ANÁLISIS Y MODELADO DE LA GESTIÓN DEL RIESGO

Autor: Rafael Cruz Blanco

Director del Trabajo de Investigación: Pablo Cortés Achedad

Sevilla Junio 2007

1. Introducción

El riesgo surge ante la falta de conocimiento sobre futuros acontecimientos. Se puede definir como el efecto acumulativo que estos acontecimientos adversos podrían tener sobre los objetivos de una actividad planificada. Supone la contingencia, la probabilidad o la proximidad de un daño o un peligro, siendo sus características básicas la aleatoriedad y la incertidumbre.

Genéricamente, el concepto de riesgo puro entraña siempre un resultado con pérdida, mientras que, dependiendo de las fluctuaciones del mercado y de otras eventualidades, la actividad podría llegar a arrojar resultados positivos.

Cuando se da el caso de que el riesgo pueda llegar a ser positivo para una organización, pasa a llamarse “Riesgo de Oportunidad”. Cuando se da este tipo de riesgo los cambios en los mercados pueden llegar a ser favorables, aunque casi siempre van ligados de forma que a mayor riesgo de oportunidad mayor riesgo asociado. De hecho, ciertas teorías económicas lo correlacionan positivamente con el beneficio, si bien la percepción generalizada asocia el riesgo a quebrantos de orden diverso.

Debido a que el riesgo se asocia a quebrantos múltiples, es habitual su análisis y, en su caso, la evaluación cuantitativa con el objeto de asegurarlo en aras a su minimización.

Además, el riesgo es inherente a cualquier inversión e inseparable de esta actividad, por lo que no es relevante querer o no asumir riesgo, este siempre va a existir en mayor o menor medida.

La variedad de los escenarios y las volatilidades de los diferentes mercados, en los que el gestor puede actuar, hacen imprescindible el estudio a fondo de los mismos, ya que los valores en el pasado son conocidos, pudiendo servir como punto de referencia, pero los del futuro serán siempre desconocidos.

La finalidad del estudio del riesgo es que el gestor, dependiendo del escenario en el que se encuentre, pueda disponer de herramientas que le faciliten su tratamiento, de forma que pueda asegurar y rentabilizar al máximo sus inversiones.

Este Trabajo de Investigación realiza un estudio sobre la Gestión del Riesgo. Básicamente, trata de identificar, analizar, evaluar y estudiar el tratamiento que se le debe dar a cada uno de ellos.

En el apartado 2, se exponen los antecedentes, analizando los orígenes del riesgo y realizando una primera clasificación de los mismos.

Posteriormente, se exponen las principales y más destacables definiciones del riesgo enunciadas por los autores más relevantes que lo han estudiado y analizado (apartado 3.1).

Para introducir el concepto de riesgo en el análisis de las inversiones, y en el apartado 3.2, se realiza también un estudio basado en una serie de hipótesis tales como la Utilidad Esperada, así como en una serie de axiomas denominados Axiomas de Von Neumann-Morgenstern.

Una vez analizado el riesgo en sí, en el apartado 3.4, se estudian las actitudes del inversor frente a éste. Y en el apartado 3.5 y 3.6, las elecciones de inversiones bajo incertidumbre, así como las aplicaciones de Primas de Riesgo o cantidades a satisfacer por el inversor para evitar dichos riesgos, respectivamente.

Posteriormente, ya en el apartado 3.7, se analizan y diferencian minuciosamente cada uno de los tipos de riesgo existentes. El apartado 3.8 se dedica a los factores que influyen en el mismo.

A continuación, en el apartado 4, se exponen diversos modelos genéricos para la administración del riesgo, analizando los métodos básicos para su gestión, realizando una valoración y una medición de dichos riesgos.

En el apartado 5, se estudian modelos de programación matemática para la gestión de títulos de renta fija, analizando la duración financiera y las estrategias de inmunización de los mismos. Se incluyen modelos deterministas y estocásticos.

Una vez estudiados los modelos de optimización, se exponen las principales conclusiones que se derivan del trabajo y las líneas de trabajo que se van a seguir para el desarrollo de la tesis doctoral.

Por último, se incluyen dos apéndices, el primero en el que se encuentra un glosario de los conceptos más significativos usados en el documento. El segundo, incluye estrategias para combatir la aparición de riesgos mediante contratos de derivados como son las Opciones y Futuros.

2. Antecedentes

2.1 Orígenes del Riesgo

A lo largo de la historia de la humanidad, el ser humano siempre ha estado expuesto a algún tipo de riesgo, ya sea económico, político o social. Los orígenes de los instrumentos utilizados como defensa de éste se remontan a La Edad Media, donde se utilizaban para satisfacer la demanda de agricultores y comerciantes en forma de contratos de futuro.

A partir de finales del siglo XIX, el sistema monetario internacional ha estado compuesto, por tres períodos: ***la época del patrón-oro*** (desde 1870 a 1914), ***el período entre guerras*** (desde 1918 a 1939) y ***el período tras la segunda guerra mundial*** (desde 1939 a 1973), durante el cual los tipos de cambio se fijaron según el ***acuerdo de Bretton Woods*** (Krugman 1995).

El patrón-oro se constituyó como institución legal como un patrón internacional donde cada país ligaba su moneda al oro, lo cual le permitía la importación o exportación de oro sin restricciones. Lo esencial de este tipo de patrón fue que los tipos de cambio eran fijos. El patrón oro no cubrió a todo el mundo, solo a un grupo en el que se encontraban los principales países europeos. El país referencia de este patrón fue Inglaterra puesto que era el líder mundial en asuntos comerciales y financieros.

Al ***período entre las dos guerras mundiales*** se le conoció como "la era oscura del sistema financiero internacional". Se caracterizó por un fuerte exceso de oferta monetaria e inflación. Con el estallido de la primera guerra mundial, las naciones en conflicto suspendieron la convertibilidad de sus monedas al oro decretando un embargo sobre las exportaciones de oro, con el fin de proteger sus reservas del preciado metal. Muy poco después, la mayoría de las naciones adoptaron la misma política. Por todo ello, la financiación de los gastos militares se realizó a través de la impresión de dinero de manera masiva y excesiva.

En 1922, en la conferencia de Ginebra, se recomendó la adopción en el mundo, de un patrón oro en el cambio, para esto era necesario que los países con déficit permitieran la influencia de dichos déficit sobre sus reservas de oro para disminuir el crecimiento monetario y, a su vez, era necesario que los países con superávit permitieran que sus crecientes reservas de oro liberalizaran sus políticas monetarias (Levi, D.M. 1997).

El problema surgió cuando muchos países empezaron a manipular los tipos de cambio en función de sus objetivos nacionales. En 1931 Inglaterra suspende su convertibilidad (libra esterlina-oro) debido a la escasez de sus reservas.

A partir de ese momento el mundo se dividió en tres bloques económicos: el bloque de la Libra Esterlina, el bloque del Dólar y el bloque del Oro.

En este período apareció la llamada "política de empobrecimiento del vecino", la cual se basaba en realizar devaluaciones competitivas e incrementos en la protección de tarifas. Tal ambiente terminó obstaculizando el crecimiento económico global.

En julio de 1944, las potencias mundiales se reunieron en Bretton Woods (New Hampshire), para diseñar un nuevo orden financiero mundial, creándose el sistema que llevaba por nombre el de dicha ciudad (***Sistema Bretton Woods***).

Las características fundamentales del acuerdo fueron:

- Creación de una agencia internacional con poderes y funciones definidos.
- Las tasas de cambio deberían de ser fijas en el corto plazo, pero en presencia de desequilibrios, serían ajustables en el tiempo.
- Aumento del oro y las monedas de reserva.
- Todos los países debían adherirse a un sistema de comercio multilateral sin restricciones y de monedas convertibles

Poco después se creó el FMI (Fondo Monetario Internacional). Organismo encargado de la administración del nuevo sistema financiero internacional, es decir, de reunir y distribuir las reservas, como implantador del sistema Bretton Woods.

Las reservas son aportadas por los países miembros de acuerdo con un sistema de cuota basado en el ingreso nacional y en la importancia del comercio en los diferentes países. *"De la aportación original, un 25% fue en oro y un 75% fue en la propia divisa del país"* (Levi, D.M. 1997)

Todos los países vincularon sus monedas al dólar y Estados Unidos vinculó el dólar al oro, estando de acuerdo en cambiar oro por dólares en los bancos centrales extranjeros al precio de 35 dólares la onza (Krugman, R. 1995).

A partir de 1958, con la reinstauración de la convertibilidad de las monedas europeas y con mercados financieros más integrados, la política monetaria se hizo menos efectiva y los movimientos en las reservas internacionales se hicieron más volátiles, revelando así que el sistema sufría cierta debilidad. Estados Unidos se enfrentaba a un serio problema de confianza debido al desequilibrio entre la demanda de dólares y las reservas estadounidenses.

Por todo ello, y hasta principios de la década de los 70, los mercados en Estados Unidos gozaron de una cierta estabilidad. Debido a la tranquilidad derivada de dicha estabilidad, los inversores operaban en los mercados con una cierta confianza que les invitaba a realizar las operaciones.

Una serie de crisis que comenzaron en la primavera de 1971, combinada con la inestabilidad del petróleo, condujeron, por etapas, al abandono de los lazos del dólar con el oro y de los tipos de cambio fijos respecto del dólar por parte de los países industrializados.

Como resultado de todo esto se crea el "*International Moneraty Market*" que fue fundado en 1972 como una división del "*Chicago Mercantile Exchange*" para procesar contratos de futuros en divisas.

Las políticas macroeconómicas de los Estados Unidos a finales de los años sesenta ayudaron a provocar el derrumbamiento del sistema *Bretton Woods*. La caída definitiva de este sistema ocurrió en 1973. La política fiscal extremadamente expansiva de los Estados Unidos contribuyó a la necesidad de devaluar el dólar, lo cual desencadenó unos flujos especulativos de capitales huyendo del dólar, aumentando las ofertas monetarias de los países extranjeros. El mayor crecimiento monetario de los Estados Unidos alimentó la inflación interior y la extranjera, haciendo que los países fueran cada vez más reacios a continuar importando inflación estadounidense a través de los tipos de cambio fijos.

A partir de estos momentos, las operaciones financieras en Estados Unidos sufrieron un cambio significativo. A todo lo anteriormente expuesto, se sumó la falta de acuerdo en el sector de la madera, la liberalización de los mercados financieros, el aumento de la inflación y una crisis del sector del aceite, en alza, lo cual condujo a una considerable volatilidad en los tipos de interés.

En esta década, las rentas fijas, seguros y fondos de pensiones llegaron a ser más volátiles incluso que la Bolsa. Las fluctuaciones de los tipos de interés aumentaron en octubre de 1979 cuando el Banco de la Reserva Federal Norteamericana, abandonando la práctica de fijar el tipo de interés, adoptaba una política, en la cual se permitían unos movimientos más amplios en los tipos de interés a Corto Plazo.

El problema creó una gran incertidumbre entre los inversores, ya que aumentaba el peligro de disminución sobre los retornos de las inversiones, todo ello debido a una gran asimetría de los mismos.Es decir, que a pesar de que las oscilaciones de los retornos podían ser beneficiosas en algunos momentos, el hecho de que existiera una posibilidad de no garantizar dicho retorno, creaba una inseguridad capaz, en muchos casos, de impedir la inversión.

A partir de este momento, debido a la incertidumbre creada y a la creciente dinámica del mercado, se hacen necesarias respuestas a estos problemas descritos. Por todo ello, se comienzan a desarrollar técnicas analíticas avanzadas que sirvieran de ayuda a la toma de decisiones en las operaciones financieras y, consecuentemente, se crean modelos cuyas herramientas permitan optimizar dichas operaciones con el fin de ayudar a los analistas.

Por todo ello, se hace necesario que el aumento del riesgo que produce la problemática descrita, se gestione de una manera eficiente, de forma que pueda llegar a ser controlado casi en su totalidad. Esta es la única manera de que se puedan seguir manteniendo ciertas garantías sobre las inversiones que se realicen y de que se mantenga, a su vez, la confianza de los inversores.

El control del riesgo se hacía necesario para mantener la actividad económica, ya que sin el control de éste, la desconfianza haría que los inversores optasen por otras actividades y posiblemente se abriesen a otros mercados, lo que hacía que los inversores consideraran llevar a cabo sus inversiones fuera de las fronteras norteamericanas. Esto implicaba el riesgo de un retroceso de la economía en EE.UU. en favor de otras que en ese momento mantenían los tipos de interés en niveles controlados y con márgenes de fluctuación más pequeños.

Posteriormente y además de los riesgos generados en las operaciones internas del país, se sumaron los riesgos contraídos por las operaciones en el extranjero, muy influenciados por las fluctuaciones en el cambio de moneda y por los posibles cambios de gobiernos. Cambios, estos últimos, que podían modificar las políticas comerciales y tributarias, incluso llegando en algunos casos, a expropiar inversiones extranjeras.

Debido a la creciente globalización de la economía mundial, el problema generado en Estados Unidos, pronto se haría extensivo al resto de países con mercados liberalizados, por lo que la solución al problema del riesgo se hacía necesaria y urgía una pronta respuesta al mismo.

La primera estrategia que se pone en marcha es la de la diversificación de la cartera de inversiones, lo cual implica, a efectos prácticos, dotar a las carteras de una elección equilibrada de entre diferentes activos.

La diversificación se toma, pues, como punto de referencia para una gestión eficaz de las carteras de inversiones.

Con esta estrategia se palia parte del problema, pero todas las inversiones expuestas a cambios bruscos de los tipos de interés continúan afectadas por los riesgos que suponen dichas fluctuaciones. Por esta razón, se hace necesario conocer los tipos de riesgos a los que se someten a las inversiones, así como la forma de controlar los mismos. Además, no todas las estrategias de diversificación disminuyen de igual forma el riesgo, por lo que deben ser estudiadas a fondo y de una forma monográfica.

Cuando los tipos de interés disminuían, los factores macroeconómicos se hacían favorables, y desfavorables cuando éstos aumentaban. El sector de las hipotecas era uno de los más sensibles a estas fluctuaciones. De hecho, dichas variaciones influían de forma determinante en los adelantos de los pagos de las deudas. A bajadas de tipos de interés, aumentos de los adelantos de los pagos y a mayor subida de los tipos de interés, más seguridad de que las deudas cumpliesen los plazos de retorno.

Para definir una primera estrategia, los analistas se platearon determinar los tipos de riesgo a los que se exponen las inversiones, así como cuantificar, de la forma más ajustada, cada uno de ellos. Pensaron que si eran capaces de computar lo que corresponde a cada factor, podrían determinar la forma del riesgo, incluso construir una gráfica sobre el mismo, la cual daría una información clara y sencilla, muy positiva para la toma de decisiones.

Cuando se detectaban e identificaban los riesgos, se evaluaban los mismos para analizar su impacto. Debían ser considerados tanto los riesgos propios del negocio en cuestión, como los fortuitos.

Los riesgos tecnológicos y sociales asociados a sistemas tecnológicos ponían de manifiesto la necesidad de elaborar y aplicar prácticas y modalidades de gestión de riesgos acordes con las consecuencias naturales y sociales, globales e individuales de aquellos sistemas.

Así se creó la denominada *Opción de Riesgo*, semejante a una póliza de seguro, que cubría todos los tipos de riesgo. Dicha opción solamente tenía valor si se daban las ocasiones en las que algo podía suceder, es decir, una modificación de las condiciones de mercado no previstas inicialmente. En caso contrario, dicha opción, quedaba sin valor. Además, los aumentos de riesgos sobre el retorno de las inversiones serían directamente proporcionales al aumento de la *Prima de Riesgo*, es decir, a mayor riesgo mayor precio de la póliza de seguro.

A partir de estos momentos, en las empresas, los responsables de realizar las inversiones adquieren un papel relevante. Bajo su custodia y responsabilidad se realizan las listas de riesgos y se optimiza la gestión de los mismos. Ambos aspectos son cruciales para poder definir los objetivos de la empresa, así como para determinar la priorización de las inversiones y puesta en marcha de nuevos proyectos. Se trata, en resumen, de que dichos responsables puedan analizar los riesgos al detalle y calcular las probabilidades de éxito para que el retorno de las inversiones quede lo más asegurado posible. La primera acción que ponen en marcha es la clasificación de los riesgos.

Durante la actividad de una organización se toman decisiones continuamente, tanto por el responsable como por el resto del equipo en función de sus responsabilidades respectivas. La toma de decisiones está, sin embargo, condicionada por la existencia de riesgo cuyos efectos y probabilidades pueden incrementarse por estas mismas decisiones. Cualquier decisión puede realizarse en tres condiciones diferentes:

- *Con certidumbre*. Se dispone de toda la información necesaria para predecir el resultado de la decisión.
- *Con incertidumbre*. No se dispone de la información necesaria para tomar una decisión. Únicamente se puede emplear la experiencia previa y la intuición.
- *Con presencia de riesgos*. Solo se dispone de información parcial, aunque los efectos de los acontecimientos pueden predecirse y su impacto está acotado.

En el proceso de toma de decisiones relativas a la tecnología y ante un problema determinado relativo a la aparición de un riesgo previamente identificado, tradicionalmente el gestor considera la situación en la que se encuentra la organización y, teniendo en cuenta su experiencia en el tratamiento de situaciones parecidas, selecciona una posible alternativa entre las previamente analizadas y predefinidas. La selección de la alternativa más adecuada no siempre es sencilla de determinar puesto que ello depende de múltiples factores contradictorios que será necesario priorizar en función de la maximización de algunos parámetros.

En el caso de una decisión con certidumbre, independientemente de la situación que finalmente ocurra, existirá una estrategia dominante que producirá mayores ganancias (o menores pérdidas) que cualquier otra. En este caso, todas las situaciones tienen la misma probabilidad de ocurrencia. No obstante, en la práctica no hay una estrategia dominante para las situaciones puesto que la toma de decisión se lleva a cabo con información parcial. Generalmente, los mayores beneficios se producen cuando los riesgos son más altos y las pérdidas más probables.

Normalmente, cada situación podrá producirse con una determinada probabilidad cuya estimación deberá conocerse de la manera más clara posible, si bien estas estimaciones son difíciles de obtener.

No todos los riesgos tienen la misma importancia. De entre todos los factores que permitirían caracterizar un riesgo, dos de ellos, el impacto y la probabilidad de ocurrencia, son los que tienen mayor importancia para el gestor. Debido a ello, la gestión de riesgos debe comenzar con la situación relativa de todos los riesgos identificados en un mapa bidimensional de impactos y probabilidades. Sobre este mapa se pueden tomar decisiones relativas a los riesgos en los que se debe prestar mayor atención.

La existencia de un riesgo con una probabilidad muy baja puede despreciarse a pesar de que su impacto sea muy alto. En otros casos, la probabilidad muy alta puede verse compensada porque el efecto sea muy pequeño. La importancia relativa depende de la consideración simultánea de ambos factores.

Debido a que surge la necesidad de clasificar los riesgos, se comienza por clasificar a los sectores, agrupando los que compartían mercados, estrategias, etc., los cuales se veían influenciados por factores de riesgo comunes. El objetivo fue tratar de optimizar su determinación y estudio.

2.2 Primera clasificación del riesgo

Los riesgos fueron clasificados en un primer momento como Riesgos Sistemáticos y Riesgos No Sistemáticos.

A los *Riesgos Sistemáticos* se les definió como los más comunes y controlables, y a los *Riesgos No Sistemáticos* como los más esporádicos y con menor control sobre ellos.

Una vez clasificados los riesgos, se trataba de buscar fórmulas para gestionar su combinación de una forma eficiente. Los analistas pensaron que la mejor forma de optimizar la *Gestión de Riesgos* pasaba por controlar al máximo los *Riesgos*

Sistemáticos, ya que con este tipo de riesgos controlados el nivel de seguridad de la inversión era bastante elevado. No obstante, el hecho de que los *No Sistemáticos* quedasen fuera de control, mantenía sobre los inversores una incertidumbre que en muchas ocasiones era insalvable, haciendo muy difícil la toma de decisiones a la hora de acometer grandes inversiones. Una gran inversión sometida a incertidumbres insalvables sobre su retorno, acababa siendo un lastre que en la mayoría de los casos terminaba en una desviación de la misma hacia otros mercados más estables.

La primera táctica que se puso en marcha para amortiguar el impacto de los riesgos no sistemáticos fue la diversificación, ya que con ella el riesgo final es un promedio de la totalidad de riesgos correlacionados.

3. Concepto de riesgo

La valoración del riesgo y su gestión, en un proceso coherente de toma de decisiones, es una cuestión relativamente nueva.

Actualmente, los mercados de futuros (o de instrumentos derivados) más relevantes en el mundo son los de Chicago y Nueva York cubriendo todas las áreas, materias primas (*commodities*), bonos, tasas de interés, índices bursátiles, divisas y acciones.

En 1994, J. P. Morgan propone *"Riskmetrics",* como un modelo para cuantificar los riesgos mediante el concepto de *"Valor en Riesgo"* (*Value at Risk*), el cual se define como la pérdida máxima en que se puede incurrir en una cartera de inversiones en un horizonte temporal definido y dado un nivel de confianza determinado. La importancia de este concepto es tal que algunas entidades de crédito, amparadas en el comité de Basilea sobre supervisión bancaria, calculan con modelos internos de cada entidad, cuál debe ser el volumen de recursos propios en función del valor en riesgo de sus carteras.

A partir de la década de los noventa se vive en un mundo con mucho más riesgo, ya que con el proceso de globalización vivido, los impactos producidos por un país se expanden al resto del mundo por la interrelación de las economías. Como ejemplos de los efectos de la globalización están, la devaluación del peso mejicano (1995, *"Efecto Tequila"),* la crisis asiática (1997, *"Efecto Dragón"*), la crisis rusa (1998, donde se desploma el rublo y su moratoria sobre su deuda pública, dando como resultado una gran incertidumbre a los mercados), la devaluación del real brasileño (1999, "*Efecto Samba"*), la caída del índice Nasdak (2000, *"pinchazo de la burbuja tecnológica"*), la desaceleración económica de Estados Unidos (2001), el derrumbe de la economía Argentina (2002, *"Efecto Tango"*) o la más reciente burbuja inmobiliaria con efectos sobre la bolsa americana, inglesa y española en la primavera del 2007.

Con todo esto, se aprecia que los mercados financieros se han venido enfrentando a una creciente incertidumbre de precios. Esta incertidumbre se relaciona con tres precios financieros básicos como con son los tipos de cambio, las tasas de interés y las materias primas.

A mediados de los noventa aparece *La Regla de las 3 D*, regla que aconseja a los inversores sobre tres factores que son fundamentales en cualquier inversión, *diversificación, disponibilidad y duración*. Dicha regla aconseja al inversor que, además de diversificar, es fundamental que los fondos invertidos sean fondos disponibles (fondos que no se necesiten recuperar a corto plazo para usos alternativos), al tiempo que se debe atender al largo plazo si la inversión lo requiere. La consideración del tiempo resulta de especial relevancia. Las necesidades de liquidez, si existen restricciones a la disponibilidad inmediata, ya sea en forma de cantidades o de precios, implica el riesgo para el inversor de tener que retirarse de la operación en circunstancias adversas del mercado, pudiéndose encontrar con una pérdida o con una rentabilidad baja en relación con las expectativas creadas en el momento de la inversión, o a lo largo del período de la misma. (Hortalá, J. 2000).

Tratar los riesgos exige comprenderlos, es decir, saber medirlos y valorarlos; establecer límites de riesgo aceptable y qué tipo de riesgos deben ser evitados; gestionarlos, introduciendo cambios, si fuera necesario, en los planes originales de gestión, y controlarlos mediante procedimientos previamente establecidos.

Los gestores tienen a diario que manejar información, no integrada y elaborada sobre los mercados; han de seguir el comportamiento de los demás inversores, intentando anticiparse. Se plantean escenarios donde el riesgo no sólo es ya una probabilidad (cómo evolucionará un riesgo estadísticamente predecible), sino incertidumbres en un horizonte sobre el que se poseen escasas referencias y donde pueden aparecer riesgos no previstos, alterando incluso los modelos de gestión preestablecidos.

Surge, también, el enfoque de escenarios, que lleva a establecer límites según entornos probables y a seguir cuidadosamente algunos sectores para ajustar las expectativas que despiertan a las realidades de su productividad y beneficios.

La idea de los escenarios plantea que si en el pasado la volatilidad es un valor conocido, en el futuro es una incógnita, por lo que el análisis de probabilidades históricas deja paso al de las prospecciones.

La aversión al riesgo se cuantifica como la máxima pérdida soportable, incorporando al elemento subjetivo otros como la situación patrimonial de partida, horizonte temporal de la inversión, necesidad de percibir una renta o un capital diferido o las limitaciones de liquidez.

En el tratamiento de la información hay que atenerse a la convención de la teoría según la cual, la aparición de nueva información es el único elemento que mueve el mercado. Los agentes toman posiciones que se van ajustando hasta llegar a un equilibrio, y sucesivos *inputs* de nueva información van alterándolo. Esta información es supuestamente compartida por todos los agentes del mercado. (Ruiz, G. 2000)

No obstante, los gestores procuran dedicar recursos al conocimiento de los sectores, empresas y mercados para anticipar información, y aunque ello no debería influir en el equilibrio del mercado (en un plazo dado), sí puede proporcionar oportunidades en la gestión.

Por otra parte, las empresas desarrollan una intensa actividad trasmitiendo información al mercado para generar expectativas que les sean favorables.

Por todo ello, no se debe tomar una posición situacional ante el riesgo, sino que hay que reducirlo a base de crear herramientas útiles para introducir una sistemática, definir las posiciones, elaborar estrategias y tomar posiciones dentro de una lógica.

3.1 Definiciones actuales de Gestión de Riesgos

Entre las principales definiciones, y más destacables, de *Gestión de Riesgos* se encuentran las del *Project Management Institute* (Duncan, W. R. 1996):

- Proceso por el que los factores de riesgo se identifican sistemáticamente y se evalúan sus propiedades.
- Metodología sistemática y formal que se concentra en identificar y controlar áreas de eventos que tienen la capacidad de provocar un cambio no deseado.

- Arte y ciencia de identificar, analizar y responder a los factores de riesgo a lo largo de la vida del proyecto y en el mejor cumplimiento de sus objetivos.

Para Felipe Ruiz, Catedrático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid, la *Gestión del Riesgo* es el proceso de toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre sobre una acción que va a suceder y sobre las consecuencias que existirán si esta acción ocurre.

La gestión de riesgos se trata, en primer lugar, de seleccionar a que riesgos se puede exponer uno y contra cuáles debe inmunizarse. En segundo lugar, se trata de calcular los riesgos de diferentes valores, y en tercer lugar, de la creación y el mantenimiento de carteras con las características indicadas de riesgo-rendimiento. Los modelos de optimización hacen hincapié principalmente en la tercera actividad, pero las tres están integradas y son interdependientes.

En la Figura 1, se muestra el proceso general de la gestión de riesgo, el cual puede ser aplicable a un programa, una política, una actividad, etapas de un proceso, etc. Enfocándose de diferente manera en cada caso. Es decir, la aplicación del proceso de gestión de riesgo dependerá del contexto en el que este se utilice.

Sin embargo, el proceso de gestión de riesgos aplicado a cualquier actividad consta de las siguientes etapas:

- Establecimiento del contexto
- Identificación de los riesgos
- Análisis de riesgos
- Evaluación de riesgos
- Tratamiento de los riesgos
- Monitorización y revisión

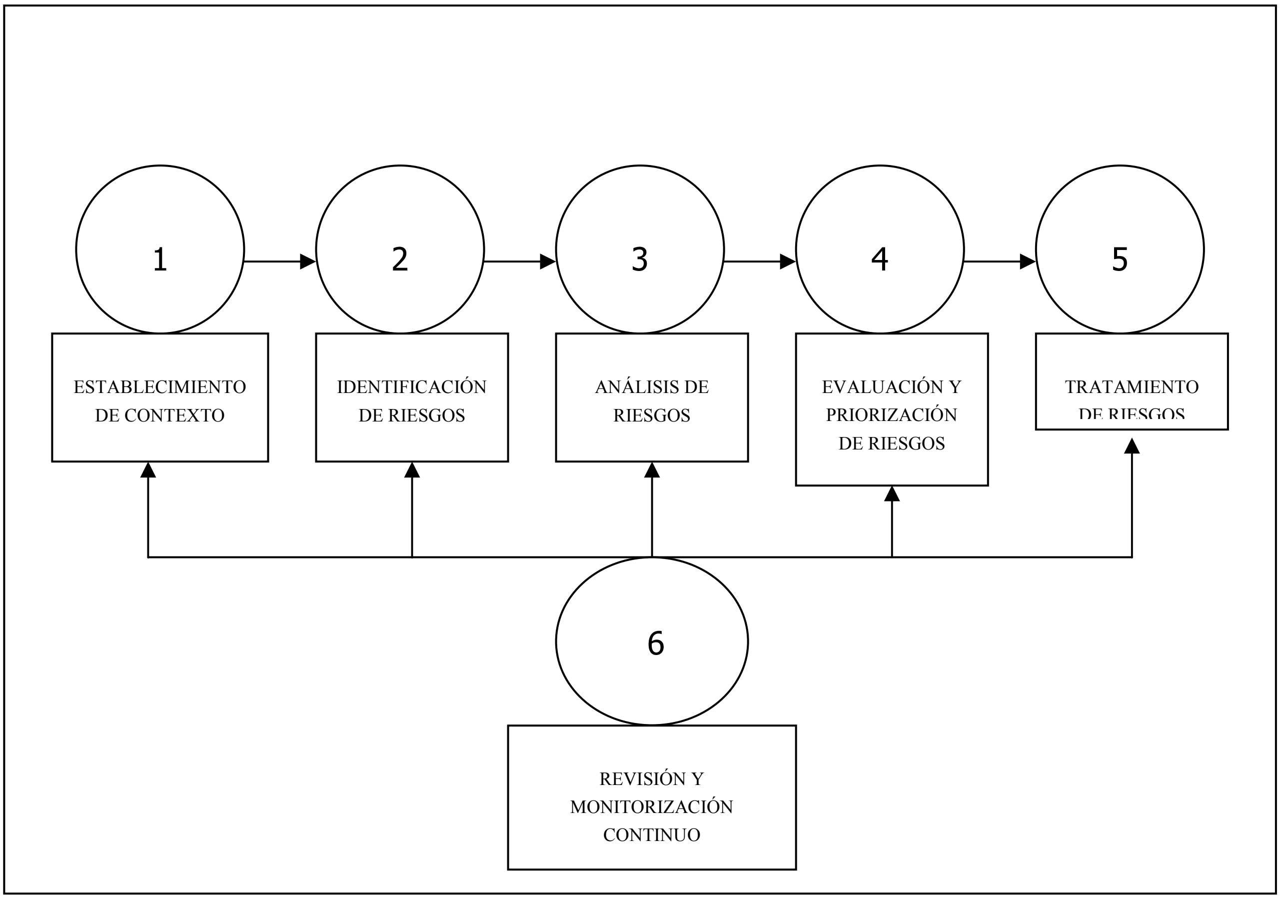

Figura 1. Proceso de gestión de riesgos

- *Establecimiento del Contexto.* Quien debe administrar riesgos necesita identificar la contribución que hará a la organización en el logro de sus objetivos, valores, políticas y estrategias, cuando tome decisiones acerca de los riesgos (contexto organizacional), teniendo en cuenta, también, el enfoque y profundidad de la revisión de los riesgos (contexto de administración de riesgo), los cuales ayudan tanto a definir los criterios que determinarán finalmente cuales de los riesgos identificados son aceptables y cuales no lo son, así como establecer las bases de los controles necesarios y la administración de las opciones.

- *Identificación de Riesgos.* Para definir un programa o proceso de fiscalización es necesario conocer con antelación exactamente cuáles son esos riesgos y, cómo y por qué pueden surgir, más aún, los riesgos no identificados pueden significar una amenaza para la inversión. Para poder identificar los riesgos es necesario conocer:

- La normativa actual
- A las entidades o agentes económicos involucrados (Empresas, Bancos, Servicios Públicos, etc.)
- Los procesos involucrados, sus características y principales actividades.
- Las responsabilidades de los agentes económicos involucrados, la secuencia y la forma de relacionarse entre ellos.
- Los documentos que intervienen en las operaciones, la función que cumplen, quiénes los emiten y quiénes los reciben.
- Los tiempos asociados a las actividades en los procesos involucrados.
- La participación de los distintos agentes económicos que intervienen en la investigación.
- En general, cualquier otro estudio que se determine necesario para planificar las tareas con eficacia y definir con éxito los procedimientos a seguir.

- *Análisis de riesgos.* Una vez identificados los riesgos, se debe analizar la posibilidad y las consecuencias de cada factor de riesgo con el fin de establecer el nivel de riesgos, de forma que se pueda conocer que factores de riesgo tendrían un mayor efecto y, por lo tanto necesitarían ser administrados o tratados. El nivel de riesgo se determina considerando la posibilidad que existe de las cosas sucedan y las posibles consecuencias que existirán si este hecho ocurre (el impacto o la magnitud del efecto).

Hay tres categorías de métodos utilizados para determinar el nivel de riesgos. Dichos métodos pueden ser:

- Cualitativos
- Semicuantitativos
- Cuantitativos

El nivel de riesgo está determinado por la relación entre la posibilidad y la consecuencia. En la Tabla 1 se puede ver claramente.

Tabla 1. Determinación del nivel de riesgo

PROBABILIDAD	CONSECUENCIAS				
	Extremo	**Muy Alto**	**Medio**	**Bajo**	**Mínimo**
Casi cierto	Alto	Alto	Alto	Importante	Importante
Probable	Alto	Alto	Importante	Importante	Importante
Moderado	Alto	Alto	Importante	Significativo	Bajo
Poco Probable	Alto	Importante	Significativo	Bajo	Bajo
Casi Probable	Importante	Importante	Significativo	Bajo	Bajo

- Riesgo alto: Requiere una investigación detallada y una planificación a niveles superiores.
- Riesgo importante: Requiere una atención del personal superior.
- Riesgo significativo: Se debe especificar la responsabilidad de gestión.

- Riesgo bajo: Se maneja mediante procedimientos de rutina.

El análisis cualitativo también se puede utilizar cuando el nivel de riesgo no justifica el tiempo y los recursos necesarios para hacer un análisis completo donde los datos numéricos son inadecuados para un análisis más cuantitativo o para desarrollar una observación general inicial de los riesgos para un análisis posterior y más detallado.

Un enfoque semicuantitativo puede utilizar clasificaciones de palabras como alto, medio o bajo, o descripciones más detalladas de la probabilidad y la consecuencia. Estas clasificaciones se demuestran en relación con una escala apropiada para calcular el nivel de riesgo.

El nivel de riesgo puede ser calculado utilizando el método cuantitativo en las situaciones donde la probabilidad de ocurrencia y las consecuencias puedan ser cuantificadas (véase Tabla 2).

Tabla 2. Métodos de análisis de riesgos

Los métodos cuantitativos incluyen:	**Los métodos cualitativos incluyen:**
El análisis de probabilidad	Brainstorming
El análisis de consecuencias	Cuestionario y entrevistas estructuradas
El modelado o simulación computacional	La evaluación que utiliza grupos multi-disciplinarios
El análisis estadístico / numérico	El juicio de especialistas y expertos, como la técnica Delphi
La investigación de mercado	
Análisis de redes	
Análisis de coste del ciclo de vida	
Árboles de decisión	
Análisis de eventos	
Diagramas de influencia	

- *Evaluación y Priorización de Riesgos*. Una vez analizados los riesgos, hay que decidir si éstos son aceptables o no, para lo cual hay que comparar el nivel de cada riesgo. De esta forma se clasifican los riesgos más importantes para identificar las prioridades de gestión. La evaluación debe tener en cuenta el grado de control sobre cada uno de los riesgos y el impacto sobre los costes y los beneficios, y las posibles oportunidades que se puedan presentar.

