

Capítulo 3

El problema plano

3.1. Trayectoria: definición del problema

A la vista de las ecuaciones (1.4) se observa que la tercera ecuación está desacoplada del resto. Esto permite resolver las dos primeras ecuaciones independientemente y abordar el problema bidimensional. Es de esperar que las soluciones se parezcan a las del problema completo si $z_0 = z_0' = 0$ y si no hay perturbaciones en el eje z . En esta situación el número de variables se reduce. El vector de estados y las matrices A y B serán:

$$\vec{x} = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}],$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este capítulo se mostrarán los resultados del modelo aplicado a un caso concreto. Se estudiará la solución para distintas condiciones iniciales y distintos valores del parámetro γ , que era el encargado de forzar al modelo a terminar en el estado deseado. También se probará el modelo añadiendo excentricidad a la órbita y para distintos valores de la misma. En el caso de que la órbita sea excentrica la solución dependerá del punto de la elipse en el que se inicie, dado por θ , la anomalía verdadera.

Por último, se considerará que los impulsores no funcionan de forma ideal. El impulso que proporcionen (u_{real}) no será igual al calculado, sino que vendrá dado por

$$u_{real} = u_{calculada} + u_{perturbación}, \quad (3.1)$$

donde $u_{calculada}$ es la señal que proporciona el controlador y $u_{perturbación}$ es la diferencia entre la señal real aplicada y la calculada. La variable u se considera de 2 componentes, a cada una de las componentes de la señal final. De acuerdo con el modelo propuesto para la misión, al tener sólo un impulsor, es necesario conocer la amplitud y orientación. En el caso bidimensional basta con proporcionar un ángulo para la conocer la orientación:

$$U = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{u_2}{u_1}, & u_1 > 0 \\ 180^\circ + \arctan \frac{u_2}{u_1}, & u_1 < 0 \end{cases}$$

Cada una de las componentes de la perturbación se distribuye según una normal, de modo que $u_{perturbación} = \delta \sim N_2(\bar{\delta}, \Sigma_\delta)$. Dicha perturbación es, además, bastante más significativa que el resto de acciones no modeladas que puedan actuar sobre el vehículo.

Por último hay que recordar que el impulso se lleva a cabo en la fase 2 de cada intervalo. Se considerará que dicha fase tiene una duración del 90 % del tiempo del intervalo.

El resto de datos empleados en la resolución se detallan a continuación.

Datos del problema

El vehículo perseguidor se considerará en una órbita circular de 800 km de altitud alrededor de la Tierra.

$$\mu = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$R_{orbita} = R_{Tierra} + 800 = 7174 \text{ km}$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{R_{orbita}^3}} = 1,039 \cdot 10^{-3} \text{ 1/s}$$

$$T_{orbita} = \frac{2\pi}{n} = 6047 \text{ s} \sim 100 \text{ min}$$

El tiempo de muestreo se tomará como la centésima parte del periodo. A su vez, se considerará que la misión estará dividida en 50 intervalos; por lo que la

duración total sera de medio periodo.

$$T_m = \frac{T_{orbita}}{100} = 60,47 \text{ s}$$

$$N_p = 50$$

$$T_\theta = 10 \% T_m$$

$$T_u = 90 \% T_m$$

En cuanto a las restricciones (sección 2.3), también será necesario establecer algunos valores concretos:

- Límites a la señal de control: $u_{max} = -u_{min} = 10^{-3} \text{ m/s}^2$
- Cono de visión:
 - $x_0 = 0,5 \text{ m}$
 - $c_v = 1$

Los parámetros del estimador de perturbaciones serán:

- Factor de olvido: $\lambda = 0,23$
- Tamaño del intervalo: $\alpha = 3$
- Parámetros de la perturbación: $\bar{\delta} = 5 \cdot 10^{-5}$, $\Sigma_\delta = 2,5 \cdot 10^{-11}$.

3.2. Orientación

Las ecuaciones para la orientación correspondientes al caso plano se simplifican considerablemente. En este caso un único ángulo define la actitud del vehículo, por lo que únicamente será necesario contar con un actuador. La ecuación que rige el problema ahora será:

$$I\ddot{\phi} = M_z \longrightarrow \ddot{\phi} = \frac{M_z}{I} = m_z. \quad (3.2)$$

Escribiéndolo en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = A_P \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + B_P m_z, \quad A_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El objetivo del control de actitud es orientar al vehículo en la fase 1 para que durante la fase 2 el impulso se realice en la dirección apropiada. Para ello será necesario encontrar una ley de control que consiga la actitud deseada en el tiempo disponible. Dado que el impulso se realiza en el 90 % del tiempo, el tiempo disponible para la orientación será el 10 %. Una vez orientado el vehículo, la actitud debe mantenerse constante durante el tiempo de impulso. Para ello se empleará la siguiente ley de control:

$$u = -K \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}.$$

Y el sistema resultante es por tanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = (A - BK) \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}.$$

La matriz K puede elegirse para conseguir la respuesta deseada. Existen diversas formas de obtener K [11]. Aquí se emplea un método LQR, el cual consiste en encontrar la señal u que minimiza una función de coste definida por:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

Donde las matrices Q y R son los costes para el vector de estados y la señal de control respectivamente. Ajustando sus valores se puede conseguir que la respuesta tenga las características deseadas. Interesa minimizar u , pero para que durante la fase 2 el impulso tenga la actitud correcta será necesaria una convergencia suficientemente rápida. Tomando $Q = I_{2 \times 2}$ y $R = 5$ la respuesta del sistema para el caso más desfavorable es aceptable, como puede verse en la figura (3.1).

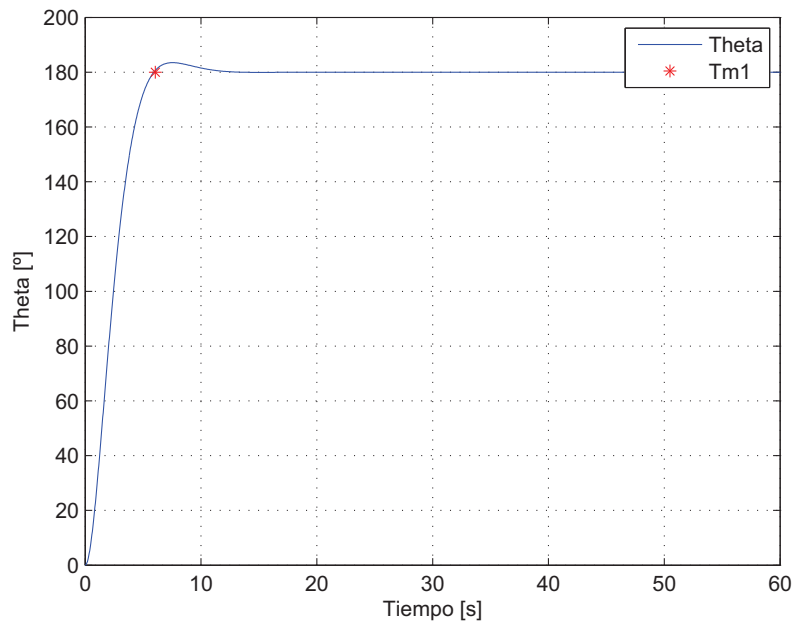


Figura 3.1: Respuesta para un giro de 180°

La sobreoscilación máxima es de $3,5^\circ$, cuyo valor es pequeño si se compara con la perturbación que se introdujo en (3.1). Dichas perturbaciones pueden producir un error en la orientación de 5° .

Con esta selección de Q y R , la matriz K será:

$$K = [0,4472 \quad 1,0461].$$

Por último, se ha introducido en el programa un algoritmo de decisión para que el controlador tome el camino más corto para conseguir la actitud deseada. Dicho algoritmo simplemente calcula el ángulo necesario que habría que girar en cada sentido y toma aquel que sea menor.

3.3. Resultados

En esta sección se van a comparar las soluciones obtenidas para los distintos métodos descritos en la sección 2.4.4. Posteriormente se estudiará la influencia de los parámetros más característicos.

Los cuatro métodos a comparar son:

- Horizonte fijo sin penalización de velocidad

- Horizonte fijo mediante función de coste
- Horizonte fijo mediante restricción
- Horizonte deslizante

A continuación se muestran las trayectorias que describe el vehículo perseguidor en cada uno de los modelos.

