

Capítulo 4

El problema 3D

4.1. Introducción. Trayectoria

Tras observar el comportamiento del problema con el modelo plano, se aborda ahora la resolución del problema en los tres ejes. Se emplearán las ecuaciones (1.4) completas. Dado que el problema plano se enfocó como un caso particular del planteamiento general (realizado en los dos primeros capítulos), al tratar el problema completo bastará con aplicar lo expuesto en dichos capítulos.

Al igual que en el caso plano, se considerará que el impulsor no tiene un funcionamiento ideal, teniendo una perturbación en cada una de sus componentes. En este caso

$$u_{real} = u_{calculada} + u_{perturbación},$$

$$u_{perturbación} = \delta \sim N_3(\bar{\delta}, \Sigma_\delta),$$

donde ahora la función u tiene 3 componentes. Para calcular la magnitud del impulso se emplea $U = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. La orientación es más compleja que antes, como se explica en la Sección 4.2.

De nuevo se dividirá cada instante de la misión en dos fases, cuyos tiempos se repartirán al igual que en el caso plano adjudicando el 10 % del tiempo a la orientación y el 90 % restante a la maniobra de impulso.

El resto de los datos se tomarán idénticos a los empleados anteriormente. Estos valores se pueden encontrar en la Sección 3.1.

4.2. Orientación

A diferencia del problema de la trayectoria, la orientación para el caso tridimensional es más compleja que una simple extensión del caso plano. En primer lugar es necesario definir en el espacio la dirección que toma la señal de control.

A la hora de realizar una maniobra, el impulsor estará orientado en la dirección del impulso de la maniobra previa (subíndice i):

$$\vec{u}_i = |u_i| \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix},$$

donde $\alpha_i; \beta_i; \gamma_i$ son los cosenos directores de la señal \vec{u}_i , los cuales definen su posición en el espacio. La actitud que debe alcanzarse durante la orientación corresponde a la dirección del impulso necesario en la nueva maniobra (subíndice f):

$$\vec{u}_f = |u_f| \begin{pmatrix} \cos \alpha_f \\ \cos \beta_f \\ \cos \gamma_f \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, el sistema elegido para la representación de la actitud es el de los cuaterniones. Será necesario pues expresar la orientación deseada como cuaternión en función del cuaternión inicial, conocido de la maniobra anterior.

De acuerdo con lo explicado acerca de los cuaterniones se podrá pasar de la actitud q_i a la actitud q_f mediante una rotación definida por q_{rot} . La rotación vendrá dada por un ángulo y un eje de giro, los cuales pueden obtenerse mediante:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{rot} &= \frac{\vec{u}_i \wedge \vec{u}_f}{|\vec{u}_i| |\vec{u}_f|}, \\ \cos \theta_{rot} &= \frac{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_f}{|\vec{u}_i| |\vec{u}_f|}, \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$q_{rot} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{rot} \sin \frac{\theta_{rot}}{2} \\ \cos \frac{\theta_{rot}}{2} \end{bmatrix}.$$

La actitud deseada se puede obtener ahora sin más que efectuar el producto cuaternión de rotación y el de la actitud inicial:

$$q_f = q_{rot} \otimes q_i = \begin{bmatrix} q_{i4} & q_{i3} & -q_{i2} & q_{i1} \\ -q_{i3} & q_{i4} & q_{i1} & q_{i2} \\ q_{i2} & -q_{i1} & q_{i4} & q_{i3} \\ -q_{i1} & -q_{i2} & -q_{i3} & q_{i4} \end{bmatrix} \cdot q_{rot}.$$

Para cerrar el planteamiento será necesario determinar la actitud en el instante inicial. Para ello basta decir que en el instante inicial la actitud será aquella en la que no se ha efectuado ninguna rotación y por lo tanto le corresponde el cuaternión $q_0 = (0, 0, 0, 1)$. Además habrá que definir la orientación del

impulsor en este estado inicial para poder aplicar el razonamiento propuesto. Esta orientación estará determinada obviamente por la geometría del vehículo perseguidor, pudiéndose tomar sin pérdida de generalidad $\vec{u}_0 = (1, 0, 0)$.

Resulta interesante puntualizar que la rotación que efectuará el vehículo no seguirá, en general, la rotación definida por el cuaternión de rotación. Esta rotación y su cuaternión asociado es una referencia que permite alcanzar el cuaternión deseado o final.

La ley de control

Por último, será necesario establecer la ley de control que se empleará. En el caso plano se propuso $u = -K \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$, donde ϕ y $\dot{\phi}$ eran las variables de estado para el caso plano. Resulta tentador tratar de emplear una ley de control análoga para el caso tridimensional. Para ello debemos tener en cuenta que las variables de estado serán ahora las 3 componentes de la velocidad angular y las 4 componentes del cuaternión de actitud.¹ No obstante una realimentación de este tipo llevará las variables de estado a un valor nulo, mientras que el cuaternión objetivo no será nulo.

Si se define un cuaternión de error que relacione la actitud real con la actitud deseada se puede solventar la dificultad anterior. Una ley de control que incluya la realimentación de este cuaternión de error, tenderá a anularlo², consiguiendo así nuestro objetivo.

La ley de control resultante está propuesta en [12]:

$$u = -C \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} q_{e1} \\ q_{e2} \\ q_{e3} \end{pmatrix}.$$

El motivo de tomar distintas matrices para las velocidades angulares y las componentes del cuaternión de error radica en poder controlar la respuesta obtenida. En concreto la rapidez o el carácter oscilatorio de la respuesta vendrán dados por las matrices C y K empleadas.

Para terminar, es necesario encontrar el cuaternión de error en función del cuaternión real (r) y el deseado (d). La rotación que relaciona uno y otro será

¹El momento angular de cada una de las ruedas también es tratado como variable de estado. Sin embargo, dichas variables no juegan un papel relevante en la descripción del problema. Además, al hacer tender a cero las velocidades angulares, el momento cinético de las ruedas también lo hará para que se conserve el momento cinético total.

²En rigor, no se trata de anular el cuaternión, sino de que el cuaternión se corresponda con un giro nulo. Es decir $q = (0, 0, 0, \pm 1)$, lo que corresponde a anular la parte vectorial del cuaternión.

precisamente aquella representada por el cuaternión de error [13]:

$$q_d = q_r q_e$$

$$q_e = q_r^{-1} \otimes q_d = \begin{bmatrix} q_{d4} & q_{d3} & -q_{d2} & q_{d1} \\ -q_{d3} & q_{d4} & q_{d1} & q_{d2} \\ q_{d2} & -q_{d1} & q_{d4} & q_{d3} \\ -q_{d1} & -q_{d2} & -q_{d3} & q_{d4} \end{bmatrix} \cdot q_r^{-1}$$

Por otra parte $q_r^{-1} = q_r^* = -iq_{r1} - jq_{r2} - kq_{r3} + q_{r4}$, porque $|q_r| = 1$. Además, para cualquier cuaternión se verifica que: $q = -q$, pues el giro representado es el mismo³. De modo que:

$$q_e = \begin{bmatrix} q_{d4} & q_{d3} & -q_{d2} & q_{d1} \\ -q_{d3} & q_{d4} & q_{d1} & q_{d2} \\ q_{d2} & -q_{d1} & q_{d4} & q_{d3} \\ -q_{d1} & -q_{d2} & -q_{d3} & q_{d4} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -q_{r1} \\ -q_{r2} \\ -q_{r3} \\ q_{r4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d4} & q_{d3} & -q_{d2} & q_{d1} \\ -q_{d3} & q_{d4} & q_{d1} & q_{d2} \\ q_{d2} & -q_{d1} & q_{d4} & q_{d3} \\ -q_{d1} & -q_{d2} & -q_{d3} & q_{d4} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{r1} \\ q_{r2} \\ q_{r3} \\ -q_{r4} \end{pmatrix}$$

Expresión que se puede reorganizar para que la dependencia sea igual con todas las componentes del cuaternión real.

$$q_e = \begin{bmatrix} q_{d4} & q_{d3} & -q_{d2} & -q_{d1} \\ -q_{d3} & q_{d4} & q_{d1} & -q_{d2} \\ q_{d2} & -q_{d1} & q_{d4} & -q_{d3} \\ q_{d1} & q_{d2} & q_{d3} & q_{d4} \end{bmatrix} \cdot q_r$$

Limitaciones al control

Para poner a prueba la bondad del controlador se van a introducir principalmente dos efectos: saturación y perturbaciones.