Una vez evaluados y priorizados los riesgos, se clasifican de acuerdo con las prioridades de gestión para su tratamiento.

- *Tratamiento de los riesgos*. El tratamiento de los riesgos necesita ser adecuado y apropiado de acuerdo con la significancia del riesgo.

Como pauta general los niveles de riesgo se pueden dividir en:

- Riesgos de bajo nivel, es decir, que pueden ser aceptados y puede no ser necesaria una acción adicional. Estos deben ser unos riesgos controlados.

- Riesgos significativos, que son riesgos más importantes por lo que deben ser tratados.

- Riesgos de alto nivel, los cuales requieren de una cuidadosa administración o gestión y de la preparación de un plan formal para administrar los riesgos.

Existen varias opciones para el tratamiento de los riesgos:

- Eludir el riesgo. Hay que destacar que el eludir un riesgo puede resultar que otros riesgos se vuelvan más significativos.

- Reducir el nivel de riesgo, reduciendo la probabilidad de ocurrencia, las consecuencias, o ambas a la vez. La probabilidad puede reducirse a través de los controles de gestión tales como utilizar procedimientos alternativos, aseguramiento de la calidad tanto de la inversión como de la gestión, testeo, aumento de la capacitación, aumento de la supervisión, etc.

- Transferir el riesgo, es decir, pasar la responsabilidad de un riesgo de una organización a otra. Un ejemplo significativo es transferir el riesgo a una compañía de seguros (con su coste adicional, evidentemente), la cual tendrá que acudir en caso de que el evento ocurra. Este caso sería de transferencia completa. Existe la posibilidad de transferir la responsabilidad de un riesgo parcialmente, como podría ser la de involucrar a la otra parte para que comparta las responsabilidades y consecuencias de una forma acordada. Hay que tener siempre en cuenta que los riesgos deben ser ubicados en la parte que ejercite los controles más efectivos sobre estos riesgos.

- Aceptar y retener los riesgos cuando estos no pueden ser eludidos, reducidos o transferidos, o donde el coste de eludir o transferir no se justifica porque la probabilidad y la consecuencia son bajas.

El coste del manejo del riesgo debe ser comparado con los beneficios obtenidos. Es necesario determinar el impacto del coste total de los riesgos y el coste de administrarlos y manejarlos.

Las opciones deben ser evaluadas sobre la base de que los riesgos puedan ser reducidos y la extensión de los beneficios aumentadas, o bien se puedan crear nuevas oportunidades. Generalmente cuanto mayor sea la oportunidad, mayor es el riesgo asociado. No obstante existen muchos ejemplos donde una opción de reducción de riesgo no es justificable solamente en términos económicos. Hay veces en que hay que tener en cuenta los costes sociales, políticos, etc.

A continuación se muestra la Tabla 3. Determinación del tratamiento del riesgo , con la relación existente entre el tratamiento del riesgo, el nivel de riesgo y oportunidad ofrecidos por el mismo.

Tabla 3. Determinación del tratamiento del riesgo

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">EXTENSIÓN DE LA OPORTUNIDAD OFRECIDA POR EL RIESGO</td></tr>
<tr><td rowspan="5">NIVEL DE RIESGO</td><td></td><td>Excelente</td><td>Bueno</td><td>Pobre</td></tr>
<tr><td>Alto</td><td colspan="2" rowspan="3">Aceptación del riesgo requerirá un monitoreo o control extenso y una administración extensa.

La aceptación debería basarse sobre una evaluación de costos del tratamiento del riesgo v/s la oportunidad/beneficio representada por el riesgo</td><td rowspan="3">No aceptar el riesgo.

Buscar un tratamiento que proporcione una mejor oportunidad</td></tr>
<tr><td>Importante</td></tr>
<tr><td>Significativo</td></tr>
<tr><td>Bajo</td><td colspan="2">Aceptable</td><td>El riesgo es aceptable pero puede haber tratamientos que proporcionen mejores oportunidades</td></tr>
</table>

- *Monitorización y Revisión.* La monitorización y revisión es una etapa esencial e integral en el proceso de gestión del riesgo. Es necesario monitorear la efectividad del plan, las estrategias y el sistema de administración que ha sido establecido para controlar la implementación de los tratamientos de riesgo.

Los riesgos necesitan ser controlados periódicamente para garantizar que las circunstancias cambiantes no alteren las prioridades de los riesgos, Los riesgos que permanecen estáticos son muy pocos.

Para que un riesgo sea gestionable y, por tanto, susceptible de considerarse dentro de los procesos de gestión en una organización, es necesaria la existencia simultánea de los siguientes componentes:

- *Pérdidas asociadas con el riesgo identificado*. Se refiere a la existencia de efectos negativos resultantes de que el riesgo se concrete durante el desarrollo de la actuación contemplada. Generalmente estas pérdidas se pueden hacer corresponder con una valoración económica, aunque hay casos en los que eso no se produce así, como es el caso de pérdidas de vidas humanas o de desastres medioambientales. Aunque siempre sea posible una monetarización de la pérdida.

- *Incertidumbre asociada*. Es la probabilidad, pero no certidumbre, de que el riesgo identificado ocurra efectivamente y el momento temporal en el que eso pueda suceder. Hay que tener en cuenta que esta condición implica que al riesgo debe poder asociársele una distribución estadística y una probabilidad de ocurrencia a lo largo del tiempo.

- *Elección entre alternativas*. Posibles actuaciones que mitiguen los efectos del acontecimiento indeseable. Si no existe elección por parte del gestor no existe riesgo, aunque sí puedan existir pérdidas. Estas alternativas permiten al gestor actuar para reducir su aparición, las pérdidas ocasionadas o ambas.

3.2 Utilidad esperada.

La introducción del concepto de riesgo en el análisis de las inversiones se basa en la hipótesis de la utilidad esperada.

La *Teoría de la Utilidad Esperada* (*TUE*) fue enunciada por Von Neumann, J. y Morgenstern, O. en 1944. Según ambos autores, si se pregunta a un ciudadano si prefiere una taza de té segura, o como alternativa una taza de café con cierta probabilidad X. Si, por ejemplo, el individuo se mostraba indiferente entre ambas alternativas cuando la probabilidad de tomar café era de X=50%, la utilidad del café era doble que la del té. Mediante ese método comparativo se podía calcular una función de utilidad para cada sujeto, que atribuyera valor numérico al disfrute conseguido con sucesivas cantidades de cada bien. Calculada esa función de utilidad, para escoger entre alternativas, el sujeto compararía la utilidad esperada de cada alternativa, es decir, multiplicaría la utilidad de cada alternativa por su probabilidad, y elegiría aquella que la tuviera más alta.

Kahneman, D. (Premio Nobel de Economía, 2002) formuló una nueva teoría sobre la decisión humana, conocida como la *Prospect Theory o Teoría de la Perspectiva*, que ha dado origen a una nueva rama del análisis financiero, el comportamiento de las Finanzas (*Behavioral Finance*).

Si se tiene que:

- E: Esperanza.

- U: Utilidad esperada.

- x, y, z: Valor de la inversión o activo financiero.

- $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$: Resultado esperado de la inversión o activo financiero.

- x_i: Valor de x en el estado i, siendo $i = 1, 2, \ldots, s$

- p_i: Probabilidad de que el estado i se produzca o presente.

Los agentes toman decisiones de consumo e inversión que buscan maximizar su utilidad esperada. Así, bajo condiciones de incertidumbre, una opción con inversión será aquella en que:

$$E[U(\tilde{x})] \geq E[U(\tilde{y})] \tag{3.1}$$

Donde la utilidad esperada se define como la esperanza matemática de la función de utilidad del inversor, lo que en términos discretos se puede expresar con el sumatorio de los distintos niveles de utilidad generados por los resultados posibles de las inversiones, por la probabilidad de que esos resultados se presenten:

$$E[U(\tilde{x})] = \sum_{i=t_0}^{t_1} U(x_i) p_i \qquad (3.2)$$

En términos continuos sería:

$$E[U(\tilde{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) f(x) dx \qquad (3.3)$$

Siendo *f(x)* la función de densidad de la alternativa *x*.

Las distintas variables de inversión quedan así definidas como variables aleatorias. En el caso de los activos, cada activo da lugar a un flujo de pagos, de dividendos y de valores de realización, según un proceso que le es propio. Ese flujo es formalizado por una variable aleatoria $\tilde{x}$ perteneciente al conjunto S de sucesos aleatorios definido en el campo de los números reales, $\tilde{x} : S \rightarrow R$, de manera que el subconjunto de sucesos F contiene todos los acontecimientos correspondientes a cada uno de los activos. Así el espacio *(S, F)* que proporciona una distribución de probabilidad puede considerarse como un resumen de la incertidumbre correspondiente al flujo de pagos de los activos financieros.

En los modelos más simples, de carácter estático, se supone la existencia de un único período temporal, delimitado por un momento temporal t_0, que corresponde al momento presente, y un momento t_1, que corresponde al futuro incierto. En el momento t_0, el activo financiero x se negocia al precio x_0, en el momento t_1, el suceso $s \in S$ se realiza, y el valor de x se concreta en $x(s)$.

Por el contrario, el valor esperado de un determinado activo financiero se expresa como la esperanza matemática de la distribución de probabilidad que define dicho proceso aleatorio. En términos discretos:

$$E(\tilde{x}) = \sum_{i=t_0}^{t_1} x_i p_i \tag{3.4}$$

Donde x_i corresponde al valor de $\tilde{x}$ en cada uno de los s estados posibles y p_i es la probabilidad de que dicho estado se presente. En similares términos se expresa apara distribuciones de probabilidad continuas:

$$E(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{3.5}$$

Donde $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria $\tilde{x}$.

La Teoría de la Utilidad Esperada se formuló no solo como canon de racionalidad, sino también como expresión razonable del comportamiento de las personas.

Los experimentos de Allais, M. (1953) mostraron ejemplos que confirmaban que la reacción frente a una variación de probabilidad del 1% es muy distinta si se pasa del 99 al 100% (o al revés, del 1 al 0%), que si se pasa del 20 al 21%.

Así mismo, cuando se tiene que elegir entre diversas alternativas, se rehuye instintivamente de aquellas en que las probabilidades no están claras, existiendo una inclinación por aquellas que están bien definidas (Ellberg, D. 1961). De ello, la sorprendente reticencia que existe entre los inversores a invertir en activos extranjeros o en activos de renta variable.

3.3 Axiomas de Von Neumann-Morgenstern.

Como se ha comentado anteriormente, la hipótesis de utilidad esperada establece que ante dos alternativas de inversión bajo incertidumbre los inversores no optarán por la de mayor valor esperado, sino por la que genere mayor utilidad esperada. Para que esta hipótesis pueda ser demostrada es preciso realizar una serie de supuestos sobre la racionalidad y consistencia del comportamiento del inversor, conocidos con el nombre de *"axiomas de la utilidad cardinal bajo incertidumbre"*, formulados por Von Neumann, J. y Morgenstern, O. por lo que también se denominan *Axiomas de Von Neumann-Morgenstern*. A continuación se detalla cada uno de ellos.

3.3.1 Axioma de comparabilidad.

Los inversores siempre podrán establecer una relación de preferencia entre dos alternativas cualesquiera de inversión con resultado incierto, de manera que pueden decidir que la alternativa $\tilde{x}$ es preferida a la $\tilde{y}$, $(\tilde{x} > \tilde{y})$; o que la $\tilde{x}$ es menos preferida que la $\tilde{y}$, $(\tilde{x} < \tilde{y})$; o lo que es indiferente entre $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, $(\tilde{x} \approx \tilde{y})$.

3.3.2 Axioma de Transitividad o consistencia.

La relación de preferencia que establecen los inversores entre dos alternativas cualesquiera es una relación transitiva, es decir, las decisiones de inversión de los individuos son consistentes, de manera que si el inversor decide que la opción $\tilde{x}$ es preferida a la opción $\tilde{y}$, y que, a su vez, la opción $\tilde{y}$ es preferida a la opción $\tilde{z}$, entonces, bajo cualquier circunstancia, la opción $\tilde{x}$ es preferida a la opción $\tilde{z}$:

$$\tilde{x} > \tilde{y} \therefore \tilde{y} > \tilde{z} \Rightarrow \tilde{x} > \tilde{z} \tag{3.6}$$

De la misma manera, si el inversor se siente indiferente entre la opción $\tilde{x}$ y la opción $\tilde{y}$, y también se encuentra indiferente entre las opciones $\tilde{y}$ y $\tilde{z}$**,** se cumplirá que será, asimismo indiferente entre $\tilde{x}$ y $\tilde{z}$:

$$\tilde{x} \approx \tilde{y} \therefore \tilde{y} \approx \tilde{z} \Rightarrow \tilde{x} \approx \tilde{z} \tag{3.7}$$

3.3.3 Axioma de sustitución e independencia.

Si se tiene que:

-α : Nivel de probabilidad.

La relación de preferencia que se establece entre dos alternativas cualesquiera se mantiene aunque dichas alternativas pasen a formar parte de un conjunto de alternativas, es decir, de una combinación lineal de alguna de esas alternativas con una tercera alternativa:

$$\begin{gathered}
\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in S \;\; \alpha \in (0,1) \\
\tilde{x} > \tilde{y} \Rightarrow \alpha\tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{z} > \alpha\tilde{y} + (1-\alpha)\tilde{z} \\
\tilde{x} \approx \tilde{y} \Rightarrow \alpha\tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{z} \approx \alpha\tilde{y} + (1-\alpha)\tilde{z}
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Este axioma presupone la independencia de las distribuciones aleatorias de las distintas inversiones, es decir, que el nivel de utilidad (satisfacción) generado en el inversor como consecuencia del resultado alcanzado por una determinada inversión no depende de cual habría sido si se hubiese presentado cualquier otro suceso posible. Este planteamiento es difícil de mantener cuando se utiliza el criterio media-varianza para la maximización de la utilidad esperada, ya que el riesgo de varias inversiones, medido por su varianza, no depende exclusivamente del riesgo individual de las inversiones que la componen, sino que también dependen de las covarianzas de las distintas distribuciones de rendimientos de las inversiones, por lo que las combinaciones lineales de las inversiones modifican sustancialmente el orden de las preferencias de los activos individuales al compensarse o multiplicarse el riesgo de las inversiones individuales dentro del conjunto de las inversiones.

3.3.4 Axioma de continuidad o mensurabilidad.

Para todo $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in S$, si $\tilde{x} > \tilde{y} > \tilde{z}$, existen dos niveles de probabilidad $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que $\alpha\tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{z} > \tilde{y} > \beta\tilde{x} + (1-\beta)\tilde{z}$. O dicho en otros términos, siempre existe un nivel de probabilidad único para la presentación de la opción más preferida, que hace indiferente al inversor entre una opción intermedia y una combinación aleatoria de la opción más preferida con probabilidad α de que se presente, y la opción menos preferida, con probabilidad $(1-\alpha)$ de que se presente:

$$\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in S, \ \text{si } \tilde{x} > \tilde{y} > \tilde{z} \Rightarrow \exists \alpha : \textit{único} / \tilde{y} \approx \alpha\tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{z} \qquad (3.9)$$

Del axioma de continualidad o mensurabilidad se desprende una consecuencia muy importante para el análisis del comportamiento del inversor, ya que de esta manera no hay alternativas de inversión intrínsecamente buenas o malas que impliquen su elección o rechazo automático para un inversor, sino que cualquier inversión por poco preferida que sea individualmente considerada, puede ser elegida en combinación con otras de diferentes niveles de preferencia para el inversor.

La denominación de "mensurabilidad" procede del hecho de que el nivel de probabilidad único α, que hace comparable una inversión de preferencia intermedia con una combinación de la más preferida con la menos preferida, puede utilizarse como una media cardinal de su preferencia o índice de utilidad cardinal.

3.3.5 Axioma de ordenación.

De acuerdo con el axioma anterior, siempre es posible determinar el nivel de probabilidad único de α que hace a un inversor indiferente entre una opción de preferencia intermedia y una combinación lineal de las opciones más y menos preferidas. Si para dos opciones intermedias, $\tilde{y}$ y $\tilde{u}$, se fijan estas probabilidades, α y β respectivamente, tenemos que si α es mayor que β, entonces la opción $\tilde{y}$ es preferida por el inversor frente a la opción $\tilde{u}$:

$$\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{z} \in S \therefore \exists \alpha, \beta \in (0,1)$$

$$\tilde{x} > \tilde{y} > \tilde{z} \therefore \tilde{x} > \tilde{u} > \tilde{z}$$

$$\tilde{y} \approx \alpha\tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{z} \therefore \tilde{u} \approx \beta\tilde{x} + (1-\beta)\tilde{z} \tag{3.10}$$

$$\text{Si } \alpha > \beta \Rightarrow \tilde{y} > \tilde{u}$$

$$\text{Si } \alpha < \beta \Leftarrow \tilde{y} < \tilde{u}$$

Si el anterior axioma permitía obtener un índice de utilidad cardinal, el presente axioma de ordenación hace posible clasificar las distintas opciones de inversión por su nivel de preferencia. En términos matemáticos, el axioma de ordenación permite trasladar el análisis de una relación de preferencia $(\tilde{y} > \tilde{u})$, puramente cualitativo, a una relación de orden $(a > b)$, y por tanto, cuantitativo, donde se pueden usar funciones matemáticas para representar las preferencias de los inversores, funciones de utilidad cardinal que permitan determinar el conjunto de activos financieros que maximicen la utilidad esperada del inversor. De esta manera, se puede identificar *a* con el valor de la función de utilidad para el activo $\tilde{y}$, y de la misma manera se haría con *b*:

$$U(\tilde{y}) = a\,,\ U(\tilde{u}) = b \tag{3.11}$$

$$U(\tilde{y}) > U(\tilde{u}) \Leftrightarrow \tilde{y} > \tilde{u} \tag{3.12}$$

La función de utilidad, por tanto, tendrá que guardar el mismo orden que las preferencias del inversor sobre los distintos activos financieros, por lo que si $U(\tilde{y}) > U(\tilde{u})$, forzosamente el inversor preferirá $\tilde{y}$ a $\tilde{u}$.

Asimismo, el concepto de utilidad esperada puede ser utilizado para medir el grado de preferencia de combinaciones de activos con riesgo.

Si llamamos *G* a una situación de incertidumbre donde se puede obtener un determinado valor *x* con una probabilidad α o el valor *y* con una probabilidad $(1-\alpha)$, el nivel de utilidad que genera esta combinación incierta puede determinarse usando el concepto de utilidad esperada:

$$U(G[x, y : \alpha]) = \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \tag{3.13}$$

Además de los anteriores axiomas de la utilidad cardinal bajo incertidumbre, para formalizar adecuadamente el comportamiento del inversor se precisa caracterizar su función de utilidad. El supuesto de no saciedad implica que los inversores siempre preferirán tener más riqueza, es decir, no existe un punto de saciedad a partir del cual, incrementos adicionales de riqueza sólo generan disminuciones del nivel total de utilidad. Matemáticamente, el supuesto de no saciedad se refleja en funciones de utilidad estrictamente crecientes, cuya primera derivada, que corresponde al concepto teórico de utilidad marginal de la riqueza, es siempre positiva.

3.3.6 Teoría de la Perspectiva.

Debido a la acumulación de anomalías que no encajaban con la *Teoría de Utilidad Esperada*, nació la *Teoría de la Perspectiva (TP)* debida a Kahneman, D. y Tversky, A. 1979, conocida en el mundo anglosajón como *Prospect Theory* (literalmente, *Teoría de las Alternativas*). Dichos autores abordan el relativismo de las decisiones.

La Teoría de la Perspectiva (*TP*) tiene una base empírica y aspira a reflejar como se comportan las personas en la realidad, no como debería ser el comportamiento en el caso de que este fuera racional.

Sus diferencias esenciales con la *Teoría de Utilidad Esperada* se basan en la definición de las alternativas sobre las que versan las decisiones, la valoración que se les da y la ponderación que, a la vista de su probabilidad, se les atribuye.

Para definir las alternativas, en primer lugar, hay que simplificar los problemas de decisión que se plantean. En segundo lugar, no compara valores absolutos (caso de la *TUE*), sino variaciones o cambios respecto a cierto nivel que se toma como referencia, luego las ganancias o pérdidas se ven respecto a dicho nivel. En tercer lugar, se refiere a la combinación a realizar en el caso de enfrentarse a una serie de acontecimientos. Por ejemplo, una ganancia seguida de una pérdida más pequeña, se percibirán como una ganancia neta o, por el contrario, se mantendrán separadas y se percibirán de esta forma.

Para valorar las alternativas, la *Teoría de la Perspectiva* atribuye a cada alternativa (entendida como ganancia o pérdida respecto al nivel de referencia) un cierto valor. Ese valor tiene una función en forma de “S” (véase Figura 2) y se caracteriza por:

- En materia de ganancias, el valor marginal, que se atribuye a cada nueva unidad, es cada vez menor (la curva va perdiendo pendiente). Es por ello, por lo que, en materia de ganancias, suele ser preferible una ganancia cierta a otra mayor pero hipotética.

- En materia de pérdidas, su impacto marginal es cada vez menor. Es por ello, que no suele importar a sufrir grandes pérdidas si con ello se evita una pérdida menor pero cierta. Así pues, a diferencia de la *Teoría de la Utilidad Esperada*, la *Teoría de la Perspectiva* pronostica que en materia de pérdidas se es más propenso al riesgo.

- En las inmediaciones del origen de coordenadas, la pendiente de la curva en el tramo de pérdidas (cuadrante inferior izquierdo) es mucho mayor que en el de las ganancias (cuadrante superior derecho). Así pues, la "*S*" es asimétrica, y su tramo descendente es más vertical que el ascendente. Esa asimetría refleja nuestra aversión a las pérdidas. Según Kahneman, D. y Tversky, A. siempre se rechaza una apuesta que ofrezca ganar o perder la misma cantidad con una probabilidad del 50%, pues las pérdidas "duelen" más de lo que "alegran" las ganancias de igual importe. Una manifestación directa de lo explicado el llamado *"Efecto Dotación"*, es decir, un individuo pide más por desprenderse de algo que ya tiene (pérdida), que lo que estaría dispuesto a pagar por adquirirlo.

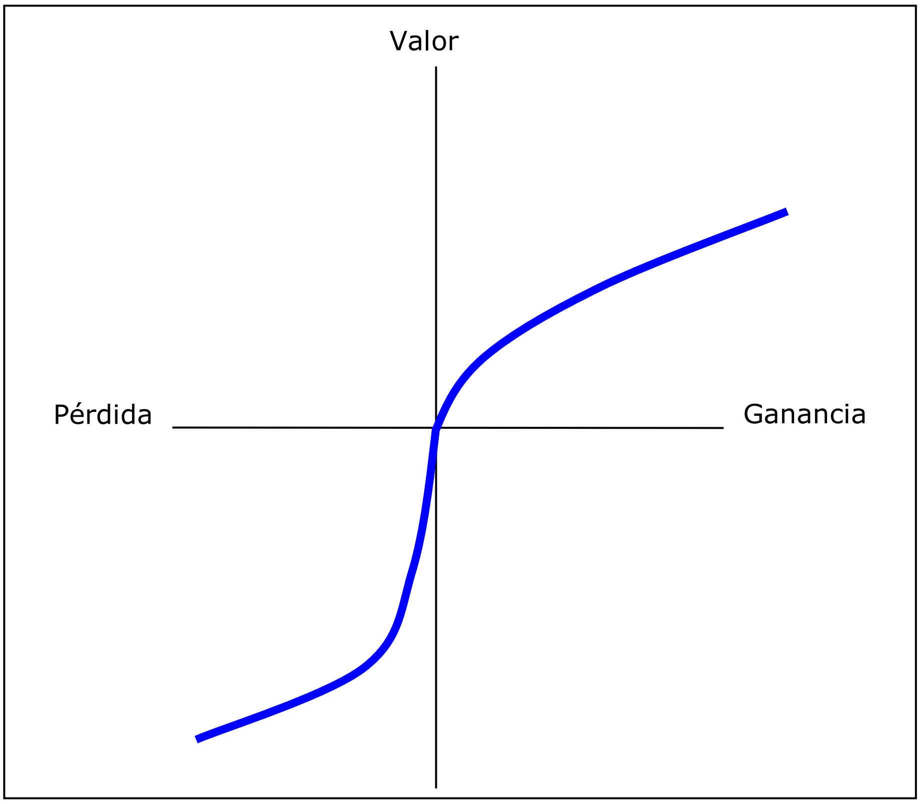

Figura 2. Función de valor

En cuanto a la ponderación de alternativas, la *Teoría de la Perspectiva* no pondera las alternativas con sus posibilidades alternativas, sino con ciertos pesos decisorios que guardan una relación no lineal con las probabilidades. Es decir, son mayores que éstas cuando las probabilidades son bajas, perdiendo sensibilidad (pendiente) en los tramos centrales de probabilidad y la recuperan de nuevo para probabilidades muy altas, atraídas por el efecto certeza. La Figura 2 ilustra la relación que la *Teoría de la Perspectiva* supone entre probabilidades y pesos decisorios.

3.4 Actitudes del inversor frente al riesgo: la aversión al riesgo

El valor esperado o valor actuarial de una variable aleatoria, como ya se ha especificado en las ecuaciones (3.4) y (3.5), aplicado el concepto a los activos financieros en un ambiente de incertidumbre, indica el valor final que se debe esperar del activo *x,* por término medio, en el momento t_1.

A nivel teórico, la decisión que un individuo pueda tomar ante el dilema de invertir en un activo financiero $\tilde{x}$, con el resultado final incierto que ello supone, o recibir de manera cierta, sin riesgo, su valor esperado $E(\tilde{x})$, nos permitirá cualificar la actitud del inversor frente al riesgo. De manera que si el inversor prefiere el valor esperado del activo financiero frente al propio activo, se dirá que es averso al riesgo; si por el contrario, prefiere invertir en el activo financiero con riesgo antes que recibir su valor esperado o valor actuarial, se dirá que el individuo es propenso al riesgo. Por último, si el individuo se siente indiferente entre el propio activo financiero o su valor esperado, se dirá que se trata de un individuo neutral al riesgo.

Si la esperanza del valor esperado de la inversión es mayor que el propio valor esperado, el individuo es averso al riesgo [$E(\tilde{x}) > \tilde{x} \Rightarrow$ Averso al riesgo]

Si la esperanza del valor esperado de la inversión es menor que el propio valor esperado, el individuo es propenso al riesgo [$E(\tilde{x}) < \tilde{x} \Rightarrow$ Propenso al riesgo]

Si la esperanza del valor esperado de la inversión es similar que el propio valor esperado, el individuo es neutral al riesgo [$E(\tilde{x}) \approx \tilde{x} \Rightarrow$ Neutral al riesgo]

Aplicando la relación existente entre las preferencias del inversor y su función de utilidad, de acuerdo con lo visto en el axioma de ordenación, se pueden redefinir las actitudes de los inversores frente al riesgo. Así, se podrá decir que un inversor es averso al riesgo si el valor de la función de utilidad para un nivel de riqueza cierta igual al valor esperado del activo financiero, es mayor que la utilidad esperada del propio activo financiero.

En sentido inverso a lo expuesto, si la utilidad del valor esperado del activo financiero es menor que la utilidad esperada de dicho activo, se estará frente a un inversor propenso al riesgo.

Por último, la igualdad de ambos valores supondrá la neutralidad del inversor ante el riesgo:

- Si prefiere $E(\widetilde{x})$ frente a $\widetilde{x} \Rightarrow$ Averso al riesgo.
- Si prefiere $\widetilde{x}$ frente a $E(\widetilde{x}) \Rightarrow$ Propenso al riesgo.
- Si le es indiferente $E(\widetilde{x})$ frente a $(\widetilde{x}) \Rightarrow$ Neutral al riesgo.

Para simplificar, supongamos que el activo financiero $\widetilde{x}$ puede alcanzar al final del período considerado, dos valores distintos, *a* con un nivel de probabilidad α, o *b* con una probabilidad $(1-\alpha)$. El valor esperado de $\widetilde{x}$, de acuerdo con lo anteriormente expuesto, se calcularía como su esperanza matemática:

$$E(\widetilde{x}) = \alpha a + (1-\alpha)b \tag{3.14}$$

Matemáticamente, el valor esperado no es más que la media ponderada de los valores posibles, correspondiendo las ponderaciones a las probabilidades de que dichos valores se presenten. Asimismo, el concepto de valor esperado tiene una interpretación geométrica inmediata, ya que al estar α comprendida entre *0 y 1*, la anterior expresión corresponde a la ecuación del segmento rectilíneo comprendido entre *a* y *b*. Para un valor concreto $\alpha_{0,}$ el valor esperado sería un punto de este segmento.

La utilidad del valor esperado se obtendría directamente, a través de la función de utilidad del inversor, de manera que:

$$U\left[E(\tilde{x})\right] = U\left[\alpha a + (1-\alpha)b\right] = U(\alpha_0) \tag{3.15}$$

Así, para ese valor α_0, la expresión anterior proporciona un punto sobre la función de utilidad que genera un montante monetario con certeza, o lo que es lo mismo, sin riesgo.

Por otro lado, la utilidad que genera el propio activo financiero $\tilde{x}$, como se vio, anteriormente, se puede calcular mediante el concepto de utilidad esperada, es decir, el sumatorio de los niveles de utilidad que generarían los resultados posibles del activo por la probabilidad de que dichos resultados se presenten:

$$E\left[U(\tilde{x})\right] = \alpha U(a) + (1-\alpha)U(b) \tag{3.16}$$

Análogamente a la expresión del valor esperado, la interpretación matemática de la utilidad esperada corresponde a la media ponderada de los valores de la función de utilidad en cada uno de los dos valores posibles de la variable aleatoria $\tilde{x}$, donde la ponderaciones son las probabilidades de que esos valores se presenten en t_1. De la misma manera, geométricamente hablando, la expresión de la utilidad esperada representa la ecuación del segmento rectilíneo comprendido entre los puntos de la función de utilidad $U(a)$ y $U(b)$.

Si aplicamos la definición de aversión al riesgo al caso que se está desarrollando, se tendrá que un inversor será considerado averso al riesgo siempre que se cumpla que:

$$U\left[\alpha a + (1-\alpha)b\right] \triangleright \alpha U(a) + (1-\alpha)U(b) \tag{3.17}$$

Que es precisamente la condición que debe cumplir toda función cóncava, es decir, el segmento que une dos puntos cualesquiera de la función quede siempre por debajo de la propia función.

Generalizando para cualquier activo o combinación de activos financieros, un inversor será averso al riesgo si su función de utilidad es estrictamente cóncava, o, en otros términos, si la segunda derivada de la utilidad es negativa.

$$\text{Si } U''(\tilde{x}) < 0 \Rightarrow \text{ Averso al riesgo} \tag{3.18}$$

Gráficamente la función de utilidad de un averso al riesgo se podrá representar como una función estrictamente creciente (supuesto de no saciedad) y estrictamente cóncava (aversión).

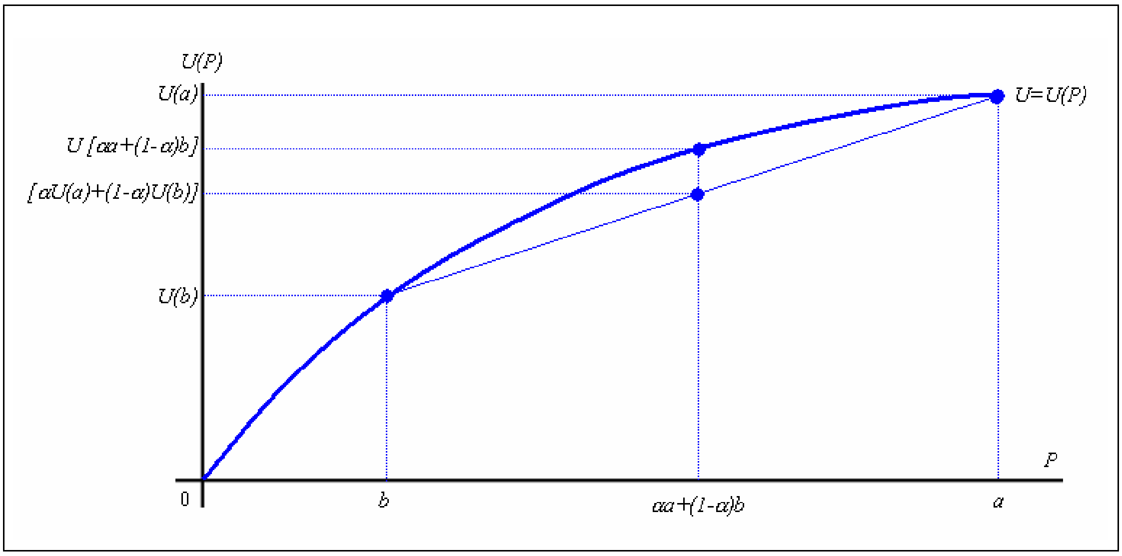

Figura 3. Aversión al riesgo

Repitiendo el razonamiento anterior para las otras actitudes frente al riesgo, se tendrá que:

$$U[\alpha a+(1-\alpha)b<\alpha U(a)+(1-\alpha)U(b)] \Rightarrow \text{ Propenso al riesgo}$$
$$U[\alpha a+(1-\alpha)b=\alpha U(a)+(1-\alpha)U(b)] \Rightarrow \text{ Neutral al riesgo} \tag{3.19}$$

O en términos de derivadas:

$$\text{Si } U''(\tilde{x}) \rhd 0 \Rightarrow \text{Propenso al riesgo}$$
$$\text{Si } U''(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow \text{Si Neutral al riesgo} \tag{3.20}$$

Siendo, por tanto, lineales las funciones de utilidad de los inversores neutrales al riesgo y convexas las funciones de utilidad de los inversores propensos al riesgo.

