanzamiento más apropiadas para llevar a cabo las siguientes fases de la misión.
2. **Fase de aproximación orbital:** el objetivo de esta fase consiste en que el vehículo perseguidor se encuentre en la misma órbita que el objetivo y a una distancia relativamente pequeña, del orden de decenas de kilómetros. Si el requisito de distancia no se puede cumplir directamente mediante una maniobra de transferencia orbital, una maniobra de *phasing* posterior permitirá conseguir un acercamiento suficientemente bueno.

¹Órbita de estacionamiento.

3. **Fase de acercamiento inicial:** durante esta fase habrá que llevar el vehículo perseguidor a las inmediaciones del objetivo. Por inmediaciones se entiende una distancia inferior a unos 100 metros. En esta fase disminuye el orden de magnitud de las posiciones y velocidades relativas, lo cual conlleva que el riesgo de colisión comience a ser un factor especialmente relevante.
4. **Acercamiento final:** comenzando tras la fase anterior el resultado debe ser garantizar una trayectoria segura para llevar al vehículo perseguidor a una distancia de unos pocos centímetros del objetivo. Además, dada la gran proximidad entre los vehículos, es de vital importancia que las velocidades relativas al final sean prácticamente nulas. Esta es la fase más exigente en cuanto a seguridad se refiere.
5. **Acoplamiento:** esta fase final es la responsable del acoplamiento final entre los dos vehículos, siempre que este sea necesario. Las estrategias para llevar a cabo el acoplamiento pueden ser de diversos tipos. Habitualmente el protagonismo de la misión recae en esta fase en un sistema a bordo del vehículo objetivo como podría ser un brazo mecánico².

Como se puede observar, cada una de las fases comentadas supone un problema diferente. El problema evoluciona desde un caso en el que la resistencia aerodinámica es muy importante a uno en el que la precisión debe ser del orden del centímetro. En el caso de las dos primeras fases, su resolución puede ser muy similar a la de otras misiones espaciales. En gran medida estas fases serán las que impliquen un mayor tiempo de maniobra y gastos de combustible. En las siguientes, el problema particular de rendezvous comienza a tomar forma ya que el riesgo de colisión aumenta y los requisitos de precisión en las maniobras se acentúan especialmente.

El objetivo de este proyecto se restringirá a resolver el problema asociado a la cuarta fase, cuyas particularidades se presentarán a continuación.

1.2. La misión

Ya se ha comentado que la seguridad será un factor muy importante. Dado el alto coste que tiene un vehículo espacial, parece razonable que un objetivo esencial a cumplir sea el de evitar una colisión entre los vehículos. Para cumplir dicho objetivo, la normativa obliga a cumplir una serie de requisitos [3, 4]:

²Siempre que el vehículo objetivo esté preparado para ello. En caso contrario puede ser necesario incluir un sistema en el vehículo perseguidor con el fin de homologar la unión entre los dos vehículos. Por ejemplo, el International Berthing and Docking Mechanism (IBDM), desarrollado por SENER.

1. El vehículo perseguidor debe permanecer en un área que sea detectable en todo momento por el vehículo objetivo.
2. En caso de fallo de un motor debe poder cumplirse la misión de forma segura o, en su defecto, efectuar una maniobra evasiva que garantice la integridad de ambos vehículos.
3. En caso de fallo de todos los motores en un instante, la trayectoria que siga el vehículo objetivo no puede resultar en una colisión en dicho instante o en cualquier instante posterior.

Veamos como influirá cada uno de esos requisitos al problema bajo estudio.

El primer punto limita en gran medida las trayectorias posibles, lo cual deberá integrarse en el modelo que se verá en el siguiente capítulo.

En cuanto a la segunda restricción es necesario hacer un comentario acerca de la fisonomía del vehículo perseguidor. Es habitual que un vehículo de estas características posea la capacidad de efectuar un impulso en 3 direcciones independientes para cubrir cualquier trayectoria posible. Dado que el vehículo no será puntual, esto implicará la presencia de 3 pares de impulsores. De acuerdo con la normativa, la pérdida de impulso en una dirección durante la misión se puede catalogar como fallo crítico, mientras que la pérdida todas de impulso sería un fallo catastrófico. Por otra parte, el fallo de un impulsor se puede considerar un fallo simple. Como requisito de seguridad en el diseño la norma [3] establece que:

- Ningún fallo simple debe tener consecuencias críticas
- Ninguna combinación de dos fallos simples debe tener consecuencias catastróficas.