La saturación consiste en especificar el valor máximo que pueden alcanzar las señales de control. Aunque el sistema calcule que es necesario aplicar un momento mayor, el valor aplicado realmente no podrá superar el límite fijado. Habrá por tanto que ver como se comporta la solución según el valor de saturación empleado.

En cuanto a las perturbaciones, será necesario observar comparativamente cada uno de los efectos presentes [7]. El de mayor relevancia para una órbita como la considerada es el debido a la no esfericidad de la Tierra. Dado que el potencial gravitatorio verifica la ecuación de Laplace⁴, su solución general en

³Esto puede verse fácilmente debido a que la dependencia de la matriz de cosenos directores con las componentes del cuaternión es siempre mediante el producto de dos componentes del cuaternión.[12, 13]

⁴ $\nabla^2 U = 0$

coordenadas esféricas vendrá dada por [7, 13]:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n J_{nm} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n p_{nm}(\sin \phi) \cos(m(\lambda - \lambda_{mn})) \right]$$

De todos los sumandos, el de más importancia (a parte del de orden cero) será el correspondiente para $n = m = 2$.

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right] = U_K + U_P$$

Donde el subíndice K hace referencia al modelo kepleriano, mientras que el P se refiere al potencial de perturbación. Para conocer el orden de magnitud de las perturbaciones bastara por tanto con estimar el orden de magnitud de la fuerza debida al potencial de perturbación. Dado que las fuerzas derivan del potencial gravitatorio:

$$F \sim \mu J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{r_o^4} \sim 398600, 4 \cdot 1082, 6 \cdot 10^{-6} \frac{6374^2}{(6374 + 800)^4} \sim 6 \cdot 10^{-6} \text{ km/s}^2$$

Lo cual es aproximadamente tres órdenes de magnitud inferior al valor correspondiente a una órbita kepleriana.

4.3. Resultados

4.3.1. Trayectoria

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos para el modelo tridimensional. De los modelos estudiados para el caso plano solo se empleará uno ahora. Se hará uso del modelo de horizonte fijo, modelando la condición de frenado mediante la función de coste. La trayectoria obtenida se ha representado en la figura 4.1.

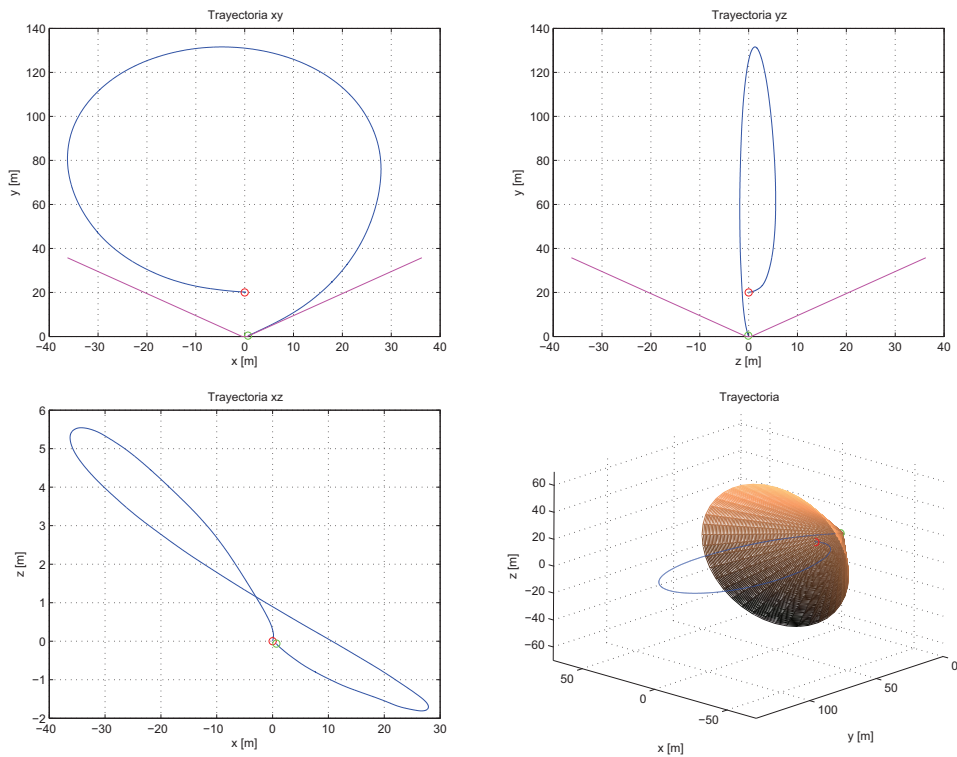


Figura 4.1: Trayectoria para el problema completo

Se han representado las proyecciones de la trayectoria en cada uno de los planos. También se muestra en la figura 4.1 (abajo, derecha) la trayectoria tridimensional junto con el cono definido en la Sección 2.3. Se observa a primera vista que la forma de la solución no difiere en gran medida de lo visto en el caso plano. En cuanto a las señales de control (figura 4.2):

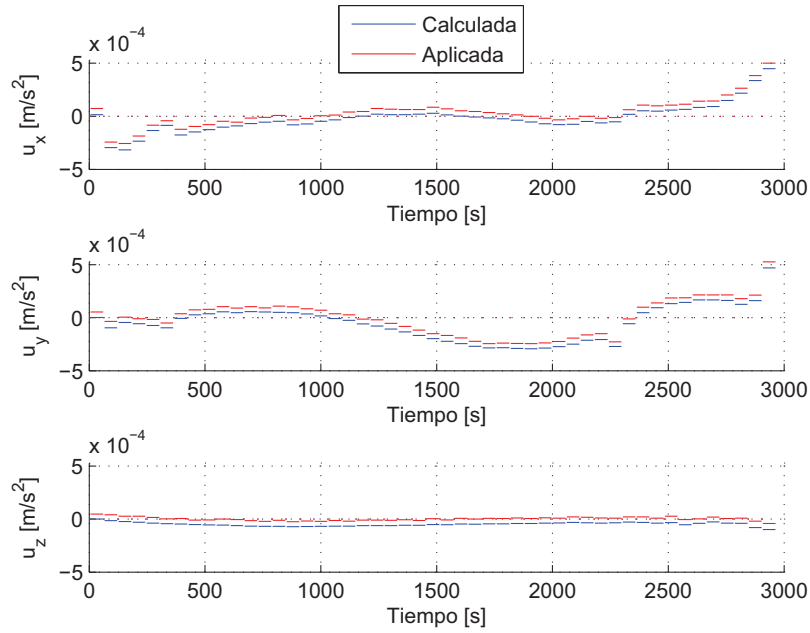


Figura 4.2: Señal de control para el problema completo

Se puede apreciar que la magnitud de la componente en la dirección de z es bastante menor que las otras dos, dado que en esa dirección únicamente se deben compensar las perturbaciones. Esto refuerza la similitud con el problema plano. Comparemos ahora los resultados obtenidos con aquellos correspondientes al mismo modelo con el caso plano:

	Plano	3D
Consumo [m/s]	22.3704	25.7970
Velocidad Final [mm/s]	-9 / 6	-7 / -3 / 2
Tiempo Cálculo [s]	1.93	2.11

Cuadro 4.1: Comparación con el modelo plano

El consumo se ha incrementado, como era de esperar al contar el impulso con una componente más. Acerca de este punto es necesario hacer notar que muy posiblemente la perturbación introducida para la componente según z puede ser excesiva. Se ha supuesto que su distribución es la misma que para las otras dos, pero dado que las acciones de control en esta dirección serán menores, cabe esperar que lo mismo ocurra con la perturbación.