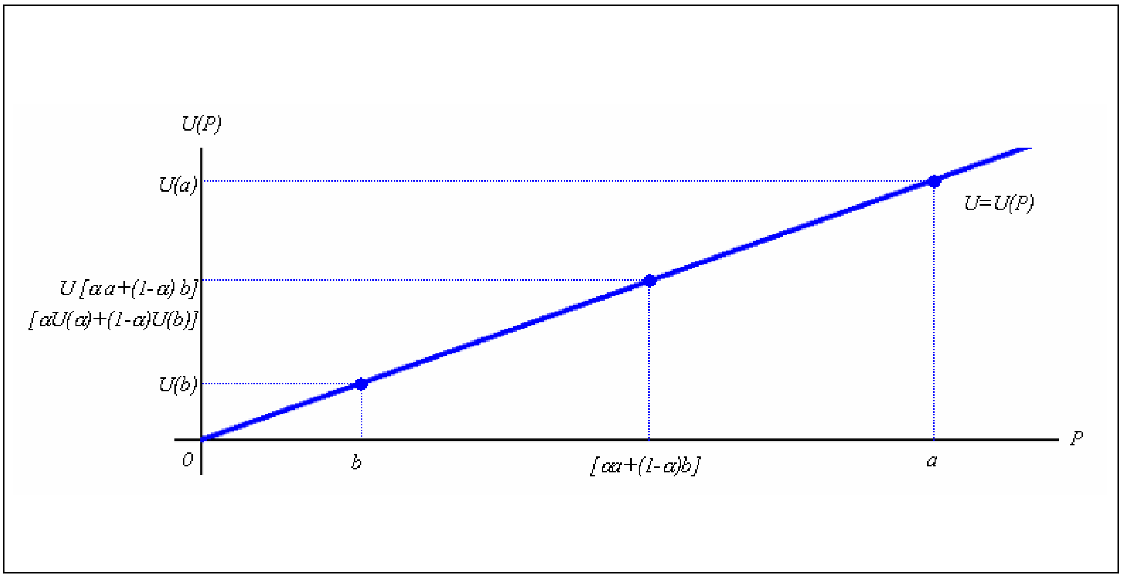

Figura 4. Neutralidad al riesgo

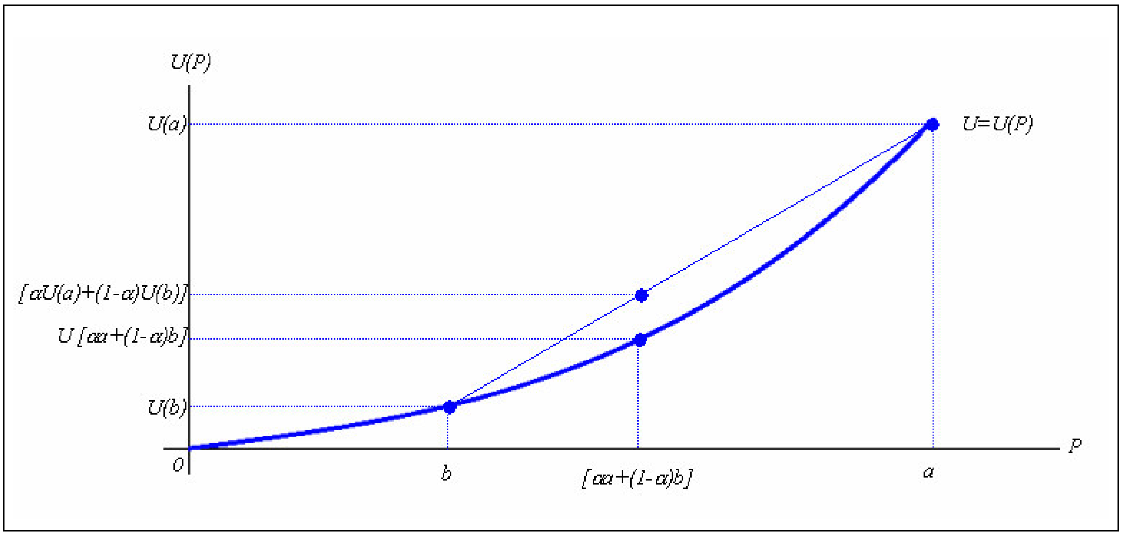

Figura 5. Propensión al riesgo

Suele ser habitual realizar el supuesto restrictivo de que los inversores son siempre aversos al riesgo. Así pues, para que se decidan a realizar inversiones con riesgo exigirán una ganancia adicional (una prima de riesgo), para contrarrestar el déficit de utilidad que se genera frente al *valor actuarial* del mismo. Este supuesto no es más que la generalización a la demanda de activos financieros de la ley de utilidad marginal decreciente que se desarrolló en la teoría de la demanda de bienes y servicios.

3.5 Elección de la inversión bajo incertidumbre.

El problema de la elección de la inversión óptima cuya composición maximice la utilidad esperada del inversor se concreta en encontrar la debida combinación entre las distintas inversiones con riesgo y las inversiones sin riesgo, que haga máximo el valor de la función de utilidad esperada del inversor.

Si se tiene que:

- P_0 : Patrimonio inicial del inversor.

- $\widetilde{P}$: Patrimonio final del inversor.

- a_i : Cuantía monetaria que el inversor dedica a cada inversión $\widetilde{x}_i$ con riesgo.

- r_f : Rendimiento de la inversión sin riesgo.

- $\widetilde{r}_i$: Variable aleatoria del rendimiento de los activos con riesgo.

- *n*: Número de inversiones con riesgo.

La diferencia entre el patrimonio inicial del inversor y las cuantías que este dedica a la totalidad de las inversiones será $\left(P_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$. Por esto, se podría definir el patrimonio final del inversor como una variable aleatoria $\widetilde{P}$ que depende tanto de la composición de las inversiones como del rendimiento aleatorio de cada una de ellas:

$$\widetilde{P} = \left(P_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i \right)(1 + r_f) + \sum_{i=1}^{n} a_i (1 + \widetilde{r}_i) \tag{3.21}$$

Y, operando, también puede expresarse:

$$\widetilde{P} = P_0(1 + r_f) + \sum_{i=1}^{n} a_i (\widetilde{r}_i - r_f) \tag{3.22}$$

Así, el problema del inversor queda representado en el siguiente problema de maximización de la utilidad esperada:

$$\text{Max } E\left[U\left(P_0(1 + r_f) + \sum_{i=1}^{n} a_i (\widetilde{r}_i - r_f) \right) \right] \tag{3.23}$$

Para un inversor averso al riesgo, $U''(\widetilde{x}) < 0$, la función de utilidad es cóncava y viene determinada por las condiciones de primer orden, donde las derivadas parciales de la utilidad esperada respecto a las *n* cantidades invertidas a_i se anulan:

$$E\left[U'(\widetilde{P})(\widetilde{r}_i - r_f \right] = 0 \quad \forall i \tag{3.24}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones nos dará la composición óptima para un inversor averso al riesgo que tiene que elegir entre *n* inversiones con riesgo y una sin riesgo.

El estudio de la condición necesaria y suficiente del problema del inversor en un entorno $a_i = 0$, es decir en una situación en la que el inversor invierte todo su patrimonio sin riesgo, permite sacar una conclusión importante para definir adecuadamente el comportamiento del inversor con incertidumbre. En esta situación, la condición de primer orden sería:

$$E\left[U'\left(P_0\left(1+r_f\right)\right)\left(\tilde{r}_i - r_f\right)\right] \leq 0 \quad \forall i \tag{3.25}$$

Como $P_0\left(1+r_f\right)$ es constante:

$$U'\left[P_0\left(1+r_f\right)E\left(\tilde{r}_i - r_f\right)\right] \leq 0 \quad \forall i \tag{3.26}$$

Pero el supuesto de no saciedad determina funciones de utilidad estrictamente crecientes, es decir, que la primera derivada de la función de utilidad sea estrictamente positiva. Así, para que esta condición se cumpla y el inversor no incluya las inversiones con riesgo es imprescindible que el rendimiento esperado de esas inversiones con riesgo sea inferior al tipo de interés libre de riesgo. En caso contrario, es decir, si el rendimiento esperado de la inversión con riesgo supera el tipo de interés sin riesgo, entonces el conjunto de inversiones no incluirán solo las sin riesgo, sino que también la que conllevan riesgo:

$$\text{Si } E\left(\tilde{r}_i - r_f\right) > 0 \Rightarrow a_i > 0 \tag{3.27}$$

Lo que nos indica que el inversor averso al riesgo exigirá a todas las inversiones una prima de riesgo positiva sobre la inversión sin riesgo para incluirlos en su cartera de inversiones óptima. En caso contrario, dichas inversiones no formarán parte de su cartera de inversiones.

3.6 Definiciones actuales de Prima de Riesgo

A la prima de riesgo se la podría definir como la ganancia adicional que se le exige a una inversión con riesgo para que sea preferido por un inversor averso al riesgo frente a un activo sin riesgo.

También podría definirse como la cuantía monetaria que un inversor averso al riesgo está dispuesto a pagar o a dejar de ganar para evitar el riesgo inherente a una determinada inversión (Ruiz, G. 2000).

Una función fundamental de los mercados es la de transferir riesgos. El mecanismo de transferencia fija unos precios de mercado para cada tipo de riesgo, también llamada *prima de riesgo,* en la cual la oferta y la demanda están igualadas. Aunque esto significa que en equilibrio todos los riesgos tienen fijados precios justos, de modo que todos los valores tienen la misma tasa de rendimiento inmediato esperado, no se puede deducir que todos los valores sean beneficiosos por igual para todos los inversores. Así, debido a la naturaleza de los negocios, algunos inversores prefieren ingresos presentes en lugar de rendimientos futuros, mientras que otros prefieren estar siempre completamente financiados

Existen dos definiciones teóricas de prima de riesgo, que, aunque similares, utilizan métodos de aproximación al concepto, distintos y cuyos resultados solo son comparables bajo determinadas condiciones. Dichas definiciones son:

3.6.1 Prima de riesgo Markowitz.

Se define como la cantidad máxima que el inversor estaría dispuesto a pagar o a dejar de ganar para evitar el riesgo de una inversión con resultado incierto.

Si se tiene que:

- x^*: Nivel de riqueza que genera un nivel de utilidad equivalente a la utilidad esperada de la inversión.

- y^*: Precio final del activo sin riesgo $\tilde{x}$.

En términos matemáticos este x^* es tal que:

$$U(x^*) = E[U(\tilde{x})] \tag{3.28}$$

Luego la prima de riesgo Markowitz se define como la diferencia entre el valor esperado de la inversión y la riqueza cierta que genera el mismo nivel de utilidad:

$$\pi_M = E(\tilde{x}) - x^* \tag{3.29}$$

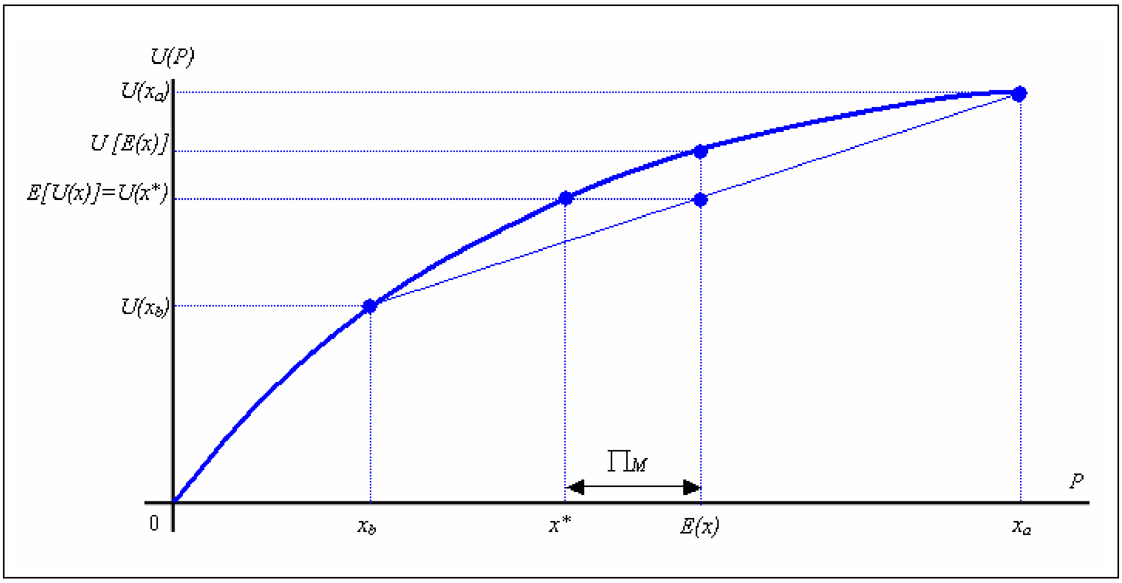

Figura 6. Prima de riesgo Markowitz

Desde la perspectiva habitual al hablar de una prima de riesgo, la prima de Markowitz es la cantidad mínima que tendrá que pagar de más una inversión con riesgo frente a una sin riesgo, para que dada la aversión del inversor al riesgo, compense el riesgo incorporado.

Con un rendimiento igual a la prima de Markowitz, el inversor será indiferente entre elegir la inversión sin riesgo *y*, con un precio final y^*, el activo con riesgo $\tilde{x}$, cuyo valor esperado es $E(\tilde{x})$; si el sobrerrendimiento fuera superior a la prima de riesgo de Markowitz, entonces el inversor preferirá la inversión con riesgo, mientras que si el sobrerrendimiento de la inversión con riesgo es inferior a la prima de Markowitz, el inversor elegirá la inversión sin riesgo.

$$\begin{aligned} &\text{Si } E(\tilde{x}) = y^* + \pi_M \Rightarrow \tilde{x} \approx y \\ &\text{Si } E(\tilde{x}) > y^* + \pi_M \Rightarrow \tilde{x} > y \end{aligned} \tag{3.30}$$

Si $E(\tilde{x}) < y^* + \pi_M \Rightarrow \tilde{x} < y$

3.6.2 Prima de riesgo de Pratt-Arrow.

Pratt y Arrow proponen una forma distinta de medir la prima de riesgo de una inversión. Ellos proponen una fórmula para riesgos pequeños en relación con el patrimonio inicial de los inversores y riesgos actuarialmente neutrales, es decir, para pequeños riesgos cuyo valor esperado es nulo.

Si se tiene que:

- P_0: Patrimonio inicial del inversor.

- σ: Varianza de la distribución aleatoria de los valores alcanzables por $\tilde{z}$.

Dadas las anteriores limitaciones, la prima de riesgo de Pratt-Arrow se define como aquella cuantía monetaria que iguala la utilidad esperada del inversor en una inversión con riesgo con la utilidad, en términos ciertos, que obtendría con el valor esperado de la inversión menos dicha prima de riesgo. Así si se considera un inversor con patrimonio inicial P_0, y una función de utilidad $U(P)$, exigirá a la inversión $\tilde{z}$ una prima de riesgo mínima igual a π_{PA}, que satisfaga la siguiente igualdad:

$$E[U(P+\tilde{z})] = U[P + E(\tilde{z}) - \pi_{PA}] \tag{3.31}$$

Como se ha definido $\tilde{z}$ como un riesgo relativamente pequeño y actuarialmente neutral, $E(\tilde{z} = 0)$, se puede resolver esta ecuación mediante el desarrollo de Taylor, quedando expresada la prima de riesgo de Pratt-Arrow como:

$$\pi_{PA} = 1/2\,\sigma_z^2\left[-U''(P)/U'(P)\right] \tag{3.32}$$

Donde se introduce explícitamente el concepto de la varianza de la distribución aleatoria de los valores alcanzables por $\tilde{z}$ como determinante de la prima de riesgo de dicho valor, junto con los valores de la primera y segunda derivada de la función de utilidad. En este sentido, sólo aquellos individuos aversos al riesgo exigirán una prima de riesgo positiva, ya que solo en el caso de funciones de utilidad cóncavas la segunda derivada es negativa y, por tanto, el resultado final positivo. Asimismo, cuando mayor sea la aversión al riesgo del inversor, medido a través de la segunda derivada de la función de utilidad, mayor será la prima de riesgo que se exigirá a una inversión.

Ese cociente de la segunda y primera derivada de la función de utilidad, que matemáticamente mediría el grado de curvatura o concavidad de la función de utilidad, es utilizado para medir el grado de aversión al riesgo del inversor, mediante dos conceptos complementarios:

- La aversión absoluta al riesgo.
- La aversión relativa al riesgo.

Aportando información importante para caracterizar con mayor precisión la demanda de inversiones con riesgo.

3.6.2.1 Aversión absoluta al riesgo.

Dicha aversión determina si el inversor se enfrenta a inversiones con riesgo como si de bienes normales se tratase o si, por el contrario, los considera bienes inferiores, correspondiendo como previamente se ha adelantado al cociente negativo de la segunda y primera derivadas de la función de utilidad.

Si se tiene que:

- A_a: Aversión absoluta al riesgo.

Todo ello, definiendo al *“bien normal”* según la teoría del consumidor, como aquel cuya demanda aumenta cuando aumenta la renta (el patrimonio) del consumidor, y *“bien inferior”* como aquel cuya demanda disminuye al aumentar sus ingresos (patrimonio), entonces:

$$A_a = \left[U''(P)/U'(P)\right] \tag{3.33}$$

Aplicados los conceptos de bienes normales e inferiores a la demanda de inversiones con riesgo, tendríamos que una inversión con riesgo sería considerada un bien normal cuando al aumentar el patrimonio del inversor aumentara su demanda, su volumen de inversiones con riesgo. Es decir, si la aversión absoluta al riesgo disminuyera al aumentar el patrimonio del inversor:

$$\frac{dA_a}{dP} < 0 \Leftrightarrow \text{ Bien normal} \tag{3.34}$$

Por el contrario, si al aumentar el patrimonio del inversor disminuye la demanda de inversiones con riesgo del mismo, se puede afirmar que las inversiones son consideradas bienes inferiores. Es decir, se estaría ante la calificación de las inversiones con riesgo como bienes inferiores si la aversión absoluta al riesgo es creciente cuando aumenta el patrimonio del inversor:

$$\frac{dA_a}{dP} > 0 \Leftrightarrow \text{ Bien inferior} \tag{3.35}$$

Tradicionalmente se ha supuesto que las inversiones deben ser consideradas bienes normales, basados en la lógica de que sólo a partir de un determinado nivel de patrimonio (renta), los inversores están dispuestos a asumir riesgos, existiendo una relación directamente proporcional entre el nivel patrimonial y la inversiones.

Este supuesto ha sido contrastado en economías financieramente desarrolladas como la norteamericana. No obstante, se debería restringir el concepto de aversión absoluta al riesgo a funciones decrecientes, ya que en la práctica se presentan determinados casos que pueden ser explicados seguramente como pueden ser, el ciclo vital de la inversión o el horizonte temporal de la cartera de inversión, donde la relación entre nivel patrimonial y demanda de inversiones con riesgo es negativa.

Llegados a un determinado nivel de patrimonio, los inversores quieren, sobre todo, consolidarlo, sin asumir riesgo, que aunque podría mejorar el resultado, también podría ocasionarles pérdidas que no están dispuestos a asumir.

También existe una influencia de la edad en la actitud hacia el riesgo. Un ejemplo claro está en los planes de pensiones, ya que los planes más agresivos se reservan, fundamentalmente para ahorradores jóvenes con pequeños patrimonios, mientras que los planes más conservadores se ofertan para inversores mayores, con un nivel patrimonial más elevado.

En resumen, se puede decir que la percepción del riesgo cambia por factores no necesariamente vinculados a la inversión, su situación económica, e incluso las experiencias sufridas en situaciones que se identifican como similares.

3.6.2.2 Aversión relativa al riesgo.

Mientras que la aversión absoluta mide la cantidad monetaria que se está dispuesto a invertir en una inversión con riesgo por unidad monetaria patrimonial, el concepto de aversión relativa al riesgo aporta información sobre la proporción de inversiones con riesgo sobre el patrimonio total del inversor.

Si se tiene que:

A_r: Aversión relativa al riesgo.

ε_p : Elasticidad.

a : Parte del patrimonio del inversor dedicada a inversiones con riesgo.

En analogía con la teoría del inversor, se trata de determinar si un bien de inversión es un bien básico o de lujo.

Un bien normal sería básico si al aumentar la renta (patrimonio) del individuo su demanda aumenta, pero menos que proporcionalmente al incremento de la renta, es decir, el porcentaje de renta gastada en dicho bien disminuye.

Un bien de lujo sería aquel cuya demanda, al aumentar la renta del individuo, aumenta más que proporcionalmente al incremento de la renta, por lo que el porcentaje de renta gastada aumenta:

$$A_r = P\left[U''(P)/U'(P)\right] \tag{3.36}$$

El concepto de aversión relativa al riesgo está, pues, relacionado con la elasticidad-patrimonio de la demanda de inversiones con riesgo, de manera que si la aversión relativa al riesgo fuera creciente, $dA_r/dP > 0$, se produciría una disminución del porcentaje del patrimonio del inversor tomando inversiones con riesgo, es decir, la elasticidad-patrimonio sería menor que la unidad, si la aversión relativa al riesgo fuera constante, $dA_r/dP = 0$, la elasticidad-patrimonio sería unitaria, mientras que si la aversión relativa al riesgo fuera decreciente, $dA_r/dP < 0$, estaríamos frente a una elasticidad-patrimonio del individuo mayor que la unidad.

Siendo la elasticidad el ratio que mide la variación porcentual de la cartera de inversiones con riesgo en el total del patrimonio del inversor, cuando varía un uno por ciento el patrimonio de éste:

$$\varepsilon_P = \frac{da}{dP_i} \frac{P_0}{a} \tag{3.37}$$

Donde a es la parte del patrimonio del inversor dedicada a inversiones con riesgo.

Como en el caso de la aversión absoluta, la aversión relativa al riesgo ha sido supuesta tradicionalmente constante, de manera que las inversiones, por tanto, se considerarán bienes normales básicos.

No es necesario teóricamente limitar este concepto, ya que puede aportar gran cantidad de información tanto para analizar el comportamiento del inversor como para poder diseñar estrategias inversoras a medio y largo plazo para determinados inversores, que no se ajustan estrictamente a ese supuesto de aversión relativa constante.

Se han utilizado diversas funciones de utilidad para representar y explicar el comportamiento de los inversores que no se ajustan exactamente a los supuestos de aversión absoluta creciente y aversión relativa constante.

En la Tabla 4 se caracterizan ambas medidas de aversión al riesgo para las funciones matemáticas más utilizadas en el análisis del comportamiento del inversor. Las Figuras 7, 8, 9 y 10 corresponden a dichas funciones de utilidad.

Tabla 4.

Función de utilidad	Aversión absoluta	Aversión relativa
Cuadrática: $U(P) = a + bP - cP^2$	Creciente	Creciente
Potencial negativa: $U(P) = -aP^{-b}$	Decreciente	Constante
Exponencial negativa: $U(P) = -e^{-bP}$	Constante	Creciente
Logarítmica: $U(P)=ln\ (P)$	Decreciente	Constante

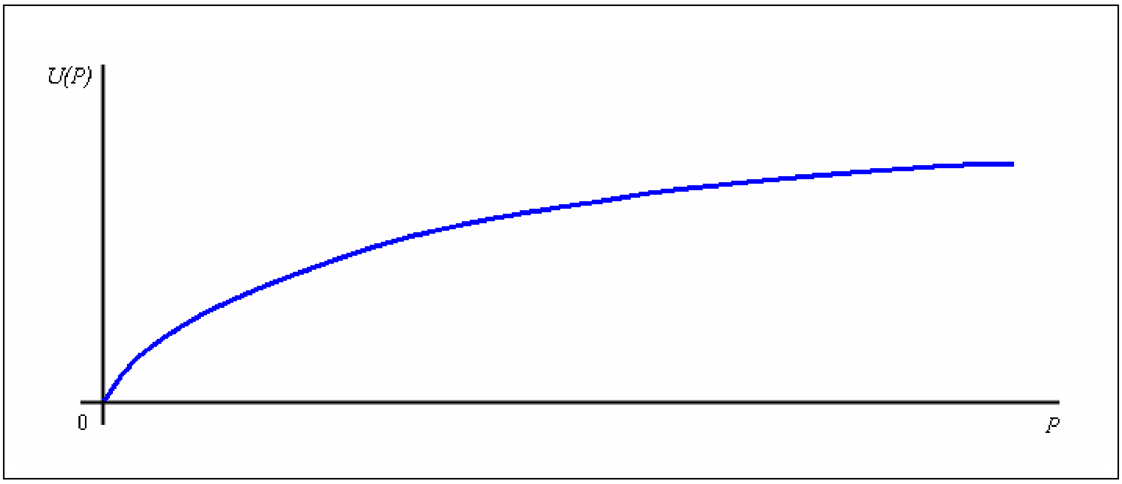

Figura 7. Función de utilidad cuadrática

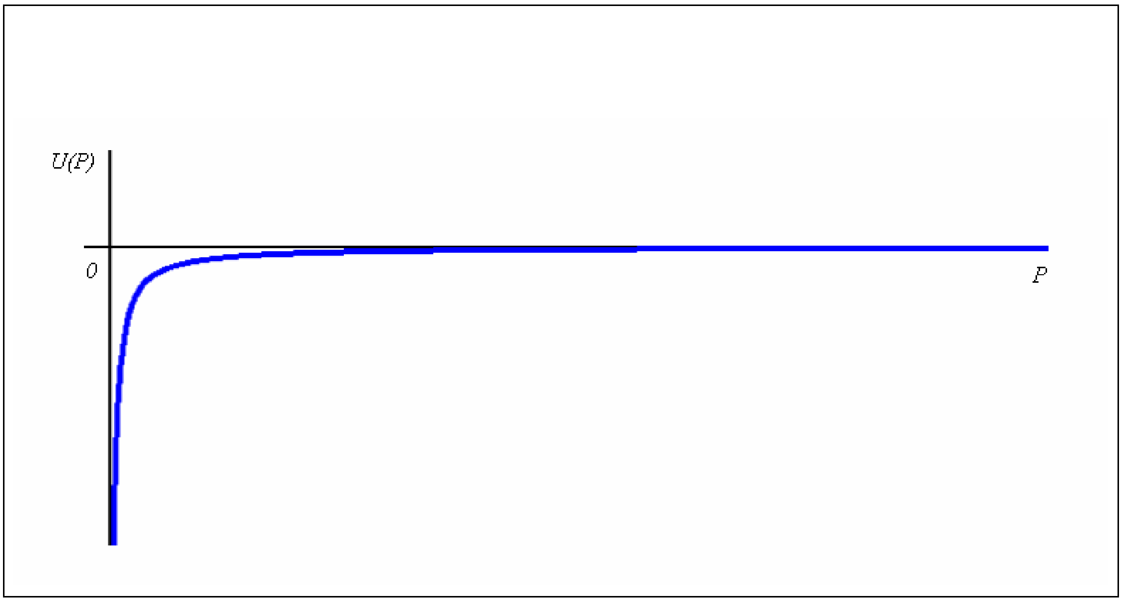

Figura 8. Función de utilidad potencial negativa

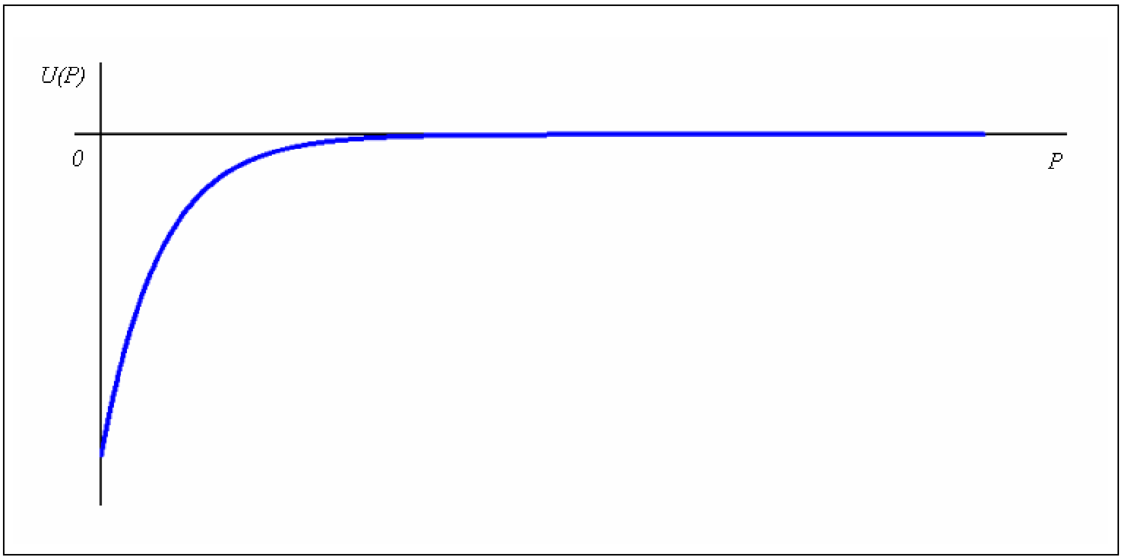

Figura 9. Función de utilidad exponencial negativa

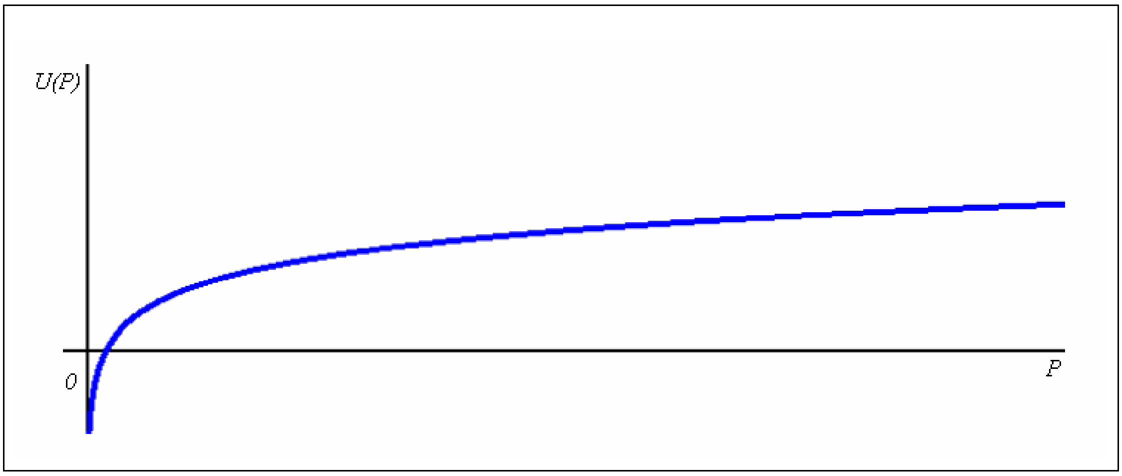

Figura 10. Función de utilidad logarítmica

3.7 Tipos de Riesgo

El riesgo global de una actividad determinada resulta de la suma de distintas clases de riesgo, alguno de ellos no es cuantificable ni siquiera en términos de probabilidad, por lo que es casi imposible dar una medida numérica del riesgo global.

Sin embargo, aunque parte de las incertidumbres implícitas en las operaciones no sean cuantificables (como, por ejemplo, el riesgo de una incorrecta interpretación de la normativa fiscal), no debemos excluir estos riesgos sino adoptar y revisar periódicamente las medidas necesarias para minimizarlos. Con este propósito, a continuación se enumeran y describen las tipologías de los riesgos:

3.7.1 Riesgo de Mercado.

Bajo este epígrafe se recogen divresos tipos de riesgo, vinculados en todo o en parte al propio mercado.

Son los riesgos derivados de los cambios o volatilidades en los precios de los activos y pasivos financieros. Supone la probabilidad ante movimientos adversos en los precios de los instrumentos financieros donde se tengan posiciones, pudiendo provenir de operaciones que figuren tanto dentro como fuera del balance. Entre los más comunes se encuentran los tipos de interés en moneda nacional o en otras monedas, tipos de cambio y el precio de las acciones.

La exposición de las inversiones a los riesgos de mercado, tanto simples como multidimensionales, es consecuencia de variaciones en los factores de riesgo que afectan a los precios de mercado. Estos factores incluyen, aunque no de una manera exhaustiva, los siguientes:

- Niveles de los tipos de interés de cada país.
- Correlación entre los distintos tipos de interés y los mercados.
- Tipos de cambio.
- Precios de materias primas y cotizaciones de renta variable.
- Volatilidad en los tipos de interés, tipos de cambio y precios.

Dentro de estos riesgos puede diferenciarse entre:

3.7.1.1 Riesgos de posiciones en divisas.

Surgen como consecuencia de las operaciones financieras que se efectúan en los mercados nacionales en internacionales en divisas, incurriéndose en los siguientes riesgos:

3.7.1.1.1 *Riesgo de tipo de cambio (spot).*

Refleja las variaciones potenciales que se pueden producir en el valor de las posiciones en moneda extranjera por las variaciones de los tipos de cambio de contado de la moneda nacional o de una moneda extranjera con otra.

3.7.1.1.2 *Riesgo de variaciones en los diferenciales de los tipos de interés.*

Es consecuencia de las variaciones que se producen en los diferenciales de tipos de interés entre dos divisas y su efecto sobre las posiciones que poseen a plazo en moneda extranjera.

3.7.1.2 Riesgo de tipo interés / precio.

Viene definido como la exposición de los precios de mercado a las fluctuaciones de los tipos de interés, pudiendo diferenciarse entre dos grupos:

3.7.1.2.1 *Riesgo direccional y de curva de tipos.*

Se define como la sensibilidad de los resultados ante desplazamientos paralelos de la curva de tipos de interés (las rentabilidades para distintos plazos), de manera que dichos desplazamientos originen diferenciales de tipos iguales para todos los plazos, asumiendo que los tipos de interés a corto plazo se mueven de la misma forma que los del largo. El riesgo de curva de tipos es la sensibilidad de los resultados a un cambio en la estructura de plazos de esa curva, de forma que originen diferenciales de los tipos distintos para cada uno de los plazos, asumiendo que los tipos de interés a corto plazo se mueven de forma distinta a los del largo plazo.

3.7.1.2.2 *Riesgo de precio.*

Se define como el riesgo de que se produzcan variaciones en el valor de mercado en determinados activos financieros como consecuencia de modificaciones en sus precios, y se aplica en particular al caso de títulos de renta variable y mercaderías.

3.7.1.3 Riesgo de operaciones con opciones.

Refleja el efecto de las fluctuaciones en el valor de las opciones como consecuencia, entre otros aspectos, de variaciones en los tipos de interés, la volatilidad y el tiempo que reste hasta el vencimiento. Dicho efecto se mide a través de una serie de ratios conocidos por las siguientes letras griegas:

- *Delta.* Es la primera derivada de la prima de la opción respecto al precio del instrumento subyacente. Recoge la sensibilidad de la prima a los cambios en el precio de dicho activo subyacente. El riesgo delta describe la exposición a cambios inesperados en el valor de una cartera de opciones como resultado de movimientos en los precios de los instrumentos subyacentes.

- *Gamma.* También conocida como convexidad, es la segunda derivada de la prima de la opción respecto al precio del activo subyacente, y mide el cambio esperado en la delta ante las variaciones en el valor del elemento subyacente. Es el riesgo de que un cambio en los precios de los instrumentos subyacentes cause un cambio en la posición delta de una cartera de opciones.

- *Vega*. Representa el riesgo de la volatilidad, que es la sensibilidad del valor de la prima de la opción ante pequeñas variaciones en la volatilidad del precio o el tipo del activo subyacente. El riesgo vega se calcula a través de un análisis de simulación, dado un cambio de volatilidad en un escenario estándar.

- *Theta*. Mide cuanto cambia el valor de la prima de una opción como consecuencia de la aproximación a la fecha de expiración de la misma (*time decay*). La pérdida del valor temporal de la prima de una opción a medida que la fecha de vencimiento se acerca no es proporcional al tiempo transcurrido.

- *Épsilon o rho*. Corresponde al riesgo de variaciones en el valor de la prima de una opción ante pequeñas modificaciones en el tipo de interés.

3.7.1.4 Otros riesgos de mercado.

3.7.1.4.1 *Riesgo de correlación.*

Proviene de efectuar operaciones de cobertura utilizando instrumentos de diferentes características, como pueden ser diferentes índices de tipos de interés, mercados, divisas y vencimientos. En estas operaciones se expresa una opinión sobre la correlación existente entre los instrumentos cubiertos y aquellos utilizados para efectuar la cobertura. El riesgo de correlación surge cuando la relación real entre los instrumentos es diferente de la que se había previsto y, como resultado, la cobertura no compensa completamente las pérdidas en el instrumento cubierto.

3.7.1.4.2 *Riesgo de pago anticipado.*

Surge en el caso de títulos con garantía hipotecaria, obligaciones u otros instrumentos de deuda en los que el principal, en todo o en parte, puede ser amortizado antes del vencimiento. El riesgo en cada caso de amortización anticipada es que los flujos de caja tengan que ser reinvertidos a un tipo de interés parcialmente más bajo. Para el comprador de un instrumento con esta característica el tratamiento de este riesgo es similar al de una opción vendida.

