

## Capítulo 2

# Modelo del problema del centro de masas

### 2.1. Formulación en el espacio de estados

Partiendo de las ecuaciones (1.4), se puede reformular el problema de rendezvous en forma matricial.

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

donde  $\vec{x} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$  es el vector de estados y la matriz  $A$  adopta la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduciendo las variables de control en el modelo y prescindiendo en lo sucesivo de la notación vectorial:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \delta, \tag{2.1}$$

donde  $\delta$  representa las perturbaciones del problema y la matriz  $B$  es de

dimensión 6x3:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es más conveniente tratar el problema de forma discreta, como se puede ver en [10]. De este modo, el sistema vendrá definido en forma discreta mediante:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \delta_k \quad (2.2)$$

Donde las nuevas matrices A y B dependen del tiempo de muestreo  $T_m$  empleado [11]. Llamando  $C = \cos(nT_m)$  y  $S = \sin(nT_m)$ :

$$A_{T_m} = \begin{pmatrix} 4 - 3C & 0 & 0 & \frac{S}{n} & \frac{2(1-C)}{n} & 0 \\ 6(S - nT) & 1 & 0 & -\frac{2(1-C)}{n} & \frac{4S - 3nT}{n} & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & \frac{S}{n} \\ 3nS & 0 & 0 & C & 2S & 0 \\ -6n(1 - C) & 0 & 0 & -2S & 4C - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -nS & 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$B_{T_m} = \begin{pmatrix} \frac{1-C}{n^2} & \frac{2nT-2S}{n^2} & 0 \\ \frac{2(S-nT)}{n^2} & -\frac{3T^2}{2} + 4\frac{(1-C)}{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-C}{n^2} \\ \frac{S}{n} & 2\frac{(1-C)}{n} & 0 \\ \frac{2(C-1)}{n} & -3T + 4\frac{S}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S}{n} \end{pmatrix}$$

## 2.2. Tratamiento del tiempo muerto

De acuerdo con lo descrito en la sección 1.2, la misión se divide en intervalos de tiempo de  $T$  segundos, de los cuales una fracción  $T_\theta$  de esos  $T_m$  segundos se invertirá en orientar el vehículo, mientras que en los restantes,  $T_u$ , se realizará una propulsión constante. Por tanto  $T_m = T_u + T_\theta$ . En un intervalo se cumplirá que:

$$\tilde{x}_k = A_{T_\theta} x_k,$$

$$x_{k+1} = A_{T_u} \tilde{x}_k + B_{T_u} u_k.$$

Las matrices discretas vienen dadas por  $A_{T_m} = e^{AT_m}$  y  $B_{T_m} = \int_0^{T_m} e^{A(T_m-\tau)} B d\tau$ ,

de modo que:

$$x_{k+1} = A_{T_u} A_{T_\theta} x_k + B_{T_u} u_k = A_{T_u + T_\theta} x_k + B_{T_u} u_k = A_{T_m} x_k + B_{T_u} u_k.$$

Es decir, el problema del tiempo muerto se puede subsanar empleando diferentes tiempos de muestreo para las matrices A y B.

### 2.3. Formulación de las restricciones

Recordando lo comentado en la sección 1.2, la restricción que se debe contemplar en el modelo es la relativa a la visibilidad del vehículo perseguidor por los sensores del objetivo. Para ello se impondrá que la trayectoria no pueda salir de una zona de visibilidad. Dicha zona vendrá delimitada por un semi-cono centrado en el vehículo objetivo:

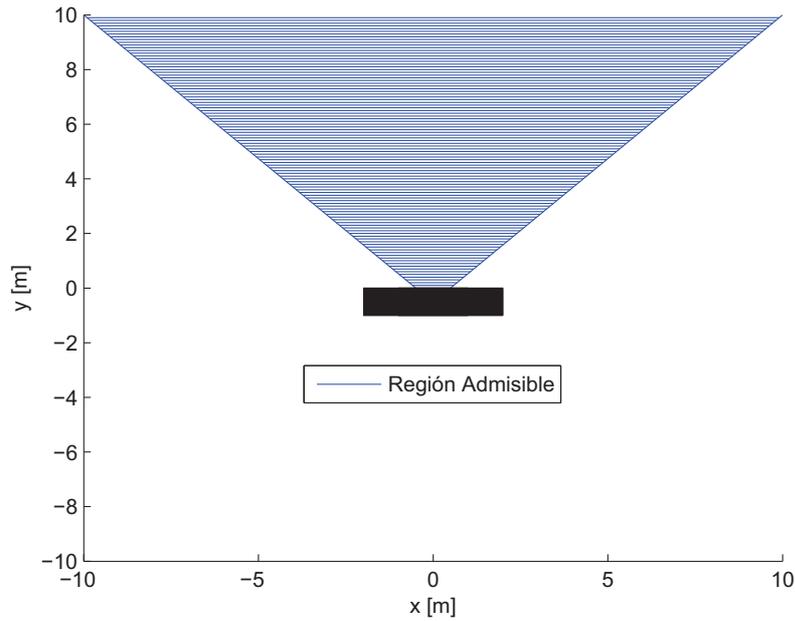


Figura 2.1: Región admisible

$$\begin{aligned} -x_0 - c_v y &\leq x \leq x_0 + c_v y \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Lo cual da lugar a 3 inecuaciones que se pueden expresar en función del

vector de estados:

$$A_v x_k \leq b_v, \quad (2.3)$$

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/c_v & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/c_v & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$b_v = \begin{bmatrix} 0 \\ x_0/c_v \\ x_0/c_v \end{bmatrix}.$$

Estas inecuaciones deben cumplirse para todo instante de tiempo.

Por otra parte, el empuje disponible por el propulsor debe estar acotado:

$$u_{min} \leq u_k \leq u_{max} \quad (2.4)$$

## 2.4. Modelo de control predictivo (MPC)

En esta sección se sintetiza el modelo de control predictivo propuesto en [10].

### 2.4.1. Predicción del estado

Aplicando la ecuación de estado desde un instante  $k$  hasta un instante  $j$ .

$$x(k+j) = A^j x(k) + \sum_{i=0}^{j-1} A^{j-i-1} B u(k+i) + \sum_{i=0}^{j-1} A^{j-i-1} \delta(k+i), \quad (2.5)$$

donde  $N_p$  es el horizonte de predicción. Las sucesivas predicciones del vector de estados se pueden apilar en un vector:

$$x_S(k) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \\ \vdots \\ x(k+N_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(k) + Bu(k) + \delta(k) \\ A^1 x(k) + \sum_{i=0}^1 A^{j-i-1} B u(k+i) + \sum_{i=0}^1 A^{j-i-1} \delta(k+i) \\ \vdots \\ A^{N_p} x(k) + \sum_{i=0}^{N_p-1} A^{N_p-i-1} B u(k+i) + \sum_{i=0}^{N_p-1} A^{N_p-i-1} \delta(k+i) \end{bmatrix}.$$

Se define también:

$$u_S(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N_p-1) \end{bmatrix}, \quad \delta_S(k) = \begin{bmatrix} \delta(k) \\ \delta(k+1) \\ \vdots \\ \delta(k+N_p-1) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el problema queda descrito por:

$$x_S(k) = Fx(k) + G_u u_S(k) + G_\delta \delta_S. \quad (2.6)$$

$$F = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N_P} \end{bmatrix}, \quad G_u = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_P-1}B & A^{N_P-2}B & \dots & B \end{bmatrix},$$

$$G_\delta = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ A & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_P-1} & A^{N_P-2} & \dots & I \end{bmatrix}.$$

Las dimensiones de las matrices implicadas son:  $A \rightarrow [6N_p \times 6]$ ;  $G_u \rightarrow [6N_p \times 3N_p]$ ;  $G_\delta \rightarrow [6N_p \times 6N_p]$ .