En cuanto al tiempo de cálculo, la diferencia se justifica por el aumento de dimensión del problema. Por otra parte, los tiempos mostrados también no reflejan el tiempo de cálculo para el sistema de orientación, el cual es bastante

más complejo para el caso tridimensional.

Sobre las velocidades al final de la misión, es claro que el funcionamiento del método permanece intacto al aumentar la dimensión del problema.

Variación con las condiciones iniciales.

Variación con z_0

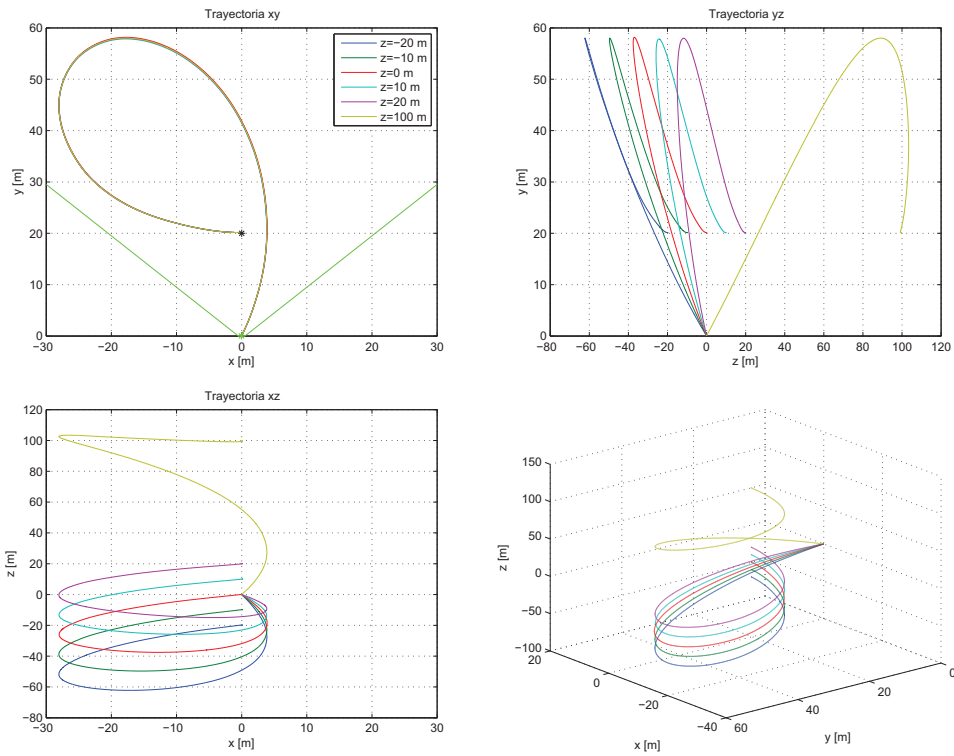


Figura 4.3: Variación con z_0

	$z_0 = -20\text{ m}$	$z_0 = -10\text{ m}$	$z_0 = 0\text{ m}$	$z_0 = 10\text{ m}$	$z_0 = 20\text{ m}$	$z_0 = 100\text{ m}$
Consumo [m/s]	17.07	16.27	15.56	14.96	14.43	15.15
Tiempo Cálculo [s]	1.95	1.78	1.79	1.78	1.84	1.82

Cuadro 4.2: Resultados al variar z_0

En la figura 4.3 se puede ver como las trayectorias en el plano xy apenas dependen del valor inicial de z_0 . En todos los casos, las diferencias entre las trayectorias en los otros planos son proporcionales a las diferencias en la condición inicial.

En cuanto al consumo, lo esperable sería obtener un mínimo para $z_0 = 0$. Esto no ocurre debido a las perturbaciones. Al introducir una señal de perturbación con una media no nula, el controlador deberá como mínimo compensar dicha media. Se observa que en algún punto entre 10 y 100 metros el consumo será mínimo. En ese punto no será necesario compensar toda la perturbación ya que, en cierto modo, está acercando al vehículo hacia su objetivo.

Variación con \dot{z}_0

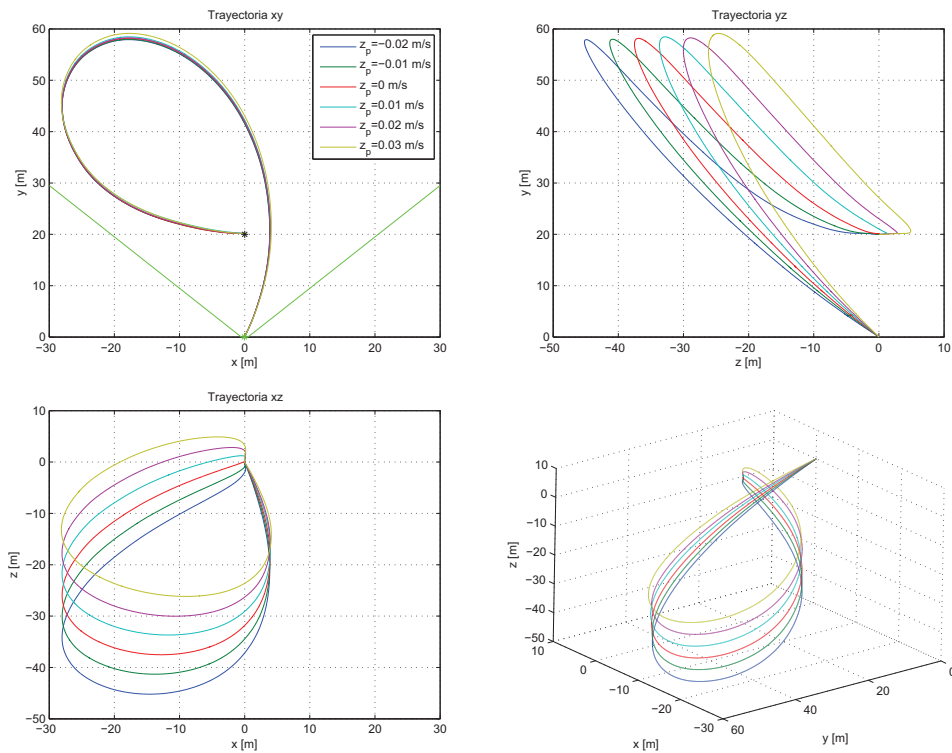


Figura 4.4: Variación con \dot{z}_0

	$\dot{z}_0 = -0,02$	$\dot{z}_0 = -0,01$	$\dot{z}_0 = 0$	$\dot{z}_0 = 0,01$	$\dot{z}_0 = 0,02$	$\dot{z}_0 = 0,03$
Consumo [m/s]	15.56	15.53	15.56	15.74	15.86	16.06
Tiempo Cálculo [s]	1.95	1.77	1.77	1.77	1.78	1.60

Cuadro 4.3: Resultados al variar \dot{z}_0

En este caso las trayectorias en el plano xy también son muy similares, como se ve en la figura 4.4. También en este caso se mantiene la proporcionalidad del ejemplo anterior.