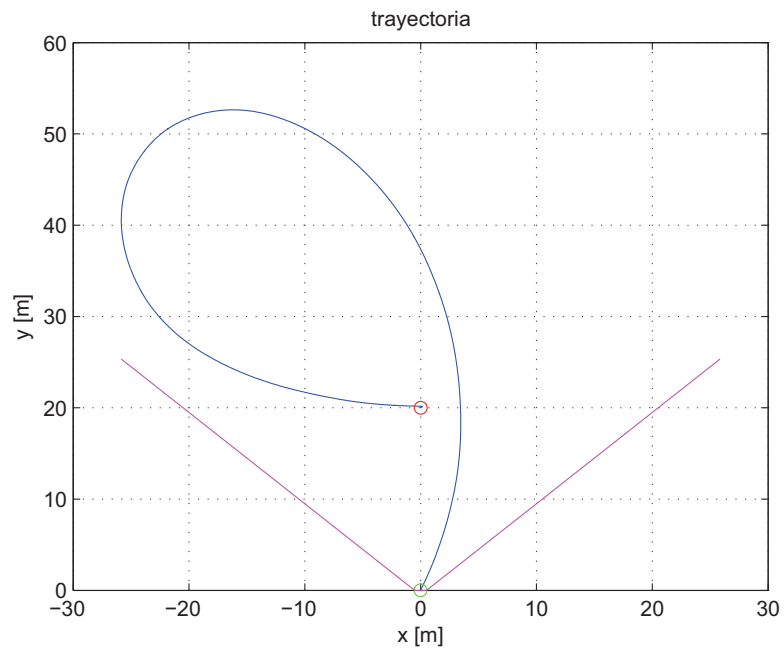


Figura 3.2: Trayectoria con horizonte fijo sin penalización en velocidad

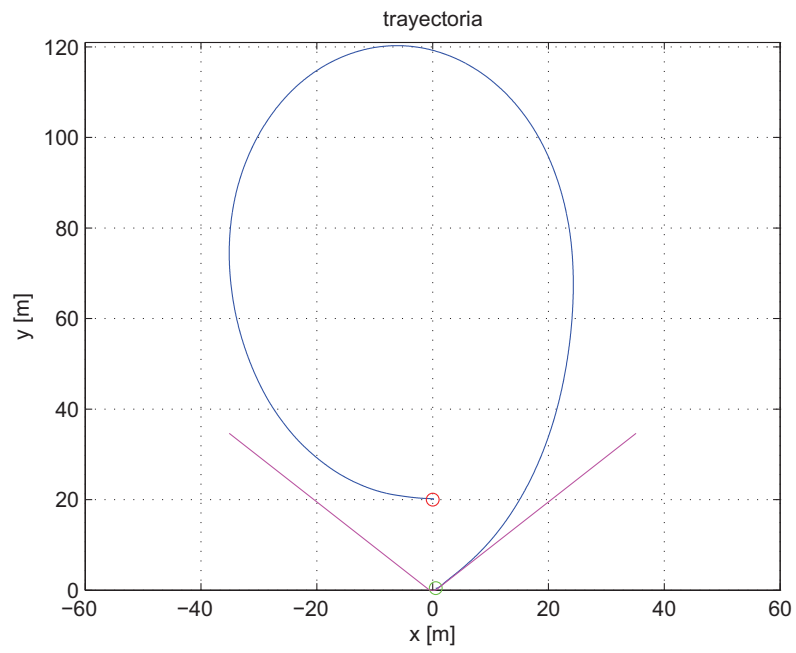


Figura 3.3: Trayectoria con horizonte fijo empleando la función de coste

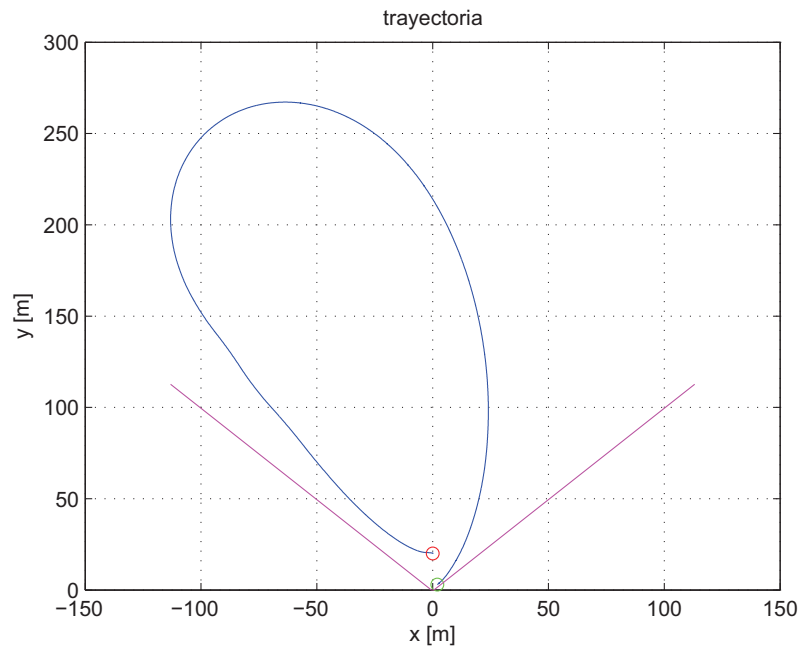


Figura 3.4: Trayectoria con horizonte fijo empleando restricciones

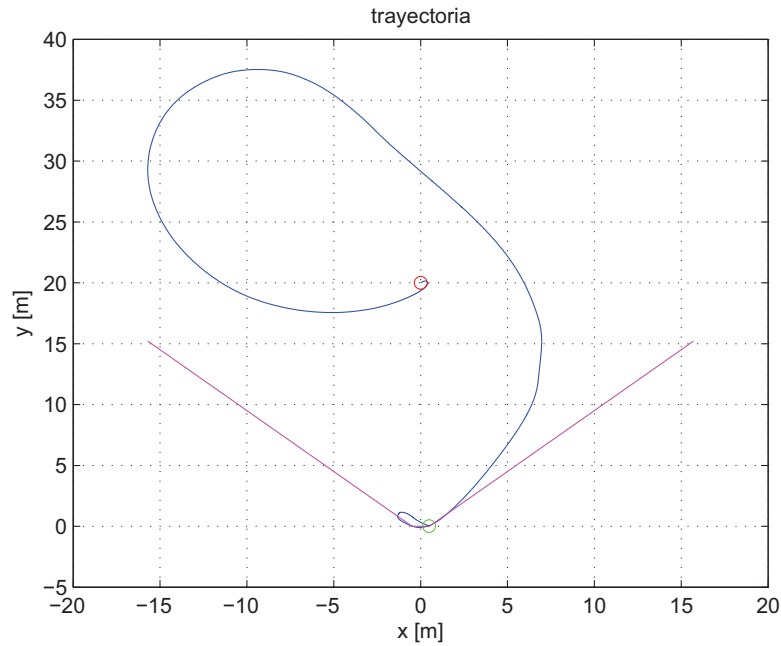


Figura 3.5: Trayectoria con horizonte deslizante

En estos casos el vehículo se encuentra inicialmente a 20 metros del objetivo en la dirección de y . Las líneas magenta delimitan el cono de visión. Como se observa, la trayectoria permanece en todo momento en la zona admitida. La posición de llegada difiere del origen aproximadamente en 2 cm. No se ha llegado exactamente a la posición deseada debido a la presencia de perturbaciones. El interés por garantizar que se cumplan las restricciones forzosamente ha de introducir un margen de seguridad en la llegada. No obstante, una distancia de 2 cm es suficientemente pequeña como para poder calificar la misión como éxito.

En las gráficas mostradas no se puede apreciar la información realmente importante: consumo y tiempo de cálculo. Los valores obtenidos se recogen en la siguiente tabla:

	Sin Penalización	Hor. Fijo (F. coste)	Hor. Fijo (Restricción)	Horizonte Deslizante
Consumo [m/s]	12.1534	22.3704	74.0899	22.4214
Velocidad Final [mm/s]	-22.79 / -57.86	-9.1 / 6.2	2.93 / 2.71	-1.85 / -25.76
Tiempo Cálculo [s]	1.48	1.93	1.39	1.76

Cuadro 3.1: Resultados de los distintos modelos

Todas las simulaciones emplean los mismos valores para las perturbaciones. Atendiendo al consumo se observa que la maniobra sin penalización es la

más económica, como cabía esperar. De los otros métodos claramente el que imponía la condición de parada mediante una restricción es el más costoso. Esto pone de manifiesto el hecho de que imponer las condiciones mediante el correcto modelado de la función de coste tiene un efecto beneficioso a la hora de evaluar el consumo. En cuando la diferencia entre la filosofía de horizonte deslizante de la de horizonte fijo mediante la función de coste, las diferencias no son muy poco significativas.