Es decir, si hablamos de una nave con impulso en 3 direcciones diseñada bajo los criterios exigidos por la normativa, la pérdida total de impulso no es una posibilidad remotamente razonable. Por ello, se puede asumir como situación más desfavorable la de un vehículo perseguidor que solo tenga un impulsor capaz de actuar en una dirección.

En cuanto al tercer requisito que se comentaba acerca de la seguridad, para garantizar su cumplimiento habría que atender a las trayectorias libres (trayectorias sometidas únicamente a la acción gravitatoria) que pueda seguir en vehículo perseguidor y evitar que dicha trayectoria libre implique una colisión.³ Sin embargo, tal y como se comentó en el punto anterior, el caso de pérdida total de impulso debería estar cubierta por el diseño.

³Una discusión acerca de las trayectorias libres en una misión de rendezvous puede encontrarse en [2].

En resumen, en este proyecto se empleará un vehículo que disponga únicamente de un impulsor y se estudiará la misión desde este punto de vista. Se está adoptando por tanto la situación más desfavorable para cumplir con los requisitos aplicados al caso general de impulso en 3 direcciones.

En este sentido, otro aspecto a tener en cuenta en la misión es la actitud del vehículo perseguidor. Dado que el objetivo final es el de conseguir el acoplamiento con el vehículo objetivo, será necesario incorporar a bordo un sistema de control de actitud que nos permita controlar la orientación del vehículo perseguidor. Se considerará en lo sucesivo que dicho control de actitud se efectúa mediante 3 ruedas de reacción situadas en 3 ejes ortogonales.⁴

Para terminar, se añadirá un último requisito al diseño:

4 Minimizar el consumo de combustible.

La estrategia que se plantea en este proyecto es la de emplear el control de actitud para orientar el vehículo perseguidor de forma que con un único impulsor se pueda lograr llegar al objetivo. Dados los requisitos y objetivos deseados se podrá calcular la secuencia de impulsos que permita su cumplimiento. De lo expuesto hasta ahora se sigue que durante la misión no se podrá en general producir un impulso en la dirección deseada hasta que se oriente adecuadamente el vehículo. A cada impulso de la secuencia lo llamaremos maniobra. Para subsanar la necesidad de orientar el vehículo se considerará que cada maniobra esta compuesta por 2 fases:

1. Fase de orientación
2. Fase de impulso

La consecuencia directa de esta división en fases es que el tiempo disponible para el impulso será tanto menor cuanto más tiempo se emplee en la orientación. Durante la primera fase los impulsores estarán apagados y sólo actuará el control de actitud. En la segunda fase se enciende el impulsor, que actuará a empuje constante, mientras el control de actitud se encarga de mantener la orientación fija a lo largo de la maniobra.

Esta estrategia de resolución hace que aparezca un tiempo muerto en el problema que será tratado al formular el modelo en la siguiente sección.

Por último hay que reseñar que se abordará el problema suponiendo que la órbita en la que se encuentran los vehículos es circular, pues se trata de la situación más común. No obstante, también se considerará la posibilidad de órbitas excéntricas. Si la excentricidad es pequeña se podrá considerar como

⁴Estrictamente, con 3 ruedas sería suficiente para poder controlar la actitud, efectuando giros alternativos entre ellos.

una perturbación más, mientras que si es grande, sería necesaria una revisión del método.

1.3. Ecuaciones del problema

En primer lugar definiremos los sistemas de referencia con los que se trabajará.

- **Sistema de referencia inercial (SI).** Se considerará que un sistema de referencia centrado en el planeta será inercial. En el caso de la tierra el plano OXY coincide con la eclíptica y OX apunta al primer punto de Aries Υ .
- **Sistema de referencia local objetivo (LVLH).** Este sistema estará centrado en el vehículo objetivo. Vendrá definido por lo siguientes ejes:⁵
 - x : en la dirección del radio-vector entre el centro del planeta y el vehículo objetivo.
 - y : perpendicular al anterior en el plano de la órbita. Se toma el sentido en la dirección de la velocidad. En una órbita circular este vector será tangente a la trayectoria.⁶
 - z : completa el triedro.