En cuanto al consumo, se puede observar que una pequeña velocidad inicial negativa tiene un efecto beneficioso sobre el consumo.

4.3.2. Orientación

Para los cálculos de esta sección se han tomado los siguientes datos como referencia:

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 700 \end{bmatrix} [kg \cdot m^2],$$

$$I_a = 10 [kg \cdot m^2],$$

$$u_{sat} = 100 Nm,$$

$$K = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 700 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1400 \end{bmatrix}.$$

Para seleccionar estos valores, se ha tomado como referencia [13, 14].

Durante la simulación anterior, las variables de interés en el problema de orientación tienen la siguiente evolución mostrada en las figuras 4.5 a 4.8.

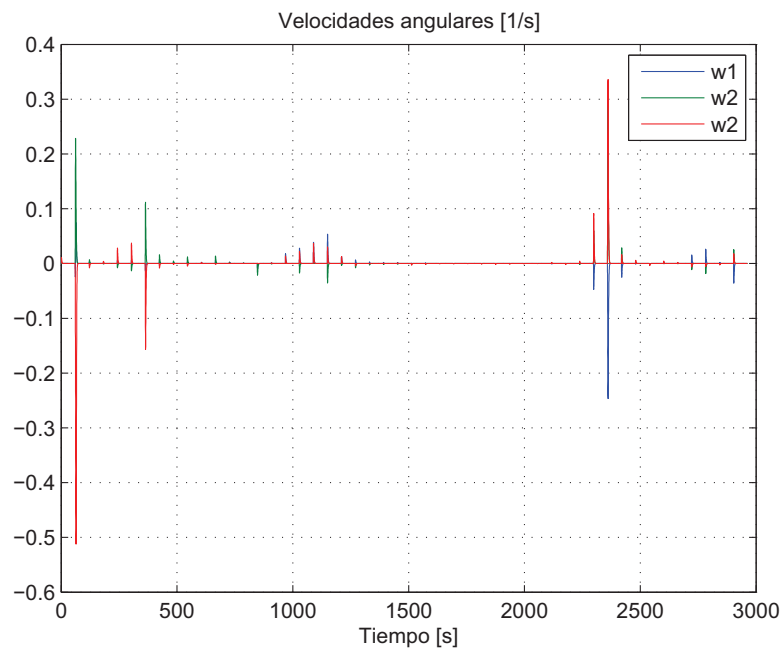


Figura 4.5: Velocidades angulares a lo largo de la misión

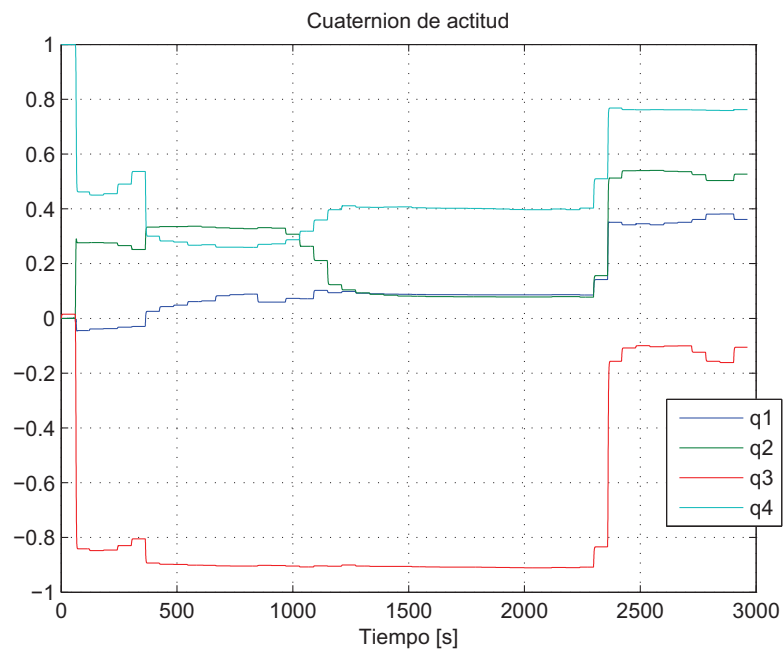


Figura 4.6: Componentes del cuaternión de actitud

Al igual que en el caso plano, el punto más exigente de la misión se en-

cuentra en la zona inicial. El estudio pormenorizado de la orientación se hará tomando como referencia dicho giro; pues, como se observa en las gráficas, la representación de las variables para toda la misión no muestra la evolución detallada de las variables en cada giro.

Antes de proceder al estudio, veamos como evolucionan el resto de variables del problema:

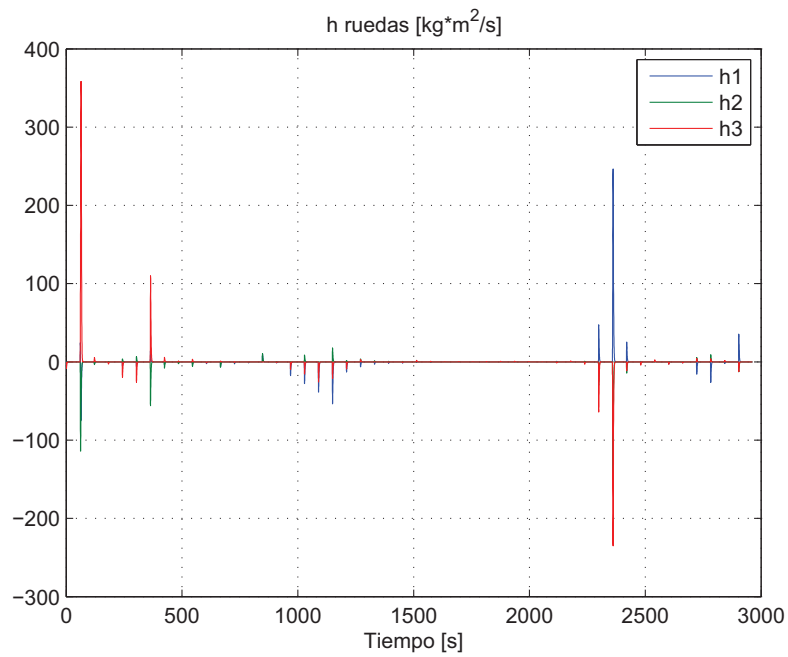


Figura 4.7: Momento cinético de las ruedas

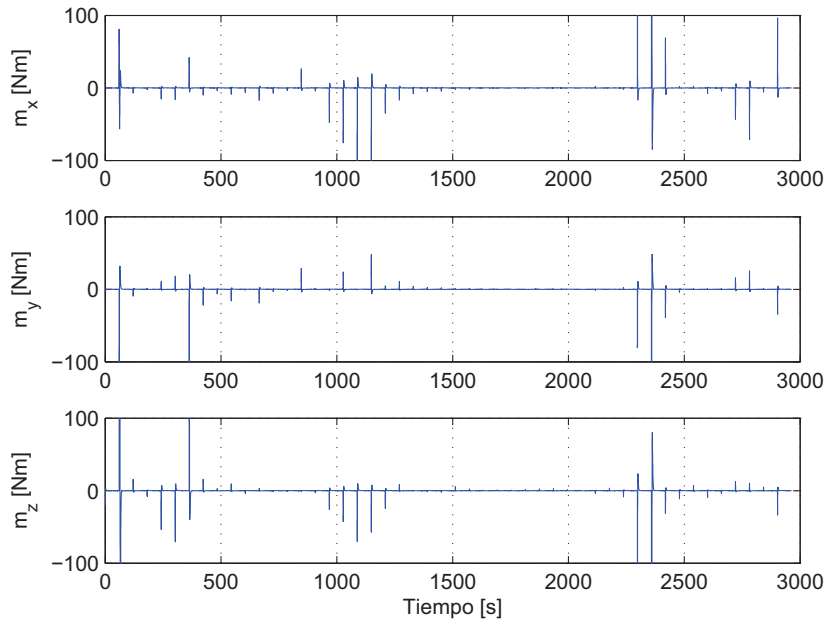


Figura 4.8: Acciones de control

Como se puede observar, la evolución del momento cinético de las ruedas es totalmente complementaria a la evolución de las velocidades angulares del vehículo dado que debe mantenerse el momento cinético total $\vec{\Gamma} = \vec{I}\vec{\omega} + \vec{h}$.

Respecto a las variables de control, su valor máximo está limitado por el valor de saturación fijado. Al alcanzarse la saturación evoluciona horizontalmente durante cierto tiempo. Lo cual no se puede apreciar de momento dado la escala de tiempos empleada.

Representando únicamente la maniobra de giro más exigente se observa mejor la evolución de la actitud:

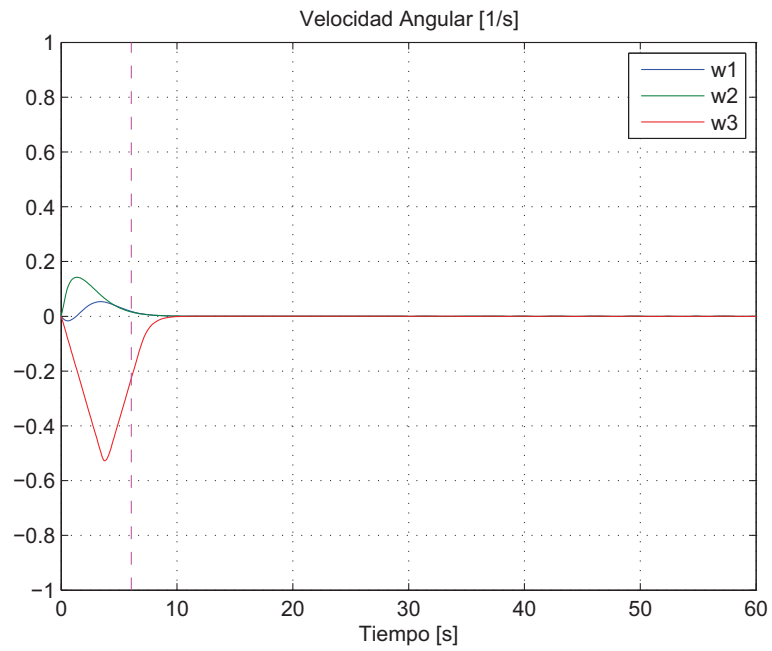


Figura 4.9: Velocidades angulares para $M_{max} = 100 Nm$

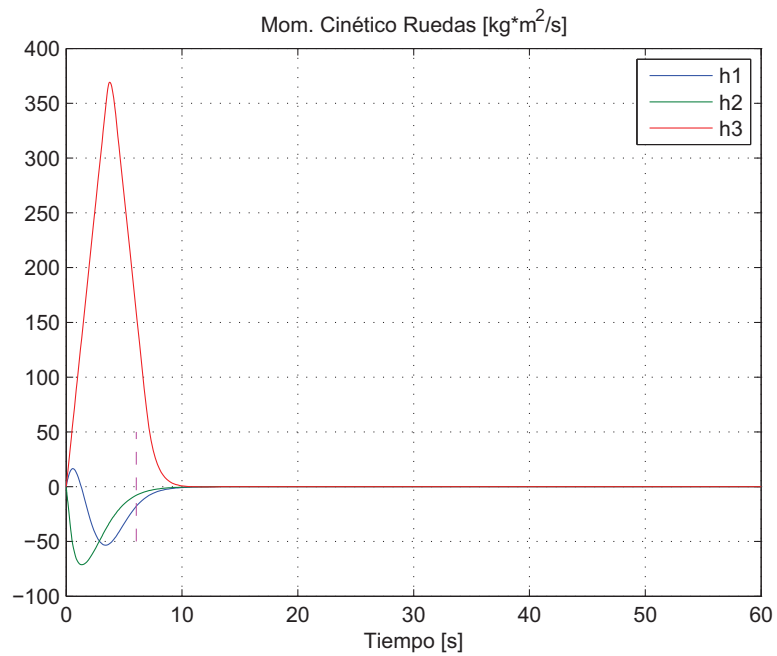


Figura 4.10: Momento cinético de las ruedas para $M_{max} = 100 Nm$

Ahora se ve mejor la mencionada complementariedad entre ambos juegos de

variables. La línea magenta vertical delimita el final teórico de la maniobra de orientación. Aparentemente la respuesta es demasiado lenta. Sin embargo, las variables que realmente marcan la calidad de la orientación son los cuaterniones.

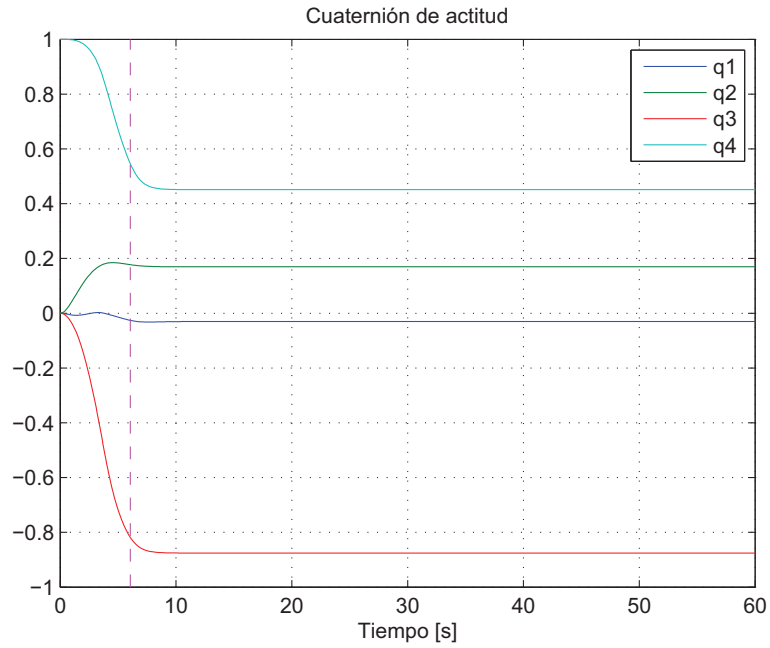


Figura 4.11: Cuaternión de actitud para $M_{max} = 100 Nm$

Como se ve, no se logra una convergencia total en el tiempo disponible. No obstante, el error tampoco es demasiado grande por lo que cabe esperar un buen comportamiento. No hay que olvidar tampoco que se trata del caso más desfavorable y que en la mayor parte de la misión, los giros a efectuar son considerablemente menos exigentes.