Sobre las velocidades finales llama la atención el pequeño valor obtenido en todos los casos. Los resultados mostrados ilustran bien la tendencia de cada modelo. En especial, al imponer las restricciones (tercera columna) se obtienen las menores velocidades relativas. Además en este caso, siempre serán positivos los resultados, lo cual garantiza que no existirá el impacto. En cuanto al modelo sin frenado se puede decir que los resultados obtenidos son aceptables pese a ser claramente mayores que en el resto de los casos.

En cuanto al tiempo de cálculo, el dato mostrado corresponde a aquel intervalo en el que se emplea más tiempo en calcular la señal de control. En todos los casos se puede ver que el tiempo de cálculo es mucho menor que el tiempo de muestreo de la misión. Es preciso comentar que el tiempo de cálculo es un factor íntimamente ligado al ordenador empleado, pudiendo diferir notablemente entre dos ordenadores distintos.

Los modelos 2 y 4 son aparentemente muy similares, presentando un menor tiempo de cálculo el de horizonte deslizante. Esta diferencia proviene del cálculo de las matrices F , G y G_u , ya que en el caso del horizonte deslizante basta con calcularlas una vez mientras que en el otro modelo se recalculan en cada paso. En este sentido, el modelo de control deslizante presenta una ventaja computacional. No obstante, se podría mejorar el código si, en lugar de recalculan las matrices, el programa simplemente utilizase las filas apropiadas para cada intervalo (desechando las últimas filas).

A la luz de los resultados parece razonable emplear el modelo sin frenado como referencia para los cálculos sucesivos. Su principal inconveniente no lo es tanto debido a la pequeña magnitud de las velocidades relativas. Si fuese necesario garantizar unas velocidades finales más pequeñas, se podría emplear tanto el modelo de horizonte fijo mediante función de coste como el modelo de horizonte deslizante, dependiendo de las necesidades puntuales.

El estudio del problema continuará por tanto empleando el modelo sin frenado. Antes de pasar al análisis paramétrico, veamos como evolucionan el resto de variables del problema a lo largo de la misión.

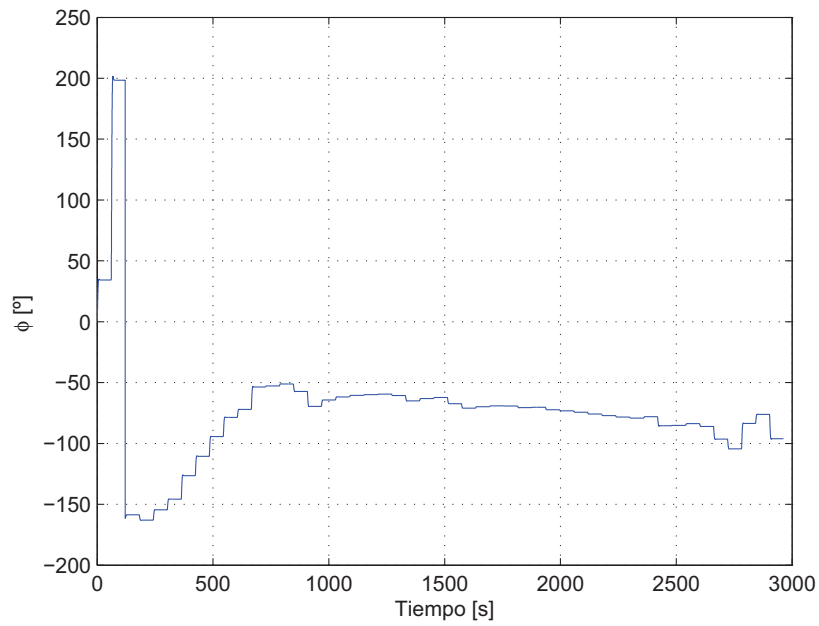


Figura 3.6: Ángulo de actitud

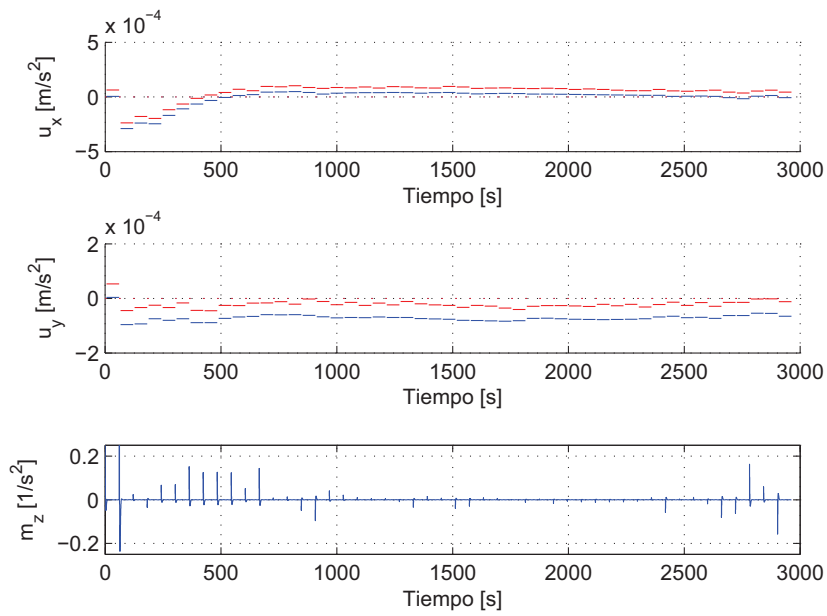


Figura 3.7: Señales de control

En la primera de estas gráficas se observa la evolución del ángulo θ que in-

dica la actitud del vehículo perseguidor necesaria para lograr el impulso en la dirección deseada. En la gráfica se pueden observar tramos en los que el ángulo no varía y otros tramos en los que varía bruscamente. Obviamente cada uno de los casos se corresponderá con la fase de propulsión u orientación respectivamente. No debe llevar a confusión el gran salto descendente que se observa en la parte inicial de la misión. Observando los ángulos implicados, se trata de un giro desde un ángulo inicial de 199° a un ángulo final de unos -159° , es decir, corresponde realmente a un giro de 2° . De hecho si se observa la magnitud de la acción de control para ese instante (unos 120 segundos) es casi inapreciable.

El pico en la señal de control aparece en torno a los 60 segundos, es decir, corresponde a la maniobra de orientación para el primer impulso. Esta maniobra es brusca simplemente por el hecho de haber tomado un ángulo inicial nulo, en absoluto próximo a aquel que será necesario en el primer impulso.

En cuanto a las señales u_x y u_y , corresponden a las componentes del impulso en las direcciones señaladas. El trazo azul muestra la señal calculada con el método. El trazo rojo con línea de puntos muestra la señal de control que se aplica realmente debido a las perturbaciones. Los valores nulos que se observan repetidamente en u_x y u_y corresponden a las fases de orientación, en las cuales no actúa el propulsor.

Las velocidades angulares no se muestran dado que su evolución es análoga a la del momento aplicado. En cada intervalo de orientación empiezan y terminan con un valor nulo.

3.3.1. Solución con $\delta = 0$

Ya se ha probado que los modelos funcionan para unas perturbaciones de magnitud importante. Puede resultar interesante observar las trayectorias que sigue cada modelo en ausencia de perturbación.