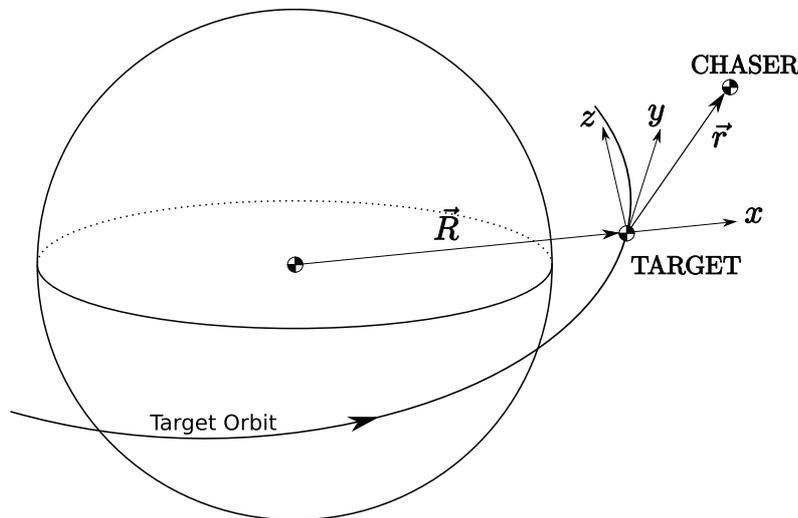


Figura 1.1: Sistema de referencia local.

⁵En la literatura es común llamar a los ejes de forma particular. Se emplea V -bar para y , R -bar para x y H -bar para z .

⁶En caso contrario formará un ángulo, el ángulo de trayectoria γ , con el vector tangente a la órbita.

- **Sistema de referencia local perseguidor (LP).** Está centrado en el vehículo perseguidor y fijo a la estructura (ejes cuerpo). Su orientación respecto al sistema LVLH representará la actitud del vehículo perseguidor.

1.3.1. Ecuaciones para la trayectoria

El objetivo de esta sección es obtener las ecuaciones que describen el movimiento del vehículo perseguidor a lo largo de la misión bajo estudio. Se considera que la única acción sobre los vehículos es la gravitatoria. El resto de acciones a las que puedan estar sometidos se considerarán como perturbaciones. Además se considerará al planeta como una esfera cuya densidad es homogénea.

La dinámica del vehículo objetivo sometido a la fuerza gravitatoria respecto del sistema de referencia inercial vendrá descrita por:

$$\ddot{\vec{r}}_o = -\mu \frac{\vec{r}_o}{r_o^3},$$

donde μ es la constante gravitatoria GM_{Tierra} , \vec{r}_o es la posición del vehículo objetivo y $r_o = |\vec{r}_o|$.

Análogamente para el vehículo perseguidor:

$$\ddot{\vec{r}}_p = -\mu \frac{\vec{r}_p}{r_p^3},$$

donde \vec{r}_p es la posición del vehículo perseguidor y $r_p = |\vec{r}_p|$.

La posición relativa entre los dos vehículos será $\vec{r}' = \vec{r}_p - \vec{r}_o$ y por lo tanto:

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}_p - \ddot{\vec{r}}_o = -\mu \left(\frac{\vec{r}_p}{r_p^3} - \frac{\vec{r}_o}{r_o^3} \right) = -\mu \left(\frac{\vec{r}_o + \vec{r}'}{|\vec{r}_o + \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r}_o}{r_o^3} \right).$$

Desarrollando en serie la expresión anterior y despreciando los términos de orden superior se obtiene finalmente que:

$$\left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_{S.I.} = -\frac{\mu}{r_o^3} \left(\vec{r}' - \frac{3\vec{r}_o \vec{r}'}{r_o} \right). \quad (1.1)$$

Por otra parte, derivando la posición relativa respecto del sistema de referencia no inercial LVLH:

$$\left. \frac{d \vec{r}'}{dt} \right|_{S.I.} = \left. \frac{d \vec{r}'}{dt} \right|_{LVLH} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}',$$

$$\left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_{S.I.} = \left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_{LVLH} + 2\vec{\omega} \wedge \left. \frac{d \vec{r}'}{dt} \right|_{LVLH} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \ddot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}', \quad (1.2)$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad de giro de un sistema respecto del otro.
Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\vec{r}]_{LVLH} &= [x, y, z]^T, \\ \vec{r}_o]_{LVLH} &= [R_T, 0, 0]^T, \\ \vec{\omega}]_{LVLH} &= [0, 0, \dot{\theta}]^T,\end{aligned}$$

donde R_T es el radio de la Tierra, y el ángulo θ es la anomalía verdadera.