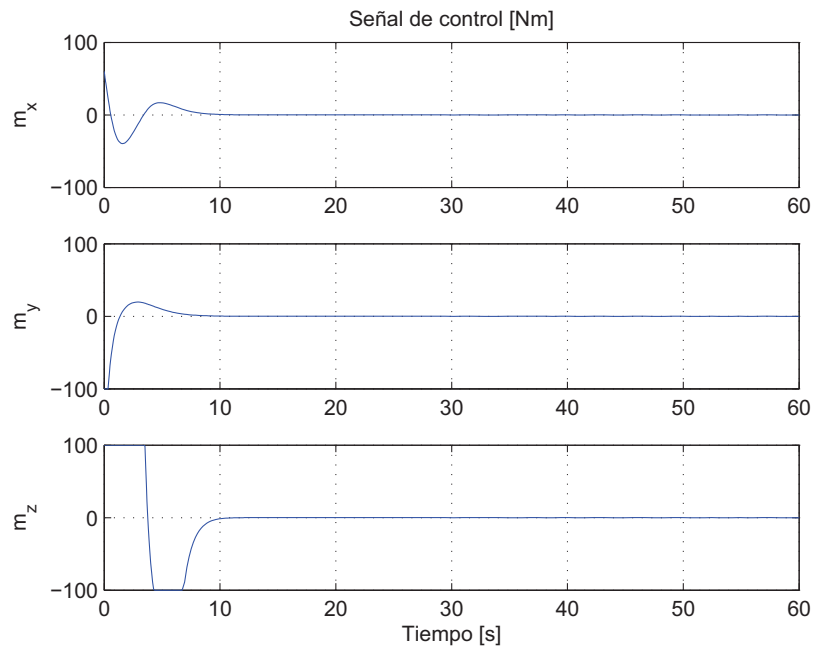


Figura 4.12: Señal de control para $M_{max} = 100 Nm$

Ahora se puede apreciar claramente el efecto de la saturación. Además, se observa que la componente que se satura es aquella asociada a la velocidad angular que peor convergencia tenía.

4.3.2.1. Variación con el momento de saturación

Veamos primer que ocurre si aumentamos el valor umbral hasta el doble ($200 Nm$).

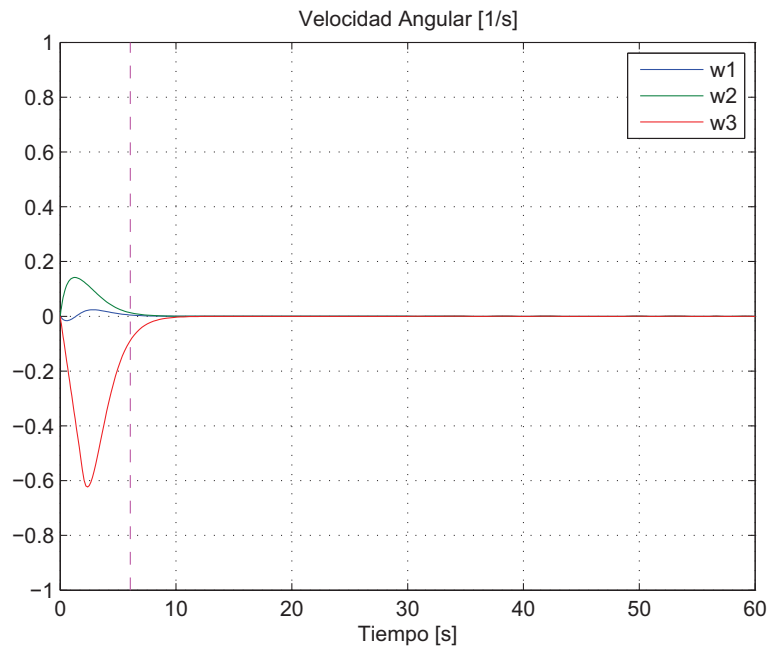


Figura 4.13: Velocidades angulares para $M_{max} = 200 Nm$

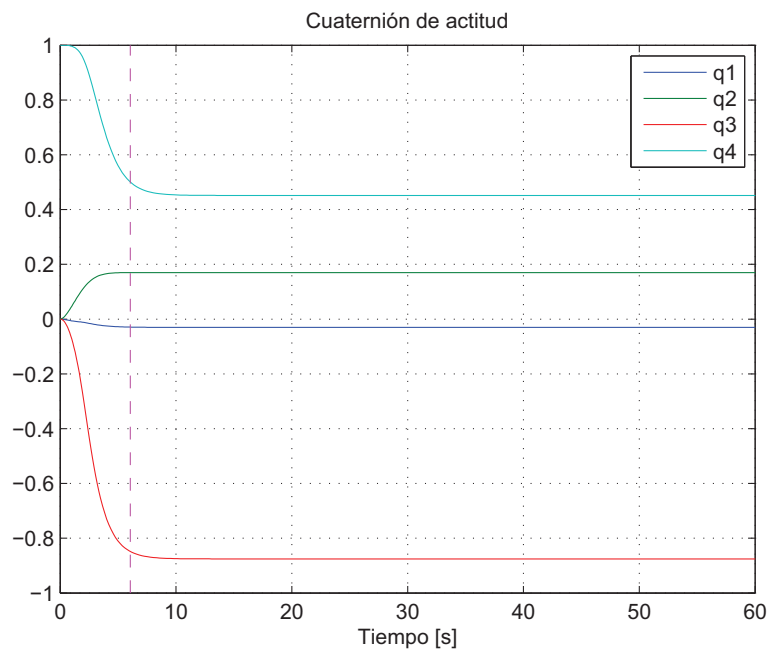


Figura 4.14: Cuaternión de actitud para $M_{max} = 200 Nm$

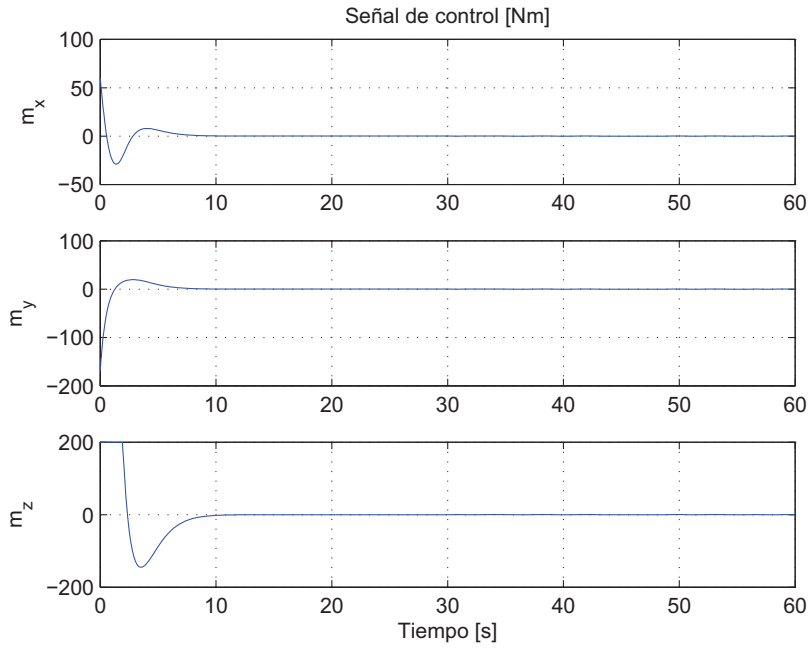


Figura 4.15: Señal de control para $M_{max} = 200 Nm$

En primer lugar se puede observar una disminución del error (figuras 4.13 y 4.14), tanto en la convergencia de la velocidad angular como en el cuaternión de actitud. Sin embargo esta mejora no es excesivamente grande comparado con el gran aumento que ha sufrido el umbral de saturación.