### 2.4.2. Función objetivo

Mediante la elección de la función objetivo se pretende principalmente minimizar el consumo de combustible. Una segunda utilidad de la función objetivo es la de garantizar la condición de parada para la misión.

Se empleará la variable  $\hat{x}$  para representar el valor esperado del vector de estados en el instante  $k+i$  supuesto conocido el instante  $k$ . La función objetivo propuesta es:

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} [u^T(k+i-1)Qu(k+i-1)] + \sum_{i=1}^{N_p} [\hat{x}^T(k+i|k)R(k+i)\hat{x}(k+i|k)], \quad (2.7)$$

donde la primera suma se encarga de minimizar la acción de control  $u$ , tomándose  $Q = I_{3 \times 3}$ .

La segunda suma tendrá la función de condición de parada. Para ello basta con elegir apropiadamente la matriz  $R$ . Se toma

$$R(k) = \gamma h(k - k_f) \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \Theta_{3 \times 3} \\ \Theta_{3 \times 3} & \Theta_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

donde  $\gamma$  es un número grande y  $h(k - k_f)$  es la función escalón con  $k_f$  el instante deseado de llegada.

De este modo la función objetivo minimiza únicamente el consumo a lo largo de la trayectoria salvo para el instante de llegada. En dicho instante la

función escalón deja de ser nula y la función minimizará el error del vector de estados deseado para la llegada. El valor de  $\gamma$  deberá ajustarse para conseguir el comportamiento deseado.

Para plantear el problema de optimización es necesario expresar la función objetivo en relación a las variables de control  $u$ . Introduciendo la ecuación (2.6) en la función objetivo:

$$J(k) = u_S^T Q_S u_S + (Fx(k) + G_u u_S(k) + G_\delta \overline{\delta_S})^T R_S (Fx(k) + G_u u_S(k) + G_\delta \overline{\delta_S}), \quad (2.9)$$

donde  $\overline{\delta_S}$  es la esperanza de  $\delta_S$ . Las matrices  $Q_S$  y  $R_S$  tendrán la siguiente forma:

$$Q_S = I_{3N_p \times 3N_p}; R_S = \begin{bmatrix} R(k+1) & & \\ & \ddots & \\ & & R(k+N_p) \end{bmatrix}$$

Operando en la función objetivo se obtiene finalmente la expresión:

$$J(k) = u^T (Q + G_u^T R_S G_u) u + 2G_u^T R_S^T (Fx(k) + G_\delta \overline{\delta_S}) = u^T H u + f^T u \quad (2.10)$$

### 2.4.3. Expresión de las restricciones

Al igual que con la función objetivo, también será necesario expresar las restricciones planteadas en función de las variables de control. La restricción vista en la sección 2.3 se puede extender al planteamiento del MPC como sigue:

$$A_V x_S \leq b_V$$

Con:

$$A_V = \begin{bmatrix} A_v & & & \\ & A_v & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_v \end{bmatrix}_{[3N_p \times 6N_p]}, \quad b_V = \begin{bmatrix} b_v \\ b_v \\ \vdots \\ b_v \end{bmatrix}_{3N_p \times 1}.$$

Introduciendo la ecuación (2.6) en llegamos a la expresión:

$$A_V G_u u_S \leq b_V - A_V Fx(k) - A_V G_\delta \overline{\delta_S}. \quad (2.11)$$

Por otra parte, es importante escribir también las restricciones (2.4) en forma matricial como sigue:

$$A_u u_S \leq b_u. \quad (2.12)$$

#### 2.4.4. Cálculo de la señal de control

El problema queda reducido a calcular:

$$\begin{aligned} \underset{u}{\text{mín}} \quad & J(k) = u^T H u + f^T u \\ \text{sujeto a} \quad & (2.11) \quad (2.12) \end{aligned}$$

El uso de un modelo de control predictivo conlleva emplear una estrategia de horizonte deslizante. Sin embargo, en este proyecto se estudiarán otras estrategias alternativas con el fin de comprender en profundidad el funcionamiento del método y establecer algunas comparaciones interesantes. Las diferentes estrategias se describen a continuación.