3.7.1.4.3 *Riesgo de aseguramiento.*

Aparece como consecuencia de la participación de una entidad en el aseguramiento de una colocación de títulos, asumiendo el riesgo de pasar a poseer parcialmente la emisión como consecuencia de la no colocación del total de la misma entre los potenciales compradores. El riesgo principal de un aseguramiento es el riesgo de precio, que es la posibilidad de realizar una valoración incorrecta del precio de mercado de una nueva emisión. Esto puede suceder por varias razones, incluyendo aspectos competitivos, volatilidad de los tipos de interés y factores de oferta / demanda, además de la percepción crediticia que, en algunos casos, se tenga del emisor.

3.7.1.4.4 *Riesgo de renta fija.*

En el caso de los activos de renta fija, en los que a cambio de una cantidad inicial, se devuelven unos flujos fijos en unas fechas futuras también conocidas, y siendo la rentabilidad de la inversión la relación porcentual entre la cuantía total de los flujos monetarios a recibir y la cantidad entregada, los activos se caracterizan por la certidumbre sobre el importe de los rendimientos que la inversión va a proporcionar, así como el momento en que se obtendrá, siempre y cuando se mantenga el vencimiento del activo.

En este último caso se incurrirá en riesgo de mercado cuando se quiera o se necesite vender antes de su vencimiento, siendo el nivel de riesgo proporcional al tiempo que reste hasta el vencimiento, e inversamente proporcional al nivel de tipos de interés.

Esta última afirmación no es del todo exacta, pues siempre habrá que tener en cuenta el riesgo de reinversión, que consiste en la incertidumbre sobre los tipos de interés a los que se invertirán los flujos que el activo vaya generando, desde el momento en que se cobra hasta el vencimiento final del activo de que se trate. No obstante el riesgo más importante aparece cuando se quiere vender el activo de renta fija antes de su amortización.

En el caso de activos de renta variable el riesgo de mercado consiste en que la inversión no alcance la rentabilidad esperada. Al contrario de los activos de renta fija, en los de renta variable no se tiene la certeza sobre el importe de los flujos que en el futuro generarán (importe de los dividendos y valor final de las acciones compradas). Se puede establecer como rentabilidad esperada, la que obtengan los activos libres de riesgo más un diferencial histórico (prima de riesgo).

3.7.1.4.5 *Riesgo Sistemático.*

Es el que aparece cuando el índice de acciones elegido no alcance la rentabilidad esperada y no se puede eliminar en su totalidad si el índice cae cada año un 20 por 100, difícilmente una cartera de acciones referida al mismo obtendrá una rentabilidad positiva, a menos que asuma un riesgo aún más elevado como podría ser no haber invertido la cartera. Factores como variación de tipos de interés oficiales, tasas de inflación, crecimiento económico, etc., son los factores que se consideran determinantes de riesgo sistemático

Sin embargo, el riesgo que afecta a un valor o conjunto de valores en particular se denomina *"riesgo no sistemático o diversificable"*, es decir, si un gobierno controla de alguna manera el nivel de los precios de un bien o servicios (precios intervenidos) y decide rebajarlos porque la inflación está sobrepasando determinados límites, los precios de las acciones de compañías involucradas sufrirán una corrección.

Un caso real de lo anteriormente expuesto se dio en la primavera de 1999, cuando el gobierno decidió rebajar la tarifa eléctrica con el propósito de rebajar la inflación. Tras el anuncio de esta medida, las cotizaciones de las compañías eléctricas cayeron fuertemente. Si se toma como ejemplo, el 12 de abril de 1999 la revalorización de las acciones de Endesa, aunque siempre superior a la del IBEX 35, mantenía una pauta de comportamiento similar a la del índice. Sin embargo, durante los días inmediatamente siguientes a esa fecha se dio una notable divergencia en la evolución de las acciones de la compañía con respecto al IBEX 35 (Figura 11).

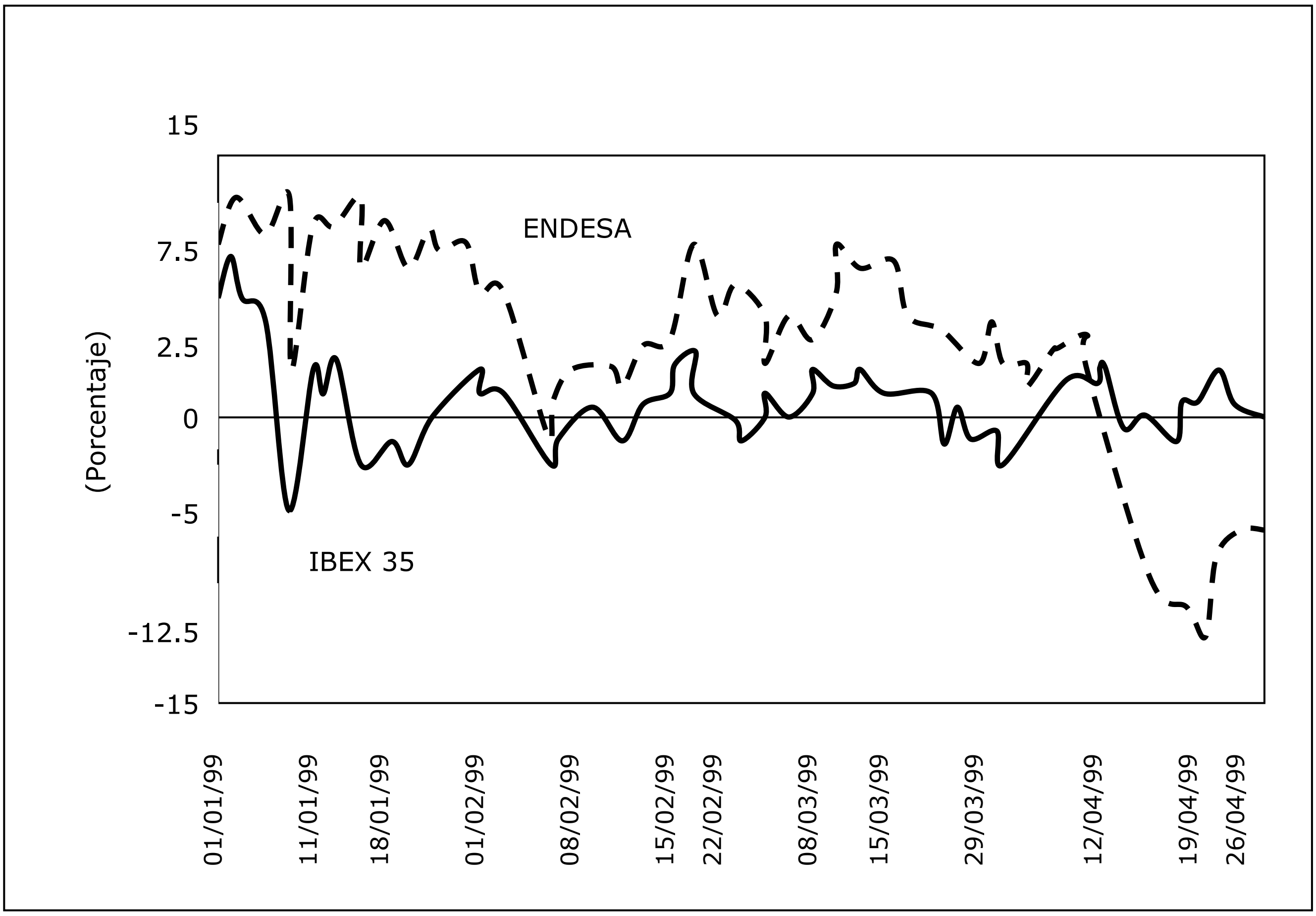

Figura 11. Rentabilidad del IBEX 35 y de Endesa del 30/12/98 al 30/04/99

3.7.1.4.6 *Riesgo de Futuros Financieros.*

Se da cuando existe un compromiso adquirido por dos agentes, mediante un contrato, de comprar y vender un activo financiero (activo subyacente) a un precio determinado (precio de ejercicio) en una fecha futura prefijada (fecha de ejercicio o vencimiento del contrato).

Los elementos de todo contrato de futuros son: el objeto sobre el que se basa el contrato o activo subyacente (acciones, índices, tipos de interés, bonos, etc.), el precio al cual se realizará la compraventa del activo subyacente o precio de ejercicio y la fecha en que se ejecutará el contrato.

Cuando se compran futuros sobre una acción existe un compromiso de comprar esa acción en el futuro al precio pactado hoy, de manera que se obtendrán beneficios por esa operación si la cotización de la acción sube (ya que se podrá vender la acción en el mercado a un precio mayor) y pérdidas si baja (Figura 12).

En el caso de venta de futuros, es decir cuando el compromiso es vender una acción en una fecha determinada al precio pactado, se obtendrá beneficios por la venta de futuros, si la acción baja, pues podemos comprar la acción en el mercado a un precio inferior al que vendemos (Figura 13).

En el caso de futuros sobre divisas, la rentabilidad en términos de la moneda del país origen debe ser igual a una cartera constituida al mismo plazo con activos denominados en otra divisa, luego cualquier variación en el tipo de cambio origina un beneficio o pérdida en la operación.

Por todo lo analizado, tanto en la compra como en la venta de futuros financieros el riesgo de mercado es evidente y ha de ser gestionado adecuadamente para cada caso.

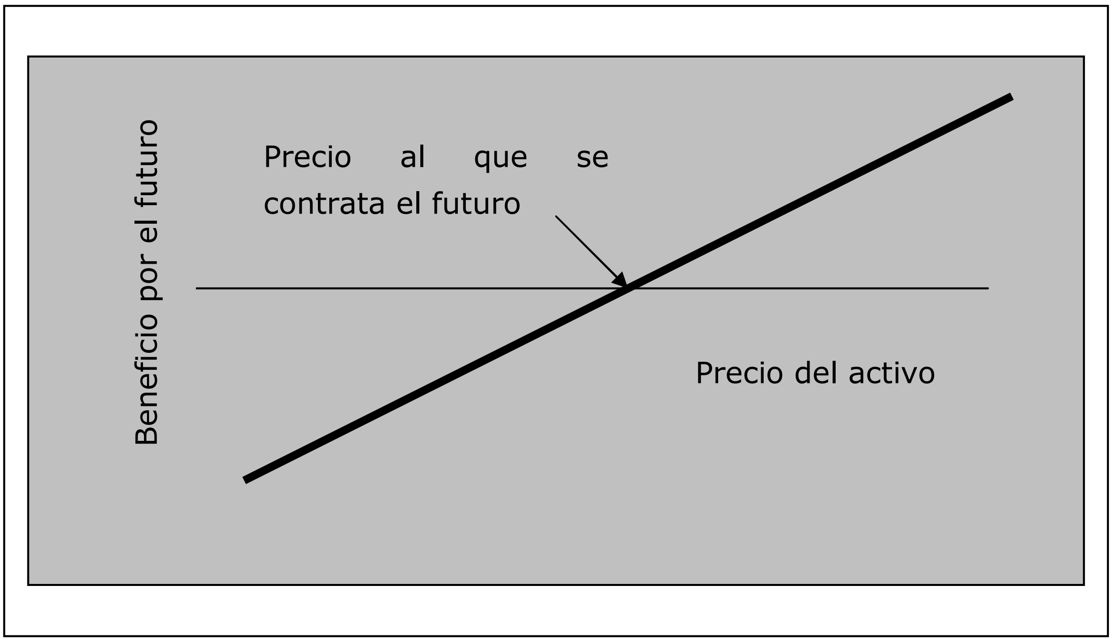

Figura 12. Resultados por la compra de futuros

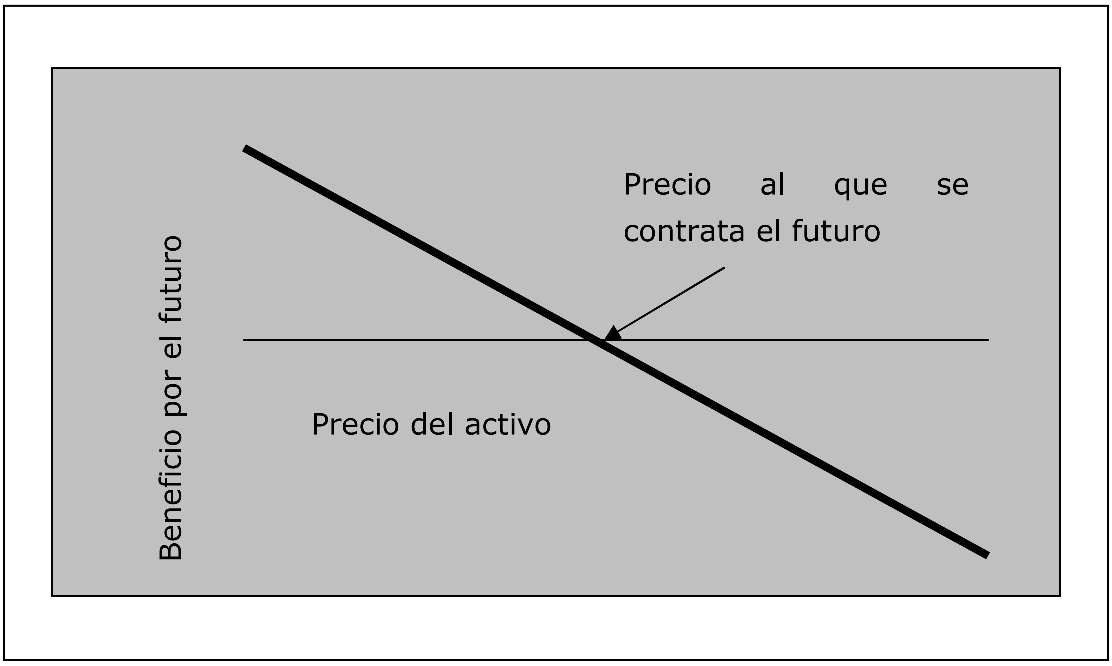

Figura 13. Resultados por la venta de futuros

3.7.1.4.7 *Riesgo de Opciones Financieras*.

A diferencia del *riesgo de operaciones con opciones* en el que el riesgo venía dado por las fluctuaciones del valor de las opciones, como consecuencia de las variaciones en los tipos de interés, la volatilidad y el tiempo restante hasta el vencimiento, en un *contrato de opciones*, el comprador de la opción, adquiere a cambio de una prima, el derecho de comprar o el derecho de vender un activo a un precio fijado en el contrato, que se ejecutará bien en una fecha determinada en el mismo y que se denomina "vencimiento del contrato", en este caso se denominará *"opción europea"*, o bien en una fecha anterior al vencimiento del contrato, denominándose en este caso *"opción americana"*. El vendedor del contrato de opciones, se compromete a vender o comprar, respectivamente, el mismo activo si así lo exige el comprador de la opción.

La opción de compra (*call*) será ejercida por su comprador cuando, al vencimiento del contrato (caso de la opción europea), el precio por el cual tiene el derecho a comprar o vender sea más favorable que el precio al cual podría realizar la misma operación en el mercado.

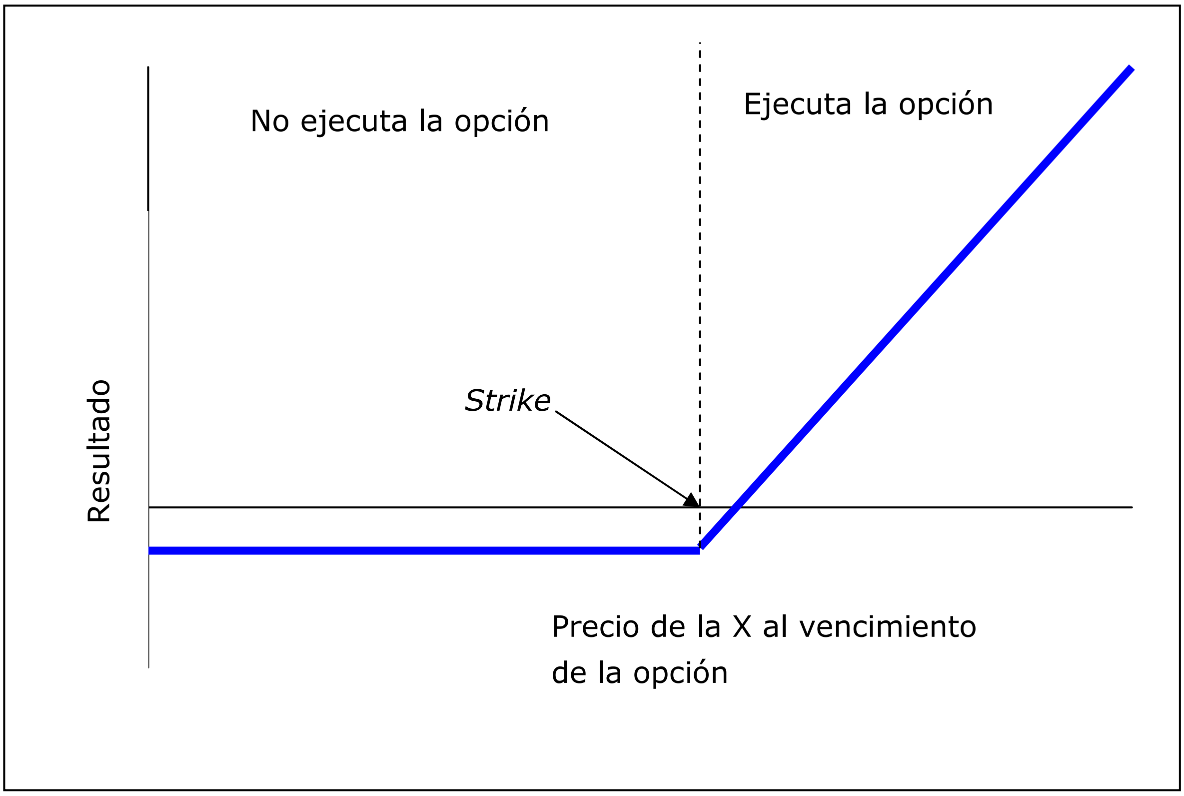

Figura 14. Compra de una opción de compra

Los elementos básicos de todo contrato de opciones son:

- Tipo de opción: opción de compra o de venta.
- Clase de opción: europea o americana
- Precio de ejercicio *(Strike)*: Precio al cual se intercambiaría el activo en caso de que se ejecute.
- Vencimiento: fecha en que se ejecutaría la opción (opción europea) o última fecha en que se podría ejercitar (opción americana).

Las cuatro posiciones básicas con opciones son:

- Compra de una opción de compra *(call)*, por la cual se adquiere el derecho de comprar y se paga una prima.
- Venta de una opción de compra *(call)*, por la cual hay obligación de vender y se cobra una prima.
- Compra de una opción de venta *(put)*, por la cual se adquiere el derecho de vender y se paga una prima.
- Venta de una opción de venta *(put)*, por la cual hay obligación de vender y se cobra una prima.

Combinando estas cuatro posiciones básicas se crearán estructuras mucho más complejas, ya sea con el propósito de obtener un beneficio derivado de la propia estructura (posiciones de inversión), bien para limitar o eliminar las potenciales pérdidas de una cartera constituida (posiciones de cobertura).

En la Figura 14 se representa el conjunto de resultados posibles al vencimiento del contrato de la compra de una opción europea. En el eje *y* se representa el resultado de la opción y en el eje *x* el precio del activo subyacente al contrato el día del vencimiento del contrato.

Al vencimiento de una opción europea se pueden presentar dos alternativas:

- El precio de mercado es superior al precio de ejercicio *(strike)*, caso en el que el comprador de la opción ejercerá su derecho. Inmediatamente podría vender la acción en el mercado obteniendo por toda la operación el precio de mercado menos el precio de ejercicio y menos la prima. Este resultado puede ser negativo si la diferencia entre el valor de mercado de la acción y el precio de ejercicio es inferior a la prima que en su día se pagó. Por lo tanto, el resultado irá aumentando conforme mayor sea el precio de mercado de la acción, lo que se representa en el gráfico con la línea ascendente.
- El precio de mercado e igual o inferior al precio de ejercicio. En este caso la opción no será ejercida, pues no se comprará una acción a un precio superior al que podemos comprar en el mercado. El resultado de la opción resulta ser

una pérdida por el valor de la prima pagada. Independientemente de cual sea el precio de mercado de la acción (siempre que esté por debajo del precio de ejercicio), la pérdida será igual a la prima, lo que queda representado en el gráfico mediante la línea paralela al eje *x*.

Por lo tanto, el resultado de una opción de compra será el precio de mercado menos el precio de ejercicio y menos la prima, si el precio de mercado es mayor que el precio de ejercicio, o la pérdida de la prima si el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio.

A continuación se representan gráficamente las otras tres posiciones básicas de opciones. El resultado será el del comprador de la opción en la compra de opciones y el del vendedor en el caso de las ventas de opciones.

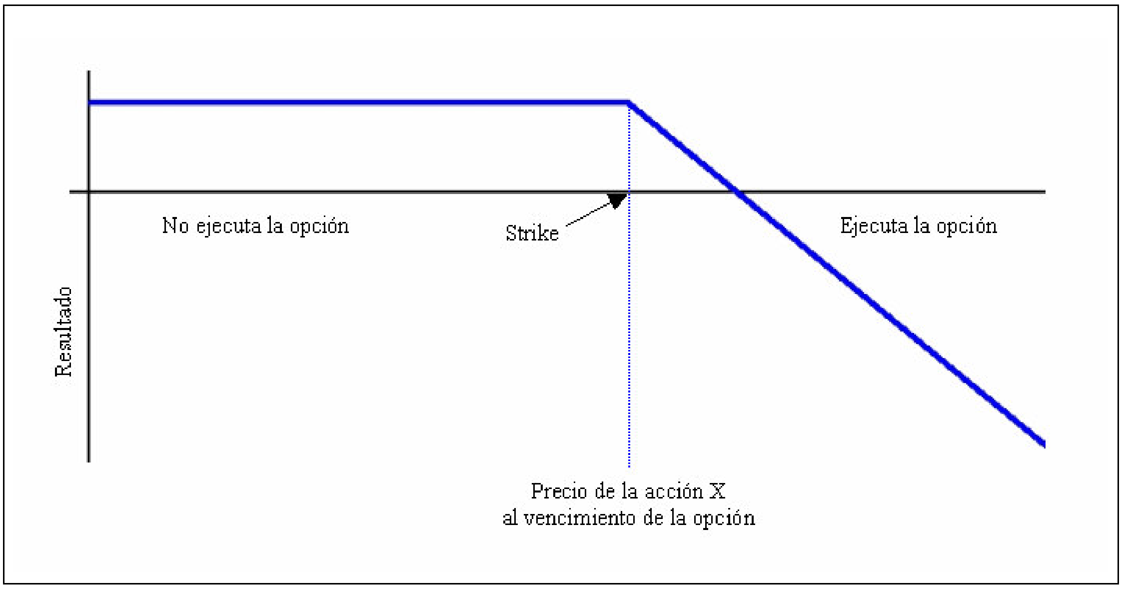

Figura 15. Venta de una opción de compra

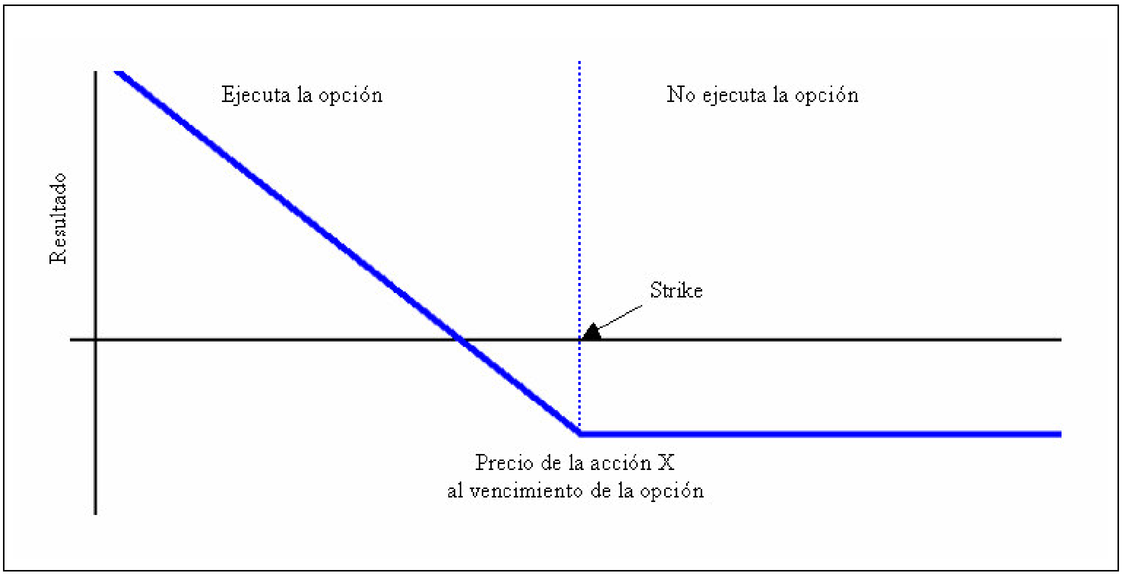

Figura 16. Compra de una opción de venta

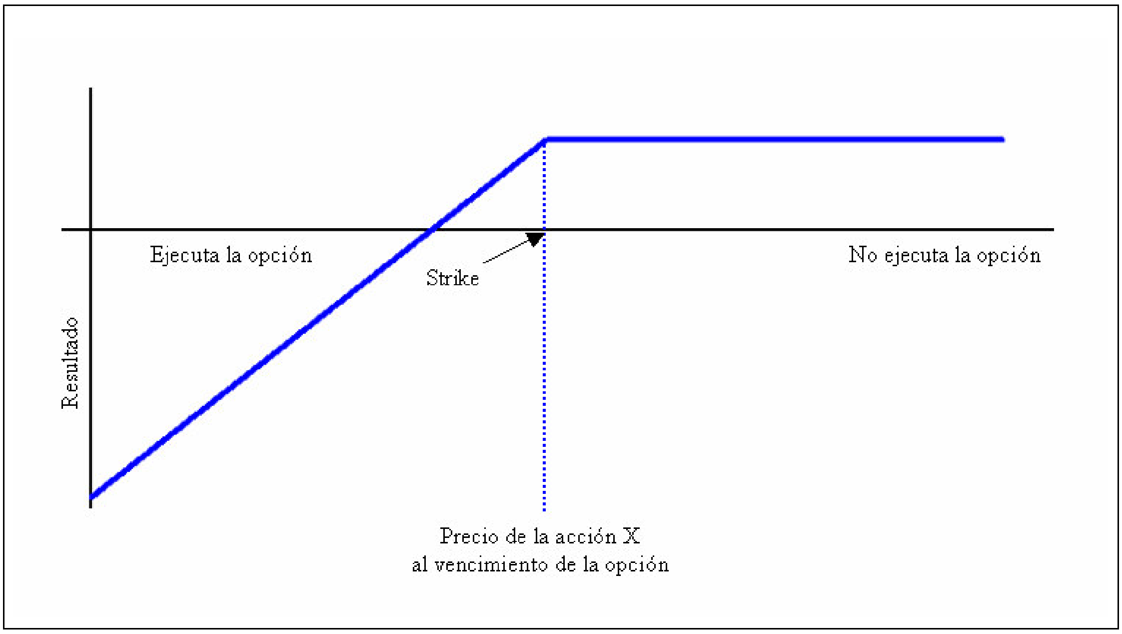

Figura 17. Venta de una opción de venta

Para analizar los factores de riesgo de las opciones financieras será preciso localizar cuáles son las variables que afectan al precio de las opciones, destacando los aspectos de riesgo que suponen. Estas variables son la cotización y posibilidad de variación del subyacente, el tiempo que resta hasta el vencimiento de la opción, los tipos de interés, los dividendos y cupones que puedan pagar las acciones o bonos, respectivamente:

- *Cotización del subyacente.* Cuanto más suba el precio de una acción sobre la que hemos comprado una opción de compra mayor valor tendrá nuestra opción de compra, pues mayor es el beneficio potencial que arrojará la opción. La diferencia entre el valor de mercado del subyacente de una opción y el precio de ejercicio se denomina "valor intrínseco de la opción"

- *Probabilidad de que varíe el subyacente: volatilidad.* Cuanto mayor sea la variación que el precio de una opción pueda tener durante la vida de la misma, mayor será el importe de la prima a pagar por ella, pues en mayor medida se podrá alejar el precio futuro del precio actual, y por tanto mayor es el beneficio potencial.

- *Valor temporal de la opción*. Cuanto más tiempo reste hasta el vencimiento de la opción, más puede variar el precio del subyacente, alejándose el precio futuro de su valor actual. Por tanto a mayor plazo, mayor prima. A la parte del precio de la opción que depende del tiempo se le denomina "valor temporal de la opción"

- *Tipos de interés*. El efecto de variaciones de los tipos de interés sobre el precio de las opciones es doble. Aumentos en los tipos de interés hacen aumentar por una parte el rendimiento esperado, mientras que por otra reducen el valor actual de cualquier flujo futuro. El resultado neto de esos dos efectos será distinto cuando se trate de una opción de venta o de una opción de compra.

  En el caso de una opción de venta los dos efectos empujan el valor de la opción en el mismo sentido, de manera que aumentos en los tipos de interés harán disminuir el importe de la prima, y viceversa. En el caso de una opción de compra las consecuencias de los efectos son contrapuestas, dominando el mayor valor esperado de la acción sobre la disminución del valor actual de los potenciales beneficios futuros. Consecuentemente, aumentos en los tipos de interés significarán aumentos en la prima, y al contrario.

- *Dividendos*. El efecto de los dividendos sobre las primas de las opciones es tal que disminuyen las primas de las opciones de compra y aumentan las primas de las opciones de venta. Todo ello, debido a que para calcular el valor de futuro había que corregir el precio actual de las acciones por el dividendo a cobrar. En el caso de las opciones de compra sobre las acciones que vayan a pagar dividendos, su precio se verá reducido frente a otra acción que no los pague. La razón es que este dividendo no formará parte del precio de la acción el día en que venza la opción, por lo que si no hubiese otro factor que hiciese variar el valor de la acción, el valor de mercado a futuro será inferior del valor de mercado actual, lo que incide negativamente en una opción de compra de acciones.

En la Tabla 5 se presenta un cuadro resumen con los movimientos de las primas ante modificaciones en las variables que influyen en los precios de las opciones:

Tabla 5. Movimientos de primas

Factor	Prima opción *call*	Prima opción *put*
Precio del subyacente	Mismo sentido (1)	Sentido contrario (2)
Precio de ejercicio	Sentido contrario	Mismo sentido
Tiempo al vencimiento	Mismo sentido	Mismo sentido
Volatilidad	Mismo sentido	Mismo sentido
Tipos de interés	Mismo sentido	Sentido contrario
Dividendos	Sentido contrario	Mismo sentido

(1) Un aumento del factor provoca un aumento de la prima.

(2) Un aumento del factor provoca una disminución de la prima.

Una vez contratada una opción, los riesgos más relevantes van a ser la variación en los precios del activo subyacente y la volatilidad de éstos.

3.7.2 Riesgo de Crédito.

Se presenta cuando las partes contrarias están poco dispuestas o imposibilitadas para cumplir sus obligaciones contractuales. Se da cuando existe el riesgo de no recuperar nuestras inversiones (capital, intereses,...) en los plazos previstos para ello. Sus características principales son:

- Puede surgir como consecuencia de préstamos directos, riesgos de firma u otras operaciones fuera de balance.
- Puede ser gestionado a través del establecimiento de límites.
- Las pérdidas potenciales son conocidas y se limitan al importe del principal y de los intereses o solo de los intereses, dependiendo del tipo de producto de que se trate.

Dentro del riesgo de crédito pueden distinguirse las siguientes modalidades:

3.7.2.1 Riesgo de contraparte o de sustitución.

Se refiere a la capacidad e intención de cumplir con sus responsabilidades contractuales en el momento del vencimiento. También se denomina riesgo de sustitución, haciendo referencia al coste de reemplazar las operaciones por otras similares con otras compartidas. El riesgo de crédito existe a lo largo de la vida de la operación, pero puede variar de un día a otro debido a los mecanismos de liquidación y a cambios en la valoración a precios de mercado de las operaciones. La exposición al riesgo de crédito total con una contrapartida debe incluir el coste de reemplazar, a precios actuales de mercado, las operaciones que no han vencido, y puede regularse mediante acuerdos de compensación (*netting* o *novation*).

Es, por tanto, el riesgo inherente a muchos de los denominados “instrumentos derivados”, contabilizados fuera del balance. Tiene las características de riesgo asimétrico y reducido, entendiendo este último en el sentido de que la eventualidad de incumplimiento no alcanza al nominal de la operación.

El daño financiero se limita, en el peor de los casos, a una cantidad equivalente al beneficio que el producto derivado haya producido desde su contratación hasta el vencimiento, más, en su caso, el coste o prima del derivado (caso de las opciones), lo que en ocasiones no es despreciable.

En el caso en el que se contrate el derecho a comprar una acción o un índice bursátil al precio de hoy; opción por la que se pagará el precio o prima que fija el mercado, y en el plazo contratado el precio de la acción o índice sube considerablemente, el quebranto para la cartera, si el emisor de esta opción no cumple con sus obligaciones, será el mencionado beneficio más la prima que se pagó en su momento. En la actualidad este tipo de contrato está muy demandado por los denominados "fondos garantizados"

En el caso de que se perciba el riesgo de contraparte antes del vencimiento de la opción, se deberá negociar con el emisor la cancelación de la opción de compra y negociarla con otro emisor, ya que en estos contratos bilaterales suele obligarse al emisor a ofrecer liquidez en cualquier momento. Sin embargo, siempre se encontrará una diferencia en contra entre la cantidad que se percibe por redimir al primer emisor de sus obligaciones futuras y el precio que se pagará al nuevo emisor.

3.7.2.2 Riesgo País.

Es la característica diferenciadora entre los riesgos nacionales y los internacionales, y supone el riesgo de crédito que concurre en las operaciones con entidades de otro país por circunstancias ajenas al riesgo comercial habitual. El riesgo país puede manifestarse como riesgo de transferencia o como riesgo soberano.

Es un riesgo de difícil conceptualización. El Banco de España lo define como el que concurre en las deudas de un país, globalmente consideradas, por circunstancias distintas del riesgo comercial habitual.

Comprende el riesgo soberano y el riesgo de transferencia, no debiéndose de confundir con el comercial o de calidad crediticia, pues una sociedad puede ser solvente aunque sus emisiones incurran en el citado riesgo país.

Una sociedad totalmente solvente que opera en un país distinto a España, que hace frente al pago de los intereses y principal en moneda local, quizás no puede hacerlo cuando dichas deudas estén denominadas en otras divisas. Esto ocurrirá porque el gobierno no disponga de divisas o porque decida limitar la venta de otras monedas. En estos casos a la compañía emisora de deuda le es imposible pagar intereses y principal en una divisa distinta de la propia, por lo que se incurre en el denominado *"Riesgo de Transferencia"*.

Otra clase de riesgo país es el llamado *"Riesgo Soberano"*, que se deriva de lo ineficaces que puedan ser las acciones legales contra un Estado si este decide no pagar sus deudas. Por tanto, el riesgo soberano implica deudas de estados o de entidades garantizadas por ellos.

3.7.2.3 Riesgo de liquidación o entrega.

Es el riesgo de que se liquide una de las partes de la transacción y no se reciba la contraprestación pactada. Se caracteriza porque afecta a operaciones que están teóricamente concebidas sin riesgo de crédito, puesto que prestación y contraprestación deberían ejecutarse de forma simultánea.

Este riesgo existe en cualquier tipo de producto o mercado en que no rige el principio de entrega contra pago, y se caracteriza por ser un riesgo de crédito pleno, afectando al principal e intereses de la operación

Puede tener un doble origen: fallo de la parte contraria por razones de insolvencia o dificultades técnicas en el sistema de pagos utilizado que interrumpan la liquidación.

También aparece en el caso de la falta de simetría en la ejecución de obligaciones como consecuencia de diferencias horarias (por motivos geográficos o por las características mismas del sistema de pago utilizado).