Se puede comprobar observando las gráficas que las velocidades angulares son ahora mayores, lo cual ha de implicar que la velocidad de giro de las ruedas será también mayor. De modo que al duplicar el umbral de saturación, serán necesarias unas ruedas con más del doble de potencia que en el caso anterior.⁵

En cuanto a la señal de control (figura 4.15), sigue presentando saturación, pero mucho menor que antes.

Procedamos ahora a disminuir a la mitad el valor umbral ($50 Nm$).

⁵La potencia de las ruedas será $P = M_{par}\omega_{giro}$

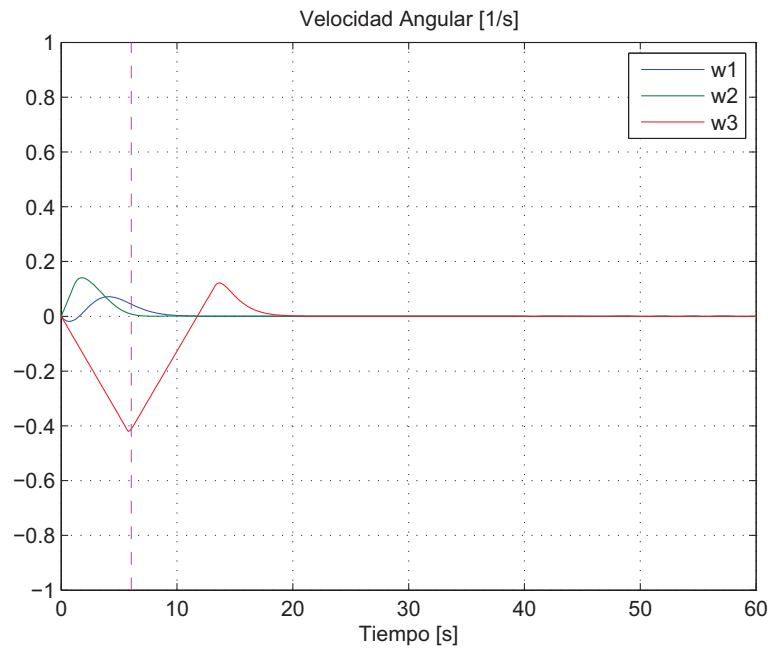


Figura 4.16: Velocidades angulares para $M_{max} = 50 Nm$

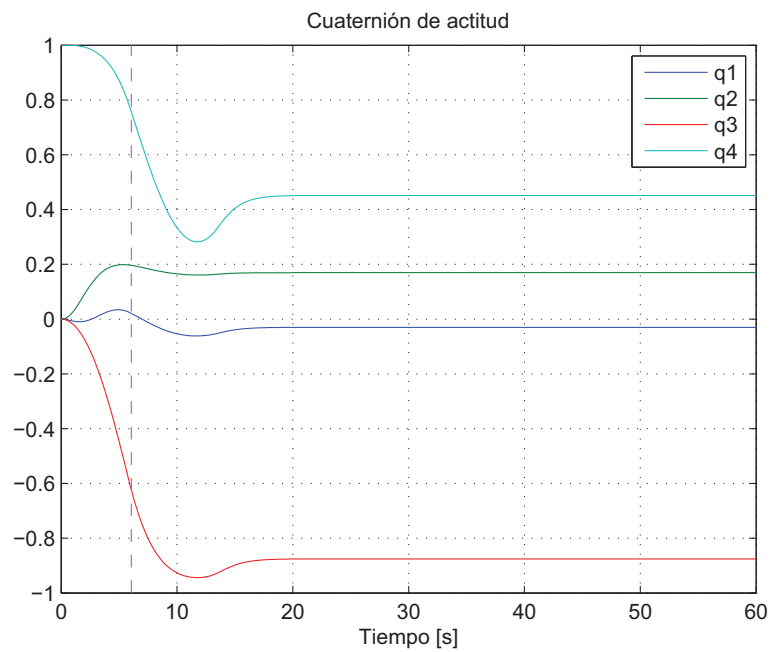


Figura 4.17: Cuaternión de actitud para $M_{max} = 50 Nm$

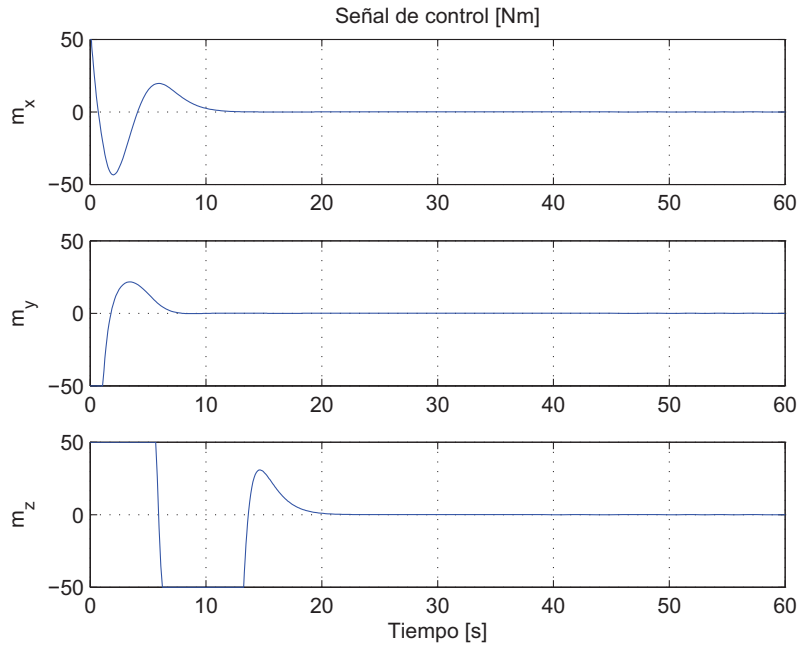


Figura 4.18: Señal de control para $M_{max} = 50 Nm$

Como cabía esperar el efecto de la saturación es mucho más apreciable ahora. En cuanto a la convergencia, el sistema necesita aproximadamente el doble de tiempo para alcanzar unos valores razonablemente buenos.

Por el mismo razonamiento que en el caso anterior, ahora serían necesarias unas ruedas con menos de la mitad de potencia. Sin embargo, este ahorro penaliza enormemente las prestaciones del sistema de control.

Estos dos sencillos ejemplos sirven para situar el valor de saturación que deben tener las ruedas para poder disfrutar de un buen funcionamiento. El valor de $M_{max} = 100 Nm$ empleado estará próximo al óptimo.

4.3.2.2. Variación con la inercia de las ruedas

El otro parámetro que define a las ruedas es su propia inercia. Volviendo al valor original para la saturación, veamos como influye este parámetro.

Si se toma un valor para la inercia de las ruedas diez veces superior, las gráficas representadas apenas cambian. Para observar cambios apreciables es necesario dotar a las ruedas de inercias comparables a las del vehículo, lo cual no tiene sentido.

Lo mismo ocurre al dividir por diez el valor de la inercia, se obtienen resultados prácticamente idénticos.

No obstante, la inercia de las ruedas si tendrá un efecto más allá de las

gráficas. El hecho de que las gráficas no varíen apreciablemente, implica que el momento cinético h de las ruedas permanece aproximadamente constante con la variación. Dado que $h = I_a \omega_a$, variar la inercia de las ruedas implica variar su velocidad de giro. En este sentido, cuanto mayor sea la inercia de las ruedas, a menor velocidad girarán. Esto puede resultar de interés si se introduce en el modelo un límite a la velocidad de giro de las ruedas, ya que con este parámetro se puede regular.