##### Horizonte deslizante

En este caso se supone que el horizonte de predicción avanza conforme lo hace la misión. Esta idea se puede sintetizar como sigue:

- En instante  $k$  se resolverá el problema planteado hasta el final de la misión  $(k + N_p)$ .
- El actuador aplica la primera señal de control calculada, desechando las demás
- En el nuevo instante  $k + 1$  se vuelve a resolver el problema desde el nuevo instante inicial hasta el final de la misión  $(k + N_p + 1)$
- Se aplica la primera señal de control del nuevo cálculo, desechando el resto.
- ...

Al final de la misión, la señal de control que se haya empleado será la combinación de todos los cálculos que se hayan ido haciendo durante la misma. Como puede observarse, en cada instante  $k$  se resuelve el problema para los  $N_p$  instantes siguientes, independientemente del tiempo transcurrido desde el inicio de la misión. Esta filosofía garantiza la llegada al objetivo mediante la función de coste propuesta. En concreto, según (2.8),  $k_f$  corresponderá al número de intervalos que faltan para la llegada desde el instante  $k$ . Por tanto, el valor de  $k_f$  irá disminuyendo hasta ser nulo, lo cual garantiza que el vehículo mantendrá su posición de forma indefinida en el lugar deseado.

Por otra parte, dada la forma de (2.8), no se establece ninguna condición a las velocidades explícitamente. No obstante, al imponer que la posición debe ser la deseada para dos instantes consecutivos, se está imponiendo implícitamente que la velocidad debe ser nula.

## Horizonte fijo

Con la estrategia anterior el número de instantes a los que se extiende la misión es constante. Si el horizonte de predicción se mantiene fijo, cada vez será necesario predecir menos intervalos.

La síntesis de esta filosofía sería:

- En el instante  $k$  se resolverá el problema planteado hasta el final de la misión ( $N_p$ ).
- El actuador aplica la primera señal de control calculada, desechando las demás.
- En el nuevo instante  $k + 1$  se vuelve a resolver el problema desde el nuevo instante inicial hasta el final de la misión ( $k = N'_p = N_p - 1$ ).
- Se aplica la primera señal de control del nuevo cálculo, desechando el resto.
- ...

Si se mantiene fijo el horizonte de predicción, la dimensión del problema se reducirá en cada instante, agilizando el proceso de cálculo. Este punto es de especial interés a la hora de realizar muchas simulaciones. Aunque realmente el factor limitante es el mayor tiempo de cálculo de un intervalo, a la hora de abordar el estudio de este proyecto, una reducción del tiempo de simulación es apropiada.

Sin embargo, al eliminar el horizonte deslizante, se anula la propiedad de la solución de mantenerse en el destino de forma indefinida. Esto no debe ser un problema porque, según el objetivo de la misión, una vez alcanzado el objetivo se iniciará una maniobra de acoplamiento.

La dificultad de este método proviene de la forma elegida para la matriz  $R$ . En este planteamiento esta matriz será nula en cada paso para todos los instantes excepto el último. Por tanto, no se garantiza que las velocidades tiendan a cero a la llegada.