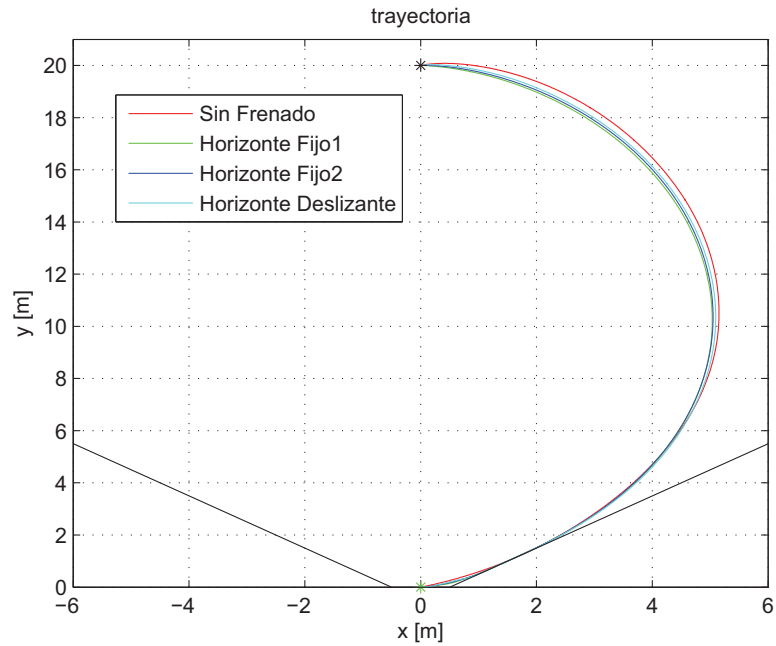


Figura 3.8: Resultados sin perturbaciones

Es evidente que en ausencia de perturbación la solución proporcionada por cada uno de los modelos corresponde a la trayectoria óptima y prácticamente coincide en todos los casos, pese a tener distintas funciones de coste.

	Sin Penalización	Hor. Fijo (F. coste)	Hor. Fijo (Restricción)	Horizonte Deslizante
Consumo [m/s]	0.34	0.80	0.62	0.79
Velocidad Final [mm/s]	-7 / -3	1 / 0	0 / 0	-5 / 0
Tiempo Cálculo [s]	3.12	3.73	3.45	13.58

Cuadro 3.2: Resultados de los distintos modelos

Curiosamente los métodos que ofrecen mejores resultados para este caso son los que peor funcionan en las condiciones más adversas. Esto se debe a que en los modelos 2 y 4, al introducir las condiciones de convergencia mediante la función de coste, se fuerza al sistema de forma leve a llegar a la solución deseada. En estas condiciones ideales por tanto, al imponer una restricción fuerte la convergencia es mejor. Sin embargo, al tratar con las perturbaciones, cuanto más fuerte es la restricción peor comportamiento tiene la solución.

De hecho en el caso ideal se podría imponer la convergencia mediante una restricción del tipo:

$$A_{eq}x = b_{eq}$$

Y emplear una función de coste que sea simplemente:

$$J = u^T Q u$$

Este método funciona bien para el caso no perturbado pero al introducir una pequeña perturbación directamente deja de funcionar, no siendo capaz de encontrar una solución que converja.

3.3.2. Variación con γ

El parámetro γ se encarga de establecer la condición de parada. Cuando mayor valor tome, más importancia cobrará en la función objetivo el llegar al objetivo frente a minimizar el consumo. Variando este parámetro en un amplio rango, de 1 a 10000 se obtienen las siguientes trayectorias:

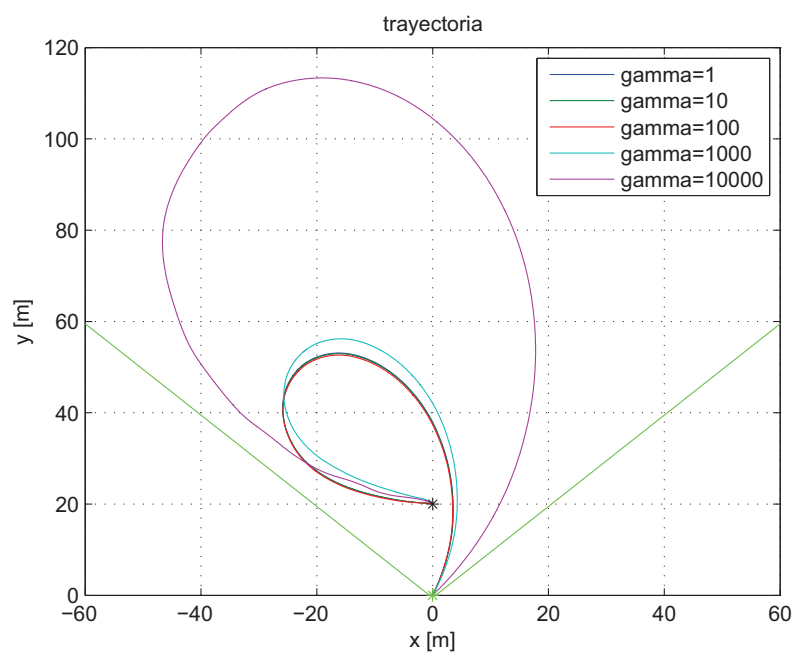


Figura 3.9: Trayectorias en función de γ

Se observan trayectorias muy similares salvo para el mayor valor de γ . Veamos como evolucionan el consumo de combustible y tiempo de cálculo:

	$\gamma = 1$	$\gamma = 10$	$\gamma = 100$	$\gamma = 1000$	$\gamma = 10000$
Consumo [m/s]	12.2331	12.2188	12.1534	12.7473	23.5352
Tiempo cálculo [s]	1.29	1.31	1.45	1.63	1.14

Cuadro 3.3: Variación con γ

Es necesario aclarar algunos aspectos relacionados con los resultados obtenidos. Cabría esperar que el consumo se incrementase con γ , pues a fin de cuentas este parámetro merma la importancia de minimizar el combustible. Sin embargo, se observan consumos muy similares en los 3 primeros casos; y además descendentes. Esta discrepancia con el resultado esperado puede encontrar su justificación en las perturbaciones. El valor de este parámetro determina la importancia de llegar al objetivo deseado. En este sentido, darle una importancia pequeña en un momento dado, puede requerir un esfuerzo mayor en el futuro para conseguir el objetivo. El mínimo se observa para el valor intermedio, que será el que se emplee en lo sucesivo.

En cuanto al tiempo de cálculo, se observa un incremento con γ . Esto se debe a que gran parte del tiempo de cálculo se invierte en el proceso de minimización, y aumentar este parámetro provoca que al algoritmo le sea más difícil encontrar el óptimo. Para γ muy grande el tiempo disminuye, lo cual se puede entender observando el aumento del consumo. Es decir, para valores muy grandes, el proceso de minimización *se olvida* del consumo, simplificando el cálculo.

Una forma de observar la evolución con γ teórica sería simulando el problema sin añadir ninguna perturbación. En dicho caso se obtiene la evolución esperada:

	$\gamma = 1$	$\gamma = 10$	$\gamma = 100$	$\gamma = 1000$	$\gamma = 10000$
Consumo [m/s]	0.4685	0.4685	0.4685	0.4706	0.7958

Cuadro 3.4: Variación teórica con γ

Donde las variaciones para los primeros casos son mínimas.

De acuerdo con los valores obtenidos, un buen valor para γ podría ser tanto 100 como 1000.

3.3.3. Variación con las condiciones iniciales

Resulta interesante ver cuáles serán las trayectorias seguidas por el vehículo en función de las condiciones iniciales. En particular será de especial interés ver cómo reacciona el método si el punto de partida está fuera de la región admisible.

Variación con y_0

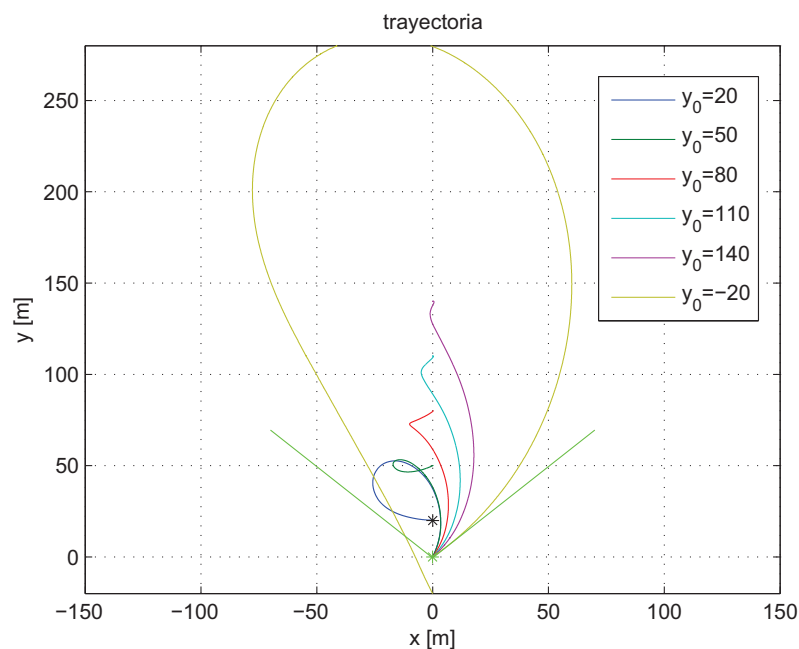


Figura 3.10: Trayectorias para distintos y_0

En la gráfica se observa como, en el caso de iniciar la misión fuera de la zona admisible, la trayectoria en primer lugar entra en la zona admisible para después continuar hacia el objetivo cumpliendo las restricciones. En cuanto a la dependencia con y , se observa como la trayectoria se va abriendo a medida que aumenta y , haciéndose más suave. Los consumos para cada uno de los casos anteriores se muestran en la siguiente tabla:

Posiciones [m]	$y = 20$	$y = 50$	$y = 80$	$y = 110$	$y = 140$	$y = -20$
Consumo [m/s]	12.15	10.86	10.60	10.55	10.50	60.78
Tiempo cálculo [s]	1.47	0.32	0.30	0.14	0.13	0.21

Cuadro 3.5: Dependencia con y_0

Como era previsible el consumo se incrementa mucho si la posición de salida no es admisible ya que será mucho más importante satisfacer las restricciones que minimizar la función objetivo, lo cual penalizará al consumo. En cuanto a la tendencia al ir aumentando y se observa una disminución. Esta disminución se va haciendo menor conforme mayor es la distancia inicial. Esto se debe en parte a que el vehículo trata de aprovechar en la medida de lo posible la trayectoria libre.

El gasto de combustible va ligado principalmente a los ajustes de trayectoria. El valor más alto que se obtiene para el primer caso se puede entender a la luz de la trayectoria seguida, que se aleja más que el resto de la trayectoria libre. En este caso el vehículo traza esa trayectoria para cumplir con el tiempo de la misión y las restricciones.

Variación con x_0

En este caso la posición inicial siempre estará fuera de la región admisible, por lo que en algunos casos también se cambiará el valor de y_0 .

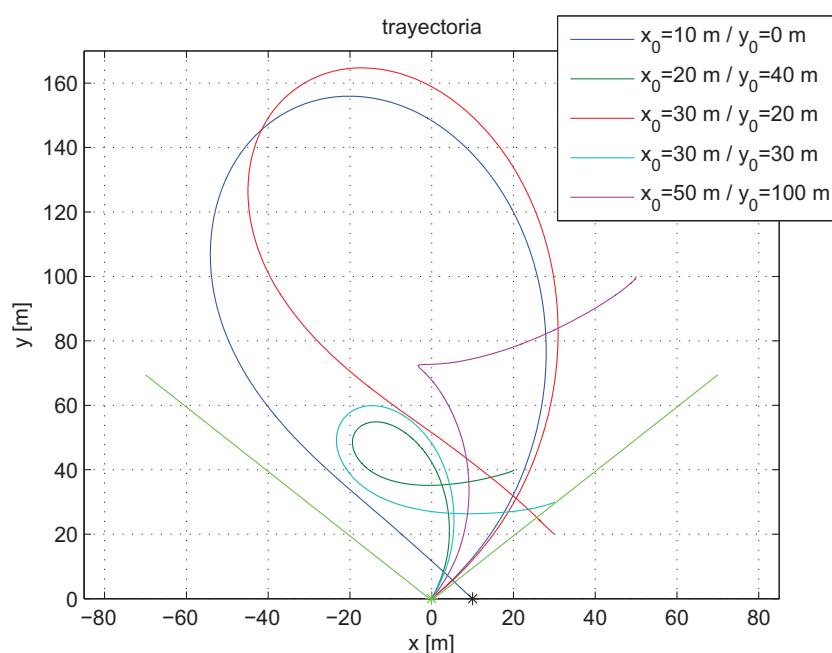


Figura 3.11: Trayectorias para distintos x_0

En este caso también funciona el método si la posición inicial no es admisible. Sin embargo, es necesario precisar que en ninguno de estos casos el sistema de control evita activamente al vehículo objetivo. Para ello sería necesario imponer condiciones adicionales que no se están considerando aquí, ya que se supone que el vehículo inicia su marcha en una posición admisible.

Para los casos considerados el consumo de combustible y tiempo de cálculo son:

Posiciones [m]	$x = 10$ $y = 0$	$x = 20$ $y = 40$	$x = 30$ $y = 20$	$x = 30$ $y = 30$	$x = 50$ $y = 100$
Consumo [m/s]	30.50	14.76	33.79	17.40	18.21
Tiempo cálculo [s]	0.37	0.32	0.13	0.49	0.25

Cuadro 3.6: Dependencia con x_0

Aunque se están tomando variaciones tanto con y como con x , dado que la influencia de y en el consumo no es relevante se podrán extraer conclusiones de los ejemplos propuestos. En primer lugar se aprecia como es lógico un mayor consumo para los casos que comienzan fuera de la región admisible. En cuanto a la tendencia con x , se observa un aumento del consumo conforme la posición inicial se aleja del objetivo.

Variación con \dot{y}_0

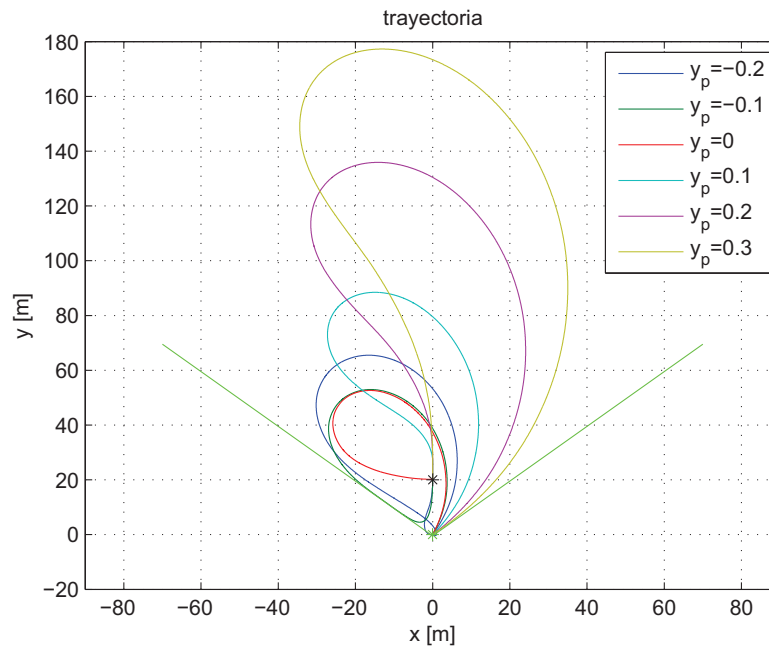


Figura 3.12: Trayectorias para distintos \dot{y}_0

Al ir aumentando el valor de \dot{y}_0 , las trayectorias se van haciendo más verticales a la salida. El sentido de todas ellas es horario. Hay que hacer notar que la mayoría de los valores empleados son bastante grandes, dentro del orden de magnitud de las variables del problema. En este caso es especialmente crítico

lo que ocurre para valores negativos, pues aumenta el riesgo de colisión. Aún con velocidades de unos pocos centímetros por segundo puede producirse una colisión dado que el tiempo de muestreo es del orden del minuto.

V. Inicial [m/s]	$\dot{y}_0 = -0,2$	$\dot{y}_0 = -0,1$	$\dot{y}_0 = 0$	$\dot{y}_0 = 0,1$	$\dot{y}_0 = 0,2$	$\dot{y}_0 = 0,3$
Consumo [m/s]	30.14	15.76	12.15	18.57	26.12	33.22
Tiempo cálculo [s]	1.67	1.36	1.44	0.18	0.13	0.13

Cuadro 3.7: Dependencia con \dot{y}_0

El consumo aumenta evidentemente con la velocidad inicial. Comparativamente resulta especialmente alto el valor para la mayor velocidad negativa, lo cual se explica por la necesidad de corregir la trayectoria para evitar una colisión.

En cuanto al tiempo de cálculo se observa como las situaciones en las que existe mayor riesgo de colisión se ven afectadas por un mayor tiempo de cálculo. Es decir, cuanto más positiva es la velocidad inicial, menor tiempo de cálculo.