Puede aparecer también cuando se compra o se vende. En el caso de una venta de títulos, el riesgo consiste en un retraso en la recepción del efectivo, y el quebranto será el coste de financiar dicho efectivo que podemos precisar para liquidar otra operación.

Si se tiene comprometida una operación cuyo importe se ha de hacer efectivo con la cantidad que se espera recibir de la transacción, no quedará más remedio que recurrir a alguna forma de crédito para recibir una financiación y hacer frente al compromiso.

Si, además, la operación no llegase a buen fin porque el comprador decide finalmente no cumplir con sus obligaciones contractuales, además del coste de financiación en que se incurría antes, se enfrenta al riesgo de posibles variaciones de precios (caso típico de las acciones).

El riesgo de incumplimiento también aparece en compras de títulos, y consiste en un retraso en la recepción de los mismos. El riesgo es igualmente elevado, cuando, por nuestra parte, se haya comprometido con un tercero la venta de los mismos.

3.7.3 Riesgo de Liquidez.

Entendiendo por liquidez la capacidad de transformar un activo en efectivo a los precios existentes en cada momento. Se da cuando existe una incapacidad para conseguir obligaciones de flujos de efectivo necesarios. Es decir, se incurre en él como consecuencia de falta de recursos líquidos suficientes con los que hacer frente al cumplimiento de sus obligaciones. Si, por ejemplo, un inversor con un gran paquete quiere vender una cantidad desproporcionada de acciones respecto a la demanda que hay en un momento determinado, no podrá finalizar las operaciones a los precios existentes en ese momento, sino que se harán a precios sensiblemente más bajos.

Puede observarse desde dos perspectivas distintas:

3.7.3.1 Liquidez del mercado.

Se define como el riesgo de no poder deshacer o cerrar una posición a tiempo en el mercado en un momento dado, sin impactar en el precio de mercado o en el coste de transacción. Puede ser causado por la inestabilidad en los mercados, aumentando con la concentración existente en ciertos productos y monedas. Se evalúa considerando tanto la relación entre los distintos mercados y sus respectivas profundidades como el plazo de los principales productos, así como otros factores. Por tanto, representa el riesgo de pérdida potencial de valor que podría producirse debido a la escasa profundidad del mercado en un momento determinado y con un producto específico. También se asocia este riesgo con la posibilidad de que una transacción de gran volumen en un instrumento particular pueda tener un efecto imprevisible en el precio del instrumento. Éste es el caso de operaciones con renta fija privadas en mercados de reducidas dimensiones; la construcción de carteras que incorporen de forma significativa estos títulos corren el riesgo, aunque se trate de pocos agentes, de hacer subir el precio de los mismos a partir de las primeras compras.

3.7.3.2 Financiación de necesidades de liquidez.

Surge del desfase temporal en los flujos de caja o de necesidades imprevistas de tesorería, bien por un diseño inapropiado de las operaciones activas y pasivas, bien por necesidades de liquidez no previstas. Si una entidad tiene que hacer un pago dentro de una año, y el efectivo con el que se pretende hacer frente al pago lo tiene invertido a un plazo de cinco años, puede que incurra en pérdidas, puesto que tendrá que recuperar la inversión antes del vencimiento de la misma y no se sabe a que precio se hará, si con plusvalías, con el mismo valor o con minusvalías.

3.7.4 Riesgo Operativo u Operacional y de Tecnología:

Es el referido a las pérdidas potenciales resultantes de sistemas inadecuados u ocurrencias de sucesos inesperados relacionados con la infraestructura operativa y tecnología interna y externa.

Sus características principales son:

- Generalmente no es cuantificable.
- Depende de las decisiones adoptadas sobre aspectos diversos tales como sistemas, personal, procedimientos y documentación.

- Se puede mitigar mediante el entrenamiento de la plantilla, el establecimiento de controles externos e internos y la elaboración de planes de contingencia

Dentro de estos riesgos se incluyen:

- *Autorizaciones internas y externas*. Representa el riesgo de que las transacciones procesadas se encuentren fuera del marco operativo autorizado, bien en la propia entidad o en la parte contraria.
- *Documentación*. Es el riesgo de que no se pueda presentar correctamente una reclamación, debido a la existencia de una información incompleta, incorrecta o por pérdida de la misma.
- *Interrupción en el proceso de las operaciones*. Es el riesgo de incapacidad de procesar las transacciones efectuadas debido a fallos en los sistemas o equipos, huelgas, desastres naturales, etc.
- *Integridad y juicio*. Es el riesgo de que el personal, de forma intencionada o no, incumpla las políticas y procedimientos establecidos, poniendo en peligro las actividades operativas diarias.
- *Recursos humanos*. Surge por la falta de personal adecuado o no suficientemente capacitado para ejecutar las transacciones, procesarlas y ejercer las labores de control.
- *Fraude / conflicto de intereses*. Este riesgo se ocasiona en aquellas circunstancias en que el personal actúa por cuenta propia, anteponiendo la consecución de los beneficios personales a los de la empresa o entidad.
- *Error*. Es el riesgo de que fondos incorrectamente aplicados o desembolsos excesivos no puedan ser recuperados total o parcialmente.
- *Fijación del precio del producto*. Puede producirse por el uso de modelos de valoración incorrectos, su manipulación fraudulenta o la utilización de un dato erróneo en dichos modelos.

- *Fiscal*. Es el riesgo surgido como consecuencia de un cambio en las políticas impositivas o en la interpretación de las mismas.

- *Contable*. Corresponde al riesgo que surge por el registro contable incorrecto, de acuerdo con lo establecido por la normativa sobre determinadas operaciones y que como consecuencia de ello se originen variaciones significativas en la información interna y externa facilitada.

- *Procesamiento de las transacciones*. Representa el riesgo de que se puedan producir errores, fallos o caídas en los sistemas utilizados en algunas de las siguientes etapas que se enumeran a continuación y que suponen riesgo operacional solo por sí mismas.

    - *Registro de la operación*. Es el riesgo de que las operaciones no sean registradas o no lo sean correctamente, originando una información errónea acerca de la exposición al riesgo y, consecuentemente, en la posible toma de decisiones de negocio erróneas.

    - *Confirmación*. Constituye tanto el riesgo de que los datos erróneos de la operación no sean detectados, o no lo sean en el momento oportuno, como que las operaciones no registradas no sean identificadas.

    - *Liquidación*. Es el riesgo de que los fondos o activos financieros contratados no sean recibidos o entregados a la fecha contratada, o lo sean incorrectamente.

    - *Acceso físico*. Refleja el riesgo de que el dinero u otros bienes sean accesibles a personal de la entidad no autorizado.

    - *Acceso a los sistemas*. Es el riesgo de que los registros contables y operativos y la capacidad de movimientos de fondos sean accesibles a personal de la entidad no autorizado.

    - *Valoración*. Es el riesgo de que las posiciones sean valoradas incorrectamente, por error de modelo, manipulación o utilización de parámetros inadecuados.

3.7.5 Riesgo Legal.

Se presenta cuando una parte no tiene la autoridad legal o regulatoria para realizar una transacción, no pudiéndose cumplir el contrato en los términos previstos.

Dentro de estos riesgos de incluyen:

3.7.5.1 Riesgo de documentación.

Documentos incompletos, incorrectos o extraviados, o la inexistencia de los mismos. Tendrán una incidencia negativa en la capacidad de desarrollar la operación en la forma prevista.

3.7.5.2 Riesgo de legislación específica de cada país.

Es el riesgo de que una transacción no sea válida o ejecutable en función de las leyes que gobiernan los países de residencia de las distintas partes o de cambios en las mismas.

3.7.5.3 Riesgo de capacidad de las contrapartes.

Es el riesgo de que una de las partes no tenga capacidad legal suficiente para comprometer a su institución por los contratos que realice o a causa de ciertas restricciones normativas del país.

3.7.6 Riesgo residual o específico.

Comprende, como su nombre indica a todos los riesgos restantes. Este tipo de riesgo es, por tanto, específico del valor y *no sistemático.* Para combatirlo se utiliza normalmente la técnica de comprar valores que se suponen devaluados, para así representar el valor relativo y vender valores aparentemente sobrevalorados.

3.8 Factores de Riesgo

Para controlar el riesgo es necesario saber cuánto de *sistemático* tiene un tipo particular de riesgo. Los riesgos *no sistemáticos* cuyos resultados de rendimiento están cercanos a cero a través de los instrumentos, pueden reducirse por diversificación. La diversificación, sin embargo, sólo conduce al riesgo calculando los mayores riesgos correlativos. En todos los casos es necesario proteger las estrategias. Es importante distinguir el riesgo *sistemático* del *no sistemático* para desarrollar una estrategia apropiada de inversión.

Para ver el funcionamiento de la protección, se considera el siguiente modelo de factor único, asumiendo que el factor de riesgo se desenvuelve según ecuaciones diferenciales estocásticas. Un ejemplo claro de este tipo de desarrollo es el denominado *"Proceso Ritchken (1987)"* para un modelo de factor único *F*.

Si se tiene que:

- *F*: Nivel de Factor de Nivel de Riesgo.

- *T*: Tiempo

-μ,σ: Media y desviación típica del factor de riesgo.

- ω: Variable aleatoria de distribución normal.

- P_r, Q_r : Primas expuestas al mismo factor de riesgo.

El factor se desarrolla de acuerdo a:

$$dF = \mu dt + \sigma d\omega \tag{3.38}$$

Si el precio P_r de un valor dado es una función continua del valor único y del tiempo. Según el lema de Îto, el precio del valor sería:

$$dP_r = (\partial P_r / \partial F)dF + (\partial P_r / \partial t)dt + 1/2(\partial^2 P_r / \partial F^2)dF^2 \tag{3.39}$$

Sustituyendo y agrupando queda:

$$dP_r = \left[\mu(\partial P_r / \partial F) + (\partial P_r / \partial t) + 1/2\sigma^2 \left(\partial^2 P_r / \partial F^2\right)\right]dt + \sigma(\partial P_r / \partial F)d\omega \qquad (3.40)$$

Por lo que el primer miembro es determinista, representando la prima de riesgo en función del tiempo y dependiendo sólo del tiempo, y el segundo es estocástico, es decir, depende del azar, representando las variaciones para el factor de riesgo. Considerando que dos valores se hallen expuestos al mismo factor con precios P_r y Q_r respectivamente, y dando valores x e y respectivamente a las dos primas de riesgo queda:

$$x\sigma(\partial P_r / \partial F)d\omega + y\sigma(\partial Q_r / \partial F)d\omega \qquad (3.41)$$

Luego la estrategia de inversión *(x, y)* viene derivada de la expresión:

$$x(\partial P_r / \partial F) + y(\partial Q_r / \partial F) = 0 \qquad (3.42)$$

Por lo que, si se cumple dicha condición, se estará totalmente libre de riesgo. En esta última expresión, $\partial P_r/\partial F$ es la sensibilidad del precio del valor a los cambios marginales del nivel de factor, o la saturación factorial del valor.

Para que la expresión anterior sea válida se tiene que cumplir que el factor sea común a ambos valores (debe ser sistemático), de modo que los rendimientos marginales estén perfectamente correlacionados. Si los dos valores estuvieran expuestos a factores residuales específicos del valor, es decir, a riesgos no sistemáticos, la protección eliminaría el factor de riesgo común pero no los riesgos residuales de la cartera.

La estrategia de inversión x e y derivada de la expresión (3.42) es sólo una protección local. En general, $\partial P_r/\partial F$ depende del tiempo y para asegurar que la cartera permanece fuera de riesgo, la posición debe ajustarse continuamente. En la práctica esto no es factible, solucionándose el problema con un discreto reequilibrio de la cartera. Esto ayuda a estabilizar las condiciones de protección. Habiendo eliminado los efectos de primer orden a través de la estabilización de la expresión (3.42), y forzando un segundo orden (o convexidad), se consiguen restricciones para mejorar el seguimiento.

Si no se ajusta la protección continuamente, la cartera está sujeta al riesgo de volatilidad, siento controlado este último, por las condiciones de convexidad.

Las expresiones (3.38) y (3.42) se pueden aplicar a modelos multifactoriales. Es decir, en presencia de dos factores comunes, tres valores serían suficientes para eliminar el riesgo. El segundo se usaría para eliminar el primer factor y el tercero se combinaría con los otros dos para eliminar el segundo factor.

Eliminando el factor de riesgo y asumiendo que F es el rendimiento del valor, entonces la expresión (3.42) es la estrategia combinada de duración clásica. La inmunización contra el riesgo del tipo de interés se consigue cuando las sensibilidades del factor en activos y pasivos son iguales.

Otra interpretación se consigue dejando que F represente el mercado, entonces una posición libre de riesgo se adquiere cuando la sensibilidad neta al mercado es cero.

En resumen, la expresión (3.42) describe los principios de protección del riesgo de mercado.

4. Modelos genéricos para la administración del Riesgo

Otro aspecto a destacar en la gestión de riesgos es la administración de los mismos. Para que dicha administración resulte eficiente, se deben definir unos objetivos y unas funciones asociadas a éstos. A continuación, se presentan dos tipos de funciones para objetivos diferentes:

- *Objetivo*: Identificación de los distintos tipos de riesgo

  Función: Determinar el nivel de tolerancia o aversión al riesgo

- *Objetivo*: Medir y controlar el riesgo mediante la instrumentación de técnicas y herramientas

  Función: Determinar el capital para cubrir un riesgo, monitorizar y controlar los riesgos, garantizar los rendimientos sobre capital a los accionistas e identificar las alternativas para reasignar el capital y mejorar los rendimientos

Una vez analizados los objetivos y las funciones de la administración de riesgos, es importante conocer, paso a paso, el proceso de cómo se administran.

- *Identificación del riesgo*: Determinar cuales son las exposiciones más importantes al riesgo en la unidad de análisis (familia, empresa o entidad).

- *Evaluación del riesgo*: Cuantificación de los costes asociados a riesgos que ya han sido identificados.

- *Selección de métodos de la administración del riesgo*: Dicha selección depende de la postura que se quiera tomar para evitar el riesgo, bien para la prevención y control de pérdidas (tomando medidas tendientes a disminuir la probabilidad o gravedad de la pérdida), bien para la retención del riesgo (absorbiendo y cubriendo las pérdidas con los propios recursos), o bien para transferir los riesgos trasladando el riesgo a otros (ya sea vendiendo el activo en riesgo o comprando una Opción de Riesgo).

- *Implementación de la decisión*: Puesta en marcha de las decisiones que se han tomado.
- *Repaso*: Evaluación y revisión periódica de las decisiones tomadas.

Es importante recalcar la importancia del método de transferencia del riesgo, ya que hoy en día es el método más utilizado en la administración del riesgo y, a su vez, es el método más usado cuando se recurre a instrumentos derivados.

El método de transferencia del riesgo cuenta con tres dimensiones:

- *Protección o cobertura*: Cuando la acción tiende a reducir la exposición a una pérdida lo obliga también a renunciar a la posibilidad de una ganancia.
- *Aseguramiento*: Que significa pagar una prima para evitar pérdidas, es decir, pagar el precio del seguro.
- *Diversificación*: Mantenimiento de cantidades similares de muchos activos con riesgo en vez de concentrar toda la inversión en uno solo.

4.1 Métodos Básicos para la Gestión del Riesgo

En este apartado se va a analizar la relación existente entre las probabilidades y los impactos de los riesgos, así como la matriz de efectos resultante.

4.1.1 Relación entre probabilidades e impactos de los riesgos

Como se ha venido señalando, es fundamental el conocimiento de la probabilidad y el impacto de los riesgos.

En la realidad, conocer exactamente la probabilidad y el impacto de todos los riesgos posibles es muy difícil. Generalmente sólo se dispone de estimaciones para ambas variables cuya precisión es también muy diferente en función del riesgo considerado.

Para facilitar la labor del gestor se pueden realizar representaciones. Considérese, por ejemplo, que se toman los riesgos R_i, R_j, R_k y R_l (claramente diferenciados). Si se tiene en cuenta que cada uno de los riesgos tiene una determinada probabilidad de ocurrencia y un impacto previsible, y teniendo en cuenta que estos valores pueden ser en la práctica muy diferentes, se pueden construir límites distintos (por ejemplo los límites 1 y 2 de la Figura 18). A partir de ahí, se puede construir un gráfico muy útil para facilitar la toma de decisiones del gestor, de forma que este pueda concentrarse en todos ellos o en un número limitado de los mismos.

En este caso, y atendiendo a la Figura 18, si no se toman límites se tendrían en cuenta todos los riesgos. Si se toma el límite 1, el riesgo R_e no sería considerado. Si se decide incrementar hasta el límite 2, únicamente sería gestionable el límite R_j.

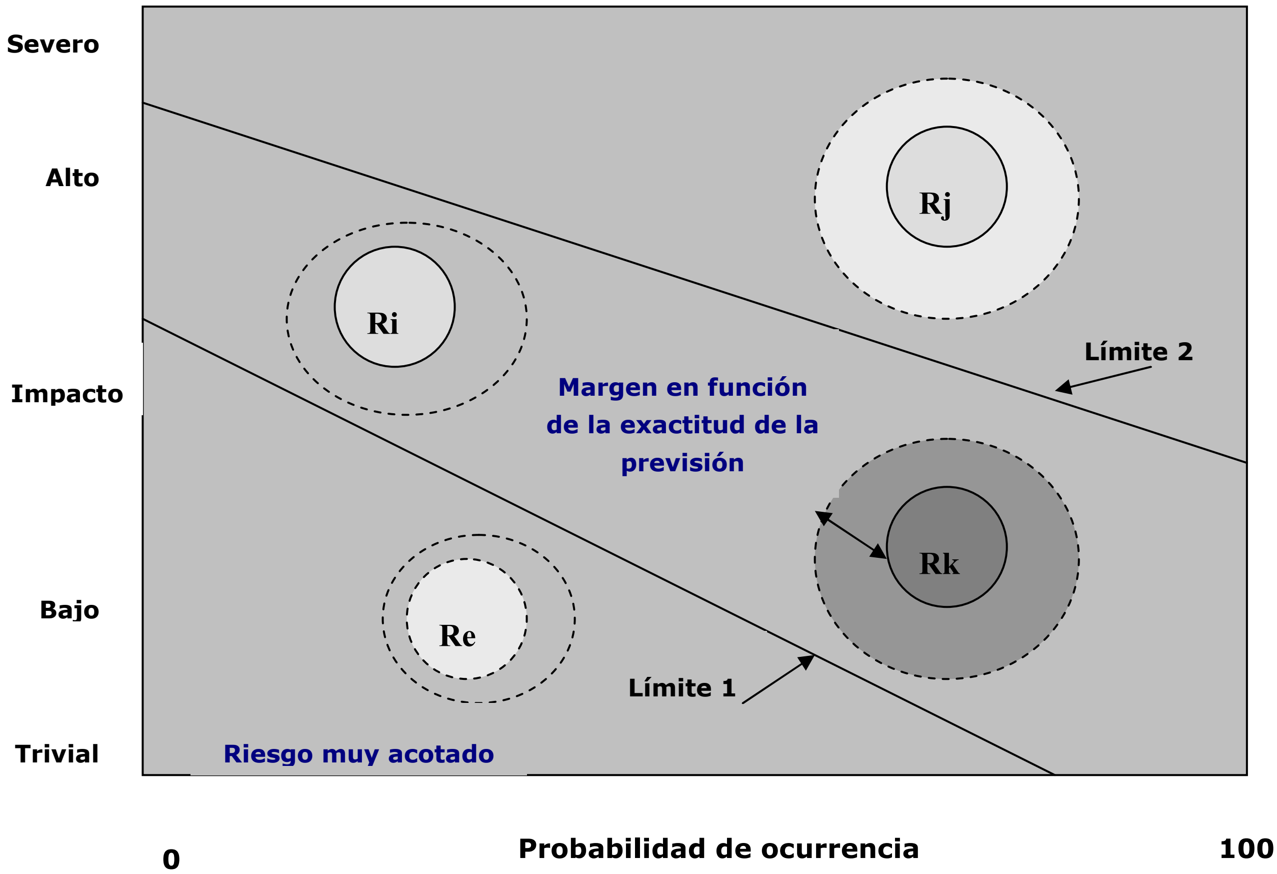

Figura 18. Impacto del riesgo en función de la probabilidad de ocurrencia

Considerando que tanto los efectos como las probabilidades se mueven en un rango amplio, la decisión que tiene que tomar el gestor se complica y deja de ser tan evidente cual sería la estrategia más adecuada. En gran medida, dependerá del gestor y de su actitud o tolerancia frente al riesgo.

También hay que tener en cuenta que los estados no controlados no permiten calcular adecuadamente las probabilidades. Si se recalculan los valores con máximos y mínimos, posiblemente los valores esperados se situarían en márgenes que se solaparían. La consecuencia de todo ello es una mayor dificultad para la toma decisiones.

4.1.2 Matriz de Efectos

El efecto de determinadas opciones puede representarse mediante las denominadas matrices de efectos. La Figura 19 que se ha representado describe una estructura genérica de matriz de efectos. Se han representado en las filas las posibles opciones o soluciones en manos del gestor, sus estrategias (SA, SB,....SM), y en las columnas un conjunto de acontecimientos sobre los que el gestor no tiene control directo pero que influyen decisivamente en los resultados de sus decisiones (N1, N2,...NN). La selección de una alternativa en el caso de que se produzca uno de estos acontecimientos tiene consecuencias muy diferentes sobre la organización.

Para construir una matriz de efectos se deben identificar las situaciones sobre las que no se tiene control. Después se selecciona el conjunto de estrategias que se desea adoptar. Cada una de las estrategias implica adoptar determinados riesgos que serán diferentes en función de las situaciones externas que finalmente se presenten. Las celdas, por tanto, suponen el análisis concreto de las consecuencias sobre la estrategia correspondiente de la situación del contexto externo.

Estados del contexto externo sobre los que tenemos control directo

Posibles estrategias

	Situación Previsible 1	Situación Previsible 2		Situación Previsible N
Solución A Tecnológica				
Solución B Tecnológica		Efectos sobre la organización	Análisis comparativo	
Solución M Tecnológica				

Figura 19. Matriz de efectos

En la Figura 19 se puede observar como las cuadrículas asociadas a cada riesgo pueden presentar una concentración, del mismo, mayor o menor. El color de dichas cuadrículas nos indicará el grado de riesgo en cada caso.

4.2 Modelos de valoración lineal del Riesgo

Los modelos de gestión de riesgos se usan para seleccionar carteras con exposición específica a diferentes riesgos.

A continuación se van a analizar diferentes modelos que partiendo del equilibrio de los mercados financieros permiten la estimación de un precio del riesgo.

4.2.1 Modelo de valoración de activos de capital (CAMP: Capital Asset Pricing Model).

El modelo de valoración de activos de capital, conocido por las siglas CAMP, fue desarrollado originariamente por Sharpe, W. F. (1963), partiendo de los desarrollos teóricos previos de Markowitz, H. y Tobin, J., introduciendo en el análisis de la selección de carteras óptimas el concepto de equilibrio de los mercados desde la perspectiva de la demanda.

El propio Sharpe, W. F. reconoce que antes de la publicación de su artículo conoció una versión anterior del modelo realizada por Treynor, J. L. (1961), la cual nunca llegó a publicarse.

Muchos autores han realizado aportaciones a este modelo, flexibilizando de alguna manera los supuestos, alguno de ellos muy restrictivos en el modelo original.

Las aportaciones más destacadas han sido las de Lintner, J. (1965, 1969), Mossin. J. (1966), Fama, E. F. (1968), Black, F. (1972), Mayers, D. (1972) y Merton, R. C. (1973).

4.2.1.1 La cartera óptima de mercado y el equilibrio de los mercados financieros.

El "Teorema de Separación de Fondos" enuncia que la cartera de inversión óptima para cualquier inversor averso al riesgo está situada sobre la denominada "línea del mercado de capitales", como combinación lineal de la denominada "cartera de mercado" y un determinado porcentaje de un fondo de activos monetarios sin riesgo.

Si se tiene que:

- C_{Ni}: Estructura de la cartera del inversor i.

- C_m: Fondo de activos monetarios con riesgo.

- F: Fondo de activos monetarios sin riesgo.

- λ_i : Porcentaje del patrimonio del inversor que invierte en cartera de mercado con riesgo.

- P_{xj} : Montante total, en términos monetarios, de la demanda en el mercado del activo $\tilde{x}_j$.

- P_i : Patrimonio inicial del inversor *i,* en términos monetarios.

- V_j : Valor de mercado de la inversión en el activo $\tilde{x}_j$.

- P_m: Patrimonio total invertido por todos los inversores en el mercado.

- P_{Cm} : Patrimonio total invertido con riesgo por todos los inversores en el mercado.

- *i= 1, 2, ..., m* inversores del mercado.

- *j= 1,2, ..., n* activos diferentes.

La estructura de la cartera de cualquier inversor *i* $(C_{N,i})$ se puede expresar como:

$$C_{N,i} = \lambda_i C_m + (1 + \lambda_i) F \tag{4.1}$$

Luego, el patrimonio total invertido en el mercado vendrá dado por los *m* patrimonios individuales:

$$P_m = \sum_{i=1}^{m} P_i \tag{4.2}$$

De la totalidad del patrimonio de cada inversor *i*, de acuerdo con lo expuesto, dirigirá una proporción λ_i a la cartera de mercado, por lo que el patrimonio total invertido con riesgo (P_{Cm}) puede expresarse como sumatorio de los patrimonios individuales invertidos en la cartera de mercado:

$$P_{Cm} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i \tag{4.3}$$

Por otra parte, el valor de capitalización, también en términos monetarios de una inversión $\tilde{x}_j$, denotado por V_j, es el valor de mercado de esa inversión, es decir, su precio actual por el número de títulos en circulación, por lo que la suma de los distintos valores de capitalización es el valor total del mercado de las inversiones con riesgo (V_m) :

$$V_m = \sum_{j=1}^{m} V_j \tag{4.4}$$

La condición de equilibrio de cualquier mercado consiste en la igualdad entre la oferta y la demanda. Si se supone que existe un stock de activos financieros fijado previamente, como consecuencia del punto de vista estático, la demanda vendría determinada por el importe monetario que el conjunto de inversores están dispuestos a dirigir hacia los mercados con riesgo. La oferta, por su parte, no sería más que el valor de capitalización total del mercado. El mercado estaría en equilibrio, y, por tanto, se vaciaría a los precios corrientes cuando lo que los inversores están dispuestos a invertir, en términos monetarios, coincida exactamente con el valor total de capitalización del mercado:

$$P_{Cm} = V_m \tag{4.5}$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i = \sum_{j=1}^{n} V_j \tag{4.6}$$

Los desequilibrios que pudieran producirse en el mercado se ajustarían, por el lado de la demanda, aumentando o disminuyendo la proporción de la cartera de mercado en el patrimonio total de los inversores, y, por el lado de la oferta, con las correcciones de los precios de los activos.

El equilibrio global de los mercados financieros también debe reflejarse para cada uno de los activos que componen la cartera de mercado. Del vector de ponderaciones A_m que corresponde a la cartera de mercado, extraemos las ponderaciones de cada uno de los *n* activos con riesgo en dicha cartera *(a_{jm})*:

$$A_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots a_{jm}, \ldots, a_{nm}) \tag{4.7}$$

El importe monetario que cada inversor estaría dispuesto a invertir en cada uno de los activos, para maximizar su utilidad esperada, vendría determinado por la proporción total del patrimonio dirigido a riesgo y la ponderación de cada valor en la cartera de riesgo. La suma de todos los inversores de la parte del patrimonio individual dirigido a ese activo nos daría el importe total del patrimonio de los inversores invertido en dicho activo:

$$P_{xj} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{jm} P_i \tag{4.8}$$

Siendo, por tanto, P_{xj} el montante total, en términos monetarios, de la demanda del activo $\widetilde{x}_j$, que tendrá que ser exactamente igual al valor de capitalización de dicho activo para que el mercado de riesgo se encuentre en equilibrio, tanto en cantidades como en precios:

$$P_{xj} = V_j \tag{4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{jm} P_i = V_j \tag{4.10}$$

Dado que a_{jm} es una constante para todos los participantes del mercado de activos con riesgo, se puede sacar factor común:

$$a_{jm} = {V_j}\Big/\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i \right) = V_i \tag{4.11}$$

Y siendo la condición global de los mercados:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i = V_m \tag{4.12}$$

Se puede decir que la condición de equilibrio del activo $\tilde{x}_j$:

$$a_{jm} V_m = V_j \tag{4.13}$$

De donde se obtiene una importante conclusión para la caracterización de la cartera de mercado en condiciones de equilibrio de los mercados financieros, ya que, para que se dé el doble equilibrio (el global de oferta y demanda de activos con riesgo, y el individual de oferta y demanda de cada uno de los activos), es preciso que la ponderación de cada activo con riesgo en la cartera de mercado sea exactamente su peso en términos de capitalización en el mercado de activos con riesgo:

$$a_{jm} = \frac{V_j}{V_m} \tag{4.14}$$

La ponderación que en la cartera de mercado óptima (cartera tangencial, que será elegida por todos lo inversores) tenga un determinado activo será el peso de dicho activo en el total del mercado. Si dichos porcentajes no coincidieran, se ajustarían los precios de los activos y la ponderación de mercado de los mismos, hasta que oferta y demanda fueran iguales.

A pesar de que el modelo expuesto por Sharpe, W. F. (1963) no permite analizar con precisión el proceso de ajustes que se genera en los mercados financieros, el resultado final del proceso será la linealización de la curva que representa el conjunto eficiente de oportunidades de inversión. La concentración de la demanda del mercado en los activos que componen la cartera de mercado y la falta de interés por poseer aquellos activos que no formen parte de ella llevarían a una revisión de los precios de estos activos. Los precios de los activos de la cartera de mercado aumentarán y, por tanto, su rendimiento esperado disminuirá, reduciéndose así mismo, el atractivo de las combinaciones que incluyan estos activos. Los precios de los activos no incluidos en la cartera de mercado bajarían, lo que supondría un aumento de sus rendimientos esperados.

Los sucesivos cambios en los precios de las inversiones conducirán a las siguientes revisiones de las decisiones de inversión de los agentes, por lo que nuevas combinaciones de inversiones se harán atractivas, aumentando sus demandas y ello, a su vez, generará cambios ulteriores de los precios.

La consecuencia de este proceso de ajuste es que la frontera eficiente tenderá a linealizarse, siguiendo la pendiente de la línea del mercado de capitales, por lo que, según Sharpe, W.F. (1963) no hay ninguna razón teórica para afirmar que existe una única combinación óptima o cartera de mercado, sino que cualquiera de las alternativas situadas sobre la intersección (que no tangencia) de la línea del mercado de capitales y la frontera eficiente es una cartera eficiente elegible por cualquier inversor averso al riesgo.

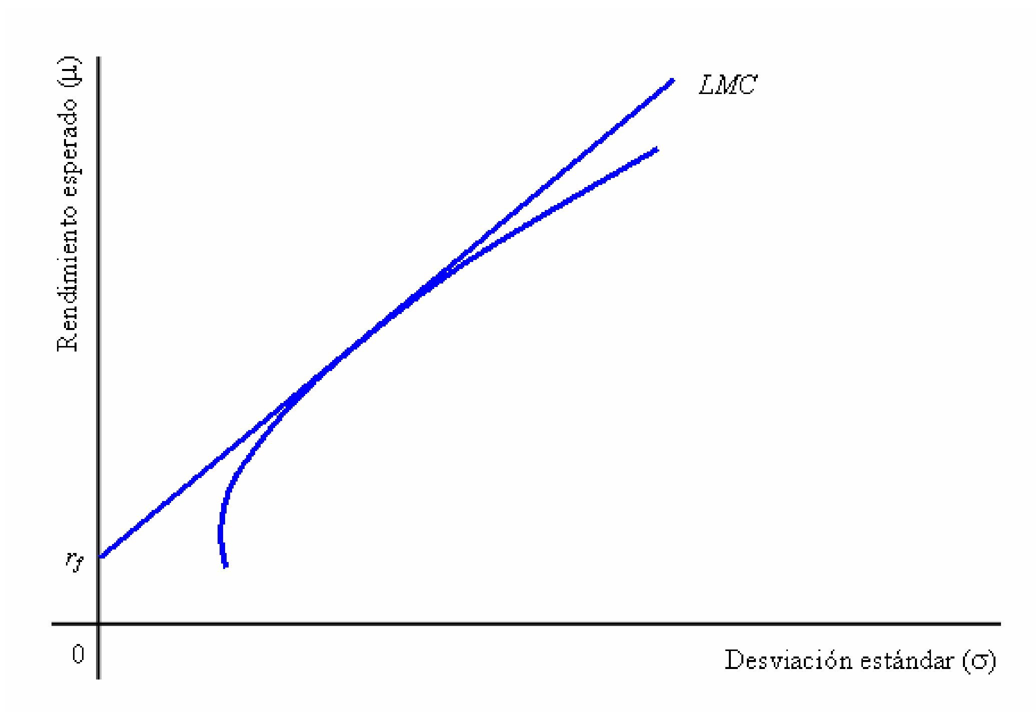

Figura 20. Linealización de la frontera eficiente en mercados en equilibrio

En cualquier caso, ya sea por la existencia de una única cartera de mercado, ya por la linealización de las alternativas eficientes, el resultado final será el mismo, es decir, que la ponderación de mercado o la media ponderada de los pesos en las carteras individuales, respectivamente, de cada inversión habrá de coincidir con el peso de la capitalización del mismo sobre el mercado total de activos con riesgo.

4.2.1.2 Hipótesis previas del modelo CAPM.

Para llegar a un modelo lineal de valoración de activos financieros es preciso ir acotando el campo de definición mediante supuestos más o menos restrictivos, pero que han permitido obtener conclusiones aceptables.

De una manera esquematizada, tal y como lo exponen Copeland, T.E. y Weston, J. F. (1988) y Brennan, M. (1987), los supuestos básicos sobre los que está construido el modelo de valoración de activos de capital, originariamente descritos por Sharpe, W. F. (1963), se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Los inversores son individuos aversos al riesgo que maximizan la utilidad esperada en un solo período. La función de utilidad esperada se supone biparamétrica, dependiente exclusivamente de la esperanza matemática y la varianza de las distribuciones aleatorias de probabilidad de los rendimientos de los activos financieros con riesgo. Aunque dicho supuesto puede derivarse de la función de utilidad cuadrática, debido a los importantes inconvenientes de dicha función para representar adecuadamente a un inversor racional y averso al riesgo, se considera la consecuencia lógica de suponer que los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente.

- Los inversores son precio-aceptantes, presentando expectativas homogéneas sobre las distribuciones de rendimientos de las distintas inversiones financieras con riesgo. Ello permite considerar un único conjunto de oportunidades de inversión para todos los inversores. Dicho conjunto está representado por la denominada *"frontera eficiente"* (Ruiz, G. 2000). Al igual que en el supuesto anterior, para que los únicos criterios de elección utilizados sean la media y la varianza de las distribuciones de rendimientos de los activos y de las correspondientes carteras, se precisa suponer distribuciones normales de rendimientos.

- Existe la posibilidad de invertir en un activo monetario sin riesgo, de manera que los inversores pueden mantener un porcentaje de su patrimonio en liquidez o endeudarse para aumentar el peso de la cartera de riesgo. Se supone que no hay limitaciones cuantitativas ni a la liquidez ni al endeudamiento, siendo el mismo tipo de interés libre de riesgo el referente para ambas posiciones.

- Las cantidades disponibles de los distintos activos financieros con riesgo se encuentran fijadas como una variable exógena al modelo. Todos los activos se consideran negociables y perfectamente divisibles. Se considera que los distintos activos no generan dividendos, sino simplemente ganancias de capital.