Se podría pensar que tomando una nueva matriz

$$R'(k) = \gamma h(k - k_f) \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \Theta_{3 \times 3} \\ \Theta_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

esta dificultad quedaría salvada, pero no es así. Al imponer la condición de parada mediante la función de coste, se está añadiendo al sistema una *restricción leve*. Es decir, trata de minimizar el error en la medida de lo posible. El sistema de control puede hacer converger fácilmente la posición sin un aumento notable

del combustible<sup>1</sup>, pero frenar al vehículo a la llegada conlleva realizar un impulso con la única finalidad de producir el frenado. La propia función objetivo (2.7) desecha realizar esta maniobra de frenado. Para obligar al sistema a frenarse, sería necesario emplear pesos distintos para la posición y para la velocidad, dando un peso mucho más grande a la velocidad. De este modo se está convirtiendo el problema de llegar a una posición deseada en un problema de frenado y esto se aleja del objetivo real de la misión.

Resulta interesante por tanto buscar una solución alternativa al problema. En este documento se proponen dos alternativas cuyos resultados se compararán más adelante.

Una alternativa consiste en hacer funcionar a la matriz  $R$  original de forma análoga a como funciona en el horizonte deslizante. Para ello basta añadir un instante posterior a la llegada en el que se impone la misma matriz  $R$  que para el instante de llegada. Es decir, se le está diciendo a la función objetivo que llegue al objetivo y permanezca allí un intervalo completo.

La segunda alternativa radica en emplear la matriz  $R$  para garantizar la convergencia en posición y formular una restricción terminal en el instante final para la convergencia en velocidad.

$$\dot{x}_{N_p}, \dot{y}_{N_p} \geq 0$$

De este modo se obliga a la solución a tomar velocidades no-negativas en el instante final. Al estar realizándose una maniobra de acercamiento la velocidad relativa será negativa, por lo que la restricción propuesta implica el frenado del vehículo. Además, esto garantiza que no se producirá una colisión a la llegada al ser las velocidades relativas positivas tras la última maniobra.

La principal diferencia entre las dos alternativas es la dureza de la restricción. Mientras que en la primera se penaliza a las velocidades grandes para evitarlas, en la segunda se fuerza al sistema a que éstas no se produzcan.

Existe una última opción que consistiría en no forzar ninguna condición sobre las velocidades finales. Si las velocidades no son excesivamente grandes<sup>2</sup>, el dispositivo de acoplamiento en el vehículo objetivo podría absorber las aceleraciones de frenado.

#### 2.4.5. Formulación robusta del problema

Hasta el momento se han supuesto conocidas las perturbaciones. Es evidente que ésta no será la situación real, por lo que se debe modificar el modelo para

<sup>1</sup>Cuyo peso en la optimización viene determinado por la matriz  $Q$ .

<sup>2</sup>Del orden de centímetros por segundo.

garantizar que, aun desconociendo las perturbaciones, se van a seguir satisfaciendo las restricciones.

Para ello será suficiente con conocer una cota para las restricciones, de modo que:

$$\delta_{min} \leq \delta \leq \delta_{max}$$

Suponiendo conocidas las cotas para cada componente del vector de perturbaciones, se puede reformular la expresión anterior en forma matricial:

$$A_\delta \delta_S \leq c_\delta$$

Se pretende en acotar el efecto de las perturbaciones en el modelo. Volviendo a la expresión (2.11), se observa que el término a acotar es  $-A_V G_\delta \delta_S$ . Si se conociera dicha cota se podría reescribir la restricción como:

$$A_V G_u u_S \leq b_V - A_V Fx(k) + b_\delta$$

En definitiva, el objetivo que se plantea es el de resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$(b_\delta)_i = \text{mín } P_i \delta_S \tag{2.13}$$

$$\text{suje } a : A_\delta \delta_S \leq c_\delta$$

Donde  $P = A_V G_\delta \delta_S$ , y  $P_i$  es por lo tanto la fila  $i$ -ésima de  $P$ .