Igualando (1.1) a (1.2), se obtienen finalmente las ecuaciones dinámicas del vehículo perseguidor respecto del objetivo en los ejes LVLH:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{\mu}{r_o^3} 2x + 2\dot{\theta}\dot{y} + \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta}y, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu}{r_o^3} y - 2\dot{\theta}\dot{x} + \dot{\theta}^2 y - \ddot{\theta}x, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{r_o^3} z.\end{aligned}\tag{1.3}$$

En el caso de una órbita circular $\dot{\theta} = n = cte$ y $n = \sqrt{\mu/R_T^3}$:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 3n^2 x + 2n\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x}, \\ \ddot{z} &= -n^2 z.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Estas son las ecuaciones de Hill-Clohesy-Wiltshire.[5, 6]

La simplificación circular se empleará en el modelo mientras que las ecuaciones generales servirán para propagar la solución y obtener la posición real para el caso de órbitas elípticas. Precisamente para la propagación de la solución, será necesario encontrar una expresión para $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

Por una parte, de la segunda ley de Kepler se establece que la velocidad areolar del movimiento es constante. Esto implica que:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{p\mu}}{2} = cte \mapsto \dot{\theta} = \frac{\sqrt{p\mu}}{r^2},$$

donde $p = h^2/\mu$ es el llamado “parámetro”

Por otra parte:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \sqrt{p\mu} \frac{d(1/r^2)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Donde r depende de θ a través de la ecuación de la órbita ($r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$).

Por tanto:

$$\ddot{\theta} = \sqrt{p\mu}\dot{\theta} \frac{d(1/r^2)}{d\theta} = \frac{-2\mu e \sin \theta}{r^3}.$$

Estas expresiones permiten calcular $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ conociendo θ y r . Basta por tanto con calcular θ en función del tiempo, ya que r es función de θ . La resolución de este problema requiere hacer uso de la ecuación de Kepler [7]. El siguiente algoritmo resuelve el problema:

- Dado un instante t , se calcula la excentricidad media $M = n(t - t_p)$, donde t_p es el tiempo de paso por el perigeo.
- Se resuelve numéricamente la ecuación de Kepler $M = E - e \sin E$, para así obtener E , la anomalía excéntrica.
- Se calcula θ a partir de $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$.

1.3.2. Ecuaciones para la orientación

1.3.2.1. Ecuaciones cinemáticas

Para describir el problema será necesario encontrar las relaciones cinemáticas del problema. La forma de estas ecuaciones depende de cual sea el modo elegido para representar la actitud del vehículo. La opción elegida aquí será la de los cuaterniones. Esta elección está justificada por la simplicidad computacional que conlleva, ya que se eliminan las indeterminaciones y singularidades propias de otros sistemas de representación. La representación de la actitud mediante cuaterniones se basa en el siguiente teorema para la rotación de Euler:

Cualquier rotación o conjunto de rotaciones sucesivas puede expresarse siempre como una única rotación alrededor de una dirección o eje de rotación principal.

Un cuaternión condensa la información de dicha rotación en un vector de cuatro componentes. Si \vec{e} es el eje de rotación (unitario) y θ el ángulo girado, el cuaternión correspondiente es la cuaterna:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix},$$

donde \vec{q} es la parte vectorial del cuaternión, la cual se puede expresar como $\vec{q} = \vec{e} \sin \frac{\theta_{gira}}{2}$; y q_4 es la parte escalar del cuaternión, de modo que $q_4 = \cos \frac{\theta_{gira}}{2}$.

Un cuaternión q también puede escribirse como

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4,$$

donde i, j y k hacen el papel de unidades imaginarias.⁷

Atendiendo al significado del cuaternión puede verse que de este modo se puede representar tanto una actitud como una rotación. En este caso una actitud concreta se interpretaría como una rotación a partir de una actitud de referencia. Además, el producto de dos cuaterniones equivale a efectuar dos rotaciones sucesivas. El álgebra del producto de cuaterniones se puede sintetizar en forma matricial como sigue:

$$\vec{q}_f = \vec{q}' \otimes \vec{q} = M(\vec{q}) \cdot \vec{q}' = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \\ q'_4 \end{bmatrix}.$$