- No hay fricciones en los mercados financieros y suponemos que no hay costes de transacción. Existe información completa sobre las condiciones de los mercados, sin coste y disponible simultáneamente para todos los inversores.

- No existe ningún tipo de imperfecciones tales como impuestos, regulaciones o restricción o restricciones sobre ventas en descubierto (posiciones cortas.

Algunos de estos supuestos han sido criticados por autores anteriormente citados (Cooeland, T. E., Weston, J. F. y Brennan, M.), introduciendo nuevos desarrollos analíticos al eliminar o modificar los supuestos de partida del modelo.

Black, F. (1972) elimina el supuesto de la existencia de un activo monetario sin riesgo, introduciendo, por el contrario, el concepto de cartera de *"beta cero"*.

Brennan, M. (1970) rompe el supuesto de la no existencia de impuestos, considerando un impuesto sobre el dividendo.

Mayers, D. (1972) introduce el concepto de activos financieros no negociables para considerar aquella parte del patrimonio personal que no cotiza en los mercados y que, por diversos motivos, impone restricciones a la libre configuración de la cartera individual eficiente, como, por ejemplo, la vivienda propia, las herencias o, mucho más importante, el capital humano que genera, en la mayoría de los casos, el principal flujo de ingresos de los inversores, independientemente de la cartera de inversión elegida.

Merton, R. C. (1973) amplía el modelo a la toma de decisiones intertemporales, donde los inversores maximizan la utilidad esperada del consumo del consumo del ciclo vital.

Ross, S. (1978) mostró que el supuesto de normalidad se puede relajar ligeramente hacia otros con distribuciones que sigan permitiendo la separación en dos fondos.

4.2.1.3 Formulación del modelo CAPM.

Con el objetivo explícito de explicar los factores determinantes del rendimiento esperado de un activo individual y que, por tanto, sirva de herramienta para la valoración de inversiones de cara a la gestión del riesgo, se plantea un modelo en el que se combina la cartera eficiente de mercado y un activo individual, contenido previamente en esa cartera.

Si se tiene que:

- C_p: Cartera de inversión

- a: Activo con riesgo

- σ_P : Desviación típica de la cartera del inversor

- μ_P :. Rendimiento esperado de la cartera.

- a_{im}: Peso en términos de capitalización de dicho activo en el mercado total de riesgo.

- μ_N : Línea del mercado de capitales.

- μ_m : Rendimiento esperado de la cartera óptima de mercado.

- σ_m : Desviación estándar de la cartera óptima de mercado.

- r_f : Rendimiento esperado de la cartera mixta.

- σ_N : Desviación típica de la cartera mixta.

De acuerdo con las ponderaciones que se han fijado para que esa cartera eficiente de mercado se encuentre en equilibrio:

$$C_p = a\tilde{x}_i + (1-a)C_m \tag{4.15}$$

Donde el rendimiento esperado y la desviación típica de dicha cartera vendrán expresados por las siguientes fórmulas:

$$\mu_p = a\mu_i + (1-a)\mu_m \tag{4.16}$$

$$\sigma_p = \left[a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_m^2 + 2a(1-a)\sigma_{im}\right]^{1/2} \tag{4.17}$$

En la Figura 21 se representa el lugar geométrico de las combinaciones de riesgo-rendimiento de esta cartera *p* en la que *a* = 1 significaría que la totalidad de los fondos se invertiría en el activo $\tilde{x}_i$; *a* = 0 supondría que todos los fondos se dedicarían a la cartera de mercado, donde $\tilde{x}_i$, al igual que los demás activos con riesgo, estará representado con una ponderación $a_{im} = V_i / V_m$, que es el peso en términos de capitalización de dicho activo en el mercado total de riesgo. Valores negativos de *a* situarán, a través de una posición corta, en una cartera total donde se está infraponderando al activo en relación con su peso específico.

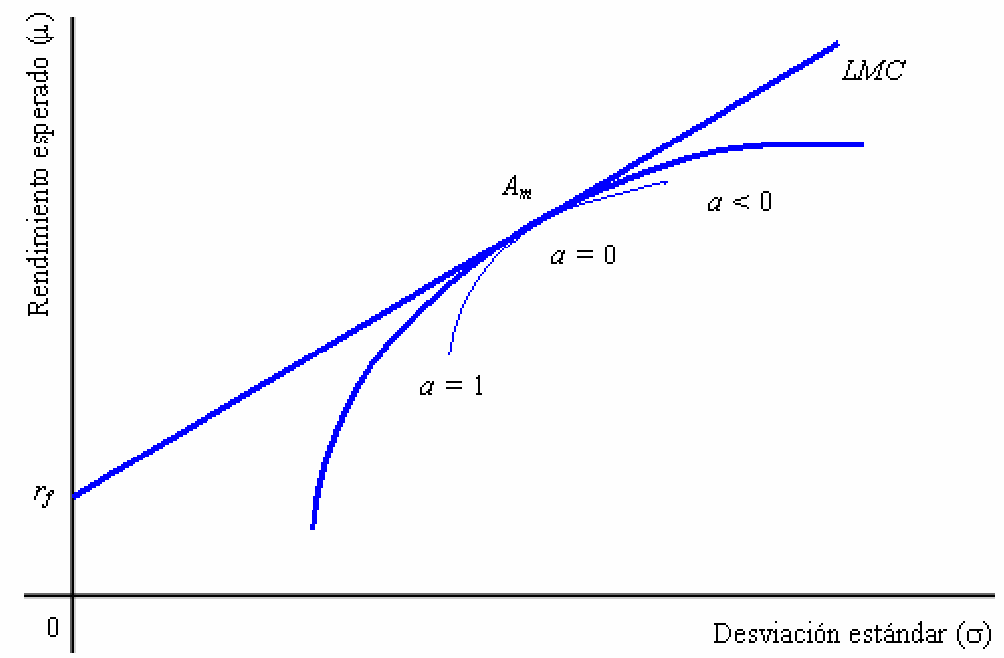

Figura 21. Modelo de valoración lineal. Combinación de la cartera de mercado con un activo.

El equilibrio de los mercados, como ha quedado demostrado anteriormente, vendrá caracterizado por la cartera de mercado donde no hay excesos de oferta ni de demanda, por lo que en la cartera dicho equilibrio vendrá representado por a = 0, el punto de tangencia de la frontera eficiente (en la cartera de mercado) con el lugar geométrico de esa cartera p que se ha diseñado "*ad hoc*" para el presente análisis.

A través de las derivadas de las expresiones del rendimiento esperado y la varianza de esta cartera en un entorno infinitesimal de a = 0, se obtendrá como varía la rentabilidad esperada y el riesgo de la cartera de mercado ante variaciones en la ponderación de mercado de uno de los activos que la componen:

$$\frac{d\mu_p}{da}\Big|_{a=0} = \mu_i - \mu_m \tag{4.18}$$

Luego:

$$\frac{d\sigma_p}{da}\Big|_{a=0} = \frac{\sigma_{im} - \sigma_m^2}{\sigma_m} \tag{4.19}$$

Dividiendo dichas expresiones se puede obtener la pendiente de la nueva curva de riesgo-rendimiento en un entorno de la cartera de mercado:

$$\frac{\partial\mu_p/\partial a}{\partial\sigma_p/\partial a}\Big|_{a=0} = \frac{\mu_i - \mu_m}{\left(\sigma_{im} - \sigma_m^2\right)/\sigma_m} \tag{4.20}$$

La cartera de mercado es una cartera eficiente, y además se construye a partir de la tangencia con la línea del mercado de capitales, por lo que en dicho punto la pendiente ahora obtenida y la pendiente de dicha línea deben coincidir.

La línea del mercado de capitales viene dada por una expresión que establece una relación lineal entre el rendimiento esperado en una cartera mixta (formada por una de fondos de activos sin riesgo más otra de fondos con riesgo) y su desviación estándar. Por ello, si los inversores aumentan la proporción del fondo con riesgo en su patrimonio total, aumenta proporcionalmente el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera mixta total

$$\mu_N = r_f + \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m}\sigma_N \tag{4.21}$$

Luego se debe cumplir la igualdad:

$$\frac{\mu_i - \mu_m}{\left(\sigma_{im} - \sigma_m^2\right)/\sigma_m} = \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m} \tag{4.22}$$

Despejando para el rendimiento esperado de la inversión $\tilde{x}_i$, se tendrá la siguiente expresión:

$$\mu_i = r_f + \left(\mu_m - r_f\right)\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \tag{4.23}$$

Expresión que se conoce con el nombre de CAPM y que indica que el rendimiento esperado que se le exige a cualquier activo con riesgo, para que los mercados financieros se encuentren en una situación de eficiencia y de equilibrio, es el tipo de interés libre de riesgo de los activos monetarios más una prima de riesgo. Esta prima viene determinada por el producto del rendimiento adicional que ofrece el mercado en su conjunto y sobre los activos monetarios, por la cantidad de riesgo que dicho activo incorpora a la cartera de mercado. Esta cantidad de riesgo se mide por el cociente entre la covarianza entre el rendimiento del activo y el mercado y la varianza de dicho mercado.

A este último cociente se le conoce con el nombre de la letra griega beta (β), por lo que la expresión quedará:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$
$$\mu_i = r_f + (\mu_m - r_f)\beta_i \tag{4.24}$$

En términos gráficos, el CAPM viene representado por una línea recta en el plano (μ, β), como se ve en la Figura 22, sobre la que debe situarse el rendimiento esperado de cualquier activo con riesgo con un mercado eficiente en equilibrio.

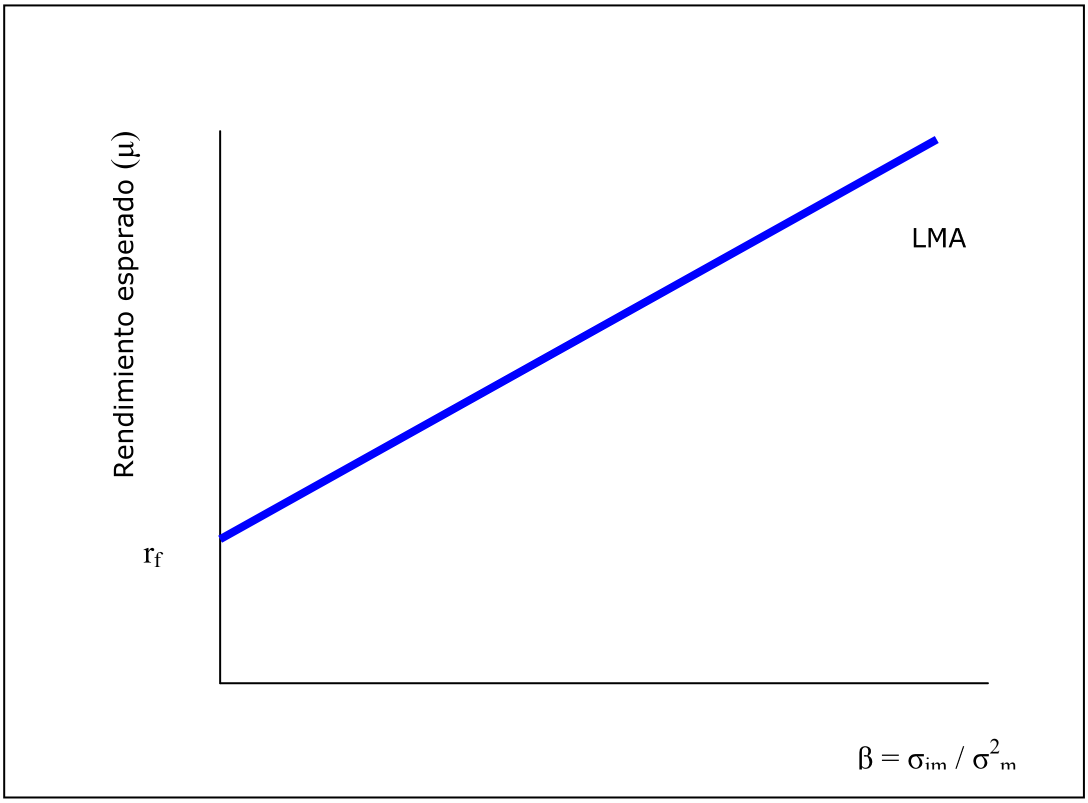

Figura 22. Mercado de valoración lineal. Línea de mercado de activos.

Dicha línea recta se conoce habitualmente con el nombre de *"línea del mercado de activos"*.

La beta del mercado es igual a la unidad. Ello nos permite hacer una primera clasificación de los activos financieros de cara a la gestión del riesgo, es decir, activos de alto riesgo específico, con beta mayor que la unidad, y activos con bajo riesgo específico, con beta menor que la unidad; activos anticíclicos, con beta negativa.

El rendimiento esperado de estos tipos de activos dependerá linealmente del riesgo específico de cada activo, medido por las betas, de manera que a mayor beta, mayor riesgo respecto al propio mercado, y mayor rendimiento esperado.

Una política de inversión agresiva supondrá la selección de activos con betas mayores que uno, por tanto, ante subidas en el mercado los activos se comportarán mejor que la media, mientras que en caídas del mercado se debe esperar, a sí mismo, peores resultados.

Una política conservadora, basada en la beta de los activos, aconsejará la selección de activos con beta menor que la unidad, que perderá parte de las subidas, pero también suavizará la pendiente de las bajadas.

La selección de valores anticíclicos, aunque con rentabilidades medias esperadas por debajo del tipo de interés libre de riesgo, permite resguardarse de las caídas de los mercados en espera de mejores condiciones para situarse en valores que sigan la senda de la economía.

El cociente beta cuenta con una propiedad muy importante, de cara a la utilización del mismo como herramienta de gestión, como es la actividad. La beta de una cartera es la combinación lineal de las betas de los activos individuales que la componen. Así, una determinada cartera C_p está compuesta por n activos con las correspondientes ponderaciones recogidas en el vector A_p:

$$A_p = (a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n) \tag{4.25}$$

Se puede componer la beta de la cartera de acuerdo con la siguiente expresión lineal:

$$\beta_p = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + ... + a_j\beta_j + ... + a_n\beta_n$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i \tag{4.26}$$

Ello permite que se pueda hablar de carteras agresivas, si su beta es mayor que la unidad; carteras conservadora, si su beta es menor que uno; y carteras réplicas del mercado si su beta es igual que la unidad.

De esta manera, con un número de valores más reducido, con las ponderaciones adecuadas, se puede gestionar una cartera utilizando como *benchmark* el índice del mercado. Si se quiere seguir la evolución del mercado, tendremos que realizar una selección de valores adecuada para que la beta ponderada resultante sea uno, siendo el rendimiento esperado de esa cartera el mismo que el rendimiento esperado del mercado.

Si se apuesta claramente por un alza en los mercados y no preocupa una alta volatilidad, la cartera tendrá que ser necesariamente una cartera con beta mayor que uno, con lo que el rendimiento esperado de la cartera será superior a la media del mercado.

Por último, si se tiene serias dudas sobre la evolución futura de los mercados, las carteras conservadoras, con betas bajas, permiten seguir la tendencia del mercado, sin recoger todas las subidas, pero tampoco todas las bajadas.

4.2.1.4 Relaciones entre el Modelo CAPM y el Modelo de mercado de Sharpe.

Sharpe, W.F. (1963) introdujo una simplificación analítica importante a la hora de construir un modelo econométrico que permitiera estimar la rentabilidad esperada de un activo en el contexto teórico.

El modelo diagonal de Sharpe, W. F. supone que el rendimiento de un activo individual depende linealmente de la evolución de una serie de índices representativos de la economía, como el producto nacional bruto, el índice de precios, la renta per cápita, un índice bursátil, etc. La versión más simple del modelo sería aquella cuya única variable explicativa fuera un índice bursátil que refleja la evolución del mercado de valores. El presente modelo se llama diagonal porque reduce la matriz de covarianzas que procede del *Modelo de Markowitz* a la diagonal de dicha matriz, donde quedan colocadas las varianzas de los activos.

La versión simplificada del modelo diagonal podría representarse mediante una relación econométrica lineal de la forma:

$$r_{it} = a_i + b_i I_t + \varepsilon_{it}\,;\; i = 1,2,....n\,;\; t = 1,2,...T \tag{4.27}$$

Donde:

r_{it} : Rendimiento observado del título *j* durante el período *t* de referencia.

I_t : Índice bursátil durante el mismo período *t*.

a_i : Uno de los parámetros a estimar. Representa la parte del rendimiento de cada activo *i* que es independiente de la evolución del índice.

b_i : Segundo parámetro a estimar. Refleja el grado de intensidad con que las variaciones en el índice se trasmiten al rendimiento de los activos *i*, denominándose *coeficiente de volatilidad*.

ε_{it} = Variable error o perturbación aleatoria, no observable y sobre la que se hacen una serie de supuestos necesarios para la estimación mínimo cuadrática para el activo *j* en el período *t*:

- Esperanza nula del ruido: $E(\varepsilon_{it}) = 0$; $t = 1,2,...T$
- Homocedasticidad, que implica que sigue una distribución independiente tanto de *t* como de *I,* con varianza σ_i^2.

$$E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_i^2 \,;\; t = 1,2,...T$$
$$\sigma_{\varepsilon,I} = 0 \qquad (4.28)$$

- No autocorrelación, es decir, las perturbaciones serán independientes entre sí:

$$\sigma_{\varepsilon_1,\varepsilon_{t-h}} = 0 \,;\; h = 1,2,...,T-1 \qquad (4.29)$$

- Normalidad: $\varepsilon_{it} \approx N(0, \sigma_i^2)$.

Treynor, J. L. (1966) retoma el modelo diagonal de Sharpe, W. F. sustituyendo la variable exógena del índice bursátil por el rendimiento de dicho índice, de cara a homogeneizar el contenido de los datos utilizados:

$$r_{mt} = \frac{I_{t+1} - I_t}{I_t} \qquad (4.30)$$

De manera que el modelo conocido como *Modelo de mercado de Sharpe* queda de acuerdo con la siguiente expresión:

$$r_{it} = a_i + b_i r_{mt} + \varepsilon_{it}\,;\ i = 1,2,...n\,;\ t = 1,2...,T \tag{4.31}$$

El modelo bajo los supuestos explicitados, se ha estimado por el método de mínimos cuadrados, de donde se obtienen las siguientes estimaciones para los parámetros del modelo:

$$\begin{aligned} a_i &= \bar{r}_i - b_i \bar{r}_m \\ b_i &= \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \end{aligned} \tag{4.32}$$

donde:

$\bar{r}_i$: Media aritmética de los rendimientos observados de la inversión correspondiente.

$\bar{r}_m$: Media aritmética de los rendimientos observados del índice de mercado.

σ_{im} : Covarianza de la serie histórica de rendimientos de la inversión con los rendimientos del mercado.

σ_m^2 : Varianza de los rendimientos observados del índice de mercado.

La relación existente entre el coeficiente de volatilidad (b_i) del modelo empírico de mercado de Sharpe, W. F. y la beta del modelo teórico CAPM es inmediata.

El coeficiente de volatilidad aparece como el estimador mínimo cuadrático del *beta del modelo CAPM*, cuando se dispone de las series históricas de los rendimientos de las inversiones y no de las distribuciones de probabilidad de las correspondientes inversiones con riesgo (que es lo habitual).

El Modelo de mercado Sharpe aporta otra conclusión importante, como es la descomposición del riesgo total de un activo en dos factores:

- El riesgo sistemático
- El riesgo específico

De la expresión modificada del modelo podemos calcular la varianza histórica del activo $\tilde{x}_i$, aplicando las propiedades de la varianza:

$$\sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{4.33}$$

Donde se observa como la varianza de un activo individual puede expresarse como la suma de un componente relacionado con la propia varianza del mercado, que se denomina *"riesgo sistemático o riesgo de la economía"* $\left(b_i^2 \sigma_m^2\right)$, y un segundo componente, la varianza de la variable error o perturbación econométrica, que se denomina *"riesgo no sistemático o riesgo específico"*. El riesgo específico de un activo es diversificable en el interior de una cartera, y tiende a cero cuando se aumenta el número de activos de la misma. Sin embargo, el riesgo sistemático no es diversificable por un inversor, es la covarianza del rendimiento del activo con el mercado global:

$$b_i^2 \sigma_m^2 = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \sigma_m^2 \tag{4.34}$$

$$b_i^2 = \sigma_{im}$$

Con esto se puede afirmar que mientras que la varianza es una buena medida del riesgo de una cartera, no lo es tanto para la medición del riesgo de un activo individual, ya que no todos los componentes del riesgo son determinantes para la fijación de la rentabilidad de un activo. Es la beta del activo, la covarianza del activo con el mercado en relación con el riesgo propio del mercado, lo que determina, de acuerdo con las conclusiones del *Modelo CAPM*, el rendimiento esperado de cualquier activo. Los rendimientos de todos los activos caerán sobre la línea del mercado de activos, cuya única variable independiente es la beta.

4.2.1.5 Aportación de Black al Modelo CAPM: La Cartera de Beta Cero.

A continuación se va a analizar la aportación de Black, F. (1972) al modelo *CAPM*, al introducir éste el concepto de *"Cartera de Beta Cero"*, de gran relevancia para la gestión del riesgo.

Black, F. plantea un esquema más general que el que había sido enunciado por Sharpe, W. F. y desarrolla una versión del modelo de valoración lineal de activos en un entorno total de riesgo, sin considerar un activo monetario sin riesgo.

Matemáticamente es fácil de demostrar que cualquier combinación lineal de carteras frontera sigue siendo una cartera frontera. Además, aunque la cartera de mercado no fuera la única elegida por los inversores, como se ha supuesto al introducir el activo sin riesgo, siempre se podrá expresar la cartera de mercado como una combinación lineal de las carteras individuales de los inversores.

Si se tiene que:

- λ_i : Porcentaje en que la cartera de mercado entra a formar parte del patrimonio del inversor individual *i*.

- P_{xj} : Montante total, en términos monetarios, de la demanda del activo $\widetilde{x}_j$,

- P_i : Patrimonio inicial del inversor *i,* en términos monetarios.

- V_j : Valor de mercado de esa inversión.

- P_{Cm}: Patrimonio total invertido en activos con riesgo.

- σ_P : Desviación típica de la cartera.

- μ_P : Rendimiento esperado.

Si todos los activos disponibles tienen algún tipo de riesgo, la totalidad del patrimonio invertido de los agentes se materializará únicamente en activos con riesgo, por lo que según la expresión (4.2) y dado que la condición de equilibrio de los mercados debe definirse como la igualdad entre demanda y oferta, y según la expresión (4.5), se tendrá que:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = \sum_{j=1}^{m} V_j \tag{4.35}$$

El hecho de que no se pueda contar con el concepto de cartera de mercado única para todos los inversores (la cartera de tangencia del activo *i* de los *n* individuos), obliga a considerar los *n* vectores de ponderación correspondientes a cada una de las carteras individuales de los inversores:

$$A_i = \left(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ji}, \ldots, a_{ni}\right) \tag{4.36}$$

Por lo que el patrimonio total invertido en el activo $\tilde{x}_j$ puede expresarse como sigue:

$$P_{xj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} P_i \tag{4.37}$$

A nivel global, la cartera de mercado, entendida ahora como la suma de todas y cada una de las carteras individuales, contará con un vector de ponderación tal como se expresaba en la expresión (4.7)

De manera que dichas ponderaciones, por definición, se corresponden con el peso de cada valor, en términos de capitalización, por lo que teniendo en cuenta la expresión (4.14), y sustituyendo, dado que $P_{Cm} = V_m$ para que los mercados se encuentren en equilibrio, el valor de capitalización del activo $\widetilde{x}_j$, puede expresarse en términos del patrimonio de los inversores:

$$V_j = a_{jm} P_{Cm} \tag{4.38}$$

Aplicando la condición de equilibrio para cada activo financiero, $P_{xj} = V_j$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} P_i = a_{jm} P_{Cm} \tag{4.39}$$

De donde se puede despejar fácilmente la ponderación de mercado del activo $\widetilde{x}_j$:

$$a_{jm} = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} \frac{P_i}{P_{Cm}} \tag{4.40}$$

Lo que demuestra que, aún en ausencia de una inversión sin riesgo, se puede determinar la cartera de mercado como una combinación convexa de las carteras individuales.

La cartera de mercado, ya que se demostró que las carteras óptimas individuales eran todas eficientes, también será una cartera eficiente, situada, por tanto, sobre la frontera eficiente.

Según Copeland. T. E. y Weston, J. F. (1988), si C_m representa la cartera de mercado en los términos anteriormente expuestos, y si *zc(m)* su correspondiente cartera de covarianza cero, se puede calcular la pendiente de la línea a través de la construcción de una cartera mixta, C_p, combinando linealmente la cartera *Cm* en una proporción *a* y la cartera de covarianza cero *cz(m)* en la proporción *(1-a)*, de manera que el rendimiento esperado y la desviación estándar de la nueva cartera se puedan expresar como:

$$\mu_p = a\mu_m + (1-a)\mu_{zc(m)}$$

$$\sigma_p = \left[a^2\sigma_m^2 + (1-a)^2\sigma_{zc(m)}^2 + 2a(1-a)\sigma_{m,zc(m)}\right]^{1/2} \tag{4.41}$$

$$\sigma_p = \left[a^2\sigma_m^2 + (1-a)^2\sigma_{zc(m)}^2\right]^{1/2}$$

La pendiente de una línea tangente a la frontera eficiente en el punto correspondiente a la cartera *Cm*, donde los inversores colocan la totalidad de su patrimonio en la cartera de mercado, puede obtenerse calculando las derivadas parciales de las anteriores expresiones en un entorno *a=1.* Las derivadas parciales del rendimiento esperado y la desviación estándar de la nueva cartera informan de las variaciones que se producen en las mismas ante pequeñas variaciones en la composición de la cartera. Formalmente podría expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial a} = \mu_m - \mu_{zc(m)}$$
$$\frac{\partial \mu_p}{\partial a} = \frac{1}{2}\left[a^2\sigma_m^2 + (1-a)^2\sigma_{zc(m)}^2\right]^{-1/2}\left[2a\sigma_{zc(m)}^2 - 2\sigma_{zc(m)}^2 + 2a\sigma_{zc(m)}^2\right] \tag{4.42}$$

Dividiendo estas dos derivadas parciales, para a =1, obtendremos el valor de la pendiente de la frontera eficiente en un entorno de la cartera de mercado:

$$\frac{\partial \mu_p / \partial a}{\partial \sigma_p} \Big|_{a=1} = \frac{\mu_m - \mu_{zc(m)}}{\sigma_m} \tag{4.43}$$

Así, puesto que la línea $\mu_{zc(m)}C_m$, corta al eje en el punto $\mu_{zc(m)}$, y conocemos la pendiente de dicha línea en el punto de tangencia con la frontera eficiente, se puede escribir la ecuación de dicha línea como sigue:

$$\mu_p = \mu_{zc(m)} + \frac{\mu_m - \mu_{zc(m)}}{\sigma_m}\sigma_p \tag{4.44}$$

Donde se ha sustituido el tipo de interés libre de riesgo por el rendimiento esperado de la cartera de covarianza cero con la cartera de mercado.

Como en condiciones de equilibrio de los mercados, la pendiente de la frontera eficiente en un entorno de la cartera de mercado, al combinar la citada cartera de mercado con uno cualquiera de los activos de la misma, venía recogida por la expresión:

$$\frac{\partial\mu_p/\partial a}{\partial\sigma_p/\partial a}\Big|_{a=0} = \frac{\mu_i - \mu_m}{\left(\sigma_{im} - \sigma_m^2\right)/\sigma_m} \tag{4.45}$$

Si igualamos ambas definiciones de la pendiente en el punto correspondiente a la cartera de mercado C_m, se tendrá:

$$\frac{\mu_m - \mu_{zc(m)}}{\sigma_m}\sigma_p = \frac{\mu_i - \mu_m}{\left(\sigma_{im} - \sigma_m^2\right)/\sigma_m} \tag{4.46}$$

Despejando para el rendimiento esperado del activo $\tilde{x}_i$, se tendrá:

$$\mu_i = \mu_{zc(m)} + \left(\mu_m - \mu_{zc(m)}\right)\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \tag{4.47}$$

Y al igual que en el Modelo CAPM original $\beta_i = \dfrac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$, se puede rescribir de la siguiente manera:

$$\mu_i = \mu_{zc(m)} + \left(\mu_m - \mu_{zc(m)}\right)\beta_i \qquad (4.48\ )$$

Que se conoce con el nombre de *CAPM de beta cero*, y muestra como el rendimiento esperado de cualquier activo se puede obtener mediante una combinación lineal del movimiento esperado de la cartera de mercado y de su correspondiente cartera frontera de covarianza cero.

El resultado permite poder utilizar el modelo lineal de valoración de activos con riesgo aunque no se cumpla la hipótesis de perfección de los mercados de capitales.

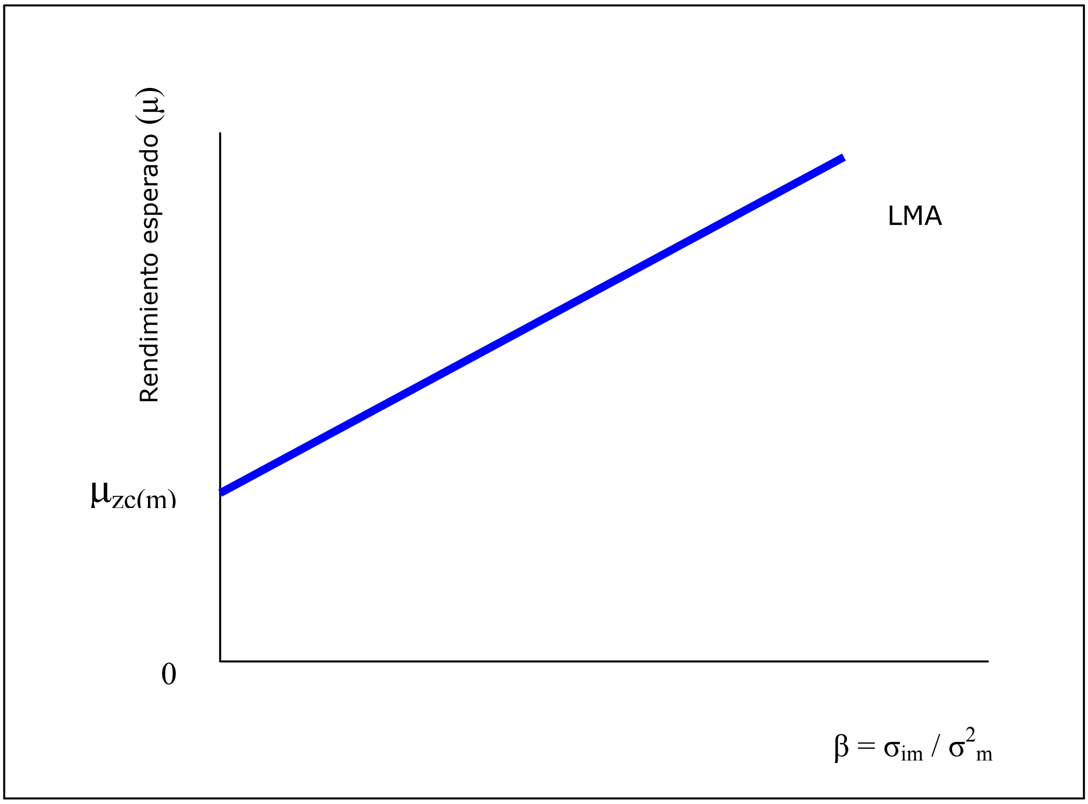

Figura 23. Modelo de valoración lineal de Black. Línea de mercado de activos.

Que era el que ayudaba a proponer un tipo de interés de los activos monetarios constante y único para las operaciones de activo y pasivo, y la posibilidad de que cualquier inversor pudiera prestar o pedir prestado sin límite (Figura 23). El CAPM se convierte así en un modelo de valoración de carácter general y que nos permitirá interpretar y predecir la realidad en entornos de riesgo, exista o no un tipo de interés sin riesgo.

4.3 El modelo de valoración por arbitraje

El modelo de valoración por arbitraje, conocido habitualmente en inglés en la literatura financiera como APT (*Arbitrage Pricing Theory*), fue formulado, en primer lugar por Ross, S. (1976). Aunque el supuesto de ausencia de arbitraje, eje fundamental del modelo, ya había sido utilizado por Black, F. y Acholes, M. en el modelo de valoración de opciones (*Apéndice 2*), su alcance era muy limitado, ya que el precio del activo derivado lo hacían depender exclusivamente del precio del activo subyacente. Ross, S., sin embargo, plantea un modelo general de valoración de activos con riesgo, utilizando como variables explicativas el conjunto de indicadores o índices que describen el comportamiento general de la economía y de los mercados financieros.

Frente al CAPM, el APT no realiza ningún tipo de supuestos sobre el comportamiento del inversor frente al riesgo, ni sobre las distribuciones de los rendimientos de las inversiones, sino que se plantea más como un modelo empírico falto de un fundamento microeconómico *a priori*. Se le critica el que trate de buscar una relación econométrica más que de formular un modelo teórico para la valoración de los activos financieros.

No obstante, se demuestra que si al modelo APT se le añaden una serie de supuestos básicos, se puede llegar, por un camino completamente distinto al tradicional, a la misma formulación del modelo CAPM.

El CAPM aparece ahora como un caso particular del modelo APT, al que habría que añadir las condiciones particulares sobre el comportamiento de los inversores, lo que permite considerar todos los precios como endógenos, mientras que en el APT los precios de las inversiones son calculados a partir de precios observados.

Kast, R. y Lapied, A. (1992) hacen una presentación especialmente didáctica del modelo.

4.3.1 La formalización del modelo APT

El modelo APT parte de considerar que la incertidumbre sobre la rentabilidad de los activos financieros viene explicada por un conjunto finito de factores o índices, como pueden ser los índices bursátiles IBEX, DOW JONES, EUROSTOXX, etc., indicadores de tipos de interés como el EURIBOR, CMS, etc., o variables macroeconómicas como el IPC, crecimiento del PIB, etc.. Estos índices se definen como variables aleatorias cuyas distribuciones de probabilidad son conocidas por los inversores, o al menos, sus valores esperados y sus varianzas.

Si se tiene que:

- p_i : Precio de adquisición de cada una de las inversiones.

- C': Cartera de arbitraje.

- $R_{C'}$: Rendimiento en términos monetarios de la cartera C'.

- τ_i : Importe monetario invertido en cada activo financiero en la cartera de arbitraje.

- λ_0 : Inversión libre de riesgo.

- r_i: Rentabilidad de un activo *i*.

- β_o : Rendimiento esperado del activo *i*.

- β_{ik} : Sensibilidad de la rentabilidad de un título ante variaciones de los distintos factores k , que van a influir en el riesgo sistemático.

- I_k: Valor que toma el factor k

- k: Factores de riesgo

Se establece, así, una relación lineal entre la rentabilidad de una inversión cualquiera x_i y los índices seleccionados, corregida esta linealidad por una variable error característica de cada inversión, centrada y con varianza "débil". Por tanto, la rentabilidad de un activo i será:

$$r_i = \beta_0 + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ik} I_k + \varepsilon_i \tag{4.49}$$

Por lo que, partiendo de un activo financiero i, se considera que su rentabilidad consta de dos partes fundamentales, siendo la primera de ellas (β_0) el rendimiento esperado del activo i (valor accesible para todos los agentes del mercado en base a la información de mercado) y la parte restante, bien positiva o negativa, la cual no se puede predecir, también denominada *rentabilidad incierta*. Dicha parte restante consta, a su vez, de la suma de los riesgos sistemáticos ($\sum_{k=1}^{m} \beta_{ik} I_k$) y no sistemáticos ($\varepsilon_i$).