Se trata pues de un problema de optimización en el que tanto las restricciones como la función objetivo son lineales. Además las restricciones no relacionan las variables del problema. Esto quiere decir que cada variable puede tomar cualquier valor entre su mínimo y su máximo independientemente del resto de variables. Por lo tanto la solución del problema es trivial. Para cada  $i$ :

- Si  $P_{ij}$  es positivo,  $\delta_{S_j} = \delta_{min}$
- Si  $P_{ij}$  es negativo,  $\delta_{S_j} = \delta_{max}$
- $(b_\delta)_i = \sum_j P_{ij} \delta_{S_j}$

Una forma más sintetizada de obtener los valores  $\delta_{S_j}$  sería:

$$\delta_{S_j} = \frac{\text{sign}(P_{ij}) + 1}{2} \delta_{min} - \frac{\text{sign}(P_{ij}) - 1}{2} \delta_{max}.$$

El problema queda resuelto a falta de conocer los valores de  $\delta_{min}$  y  $\delta_{max}$ . Es decir:

$$\text{mín}_u \quad J(k) = u^T H u + f^T u$$

sujeto a  $A_V G_u u_S \leq b_V - A_V Fx(k) + b_\delta$

$$A_u u_S \leq b_u$$

### 2.4.6. Estimación de perturbaciones

Para poder conocer los valores de  $\delta_{min}$  y  $\delta_{max}$ , supondremos que  $\delta$  se distribuye según una normal de orden 6 cuyas medias y matriz de covarianzas no son conocidas inicialmente. Es decir  $\delta \sim N_6(\bar{\delta}, \Sigma)$ . El objetivo es el de ir estimando los parámetros de la distribución a lo largo de la misión, con el fin de que el método se vaya adaptando a las posibles perturbaciones existentes. Para ello se calculan las perturbaciones pasadas en cada instante mediante:

$$\delta(i) = x(i+1) - Ax(i) - Bu(i),$$

para  $i = 1, \dots, k-1$ .

Los parámetros de la distribución se podrán estimar mediante:

$$\hat{\delta}(k) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda(k-i)} \delta(i)}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda(k-i)}},$$

$$\hat{\Sigma}(k) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda(k-i)} \left( \delta(i) - \hat{\delta}(i) \right) \left( \delta(i) - \hat{\delta}(i) \right)^T}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda(k-i)}}.$$

Donde se ha introducido un factor de olvido  $\lambda$ , de forma que las medidas lejanas en el tiempo pierdan relevancia en los cálculos recientes.

Con el fin de ahorrar memoria en las operaciones, se pueden redefinir las expresiones anteriores de forma recursiva como sigue:

$$\hat{\delta}(k) = \frac{e^{-\lambda}}{\gamma_k} \left( \gamma_{k-1} \hat{\delta}(k-1) + \delta(k-1) \right),$$

$$\hat{\Sigma}(k) = \frac{e^{-\lambda}}{\gamma_k} \left( \gamma_{k-1} \hat{\Sigma}(k-1) + \left( \delta(k-1) - \hat{\delta}(k) \right) \left( \delta(k-1) - \hat{\delta}(k) \right)^T \right),$$

$$\gamma_{k+1} = e^{-\lambda} (\gamma_k + 1).$$

Como se observa, basta con almacenar un valor para cada parámetro que se actualizará en cada nuevo cálculo.

Queda por último expresar los valores de  $\delta_{min}$  y  $\delta_{max}$ . Para cada instante  $k$ ,

cada componente  $j$  de  $\delta$  se supondrá en el intervalo de confianza  $[\delta_{min}, \delta_{max}]$ ,

$$\delta_{j_{min}}(k) = \hat{\delta}_j(k) - \alpha \sqrt{\hat{\Sigma}_{jj}(k)},$$

$$\delta_{j_{max}}(k) = \hat{\delta}_j(k) + \alpha \sqrt{\hat{\Sigma}_{jj}(k)}.$$

El parámetro  $\alpha$  permite ajustar el nivel de seguridad del intervalo de confianza. Si se dispone de un buen número de muestras, un valor de 3 o 4 es razonable.