Se puede encontrar una relación entre un cuaternión y la matriz de cosenos directores equivalente de forma que las ecuaciones diferenciales cinemáticas para la representación de la actitud mediante cuaterniones de un cuerpo sometido a una velocidad angular $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ son [12]:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.3.2.2. Ecuaciones dinámicas

El teorema del momento cinético establece que la derivada con respecto al tiempo del momento cinético es igual al momento ($\vec{\Gamma}$) de las fuerzas exteriores ($\vec{M}_{F_{ext}}$):

$$\left. \frac{d\vec{\Gamma}}{dt} \right|_{SI} = \vec{M}_{F_{ext}}.$$

El momento cinético del vehículo perseguidor en su centro de gravedad es:

$$\vec{\Gamma} = \bar{I}\vec{\omega},$$

donde \bar{I} es el tensor de inercia del cuerpo.

⁷El producto de dichas unidades imaginarias no es conmutativo. Una explicación detallada puede encontrarse en [12] o en [13].

Por tanto:

$$\left. \frac{d\vec{\Gamma}}{dt} \right|_{SI} = \left. \frac{d\vec{\Gamma}}{dt} \right|_{LP} + \vec{\omega} \wedge \vec{\Gamma} = \bar{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{LP} + \left. \frac{d\bar{I}}{dt} \right|_{LP} \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{\Gamma},$$

donde el segundo sumando del último miembro se anula al tratarse de un sólido rígido. Finalmente se obtiene:

$$\bar{I}\vec{\dot{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\bar{I}\vec{\omega}) = \overrightarrow{M_{Ext}}, \quad (1.6)$$

o bien, en desarrollando los términos:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + M_1,$$

$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + M_2,$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + M_3.$$

Esas ecuaciones son válidas para el giro del vehículo perseguidor, considerado como sólido rígido, alrededor de su centro de gravedad. Sin embargo, la presencia de las ruedas de reacción hace necesaria la revisión de las ecuaciones. Ahora será preciso incluir el momento cinético de las ruedas, de modo que el momento cinético total será $\vec{\Gamma} = \bar{I}\vec{\omega} + \vec{h}$, donde \vec{h} es el momento cinético de las ruedas. Introduciendo esta expresión en (1.6) y llamando h_i al momento cinético de la rueda i :

$$I_1\dot{\omega}_1 + \dot{h}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - h_3\omega_2 + h_2\omega_3 + M_1,$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + \dot{h}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - h_1\omega_3 + h_3\omega_1 + M_2,$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + \dot{h}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - h_2\omega_1 + h_1\omega_2 + M_3.$$

Ecuaciones a las que habrá que añadir la ecuación que rige el comportamiento de cada una de las ruedas:⁸

$$\dot{h}_i = -I_a\dot{\omega}_i + u_i.$$

Las variables M_i que aparecen en las ecuaciones representan a momentos de perturbación realizados por las distintas fuerzas sin modelar que actúen en el vehículo. Podemos por tanto obviarlas en el diseño, debiendo ser el sistema de control el encargado de eliminar el efecto de las perturbaciones durante la simulación.⁹ Las variables u_i son las variables de control que permiten manipular

⁸Se suponen iguales las tres ruedas, cuyos momentos inercia serán I_a y situadas en 3 ejes ortogonales.

⁹Su tratamiento se verá posteriormente en el capítulo 4.

el momento cinético de las ruedas mediante momentos aplicados por motores eléctricos. Serán estas variables las que permitan controlar la actitud del vehículo perseguidor.

Se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned}
(I_1 - I_a) \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 - h_3 \omega_2 + h_2 \omega_3 - u_1, \\
(I_2 - I_a) \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 - h_1 \omega_3 + h_3 \omega_1 - u_2, \\
(I_3 - I_a) \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 - h_2 \omega_1 + h_1 \omega_2 - u_3, \\
\dot{h}_1 &= -I_a \dot{\omega}_1 + u_1, \\
\dot{h}_2 &= -I_a \dot{\omega}_2 + u_2, \\
\dot{h}_3 &= -I_a \dot{\omega}_3 + u_3.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Estas son las 6 ecuaciones que describen la dinámica del problema. Proporcionan las velocidades angulares del vehículo perseguidor así como los momentos cinéticos de las ruedas de reacción en función de la señal de control.

Estas 6 ecuaciones junto con las 4 ecuaciones cinemáticas (1.5) cierran el problema de la orientación.