Los inversores, como el Modelo CAPM, se consideran precio-aceptantes, es decir, no tienen capacidad para influir sobre la formación de los precios de los activos financieros. Además, se supone que todos los inversores tienen expectativas homogéneas sobre los rendimientos futuros de los activos y sobre las distribuciones de probabilidad que caracterizan a los índices de referencia.

El argumento fundamental del Modelo APT es la ausencia de arbitraje en los mercados financieros, entendiendo el arbitraje de la manera tradicional en economía. Habría posibilidad de arbitraje, si fuera posible, sin coste alguno para el inversor, aumentar la rentabilidad esperada de una cartera sin aumentar su nivel de riesgo. Cambiar la composición de una cartera sin coste supone que las ponderaciones de unas inversiones aumentarán y las de otras disminuirán, de manera que las variaciones, positivas y negativas, se compensen. Si se considera una cartera C compuesta por n activos, de acuerdo con el vector de ponderaciones A, tal que:

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n) \tag{4.50}$$

Donde cada a_i representa la ponderación del activo x_i en dicha cartera. La cartera de arbitraje sería la cartera diferencial C', sin coste, que se formaría para reestructurar la cartera previa, de manera que vendría representada por el vector de ponderaciones A'.

$$A' = (a_1', a_2', ..., a_n') \tag{4.51}$$

Donde los elementos de A' pueden tomar valores positivos, negativos o nulos, dependiendo de que la ponderación del correspondiente activo haya aumentado, disminuido o permanecido constante, respectivamente. La condición de coste nulo vendría representada analíticamente por la compensación total de las variaciones en la cartera original:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' = 0 \tag{4.52}$$

Para no implicar inversión adicional, no está definido el ratio de tasa de rentabilidad de la cartera de arbitraje, por lo que se utilizará el concepto de valor esperado de dicha cartera que se mide en términos absolutos.

Tampoco se podrá interpretar ni utilizar los a_i' como se hace con las ponderaciones originales, ya que no suman 1, sino 0. Por ello, se deben definir nuevos parámetros que permitan calcular el rendimiento y la varianza de la cartera de arbitraje. Esta cartera C' estará formada por cantidades υ_i (positivas para los activos comprados y negativas para los vendidos) de cada uno de los activos negociados, de manera que se puede representar como:

$$C' = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i x_i \tag{4.53}$$

Si el precio de adquisición de cada una de las inversiones se representa por p_i , el hecho de estar formada la cartera con coste nulo se podría representar ahora como:

$$K' = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i p_i = 0 \tag{4.54}$$

El rendimiento en términos monetarios de la cartera C' sería $R_{C'}$, de manera que siguiendo con la misma terminología:

$$R_{C'} = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i p_i r_i = \sum_{i=1}^{n} \tau_i r_i \tag{4.55}$$

Donde $\tau_i = \upsilon_i p_i$ corresponde al importe monetario invertido (positivo o negativo) en cada activo financiero en la cartera de arbitraje.

La condición de coste nulo, por tanto, también podrá expresarse mediante la compensación de los distintos τ_i, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0 \tag{4.56}$$

La ausencia de riesgo de la cartera de arbitraje vendría caracterizada por una varianza nula, lo que solo sería posible si las covarianzas de los distintos activos financieros que componen la cartera se compensan:

$$\operatorname{var}(R_{C'}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \upsilon_i \upsilon_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) = 0 \tag{4.57}$$

$$\operatorname{var}(R_{C'}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tau_i \tau_j \operatorname{cov}(r_i, r_j) = 0 \tag{4.58}$$

Por tanto, la condición de ausencia de arbitraje supondría que si el coste de dicha cartera es nulo y su riesgo también nulo, el valor esperado de dicha cartera también será nulo (si $K' = 0 \therefore \sigma^2_{C'} = 0 \Rightarrow E(R_{C'}) = 0$).

La condición de varianza nula se sustenta en dos hipótesis:

- La existencia de un activo sin riesgo con un tipo de interés constante r_f.
- La posibilidad de formar una cartera de cobertura, una cartera formada por activos con riesgos con varianza nula, para lo que es preciso suponer que el número de activos es suficientemente grande para que se

anule tanto el riesgo diversificable, proveniente de la varianza de los índices seleccionados, como el riesgo no diversificable, procedente de las variables de error, aunque solo sea de manera aproximada. Sólo una ley de los grandes números permite hacer este último supuesto, considerando la probable convergencia de variables aleatorias hacia una constante.

De acuerdo con todo lo dicho hasta ahora, el rendimiento en términos monetarios de la cartera de arbitraje puede representarse en función de los índices de referencia:

$$R_{C'} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i r_i = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \left(\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} I_k + \varepsilon_i \right) \tag{4.59}$$

Y operando queda:

$$R_{C'} = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} \tau_i + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \tau_{ik} \beta_{ik} I_k \right] + \sum_{i=1}^{n} \tau_i \varepsilon_i \tag{4.60}$$

Por tanto, se ha obligado a que la varianza de la expresión sea nula, luego:

$$\operatorname{var}(R_{\cdot C'}) = \operatorname{var}\left[\beta_0 \sum_{i=1}^{n} \tau_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \tau_i \beta_{ik} I_k \right) + \sum_{i=1}^{n} \tau_i \varepsilon_i \right] = 0 \tag{4.61}$$

Es decir:

$$\operatorname{var}(R_{C'}) = \operatorname{var}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\tau_i\beta_{ik}\right)I_{ki}\right] + \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\varepsilon_i\right) = 0 \tag{4.62}$$

Y para ello se precisa que cada uno de los dos sumandos en que se descompone la varianza del rendimiento de la cartera de arbitraje se anule.

En el caso del riesgo diversificable:

$$\operatorname{var}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\beta_{ik}\right)I_{ki}\right] = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\beta_{ik}\right)^2 \operatorname{var}(I_k) = 0 \tag{4.63}$$

Lo que exige que:

$$\sum_{i=1}^{n}\tau_i\beta_{ik} = 0 \tag{4.64}$$

De la misma manera, el riesgo no diversificable, como consecuencia de la ley de los grandes números anteriormente citada, tendrá que anularse, aunque sólo sea aproximadamente:

$$\sum_{i=1}^{n}(\tau_i)^2 \operatorname{var}(\varepsilon_i) = 0 \tag{4.65}$$

Por lo tanto, la condición de ausencia de arbitraje puede formularse de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0 \therefore \sum_{i=1}^{n} \tau_i \beta_{ik} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \tau_i E(r_i) = 0 \tag{4.66}$$

Esta condición puede interpretarse como una relación geométrica de ortogonalidad vectorial, es decir, que el producto escalar de los vectores vale cero, y considerando las tres expresiones anteriores como productos escalares de vectores de dimensión *n*.

La primera fórmula $\sum_{i=1}^{n} \tau_i 1 = 0$ representa la ortogonalidad del vector $\tau = (\tau_1, \tau_2, ...\tau_n)$ con el vector unidad.

La segunda fórmula $\sum_{i=1}^{n} \tau_{i\beta_{ik}} = 0$, supone la ortogonalidad del vector $\tau = (\tau_1, \tau_2, ...\tau_n)$ con los *m* vectores $\beta_k = (\beta_{1k}, \beta_{2k}, ..., \beta_{nk})$.

La tercera fórmula $\sum_{i=1}^{n} \tau_{ri} E(r_i) = 0$, implica la ortogonalidad del vector $\tau = (\tau_1, \tau_2, ...\tau_n)$ con el vector de rendimientos esperados $E = (E(r_1), E(r_2), ..., E(r_n))$.

Así el vector *E* queda necesariamente comprendido en el hiperplano definido por los *m* + 1 vectores, $1, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$, pudiéndose escribir como combinación lineal de estos vectores. Se pueden encontrar, por tanto, *m* + 1 parámetros $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, tales que para cualquier activo financiero se pueda escribir:

$$E(r_i) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \beta_{ik} \tag{4.67}$$

Que es la fórmula del *Modelo APT*, y que permite calcular el rendimiento esperado de cualquier inversión en función de la sensibilidad del mismo con las variaciones de los índices de referencia.

Se considera que el número de inversiones con riesgo disponibles en el mercado es superior al número de índices de referencia, lo que permite introducir el concepto de C*artera Base de Mercado*, simplificando notablemente el proceso de valoración del rendimiento esperado de una inversión individual. Así se puede construir una cartera cuya tasa de rendimiento dependa exclusivamente de un índice de referencia:

$$E_k = \beta_0 + \beta_{kk} I_k + \varepsilon_k \tag{4.68}$$

Su rendimiento esperado se puede representar, de acuerdo con el *Modelo APT*, como sigue:

$$E(r_k) = \lambda_0 + \lambda_k \beta_{kk} \tag{4.69}$$

Y despejando λ_k queda:

$$\lambda_k = \frac{E(r_k) - \lambda_0}{\beta_{kk}} \tag{4.70}$$

Como inversión particular, el activo libre de riesgo se puede representar en este modelo como aquel en que $\lambda_0 = E(r_0) = r_f$, por lo que, bajo la hipótesis de que es posible construir *m* + 1 carteras base, la fórmula del *Modelo APT* puede rescribirse como sigue:

$$E(r_i) = r_f + \sum_{k=1}^{m} \frac{E(r_k) - r_f}{\beta_{kk}} \beta_{kk} \tag{4.71}$$

Por tanto, es suficiente conocer las tasas de rendimiento esperado de las *m* + 1 *carteras base* para poder calcular la tasa de rendimiento esperado de cualquier inversión o cualquier cartera compuesta por éstas.

4.3.2 El modelo CAPM como caso particular del modelo APT.

Como ya se había demostrado de la fórmula del *Modelo APT* se puede derivar la del *Modelo CAPM* para el caso particular de que solo exista una cartera base, la cartera de mercado, y, por tanto, suponiendo que todos los precios de los activos del mercado son endógenos:

$$E(r_i) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\beta_{mm}} \beta_{im} \tag{4.72}$$

Y reordenando la expresión:

$$E(r_i) = r_f + \left[E(r_m) - r_f\right] \frac{\beta_{im}}{\beta_{mm}} \tag{4.73}$$

Dado que:

$$\frac{\beta_{im}}{\beta_{mm}} = \frac{\operatorname{cov}(r_m, r_i)}{\operatorname{var} r(m)} \tag{4.74}$$

Se puede expresar la anterior fórmula con la misma notación que se ha utilizado anteriormente, por lo que:

$$E(r_i) = r_f + \lfloor E(r_m) - r_f \rfloor \beta_i \tag{4.75}$$

Esta conexión entre ambos modelos permite debilitar una de las principales críticas que se le hace al *Modelo CAPM*, como es la imposibilidad de contraste empírico. Si el *Modelo CAPM* se puede plantear como un caso particular del APT, goza de las mismas características econométricas de dicho modelo y, por tanto, es contrastable empíricamente.

El fundamento microeconómico del *Modelo CAPM* no es contradictoria con la posibilidad de contraste; al contrario, se refuerzan mutuamente. La elección de un solo índice, como es la cartera de mercado, como variable explicativa de la tasa de rentabilidad de las inversiones con riesgo, adquiere fuerza teórica si se complementa con el supuesto de eficiencia y optimalidad de dicha cartera. El modelo de mercado de Sharpe, W. F. llega a las mismas conclusiones partiendo de un planteamiento empírico distinto al ahora tratado.

4.4 La medición del resultado en la gestión del riesgo

En la literatura específica, para denominar el resultado de la gestión de carteras se usa el término inglés *performance.*

Al igual que se han planteado diversos modelos para la gestión del riesgo, basados en la medida adecuada del riesgo, también se han desarrollado distintas alternativas para evaluar el resultado de los gestores de carteras, teniendo en cuenta, no sólo el rendimiento obtenido en un determinado período de tiempo, sino también el riesgo que han tenido que asumir para alcanzar dicho rendimiento.

La medición del resultado teniendo en cuenta el riesgo asumido por la cartera se referencia siempre a un índice o *benchmark,* que puede ser interpretado como la cartera de mercado que se han descrito en los apartados precedentes. Los gestores de carteras suelen exigir a sus clientes o accionistas que se les fije ese *benchmark* o referente con el que se evaluará la gestión de los mismos, como los índices bursátiles (IBEX 35, EUROTOXX 50, etc.) o índices de renta fija (como el EURIBOR, J. P. M. Spain Bonds, etc.).

Alcanzar un *benchmark* referido al mercado como los citados, salvo por las limitaciones legales sobre diversificación de las inversiones en instituciones de inversión colectiva, es un objetivo poco exigente para un gestor profesional de inversiones, ya que, por definición, esos índices representan carteras no gestionadas, confeccionadas en base a criterios de capitalización, por lo que replicando la estructura porcentual del índice, siempre que la legislación y el patrimonio gestionado lo permitan, la inversión obtendrá el mismo resultado que el propio índice, sin ninguna otra gestión adicional que la compra inicial y reestructuración de la misma en el momento en que el índice cambie de ponderaciones o activos.

Más complicado es batir el índice. Debido a que dado el binomio riesgo-rentabilidad, la gestión del riesgo ha de ser evaluada en esos términos y no sólo alrededor de la sola cifra de la tasa de rendimiento de la inversión y del índice de referencia.

Un buen gestor puede batir el índice de rentabilidad, en riesgo, o en ambos parámetros a la vez. Tres medidas se han venido usando para evaluar conjuntamente el riesgo y el rendimiento de una inversión, las cuales han sido desarrolladas por

Sharpe, W. F. (1966), Treynor, J. L. (1966), Jensen, M. C. (1968) y, más recientemente, Modigliani (1997).

4.4.1 El índice de Sharpe.

Sharpe (1966), basándose en el desarrollo teórico de la línea de mercado de capitales, planteó cuantificar la gestión de un grupo de fondos de inversión americanos a través de un índice que resumiera tanto el excedente de rendimiento obtenido respecto al tipo de interés libre de riesgo, como el riesgo que había sido asumido por los inversores en dichos fondos. Con ese objetivo plantea la elaboración del siguiente indicador de gestión S_p:

$$S_p = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \tag{4.76}$$

Donde.

- S_p: Excedente de rendimiento obtenido respecto al tipo de interés libre de riesgo.

- r_p : Rendimiento de la cartera durante el período analizado.

- σ_p: Desviación estándar de la cartera durante el período analizado.

- r_f : Estimación del tipo de interés puro o libre de riesgo durante el mismo período de observación.

El numerador del índice viene a ser la "*Prima de Riesgo*" ganada por la cartera y el denominador, la volatilidad de la cartera como indicador del riesgo real corrido por los inversores. En consecuencia, el *Índice de Sharpe* da una medida de la prima por unidad de riesgo que los gestores han conseguido para los inversores de la cartera analizada. Cuanto mayor sea el índice, mejor habrá sido la gestión, independientemente del valor absoluto del rendimiento o del riesgo.

El *Índice de Sharpe* permite clasificar las carteras en función del resultado de la gestión del riesgo de las mismas. Un mayor valor del índice se corresponde con un mejor resultado. Si los datos históricos se pudieran extrapolar al futuro, el *Índice de Sharpe* representaría un orden de preferencias, es decir, a mayor valor del índice, mayor nivel de utilidad esperada, de manera que, en términos gráficos, cuanto mayor sea el índice, el inversor se situaría en una curva de indiferencia más arriba y a la izquierda.

En el plano rendimiento-desviación estándar, la representación gráfica del *Índice de Sharpe* viene dada por la pendiente de la línea recta que, partiendo del punto correspondiente al tipo de interés libre de riesgo, pasa por el punto que representa el par riesgo-rendimiento de cada cartera.

En la Figura 24 se representa el resultado de rendimiento y riesgo de cinco carteras, donde C_m corresponde a la cartera de mercado. El *Índice de Sharpe* vendría dado por la pendiente de la línea recta que une el punto correspondiente al tipo de interés libre de riesgo r_f con los puntos correspondientes al par riesgo-rendimiento de cada cartera.

Las carteras C_1 y C_2 habrían batido claramente el índice. En el primer caso, tras haber obtenido mayor rentabilidad y menor riesgo que la cartera de mercado. En el segundo caso, aunque la volatilidad de la cartera ha sido mayor que la del mercado, el mayor rendimiento lo compensa suficientemente. Las carteras C_3 y C_4 presentan peores resultados que el mercado. Aunque la tercera cartera ha obtenido un rendimiento total mayor que el propio mercado, el riesgo que ha asumido ha sido mucho mayor, por lo que el valor del *Índice de Sharpe* para dicha cartera es menor. En la cuarta cartera, la gestión ha sido más deficiente, ya que los gestores han obtenido menos rendimiento y mayor volatilidad que el propio índice, que no requiere ningún tipo de gestión. En general, cualquier combinación de la cartera réplica del índice con liquidez o endeudamiento sobre la línea que pasa por C_m *(Cartera de mercado)* hubiera cosechado mejores resultados que estas dos últimas carteras.

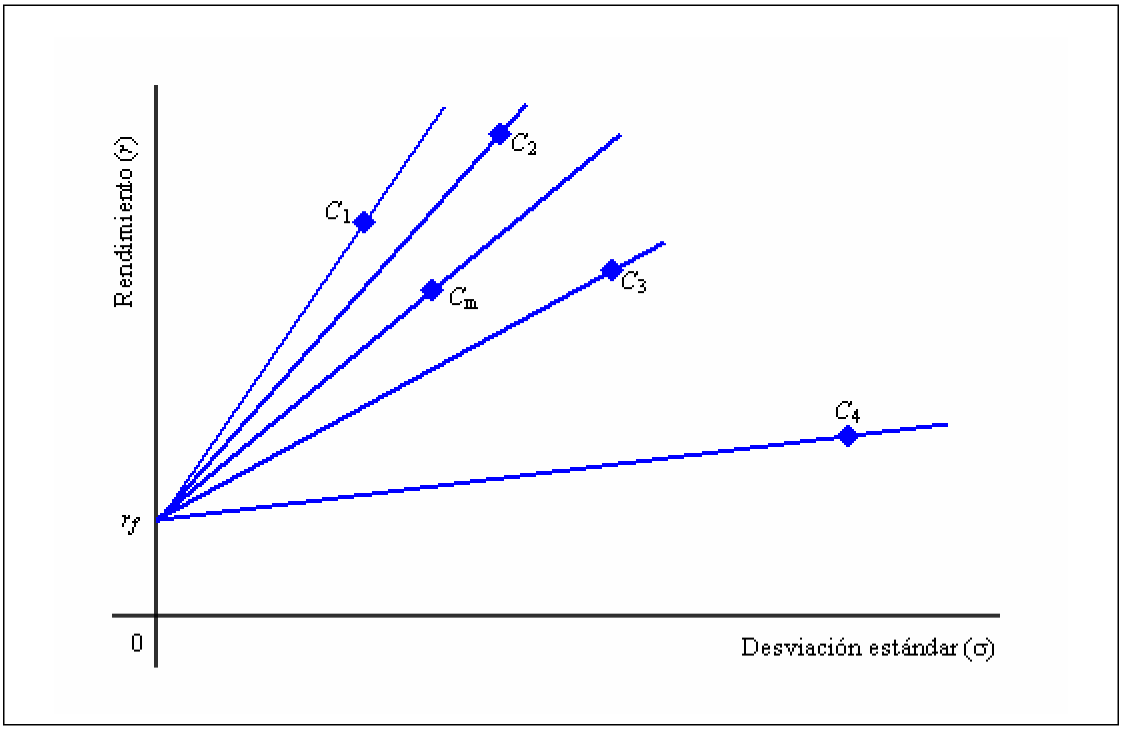

Figura 24. Índice de Sharpe. Evaluación del rendimiento en función de la desviación estandar.

4.4.2 El índice de Treynor

Treynor, J. L. (1966), dentro del cuerpo teórico del *Modelo CAPM*, considera que el riesgo total de una cartera de inversiones, medido por su varianza o desviación estándar, no es significativo para medir la gestión llevada a cabo por los gestores, sino que solo el riesgo sistemático debe ser tenido en cuenta. En los términos descritos en el *epígrafe 4.2.1.4*, el riesgo sistemático vendría determinado por el producto del cuadrado del coeficiente de volatilidad y varianza del mercado. Dado que la varianza del mercado es común para todas las carteras, el riesgo sistemático puede ser aproximado por el coeficiente de volatilidad de cada cartera o beta observada.

Así *el Índice de Treynor* se define como el diferencial de rentabilidad, respecto al tipo de interés sin riesgo, por unidad de riesgo sistemático:

$$T_p = \frac{r_b - r_f}{b_p} = \frac{r_p - r_f}{\beta_p} \tag{4.77}$$

Este índice permite, al igual que el de *Sharpe*, clasificar las carteras en función de la bondad de los resultados de la gestión realizada por los correspondientes gestores. Mayor valor del *Índice de Treynor*, mejores resultados. El orden de la clasificación no tiene porque coincidir con el generado por el *Índice de Sharpe*, ya que *Sharpe* considera el riesgo total y *Treynor* exclusivamente el riesgo específico. En la Figura 25 se representa gráficamente el *Índice de Treynor*, mediante la pendiente de la línea que une el punto de interés sin riesgo y el punto representativo del par beta-rendimiento de cada cartera.

4.4.3 El índice de Jensen.

Como en el caso anterior, para Jensen, M. C. (1968) el *Modelo CAPM* sirve de base para la evaluación del resultado de la gestión del riesgo. A priori, el rendimiento esperado de todas las inversiones deberá caer sobre la línea del mercado de activos, de acuerdo con el valor de su beta.

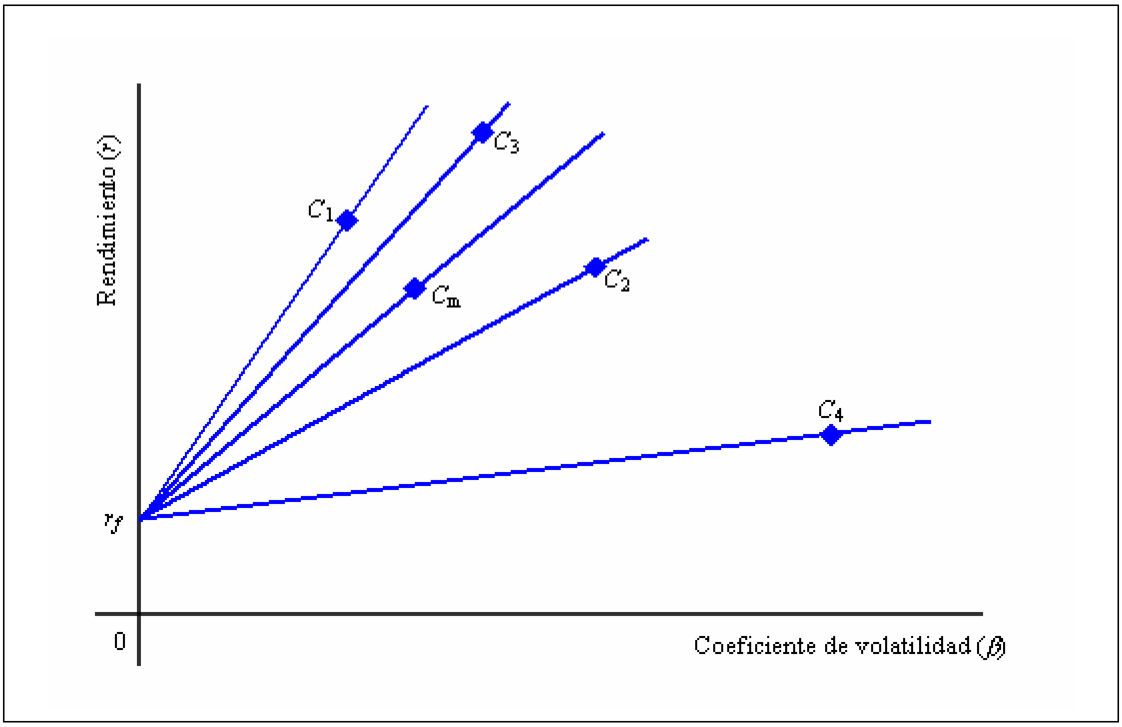

Figura 25. Índice de Treynor. Evaluación del rendimiento en función del coef. de volatilidad.

Por tanto, y siguiendo en los términos descritos en el *epígrafe 4.2.1.4,* entre el rendimiento realmente obtenido y el valor que le hubiera correspondido de acuerdo con su coeficiente de volatilidad en la línea de mercado de activos, podrá ser considerada como una medida de la bondad de la gestión de una cartera o fondo:

$$r_p = r_f + b_p(r_m - r_f) + J_p \tag{4.78}$$

Despejando J_p (*Índice de Jensen*):

$$J_p = (r_f - r_p) + b_p(r_{m--r_f}) \tag{4.79}$$

Así, el resultado habrá sido superior, inferior o neutro al del propio mercado si *Jp* es positivo, negativo o nulo, respectivamente. Gráficamente, el *Índice de Jensen* de una cartera vendría representado por la diferencia en el punto de corte en el eje vertical de una recta paralela a la Línea de Mercado de Activos (LMA Figura 26), que pase por el punto correspondiente al par coeficiente de volatilidad-rendimiento de dicha cartera. En la siguiente figura se representa el *Índice de Jensen* para dos carteras y la de mercado. La cartera C1 representa un índice positivo, luego se puede considerar que sus gestores han batido el índice de referencia; mientras que en el caso de la cartera C2 el índice da valores negativos, luego el resultado de la gestión no puede considerarse satisfactorio en relación con el binomio riesgo-rendimiento del mercado.

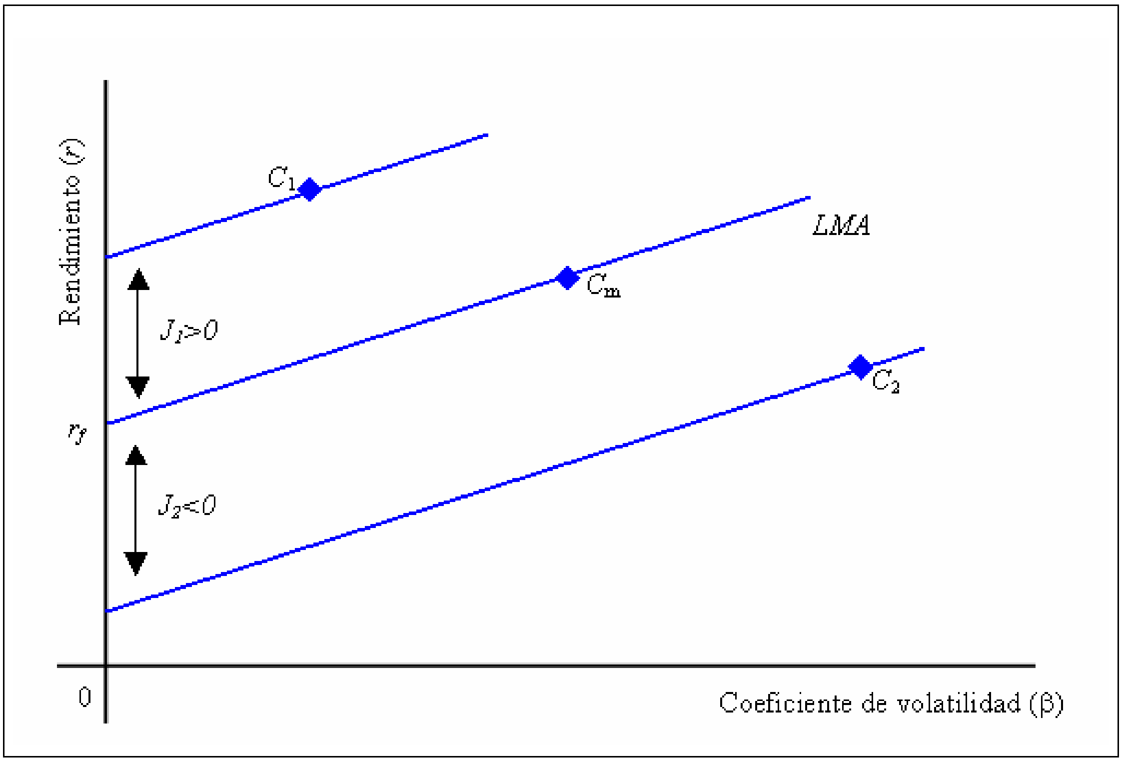

Figura 26. Índice de Jensen. Evaluación del rendimiento en función del coeficiente de volatilidad.

4.4.4 El índice de Modigliani

Más recientemente, Modigliani, F. (1997) propone un indicador alternativo para medir el resultado de una cartera de acuerdo con el riesgo asumido por la misma, cuyo resultado se expresa en puntos básicos (centésimas de puntos porcentuales en el argot financiero), lo que facilita significativamente la comparación entre las gestiones de las distintas inversiones.

Modigliani, F. basa su propuesta de medida en la posibilidad que existe de "apalancar" o "desapalancar" el riesgo y el rendimiento de una inversión combinándola con el activo sin riesgo, endeudándose o manteniendo liquidez, respectivamente. De esta manera, y siguiendo en los términos descritos en el *epígrafe 4.2.1.4*, siempre se podrá calcular la cantidad de apalancamiento d_p necesario, (positivo o negativo) para que el riesgo de la nueva inversión C_a coincida con el riesgo del mercado:

$$\sigma_a = (1 + d_p)\sigma_p = \sigma_m$$

$$d_p = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} - 1 \qquad (4.80)$$

La rentabilidad de la cartera apalancada, teniendo en cuenta que el tipo de interés del activo sin riesgo se viene denotando por r_f, puede expresarse como:

$$r_a = (1 + d_p)r_p - d_p r_f \qquad (4.81)$$

Donde podemos sustituir d_p por la expresión anterior:

$$r_a = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} r_p - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma} - 1 \right) r_f$$

$$r_a = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} \left(r_p - r_f \right) + r_f \tag{4.82}$$

Si se define e_p como el exceso de rentabilidad de la cartera *Cp* sobre el tipo de interés sin riesgo, $e_p = r_p - r_f$ y sustituimos en la expresión anterior:

$$r_a = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} e_p + r \tag{4.83}$$

De la misma manera, e_a puede definirse como el exceso de rentabilidad, frente al activo sin riesgo, de la cartera apalancada, de manera que $e_a = r_a - r_f$, de donde sustituyendo se tiene que:

$$e_a = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} e_p \tag{4.84}$$

Por lo que rescribiendo se tiene que:

$$r_a = e_a + r_f \tag{4.85}$$

Que viene a ser una medida del resultado de la cartera ajustada al riesgo que ha tenido que asumir para conseguir ese rendimiento, siendo e_a la prima de riesgo de dicha cartera. Dado que la diferencia entre r_a y r_e es solo el tipo de interés libre de riesgo, que supone una constante y común para todas las inversiones, ambas variables pueden ser utilizadas como medida de la gestión de una inversión, estando expresadas las dos en puntos básicos. El *Índice de Modigliani* se construye precisamente con el valor e_a de cada inversión:

$$M_p = e_a = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} e_p \tag{4.86}$$

En la Figura 27 se representa gráficamente el *Índice de Modigliani* para dos inversiones, además de la de mercado. El índice recoge la diferencia en puntos básicos entre el punto correspondiente al par volatilidad-rendimiento del mercado y el punto de corte de una recta vertical lanzada desde el punto σ_n, correspondiente a la volatilidad del mercado, con la recta, que partiendo del tipo de interés libre de riesgo pasa por el punto de volatilidad-rendimiento de cada inversión.

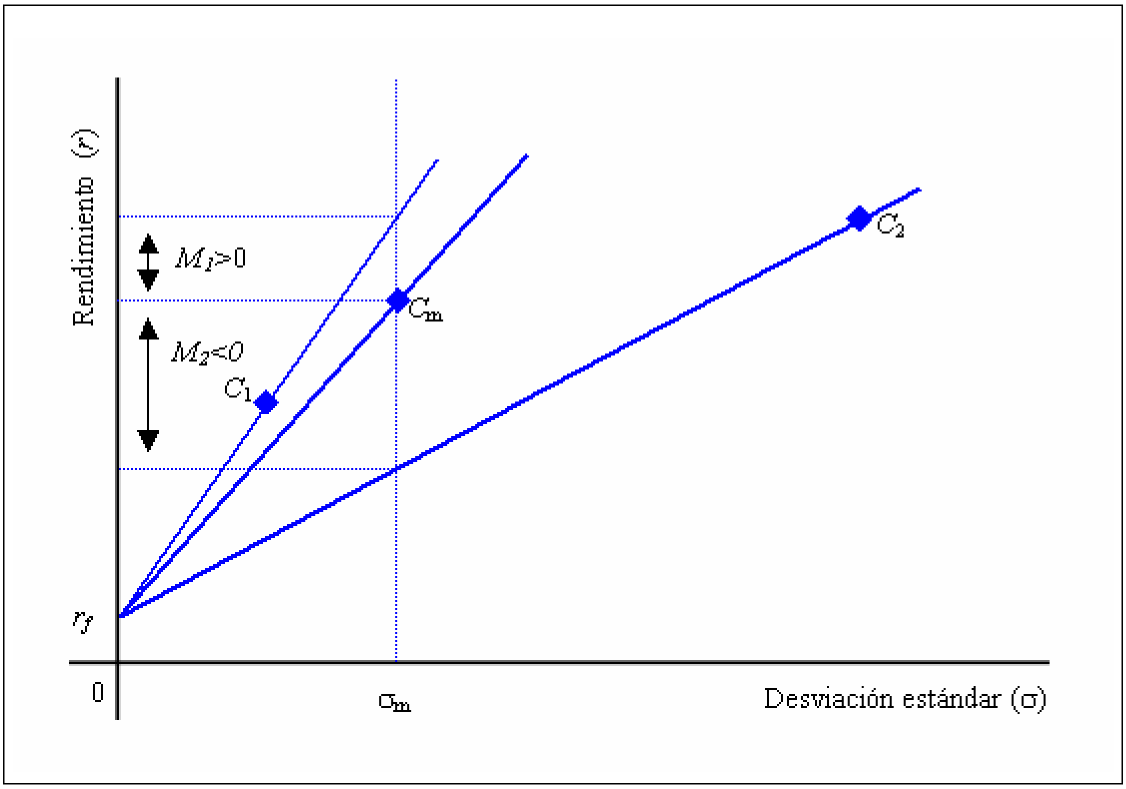

Figura 27. Índice de Modigliani. Evaluación del rendimiento en función de la desviación estándar.

5. Modelos de programación matemática para la Gestión de Riesgos en carteras de títulos de renta fija.

En este apartado se analizan diversos modelos usados en la optimización de la gestión del riesgo, estudiando a fondo las carteras de títulos de renta fija, para lo cual, se partirá de una serie de conceptos básicos.

Los títulos de renta fija se caracterizan porque prometen determinados retornos (también denominados *flujos de caja*) en fechas futuras. Estos retornos pueden ser periódicos (*cupones*), o bien al final del período contratado (*bonos de cupón cero*).

Los retornos se han de recibir en fechas futuras ya fijadas, por lo que si hay una modificación de dichas fechas (anticipación de los plazos fijados), aparece una función de descuento que hace que el valor de la inversión se transforme en un valor actual diferente al pactado.

Si se tiene la siguiente terminología:

- C_{it}: Cuantía o flujos de caja de los pagos generados por el bono i en el periodo t. $(i=1,2,\ldots, m; t=1,2,\ldots T)$

- C_T: Cuantía de los pagos generados por la cartera con vencimiento en T.

- d_{it} : Descuento del bono i en el periodo t.

- r_{it} : Tipo de interés del bono i en el periodo t.

- N: Valor nominal de la cartera de bonos.

- N_i: Valor nominal del bono i.

- n_i : Número de bonos de cada tipo que componen la cartera.

- P: Valor actual de la cartera de bonos.

- P_T: Valor acumulado de la inversión en el momento del vencimiento.