Variación con \dot{x}_0

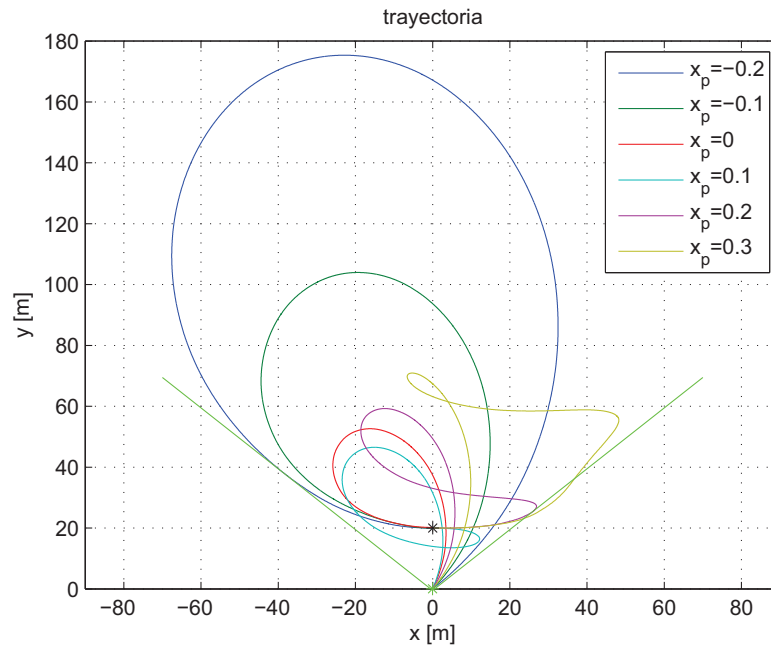


Figura 3.13: Trayectorias para distintos \dot{x}_0

Al igual que con la velocidad vertical las trayectorias difieren mucho al variar este parámetro. En concreto un valor especialmente grande como es el último caso considerado puede obligar al vehículo a salir del cono de visión.

V. Inicial [m/s]	$\dot{x}_0 = -0,2$	$\dot{x}_0 = -0,1$	$\dot{x}_0 = 0,01$	$\dot{x}_0 = 0,1$	$\dot{x}_0 = 0,2$	$\dot{x}_0 = 0,3$
Consumo [m/s]	18.48	12.62	12.15	18.38	30.52	49.49
Tiempo cálculo [s]	0.47	0.27	1.46	1.41	0.90	0.83

Cuadro 3.8: Dependencia con \dot{x}_0

Además del evidente aumento del consumo con la velocidad, se aprecia una tendencia a consumir más para las velocidades positivas. Este hecho se puede entender observando las trayectorias que se obtenían en los casos anteriores para velocidad nula. En dichos casos se observaba como la maniobra comenzaba acelerando en la dirección negativa de x .

3.3.4. Variación con la excentricidad

El modelo que se explicó en el capítulo 2 empleaba la simplificación para órbitas circulares. Pondremos a prueba ahora al modelo para órbitas con distinta excentricidad para ver su respuesta. Gracias al estimador de perturbaciones, el sistema podrá ir adaptándose al error introducido por el modelo. Cabe esperar no obstante que cuando la excentricidad crezca, el funcionamiento no sea aceptable ya que no será suficiente considerar la dinámica elíptica como una simple perturbación.

A la hora de seleccionar la órbita elíptica habrá que tomar ciertas precauciones. Parece interesante emplear una órbita elíptica cuyo periodo sea el mismo que en el caso circular considerado previamente. Sin embargo, dado que se trata de una órbita baja, para valores relativamente pequeños de excentricidad, mantener la condición del periodo implicaría que la órbita elíptica no sería posible. O bien se produciría un impacto con la superficie de la Tierra o bien tendría zonas de tan baja altitud que la resistencia aerodinámica modificaría por completo el marco del problema.

Para poder dejar al margen del problema los efectos aerodinámicos[7] se considerará que la mínima altitud que ha de tener la órbita elíptica será de 300 km . Para la excentricidad más desfavorable que se considerará ($e = 0,25$), se corresponde con un semieje mayor $a = R_T + 2500 \text{ km}$. Para comparar órbitas semejantes en cuanto a periodo, todas ellas tendrán el mismo valor del semieje mayor.

Esto modificará lógicamente el tiempo de muestreo, por lo que se incluirán simulaciones para órbitas circulares con el fin de establecer una comparación entre los diferentes casos.

A continuación se muestran los resultados obtenidos:

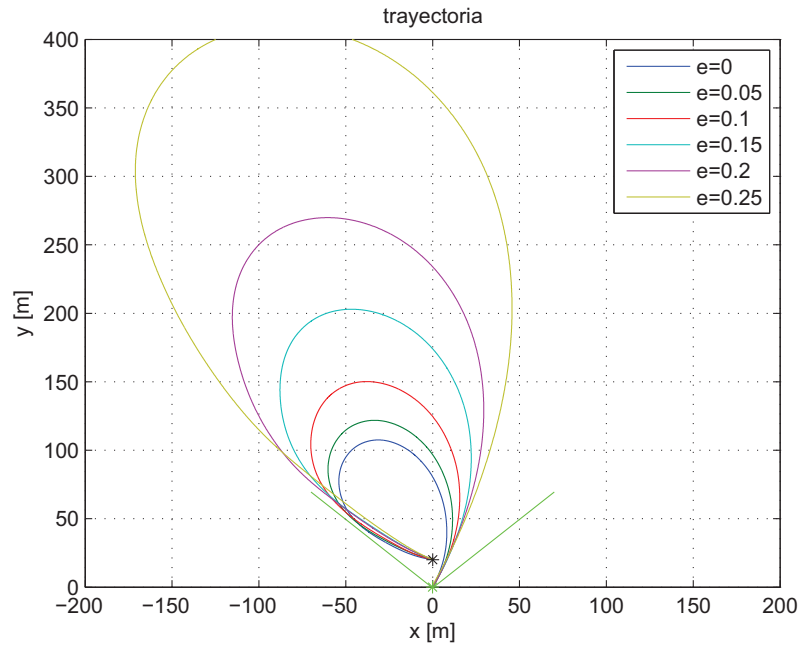


Figura 3.14: Trayectorias para distintas excentricidades

Se ha representado la solución para un amplio rango de valores para la excentricidad. No se han mostrado valores superiores a $e = 0,25$ porque el sistema ya no es capaz de llegar al objetivo. Aparentemente, el sistema de control es capaz de cumplir la misión para valores de la excentricidad relativamente altos.

	$e = 0$	$e = 0,05$	$e = 0,1$	$e = 0,15$	$e = 0,20$	$e = 0,25$
Consumo [m/s]	18.24	20.11	23.83	32.04	43.48	67.29
Velocidad Final [mm/s]	-39 / -85	-40 / -98	-69 / -142	-116 / -236	-163 / -377	-287 / -639
Tiempo Cálculo [s]	1.79	1.61	1.59	1.59	1.60	1.55

Cuadro 3.9: Resultados al variar la excentricidad

En primer lugar es preciso comentar que el consumo crece de forma moderada hasta valores de $e = 0,1$, a partir del cual el aumento es considerable. El mayor valor obtenido para la órbita circular en comparación con el visto en la sección 3.3 se debe al cambio que se ha introducido en el radio de la órbita.¹

La conclusión alarmante de esta simulación está claramente en las velocidades finales obtenidas. Los valores obtenidos son grandes, lo que pone de ma-

¹Lo que conlleva, mayor periodo, mayor tiempo de muestreo y por tanto mayor tiempo de actuación del impulsor en el que corregir las perturbaciones.

nifiesto la necesidad de imponer alguna condición a las velocidades finales del vehículo.

Veamos ahora qué ocurre con el resto de modelos propuestos.