4.3.2.3. Variación con las perturbaciones

Veamos como responde el sistema ante unas perturbaciones cien veces superiores a las consideradas en el modelo.

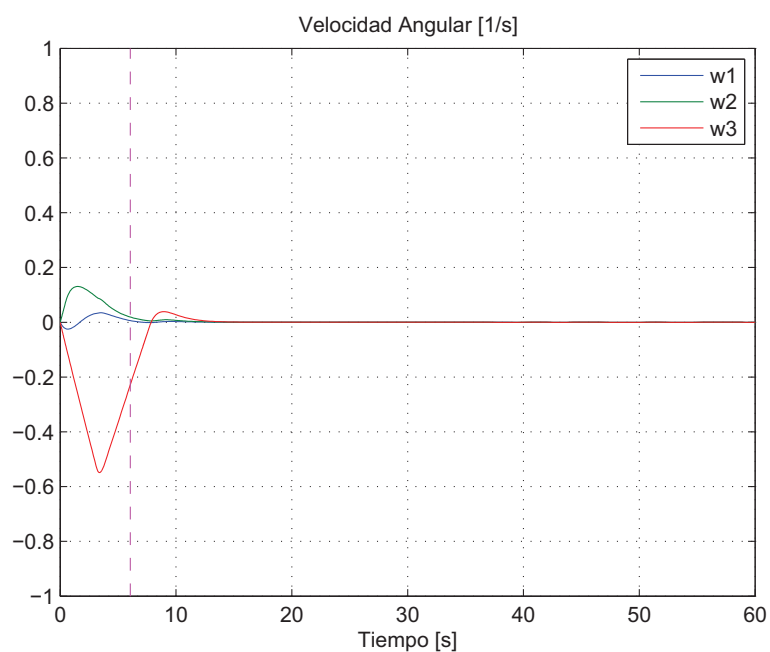


Figura 4.19: Velocidades angulares para grandes perturbaciones

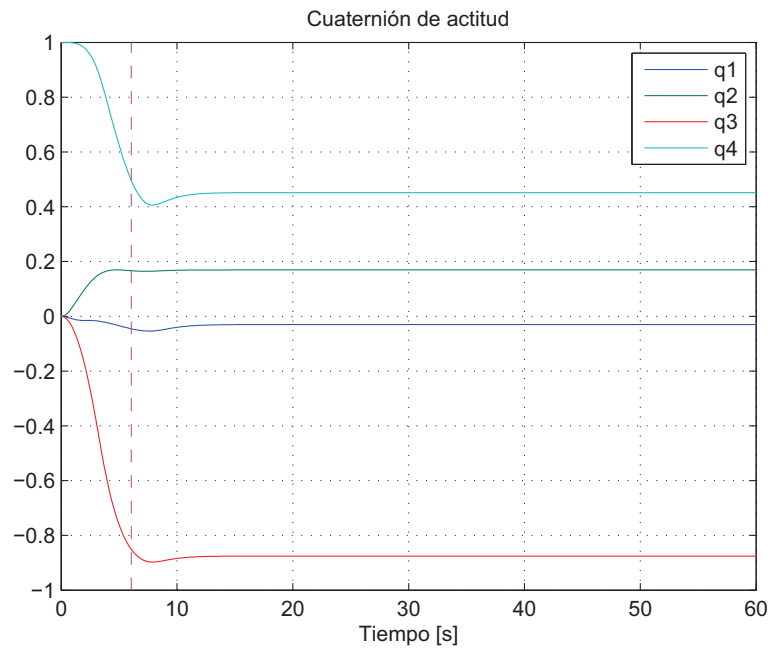


Figura 4.20: Cuaternión de actitud para grandes perturbaciones

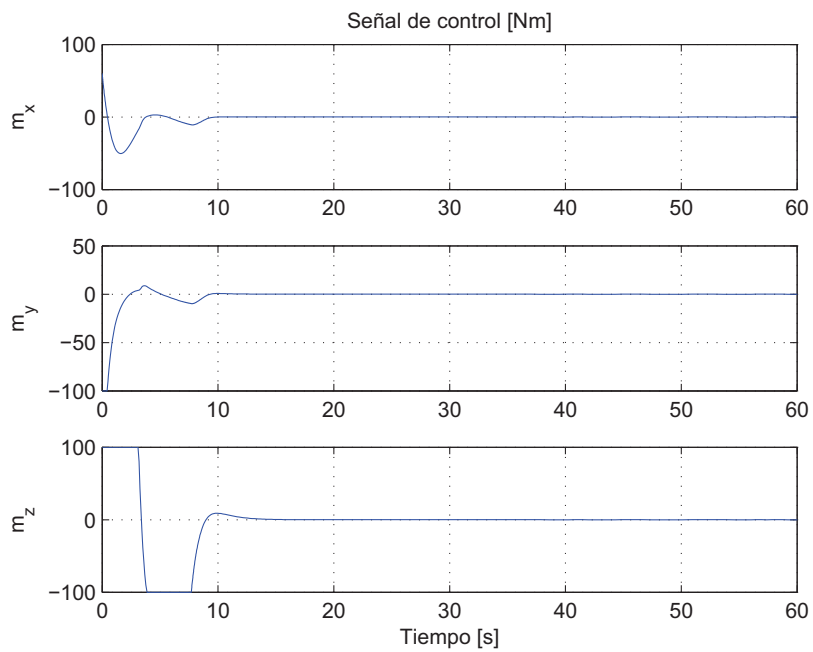


Figura 4.21: Señal de control para grandes perturbaciones

El sistema presenta ahora pequeñas sobreoscilaciones. Al margen de esto el

funcionamiento es muy similar al del caso de diseño. Esto se debe a que las perturbaciones que están presentes en el problema son realmente pequeñas tal y como se vio anteriormente.

La conclusión que se extrae de este punto es que no es necesario modelar de forma precisa ninguna de las causas de las perturbaciones ya que las mejoras de un buen modelo serán ínfimas.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se ha visto que el modelo tridimensional es capaz de llegar al objetivo de manera similar al problema plano. El modelo plano es una buena primera aproximación, pero difiere lo suficiente del modelo completo como para no poder sustituirlo. Por otra parte el tiempo de cálculo del modelo completo tampoco es excesivamente más grande que el del modelo plano, por lo que no supone un inconveniente el tener que resolver el problema completo.

El efecto sobre la solución de las nuevas condiciones iniciales z_0 y \dot{z}_0 es pequeño comparado con el resto. Al ser las trayectorias proporcionales a estas condiciones y al tener las trayectorias una tendencia descendente, puede haber valores para las condiciones iniciales que salgan del cono de visibilidad ⁶. Esto se puede ver en las figuras 4.3 y 4.4. Este hecho motiva una de las extensiones que se verán en el capítulo 5.

En cuanto a la orientación, el modelo tridimensional es notablemente más complejo que el modelo plano. No solo las ecuaciones tridimensionales están acopladas sino que su tipología es no lineal. En este tipo de sistemas la estabilidad es un concepto mucho más complejo que en sistemas lineales; sin embargo, los controladores propuestos en la bibliografía proporcionan un correcto funcionamiento incluso para grandes giros.

La mayor dificultad que se encuentra a la hora de conseguir una correcta orientación, es cumplir con el tiempo asignado. Si las características de los componentes son demasiado exigentes, se podría incrementar el tiempo asignado a la maniobra de orientación para relajar los requisitos de los componentes.

⁶Considerando el cono tridimensional, no solo su proyección sobre el plano xy