Horizonte fijo empleando la función de coste

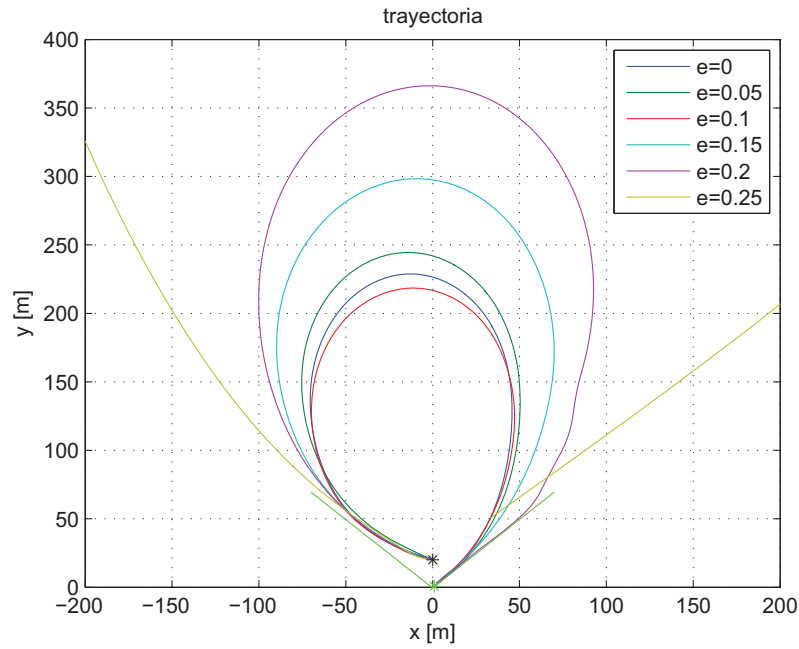


Figura 3.15: Horizonte fijo con función de coste

	$e = 0$	$e = 0,05$	$e = 0,1$	$e = 0,15$	$e = 0,20$	$e = 0,25$
Consumo [m/s]	32.34	34.19	32.82	43.43	68.04	197.69
Velocidad Final [mm/s]	-7 / -3	-9 / -3	-10 / -3	-59 / -39	-65 / -47	-525 / -478
Tiempo Cálculo [s]	1.89	1.71	1.68	1.71	1.71	1.62

Cuadro 3.10: Resultados al variar la excentricidad

Aunque a costa de un aumento de consumo, este modelo consigue buenos resultados para órbitas con una excentricidad de hasta 0.2. Comparativamente con el método anterior, el incremento del consumo relativo es menor para mayores excentricidades.

Horizonte fijo empleando restricciones

Este modelo era capaz de garantizar velocidades finales positivas para evitar cualquier posible colisión. Sin embargo, sus trayectorias eran considerablemente más largas que en el resto de modelos. Esto va a producir que el vehículo perseguidor no sea capaz de llegar al objetivo en el tiempo planificado para la misión. Sin embargo, esa dificultad se puede subsanar ampliando el horizonte de predicción. A continuación se muestran los resultados para distintos horizontes de predicción.

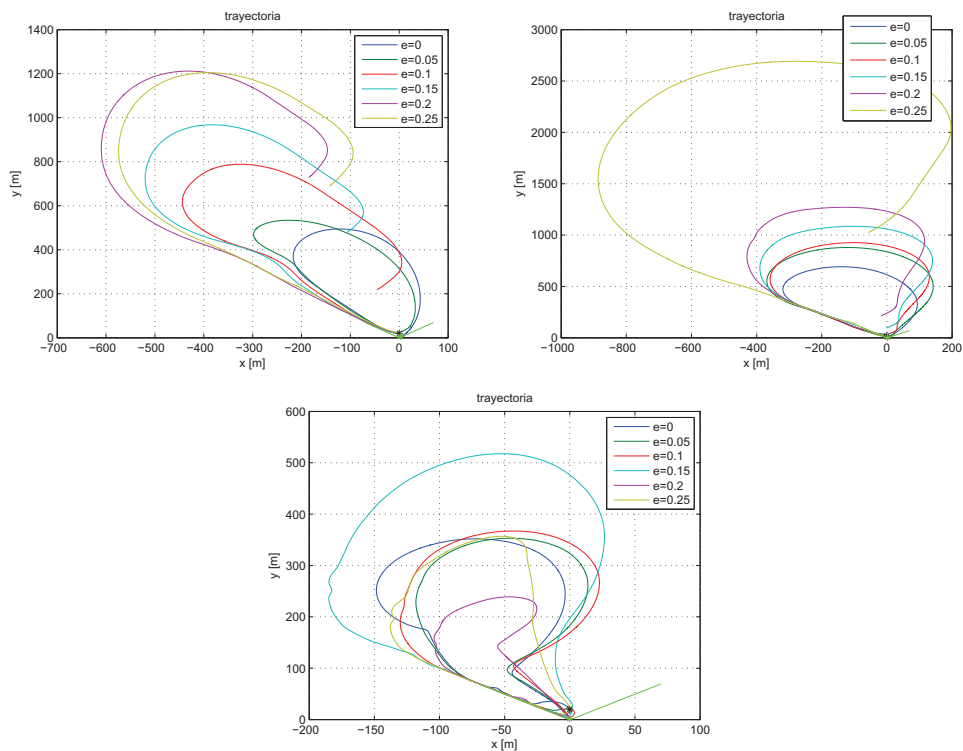


Figura 3.16: Solución para $N_p = 50$, $N_p = 75$ y $N_p = 100$ respectivamente.

Como se puede observar, al aumentar el horizonte de predicción, las soluciones de los casos de mayor excentricidad van llegando al objetivo. En la siguiente tabla se recogen los datos obtenidos. Para cada excentricidad se muestra únicamente la primera soluciones aceptable obtenida.

	$e = 0$	$e = 0,05$	$e = 0,1$	$e = 0,15$	$e = 0,20$	$e = 0,25$
Consumo [m/s]	97.66	144.79	224.70	249.92	282.46	413.75
Velocidad Final [mm/s]	4 / 4	4 / 3	5 / 4	5 / 3	2 / 19	90 / 9
Tiempo Cálculo [s]	1.32	1.06	4.40	7.56	9.35	9.57

Cuadro 3.11: Resultados al variar la excentricidad

Como cabe imaginarse, los dos casos con menor tiempo de cálculo corresponden a $N_p = 50$, mientras que los dos mayores lo hacen a $N_p = 100$. Esta gran diferencia en el tiempo se debe a que las matrices que maneja el programa son de dimensión N_p , por lo que éste parámetro tiene un peso muy importante en el tiempo de cálculo. En cuanto a los consumos, al igual que para órbitas circulares, son mucho más altos que los obtenidos con los otros métodos; lo cual hace inviable la aplicación de este método. El aspecto positivo es que garantiza que no habrá impacto al conseguir que todas las velocidades sean positivas al final de la misión (además las velocidades verticales toman el valor más bajo).

Horizonte deslizando

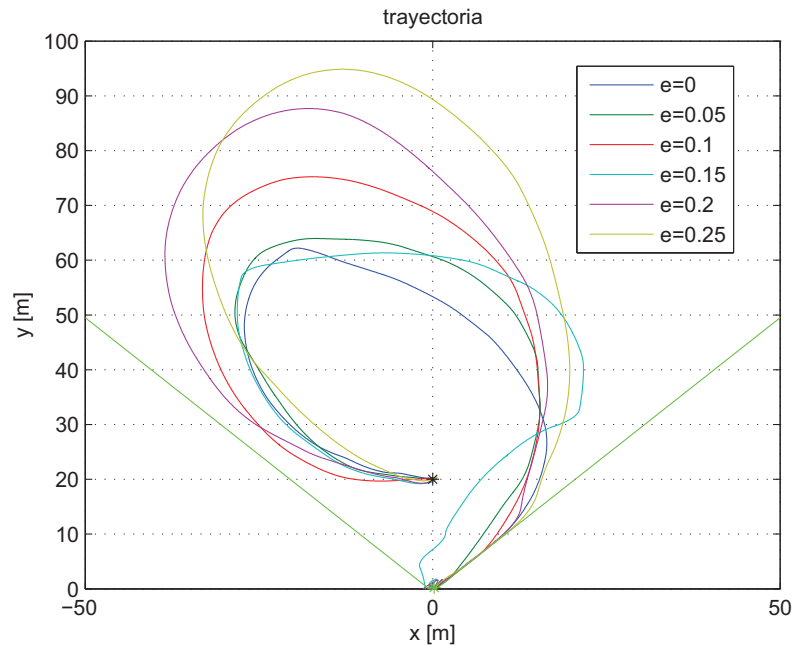


Figura 3.17: Horizonte deslizando con excentricidad

	$e = 0$	$e = 0,05$	$e = 0,1$	$e = 0,15$	$e = 0,20$	$e = 0,25$
Consumo [m/s]	30.86	26.04	30.04	45.99	37.64	33.79
Velocidad Final [mm/s]	-8 / -8	-17 / -15	-1 / -16	9 / -23	-11 / -21	22 / 35
Tiempo Cálculo [s]	1.24	1.23	1.14	1.56	2.26	1.51

Cuadro 3.12: Resultados al variar la excentricidad

Este modelo es el que presenta mejores resultados globales. Se comporta bien incluso para excentricidades grandes, se obtienen menores tiempos de cálculo y menores velocidades finales. Las diferencias con el segundo modelo se han acentuado al aumentar el tamaño de la órbita.

En la gráfica se puede observar como alguna trayectoria corta al cono de visión. Esto se debe a que se le ha añadido la condición de que permanezca en el blanco durante un intervalo más allá del instante planificado de llegada. Por tanto, esos cortes están dados por las perturbaciones modeladas, las cuales en esa situación de parada son excesivamente grandes. Al haber llegado al destino la señal de control nominal es nula, simplemente se encarga de contrarrestar las perturbaciones. Sin embargo, las perturbaciones se han modelado para que sean del orden del 10% de la señal de control durante la maniobra, lo cual hace que al apagar los motores los valores del modelo resulten desorbitados. Un correcto modelado de las perturbaciones al apagar los motores evitaría estos cortes.

Llama la atención el poco incremento del consumo con la excentricidad al compararlo con los otros métodos.

3.3.5. Variación con el tiempo de paso por perigeo

En una órbita circular es irrelevante desde el punto de vista físico el punto de la órbita donde se inicia la maniobra. En el caso de una órbita elíptica la situación cambia. Hasta ahora se ha supuesto que la maniobra se iniciaba en el perigeo y dado que la duración de la misión es la mitad del periodo orbital² basta con resolver la ecuación de Kepler. Si se quiere considerar la posibilidad de iniciar la maniobra en otro punto de la órbita elíptica (dado por su anomalía θ) será necesario realizar el cambio de variable apropiado para resolver la ecuación de Kepler.

- Si $t + t_p \in [0, T_{orbita}/2]$, resolver el problema de forma normal.
- Si $t + t_p \in [T_{orbita}/2, T_{orbita}]$, tomar $t' = T_{orbita} - t$ y calcular $\theta(t')$. La solución para t será: $\theta(t) = 2\pi - \theta(t')$.

A la vista de los resultados mostrados y con el objetivo de establecer una comparación visual, se empleará aquí el segundo de los cuatro modelos: horizonte

$$^2 Duración = N_p T_m = 50 \frac{T_{orbita}}{100} = \frac{T_{orbita}}{2}$$

fijo con la condición de parada mediante la función de coste.

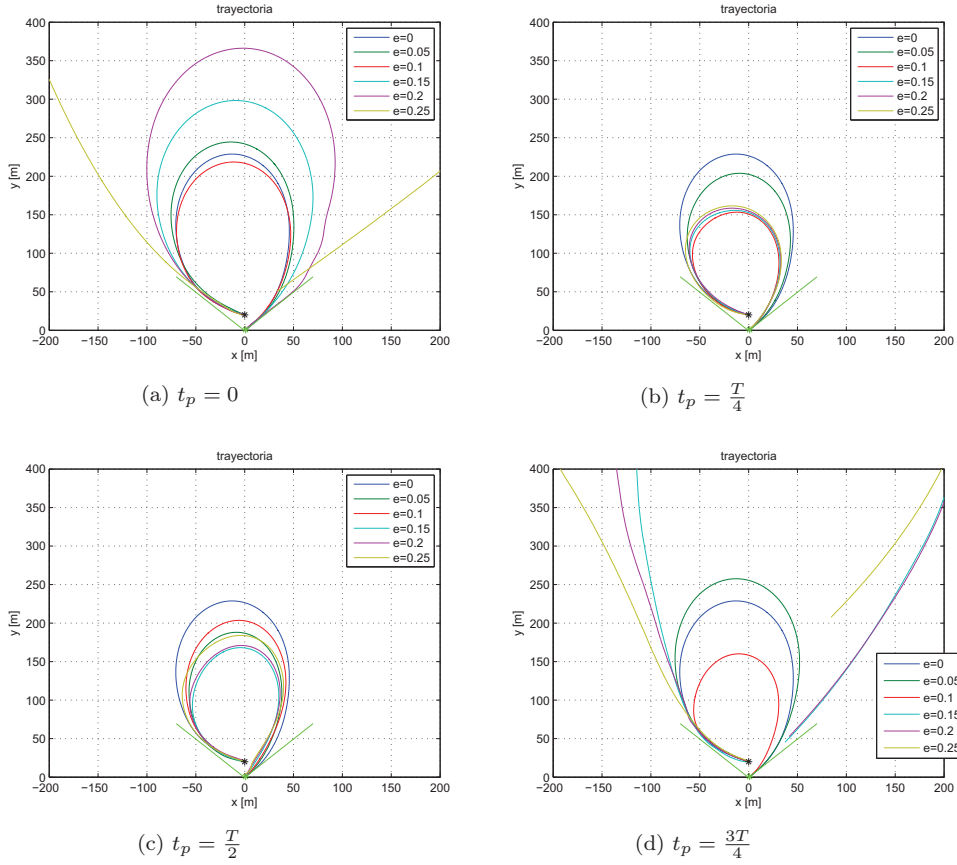


Figura 3.18: Influencia de t_p

	$e = 0$	$e = 0,05$	$e = 0,1$	$e = 0,15$	$e = 0,20$	$e = 0,25$
$t_p = 0$. Consumo [m/s]	32.34	34.19	32.82	43.43	68.04	197.69
$t_p = T/4$. Consumo [m/s]	32.34	28.24	23.02	23.28	24.10	26.86
$t_p = T/2$. Consumo [m/s]	32.34	28.17	30.57	26.60	29.43	37.93
$t_p = 3T/4$. Consumo [m/s]	32.34	37.73	33.31	157.04	163.09	179.40

Cuadro 3.13: Resultados al variar t_p

En las figuras 3.18 se muestran las trayectorias obtenidas para cada valor de t_p . Los consumos para cada una de esas trayectorias puede verse en la tabla 3.13. Se observa como el menor consumo se obtiene al considerar el punto de partida en $t_p = T/4$. La mejora obtenida en el consumo es bastante importante.

Dado que la maniobra tiene una duración de $T/2$, iniciar la maniobra en $T/4$ implica que toda ella tendrá lugar en la zona más lenta de la órbita. Es decir, se

aprovecha el paso por el apogeo de la órbita, empezando en $T/4$ y terminando en $3T/4$.

3.4. Conclusiones

Se ha visto que el problema se puede resolver atendiendo a distintos enfoques, cada uno con sus ventajas e inconvenientes.

En principio no está garantizada la seguridad si el punto de partida se encuentra fuera de la región admisible. Para ello sería necesario implementar una lógica de decisión para tomar la ruta de entrada en la región admisible más segura.

Queda probado también que se puede conseguir un funcionamiento correcto incluso para valores relativamente altos de la excentricidad de la órbita. Aunque esto ocurre a costa de un detrimento en las prestaciones, para valores razonablemente pequeños el comportamiento sí es bueno.

Sobre los resultados numéricos hay que decir que las perturbaciones que se han introducido son fuertes. La distribución empleada tiene una media no nula, además de representar el 10 % del valor nominal de propulsión calculado. Cabe esperar que un modelado preciso de las perturbaciones pueda reducir notablemente el consumo de combustible obtenido en los cálculos.

Otra consecuencia que tiene lo comentado en el párrafo anterior es que tampoco tendría sentido imponer unos requisitos de funcionamiento muy severos para el sistema de orientación. Por muy bueno que sea, habrá un error importante en la orientación del empuje.

De los cuatro modelos propuestos se ha visto como el modelo sin penalización presenta un consumo claramente menor, a costa de unas velocidades finales mayores; las cuales pueden no presentar ningún inconveniente. El modelo que restringe las velocidades finales consume mucho más que el resto y por lo tanto no es interesante. En cuanto a los otros dos modelos, presentan características muy similares dado que sus modelos lo son. Entre estos modelos resulta más apropiado el modelo de horizonte deslizante. Este modelo representa la filosofía del control predictivo, además de ser más versátil al tratar a todos los intervalos como iguales. También presenta un mejor funcionamiento para órbitas elípticas.