- P_t: Valor de la cartera de bonos en el periodo *t.*

- p_i: Valor actual del bono *i* (precio del bono).

- p_{it}: Valor del bono i en el periodo *t.*

- *T*: Final del horizonte de planificación del inversor.

- t_i: Vencimiento del t-ésimo pago del bono *i*.

- D_p: Duración de la cartera de bonos.

- D_i: Duración del bono *i*, suponiendo que la cartera está compuesta por n_1 bonos del tipo 1, n_2 bonos del tipo 2, y así hasta n_m bonos del tipo *m*.

- D_{to}: Duración en el instante t_0.

- D_M: Duración modificada.

- k_i: Sensibilidad del bono *i* en función de los retornos del mismo.

- *K*: Sensibilidad de la cartera de bonos en función de los retornos de la misma.

- F_j: Nivel de factor *j*

El valor actual de la inversión para un determinado bono *i* vendrá dado por:

$$P = \sum_{t=1}^{T} d_t C_t = d_1 C_1 + d_2 C_2 + ... + d_T C_T \,, \qquad t = 1,2,.....T \tag{5.1}$$

En los mercados de renta fija, el descuento se expresa como una función del tipo de interés *r*. En este caso, el descuento se puede definir como:

$$d_t = (1+r_t)^{-t}, \quad t = 1,2,3,....T, \tag{5.2}$$

Donde r_{it} es el tipo de interés (positivo) del bono *i* y depende de *t*. De esta forma, cada factor de descuento (d_1, d_2,.......d_T) es una función de r_{it}. Por ello, en vez de tener que conocer cada d_t,, sólo se necesita conocer el valor de r_{it}. Luego el valor actual será:

$$P = \sum_{t=1}^{T} d_t C_t = \sum_{t=1}^{T} C_t (1+r_t)^{-t} \tag{5.3}$$

Si se toma como ejemplo que se está en el período *2* para el cupón *2*, se supone que el retorno *C_2=100 €, y* se estima el tipo de interés para *t=2* al *3,5%,* entonces el descuento para este periodo quedará:

$$d_2 = \frac{1}{(1+r_2)^2} = \frac{1}{(1+0{,}035)^2} = 0{,}93$$

El valor de la inversión en el período *2* será:

$$P_2 = C_2 d_2 = 0{,}93 \times 100 = 93 \ €$$

Si el tipo de interés sube al *4%*, el valor de la inversión en dicho período será:

$$P_2 = C_2 d_2 = 0{,}92 \times 100 = 92\,€$$

Si, en cambio, el interés bajara al *3%*, el descuento sería:

$$d_2 = \frac{1}{(1+0{,}03)^2} = 0{,}94$$

Y el valor de la inversión en el mismo período será:

$$P_2 = C_2 d_2 = 0{,}94 \times 100 = 94\ €$$

Luego, en mercados de renta fija, si los tipos de interés suben, el inversor pierde, y si los tipos de interés bajan, el inversor gana. Además, las pérdidas y ganancias serán mayores cuanto mayores sean los plazos.

El vencimiento de una inversión en renta fija es la longitud del intervalo de tiempo desde la fecha de compra hasta el último retorno o flujo de caja. Los retornos (C_1, C_2,...., C_T) tienen un vencimiento de T períodos. Si se tiene el valor actual de la inversión, el tipo de interés r (el cual se mantiene constante en el tiempo) y los retornos se reinvierten conforme se reciben, el valor acumulado de la inversión en el momento del vencimiento será:

$$P_T = (1+r)^T P \tag{5.4}$$

En este contexto, al tipo de interés se le llama rendimiento. El cual mide la tasa de crecimiento a lo largo del tiempo cuando los tipos de interés no cambian y el precio del dinero se mantiene temporalmente constante. A este rendimiento se le llama también *Tasa Interna de Rendimiento (TIR).*

Dada una corriente de retornos (C_1, C_2,......, C_T) y su valor P, la tasa interna de rendimiento se define como el tipo de interés r que descuenta aquella hasta éste. El valor descontado de la corriente de retornos será:

$$P = \sum_{t=1}^{T} C_t (1+r)^{-t} \tag{5.5}$$

Esta suma de términos varía inversamente con el tipo de interés r o tasa de descuento. Tomando el periodo t-ésimo, el valor descontado quedará:

$$P_t = \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{5.6}$$

Una vez analizados los valores de una inversión en función de los movimientos de los tipos de interés, el objetivo será el de maximizar los ingresos del inversor, minimizando la exposición al riesgo de las inversiones. Por ello, habrá que encontrar una estrategia de inmunización que permita invertir con la mayor seguridad posible, en carteras de renta fija. El objetivo de una buena estrategia de inmunización es el de garantizar la rentabilidad ofrecida por el mercado en el momento inicial de la inversión, independientemente de las variaciones de los tipos de interés, eliminando el riesgo de identificación de los procesos estocásticos seguidos por la *Estructura Temporal de los Tipos de Interés (ETTI).*

La mejor estrategia, a la hora de inmunizar, será aquella que consiga una rentabilidad superior a la rentabilidad del mercado, a la vez que una escasa volatilidad en la obtención de esa rentabilidad.

Las estrategias de inmunización se basan en la minimización del riesgo de inmunización correspondiente a la inversión en una cartera de títulos de renta fija. Por ello, se necesita partir del estudio de este riesgo para proceder a su posterior eliminación.

El *Riesgo de Inmunización* es un riesgo provocado por la variaciones *"no anticipadas"* de los tipos de interés, por lo que es necesario partir del análisis de la *Estructura Temporal de los Tipos de Interés (ETTI)*, siendo ésta la relación funcional existente entre los tipos de interés y el plazo en que se dan esos tipos, representada, por tanto, por la evolución de los tipos de interés a lo largo del tiempo.

Por ello, el *Riesgo de Inmunización* se define como el riesgo de no obtener, para un período determinado de tiempo, la rentabilidad ofrecida por el mercado para ese período.

Además, como resultado de las variaciones *"no anticipadas"* de los tipos de interés, es decir, las variaciones no previstas por el mercado, surge el denominado *Riesgo de Interés* (ampliamente analizado en apartados anteriores), el cual está compuesto por el *Riesgo de Interés de Mercado* y por el *Riesgo de Inmunización.*

El análisis del *Riesgo de Interés* vendrá dado por la relación existente entre el precio de un activo financiero y las variaciones de los tipos de interés.

Para proteger a las inversiones de estos riesgos surge la *Inmunización Financiera*, siendo ésta una estrategia cuyo objetivo consiste en invertir en una cartera de títulos, de tal forma que, en un momento futuro se disponga de una cierta cantidad de dinero.

El estudio de ambos riesgos es la base que han seguido los distintos autores para definir los conceptos de *Duración* e *Inmunización financiera.*

El primer indicador de esta relación es la *Duración* de un activo de renta fija, que fue definido por Macaulay, F (1938) como el vencimiento medio de los retornos o flujos de caja de cada título, ponderados por el valor actual de la cuantía de los flujos respecto al precio del título.

La estrategia más básica de inmunización es la de Fisher, S. y Weil, P. (1971), la cual supone cambios paralelos e instantáneos en la *Estructura Temporal de los Tipos de Interés (ETTI).* Como es probable que los cambios no sean paralelos e instantáneos, se analizan, además, otras estrategias basadas en las estrategias propuestas por Fong. H. G. y Vasicek, O. (1983) y por Nawalkha, S. K, y Chambers, D. R. (1996).

La estrategia de inmunización desarrollada por Fong. H. G. y Vasicek, O. implica la minimización de una variable de una cartera de títulos de renta fija, denominada M^2, mientras que la estrategia de inmunización desarrollada por Nawalkha, S. K. y Chambers, D. R. implica la minimización de una variable de una cartera de títulos de renta fija, que en este caso denominan M-Absoluta *(M^A)*,

La estrategia de Nawlkha, S. K. y Chambers, D. R. *(M^A)* proporciona mejores resultados que la de Fong, H. G. y O. Vasicek, *(M^2),* como más adelante se discute.

Una de las grandes ventajas de estas estrategias es su bajo coste, ya que no es necesario que el inversor tenga que comprar derivados adicionales, al invertir en este tipo de carteras de títulos de renta fija, ya que quedaría garantizado que, como mínimo, se va a conseguir la rentabilidad ofrecida por el mercado en el momento inicial de la inversión.

5.1 Duración Financiera.

5.1.1 Duración de un activo de renta fija.

Como se ha indicado anteriormente, el primer autor en definir la duración de un título de renta fija fue Macaulay, F. en su seminal trabajo *"Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock*

Prices in the U.S" publicado en 1938, en el cual se proponía una medida que indicaba la vida media de un título.

Según este autor, la duración de un título sería la media ponderada de los vencimientos de los préstamos individuales que se corresponden con cada pago futuro.

Macaulay llegó a la conclusión de que la *Duración* de un título de renta fija que genere una corriente de pagos del tipo *[(C1,t1); (C2,t2); ......;(C_T,t_T)]* viene dada por la expresión:

$$D_i = \sum_{t=1}^{T} t \frac{\frac{C_{it}}{(1+r_{it})^t}}{P}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5.7}$$

Donde el precio del título vendrá dado por:

$$p_i = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_{it}}{(1+r_{it})^t} + \frac{N_i}{(1+r_T)^T}, \quad i=1,2,\ldots,m \tag{5.8}$$

La duración de un activo de renta fija descrita de esta forma es un primer indicador del *Riesgo de Interés de Mercado (RIM)*, ya que, en general, los títulos con mayor duración presentan una mayor sensibilidad a las variaciones en los tipos de interés de mercado. Esta relación entre el precio de los títulos de renta fija y los cambios en el tipo de interés se mejoró con la llamada *Duración Modificada.*

5.1.2 Duración Modificada.

Partiendo de esta definición puede obtenerse, según Ferruz, L., Portillo, M. P. y Sarto, J. L. (2001), una medida mucho más práctica y operativa para medir el *Riesgo de Interés de Mercado (RIM)*.

Al derivar el precio p_i de un activo financiero i de renta fija con respecto a su *Tasa Interna de Rentabilidad (TIR)* se obtiene la sensibilidad de dicho activo a los cambios del tipo de interés:

$$\frac{dp_i}{dr_i} = \frac{-D_i}{1+r_i} p_i \tag{5.9}$$

Para hacer más evidente la repercusión en el precio financiero ante cambios en la TIR, se utiliza la *Duración Modificada (D_M)*, que responde a:

$$D_M = \frac{D_i}{(1+r_i)} \tag{5.10}$$

También se le denomina *Duración Corregida o Sensibilidad de un Bono a las variaciones de la Tasa Interna de Rentabilidad.*

La *Duración Modificada* coincide con el concepto de semielasticidad del valor de un activo financiero de renta fija frente a las variaciones de los tipos de interés. Por ello, dicha duración será el indicador del *Riesgo de Interés de Mercado (RIM).*

5.1.3 Duración de una cartera de títulos de renta fija.

Bajo las hipótesis de que la *Estructura Temporal de Tipos de Interés (ETTI)* es plana y que las variaciones de ésta son siempre paralelas, la duración de una cartera de títulos de renta fija es una media ponderada de la duración de cada uno de los títulos que la componen, donde la ponderación es la proporción de cada título en el valor total de la cartera.

Por tanto, la expresión de la duración de una cartera de *m* bonos sería la siguiente:

$$D_P = D_1 \frac{N_1 p_1}{P} + D_2 \frac{N_2 p_2}{P} + ... + D_m \frac{N_m p_m}{P} \qquad (5.11)$$

5.2 Estrategias de inversión de Renta Fija.

Para poder analizar la estrategias de inversión de renta fija hay que partir del principio de que estas estrategias están especialmente diseñadas para eliminar o limitar lo máximo posible el *riesgo de reinversión*, siendo éste el riesgo que corre un inversor de obtener una rentabilidad menor a la ofrecida por el mercado en el momento de llevar a cabo la inversión, para un período de tiempo *(HPI)*, como consecuencia de las variaciones no anticipadas de los tipos de interés.

Existen tres estrategias de inversión en activos de renta fija:

- *Estrategias pasivas*: Diseñadas para garantizar como rendimiento mínimo el rendimiento ofrecido por el mercado en el momento de realizar la inversión.
- *Estrategias activas*: Cuyo objetivo consiste en lograr un máximo rendimiento para un nivel dado de riesgo.
- *Inmunización contingente*: Siendo ésta una posición intermedia entre las dos anteriores, que permitirá al inversor conseguir un mayor rendimiento que con

las estrategias pasivas sin asumir tanto riesgo como con las estrategias activas.

A continuación se estudian especialmente las estrategias pasivas y más concretamente la estrategia pasiva llamada *Inmunización Simple*.

La inmunización simple es una estrategia cuyo objetivo consiste en invertir en una serie de títulos, de tal forma que en un momento futuro se pueda disponer de una cantidad de dinero y que esta sea, como mínimo, como la que se obtendría con los rendimientos ofrecidos por el mercado en el momento de realizar la inversión.

Según Fisher, S y Weil, P. (1971), una cartera que garantice este objetivo recibe la denominación de "*cartera inmunizada"*. Para ambos autores, una cartera compuesta por bonos está inmunizada, para un determinado período de tiempo, si su valor al final de dicho período es, necesariamente, el que tendría si los tipos de interés permanecen constantes durante ese período de tiempo, con independencia de cuál sea la evolución de los tipos de interés durante el mismo.

5.3 Modelos de inmunización deterministas

5.3.1 Teorema de la Inmunización de Fisher, S y Weil, P. (1971).

La hipótesis de la que parte este teorema es que el tanto instantáneo de capitalización correspondiente a un futuro instante de tiempo t venga dado por la función $i(t)$, suponiendo una *ETTI* plana. Si tiene lugar una variación de los tipos de interés, la función $i(t)$ cambiará, y entonces, la nueva *ETTI*, $i^*(T)$ será $i^*(t) = i(t) + \lambda$, tal que $\lambda \in R$, donde λ puede tomar valores tanto negativos como positivos.

Si la hipótesis es cierta, entonces una cartera de valores que genere una corriente de pagos no negativos está inmunizada en un instante t_0, para un período de amplitud $T\text{-}t_0$, si la duración D_{t_0} en el instante t_0 de esta corriente de pagos, es igual a la amplitud de dicho período de tiempo $t\text{-}t_0$.

La duración D_{t_0} en el instante *t0* será:

$$D_{t_0} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (t - t_0) C_t P_t}{\sum_{t=1}^{T} C_t P_t} \tag{5.12}$$

Según el *Teorema de la Inmunización*, una cartera cuya duración sea igual al *Riesgo de Reinversión (HPI),* estará protegida únicamente frente a una variación de los tipos de interés que tenga lugar inmediatamente después de realizar la inversión, pero no se dice nada del efecto de las variaciones de los tipos de interés en el futuro.

Por ello, para seguir una estrategia inmunizadora es necesario un reajuste periódico de la cartera para mantener su duración igual al *Riesgo de Reinversión (HPI),* excepto cuando se estén utilizando bonos de cupón cero.

El problema que se presenta es que mantener la cartera inmunizada a lo largo del *HPI* implica una reestructuración continua de la cartera, debido a la evolución temporal de la duración, lo que supone unos costes de transacción elevados, por los cuales no será posible esa reestructuración continua en la práctica.

Todas las soluciones a este problema giran en torno al reajuste periódico de la cartera para igualar la duración de la cartera al *HPI.* De esta forma, cuanto más largo sea el período de reestructuración, mayor será el *HPI* y menor será el coste de transacción.

Un segundo problema que plantean las estrategias inmunizadoras es el riesgo de reinversión al que se está sujeto, incluso si la duración de la cartera es igual al *HPI.*

Esto es debido a que en el *Teorema de la Inmunización* se supone que la *ETTI* sigue un proceso estocástico aditivo, y en caso contrario, no se garantiza la rentabilidad objetivo.

Como la *ETTI* puede seguir procesos estocásticos muy distintos, a dicho problema se le ha denominado como *Riesgo de Identificación del Proceso Estocástico (RIPE)*, seguido por la *ETTI*.

Para medir y posteriormente eliminar el *RIPE*, surgen una serie de medidas desarrolladas por distintos autores, entre las que destacan la M^2 y la *M-Absoluta*, que además son las más estudiadas en la práctica.

5.3.2 Modelo de Inmunización mediante la medida M^2 de Fong, H. G. y Vasicek, O.

Para eliminar el *RIPE* se han desarrollado distintas medidas. Entre ellas la más conocida es la M^2 propuesta por Fong, H. G. y Vasicek, O (1983), siendo considerada como una medida de exposición *RIPE*.

Ambos autores estudiaron el cambio en el valor final de una cartera inmunizada, derivado de una variación arbitraria de los tipos de interés y comprobaron que este cambio podría explicarse aproximadamente por la expresión:

$$\frac{\Delta P_T}{P_T} = -M^2 \Delta_s \qquad (5.13)$$

Siendo:

- P_T: Valor de la cartera al final del horizonte de planificación del inversor.

- Δ_s : Medida del cambio en la pendiente de la estructura temporal de los tipos de interés.

- M_i^2 : Medida para cada bono tipo *i* que viene dada por la siguiente expresión.

$$M_i^2 = \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} (t-T)^2 C_{it} p_{it} \right)}{P} \tag{5.14}$$

Y siendo:

- *P*: Cantidad invertida en el momento inicial.

- p_{it}: Valor actual del bono *i* en el periodo *t*

- C_{it}: Retorno del bono *i* en el periodo *t*.

La variable M^2 es muy útil, ya que como se puede ver en la expresión anterior, es el único factor del que depende el cambio en el valor de las cartera ante una variación arbitraria de los tipos de interés, que puede ser controlado por el inversor, al depender únicamente de la estructura de la cartera en que se invierte, siendo considerada como una variable de exposición al *RIPE*.

De esta manera, Fong, H. G. y Vasicek, O. (1983) consideran que las carteras con una M^2 menor tienen una menor exposición a los movimientos de los tipos de interés y las carteras con mayor M^2 tienen una mayor exposición.

Por esta razón, M^2 es una medida del Riesgo de Inmunización. Dicha medida del riesgo es considerada como una varianza ponderada de los vencimientos generados por la cartera alrededor del *HPI*.

Según dichos autores, una cartera inmunizada óptima es una cartera con mínima exposición a los cambios de los tipos de interés. Ésta se obtiene minimizando la medida del riesgo M^2, sujeta a la restricción de que la duración debe ser igual a *HPI* y a la restricción de que el precio de cualquier bono que compone la cartera por el número de bonos que la componen tiene que ser igual a la cantidad invertida en el momento inicial.

Variables:

- n_i : Número de bonos de cada tipo que componen la cartera *(i=1,2,...., m)*.

- D_p: Duración de la cartera de bonos.

Datos:

- M_i^2 : Valor de la medida M^2 para cada bono *i* de la cartera.

- p_i : Valor actual del i-ésimo bono que compone la cartera.

Parámetros:

- *T*: Horizonte de planificación de la inversión.

- *P*: Cantidad invertida en el momento inicial.

Restricciones:

$$D_p = T$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i n_i = P \qquad (5.15)$$

Es decir, que la duración de la cartera de bonos será igual al horizonte de planificación de la inversión y que la suma de los valores actuales de los bonos por el número de bonos de cada tipo que componen la cartera se tendrá que corresponder con la cantidad invertida en el momento inicial.

Función Objetivo:

$$\text{Min} \quad \left[\sum_{i=1}^{m} p_i n_i M_i^2 \right] \qquad (5.16)$$

Por lo que el objetivo será minimizar el sumatorio del producto del valor actual de los bonos que componen la cartera por el número de los mismos de cada tipo y por el valor de la medida M^2 para cada uno de ellos.

Modelo:

$$\text{Min} \quad \left[\sum_{i=1}^{m} p_i n_i M_i^2 \right]$$
$$(5.17)$$
$$\text{Sujeto a} \quad D_p = T$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i n_i = P$$

$$n_i \geq 0 \text{ (enteras)}$$

5.3.3 Modelo de Inmunización mediante la medida M-Absoluta de Nawlkha, S. K y Chambers, D. R. (1996)

Una medida alternativa a la M^2 estudiada es la *M-absoluta* desarrollada por los autores mencionados.

Dichos autores llegaron a la conclusión de que el cambio en el valor final de una cartera inmunizada, derivado de una variación arbitraria de los tipos de interés, viene dado por:

$$\frac{\Delta P_T}{P_T} \geq -K_3 M^A \qquad (5.18)$$

Siendo:

- P_T: Valor de la cartera al final del horizonte de planificación del inversor.

- K_3: $Max(|K_1|,|K_2|)$ sujeto a $K_1 \leq \Delta i(t) \leq K_2$, $\forall t \geq 0$.

- K_1 *y* K_2: Límites inferior y superior para $\Delta i(t)$, siendo $\Delta i(t)$ el cambio en el tipo de interés instantáneo en el momento $t=0$

Y siendo M^A, la *M-Absoluta* de la cartera, que viene dada por la expresión:

$$M_i^A = \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} |t - T| C_{it} p_{it} \right)}{P} \qquad (5.19)$$

La diferencia entre M^2 y M^A es la forma de calcular las desviaciones, elevándolas al cuadrado, en el primer caso, y sacando valor absoluto, en el segundo.

Según Nawalkha, S. K. y Chambers, D. R. (1996), la variable M^A mide la dispersión de los flujos de caja de la cartera de bonos alrededor del horizonte de inmunización de la cartera, como una medida ponderada de sus distancias absolutas.

Esta medida, M^A, al igual que ocurría con la variable M^2, es el único factor del que depende el cambio en el valor de la cartera ante un cambio en los tipos de interés, que puede ser controlada por el gestor de la cartera, al depender únicamente de las características de la cartera en la que se invierte. La otra variable del que depende ese cambio en el valor final de la cartera es K_3, término que depende de los movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés *(ETTI)* y que, por tanto, no puede ser controlada por el inversor.

Por estos motivos, la M^A es considerada como una medida de la exposición al riesgo de identificación del proceso estocástico seguido por los tipos de interés (*RIPE*), siendo esta forma una nueva medida que sustituye a la anteriormente descrita.

La estrategia de inmunización que proponen estos autores se basa en el principio de que una cartera óptima se obtiene mediante la minimización de la *M-Absoluta* de la cartera, sin estar sujeta a ninguna restricción adicional. Exclusivamente se atenderá a las restricciones naturales de este tipo de funciones objetivo.

Variables:

- n_i : Número de bonos de cada tipo que componen la cartera *(i=1,2,…., m)*.

Datos:

- p_i : Valor actual del i-ésimo bono que compone la cartera.

- M_i^A : Valor de la variable M^A para cada bono de la cartera.

Parámetros:

- *P*: Cantidad invertida en el momento inicial.

Restricciones:

$$D_p = T$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i n_i = P \qquad (5.20)$$

Es decir, que la duración de la cartera de bonos será igual al horizonte de planificación de la inversión y que la suma del producto de los valores actuales de los bonos por el número de bonos de cada tipo debe ser igual a la cantidad invertida en el momento inicial.

Función Objetivo:

$$\text{Min} \quad \left[\sum_{i=1}^{m} p_i n_i M_i^A \right] \tag{5.21}$$

Por lo que el objetivo será que el sumatorio del producto del valor actual de los bonos que componen la cartera por el número de bonos de la misma y por el valor de la medida M^2 para cada uno de ellos, tenga el valor mínimo posible.

Modelo:

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad \left[\sum_{i=1}^{m} p_i n_i M_i^A \right] \\ &\text{Sujeto a} \quad D_p = T \\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = P \\ &\qquad n_i \geq 0 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Al igual que en el apartado anterior, este problema matemático se resuelve mediante programación lineal. El resultado de este modelo sería la inversión de todo el capital inicial en el bono con menor *M-Absoluta*, para conseguir, de esta forma, minimizar el riesgo de inmunización.

También cabría la posibilidad de incluir restricciones adicionales para limitar el número de unidades adquiridas de un solo título, así como cualquier otra restricción de flujos de caja y demás tipos.

5.3.4 Modelo de inmunización de la Moderm Portfolio Theory.

La *Moderm Portfolio Theory* sostiene que el riesgo total para un rendimiento dado de una cartera bien diversificada es menor que el de cada una de las acciones que conforman dicha cartera tomadas individualmente.

Los altos rendimientos esperados implican una exposición a altos riesgos. Con ello, maximizar los rendimientos esperados tiene como consecuencia maximizar el control del riesgo.

En el caso concreto de la cartera de inmunización de bonos, el objetivo es maximizar el rendimiento neto de la cartera, sujeto al valor presente y a las restricciones de la sensibilidad de la inversión en función de los retornos.

Los resultados del modelo dependerán del sector. En el caso de que se incluyan obligaciones negociables de bajo crédito, el modelo tomará dichos valores para conseguir la inmunización, puesto que tiene rendimientos más altos que los valores que no contienen cláusulas que garantizan su convertibilidad u otro tipo de privilegio, libres de incumplimiento de pago (valores *straight*). En este caso, la optimización da como resultado una cartera de dos bonos, consistente en uno a largo plazo y otro a corto plazo (valor *barbell*, cuya estrategia es el corto y largo plazo frente al medio plazo). La cartera total tendrá como sensibilidad la combinación de sensibilidades en función de ambos retornos, de ahí que esté libre de riesgo de tipo de interés. Sin embargo, la cartera está expuesta a los cambios no paralelos de tipos de interés para valores que no tengan cláusulas que garanticen su convertibilidad (valores *straight*). Además, para mantener combinadas dichas sensibilidades, la cartera debe ser reequilibrada con relativa frecuencia, incurriendo en costes de transacción y en riesgos de liquidez.

De todo ello, se deduce que estos modelos de optimización deben usarse controladamente, es decir, deben ser combinados con un cuidadoso análisis de los riesgos en que se incurren cuando se maximizan los beneficios. De ahí que, el papel de los gestores es crucial, debiendo establecer objetivos claros, restricciones económicas, analizando, al mismo tiempo, los riesgos y los beneficios.

Si los riesgos sistemáticos están controlados, los modelos de optimización pueden usarse para conseguir valores por debajo de su precio. Si no están controlados, los modelos de optimización maximizarán la exposición a ellos.

Dicha estrategia de inmunización se usa para combinar el riesgo de los tipos de interés de una cartera de activos frente a un flujo de activos, con idea de que la exposición al riesgo de la misma sea nula.

Si se tiene que:

Variables:

- n_i : Número de bonos de cada tipo *i* que componen la cartera *(i=1,2,…., m).*

- *r*: Variable auxiliar que mide el rendimiento de la cartera de bonos.

Datos:

- *P*: Valor actual de la cartera.

- p_i : Valor actual del i-ésimo bono que compone la cartera.

- r_{it}: Tipo de interés o rendimiento del bono *i* en el periodo *t*.

- C_{it}: Cuantías de los pagos generados por cada bono *i* en el periodo *t*.

- k_i: Sensibilidad del bono *i* en función de las cuantías de los pagos generados por el mismo.

- *K*: Valor actual de la sensibilidad de la cartera de bonos en función de las cuantías de los pagos generados por la misma.

- t_i: Vencimientos del pago del bono *i*.

Parámetros:

- m: Número de bonos
- T: Horizonte de planificación de la inversión

Restricciones del modelo:

Cuando los activos son sensibles al tipo de interés, se puede establecer una estrategia de protección, de modo que se elimine la sensibilidad a ese factor.

La inmunización se obtiene cuando se selecciona una cartera con sensibilidad de valor actual neto cero frente al factor de tipo de interés.

Para cuantificar la sensibilidad de la inversión en función de las cuantías de los pagos generados por la cartera, se considerará la relación rendimiento – precio (r y P).

Como se ha señalado, el valor actual de un bono i viene dado por:

$$p_i = \sum_{t=1}^{T} C_{it} (1 + r_{it})^{-t} \tag{5.23}$$

Diferenciándolo con respecto al rendimiento del retorno del bono, se obtiene la sensibilidad de la inversión en función de dichos retornos, k_i:

$$k_i = -\sum_{t=1}^{T} tC_{it} (1 + r_{it})^{-(t+1)} \tag{5.24}$$

Así, la sensibilidad total de la cartera de inversión, en función de los retornos de sus bonos, viene dada por:

$$K = \sum_{i=1}^{m} k_i p_i \tag{5.25}$$

Dado el valor actual *(P)* y la sensibilidad de la inversión en función de los retornos de la misma *(K)*, una cartera inmunizada debe satisfacer las dos condiciones para que los valores actuales y sus sensibilidades en activos y pasivos sean iguales, por lo que las restricciones serán:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = P \\ \sum_{i=1}^{m} k_i n_i = K \end{gathered} \tag{5.26}$$

Función Objetivo:

Las carteras inmunizadas se pueden establecer de diferentes maneras. Por ello, se debe examinar qué agrupación permite obtener el mejor rendimiento. El objetivo es maximizar el rendimiento de la cartera de activos. Una vez que el rendimiento de la cartera esté libre de riesgo puede también maximizarse. El rendimiento de la cartera viene dado por la suma de los rendimientos para todos los valores, que es una expresión no lineal, ya que:

$$r = \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} C_{it} \left(1 + r_{it}\right)^{-t} n_i \tag{5.27}$$

Una aproximación de primer orden al rendimiento de la cartera es la media ponderada del rendimiento de la sensibilidad de la inversión en función del retorno, de los valores individuales en la cartera:

$$r \approx \frac{\sum_{i=1}^{m} k_i r_i n_i}{\sum_{i=1}^{m} k_i n_i} \tag{5.28}$$

El denominador es igual a *K*, que es dato y, por tanto, constante, de ahí que el rendimiento máximo de la cartera sea equivalente a la maximización del numerador. Luego la función objetivo será:

$$\text{Max } \sum_{i=1}^{m} k_i r_i n_i \tag{5.29}$$

Modelo:

En este caso, el modelo de inmunización es un problema de programación lineal que quedaría:

$$\text{Max.} \quad \sum_{i=1}^{m} k_i r_i n_i$$

$$\text{Sujeto a} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = P \tag{5.30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_i n_i = K$$

$$n_i \geq 0 \ \text{(enteras)}$$

5.3.5 Modelo de inmunización de factores que afectan a la inversión y producen riesgo.

La inmunización de factores es una técnica de mejora de la inmunización que explícitamente aborda el riesgo. Se parte de la suposición de que se trata de una estructura a plazo de interés fijo y que éste sólo cambia en paralelo, es decir, que la totalidad de la cartera de inversiones se ve afectada por los mismos cambios de tipos de interés.

Para ver el efecto de la flexibilización de esta suposición, hay que recordar que los valores que no contienen cláusulas que garanticen su convertibilidad u otro tipo de privilegio (bonos *straight*), libres de incumplimiento de pago, pueden ser considerados como una carpeta de bonos de cupón cero con fechas de vencimiento $t \in T$. Cada bono de cupón cero tiene su propio rendimiento y el conjunto de ellos es la estructura a plazo fijo. Para eliminar el arbitraje, el precio del valor debe igualar al valor de la cartera de bonos de cupón cero.

Variables:

- n_i : Número de bonos de cada tipo que componen la cartera *(i=1,2,…., m).*

Datos:

- F_j: Nivel de factor j

- p_i: Precio actual del bono i.

- r_i: Tipo de interés o rendimiento de un bono i a plazo fijo (independiente del tiempo).

- r_{it}: Rendimiento de vencimiento de un bono i de cupón cero que vence en t.

- C_{it}: Cuantía de pagos del bono i en el período t.

Parámetros:

- f_{ij}: Saturación factorial del bono i para el factor j

- f_{Lj}: Saturación de factor del pasivo

- J: Total de factores que influyen en el riesgo $(j=1,2,\ldots,J)$

- a_{jt} : Matriz de coeficientes para cada factor en el periodo t.

Restricciones:

Como es conocido, el precio del bono i viene dado por:

$$p_i = \sum_{t=1}^{T} C_{it}(1 + r_{it})^{-t} \tag{5.31}$$

Para ver cual es la sensibilidad del bono *i* en función del interés r_{it}, hay que derivar p_i con respecto a r_{it} :

$$dp_i = -\sum_{t=1}^{T} C_{it} t (1 + r_{it})^{-(t+1)} dr_{it} \qquad (5.32)$$

Lo cual puede ser verificado fácilmente, ya que si la estructura es a plazo fijo, es decir, $r_{it} = r_i$, y los movimientos de tipos de interés son solamente en paralelo, es decir, $dr_{it} = dr_i$, la derivada será la sensibilidad de la inversión en función de los retornos.

Si la estructura no es a plazo fijo, pero los movimientos de tipos de interés son solamente en paralelo, se obtendrá como resultado un valor de la sensibilidad de la inversión, en función de los retornos, diferente, ver Maloney y Yawitz (1985). Dicha sensibilidad es conocida como *Sensibilidad de Fisher-Weill.*

Sin embargo, se puede proponer un modelo relacionando los cambios en la estructura a plazo a factores comunes.

El modelo lineal de factor sería de la forma:

$$dr_{it} = \sum_{j=1}^{J} a_{jt} dF_j \qquad (5.33)$$

Expresión en la que se ve claramente que si el factor *j* es aumentado en una unidad, la estructura a plazo se ve afectada por a_{jt}.

Sustituyendo dr_{it} en la expresión de dp_i, obtendremos la saturación factorial del bono *i* para el factor *j*:

$$f_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial F_j} = -\sum_{t=1}^{T} t a_{jt} C_{it} \left(1 + r_{it}\right)^{-(t+1)} \tag{5.34}$$

Pudiéndose elegir los factores independientemente.

Por lo tanto, para inmunizar el efecto de todos los factores en la estructura a plazo, se puede inmunizar simplemente cada uno de los factores, combinando la sensibilidad del factor en activos y pasivos.

Puesto que el modelo abarca todos los cambios estadísticos significativos a la estructura del plazo, el riesgo de mercado se inmuniza simultáneamente.

Por lo tanto las restricciones del modelo serán:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} p_i n_i = P \\ &\sum_{i=1}^{m} f_{ij} n_i = f_{Lj}, \forall j \in J \end{aligned} \tag{5.35}$$

Función Objetivo:

Una cartera con factor óptimamente inmunizado puede crearse al maximizar el rendimiento de la cartera sujeto a la igualdad del valor actual y la sensibilidad del mismo, combinando activos y pasivos para todos los valores.

Por lo tanto, la función objetivo quedaría:

$$\text{Max } \sum_{i=1}^{m} k_i r_i n_i \tag{5.36}$$

Modelo:

Por todo ello, el modelo lineal de factor quedará:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m} k_i r_i n_i \\
&\text{Sujeto a } \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = P \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} f_{ij} n_i = f_{Lj}, \forall j \in J \\
&\qquad n_i \geq 0 \quad \text{(enteros)}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

La inclusión de restricciones de factor ha eliminado el riesgo que se aplica a la renta fija de los modelos anteriores de inmunización. Al ser la cartera de factor inmunizado también más diversificada que la cartera inmunizada, el *riesgo residual* también se reduce. El coste de este aumento de protección supone una pérdida de rendimiento. Para mejorar el control de riesgos futuros se aplican las mismas medidas que para el modelo de inmunización.

5.4 Modelos estocásticos sobre el comportamiento de los tipos de interés a corto plazo.

Para explicar el comportamiento estocástico de los tipos de interés surgen varios modelos, dentro de los cuales se encuentran los modelos de Vasicek, O. (1977). y Cox , J. C., Ingersoll, J. E. y Ross, S. A. (1985), en los que los cambios producidos en el tipo de interés a corto plazo serán absorbidos por un mecanismo de reinversión a la media en función de la velocidad de reinversión, considerándose como media el nivel de tipo de interés a largo plazo. Ambos modelos están representados mediante ecuaciones diferenciales estocásticas, representando la incertidumbre de los tipos a corto plazo.

Teniendo en cuenta que según el *Lema de Ito,* si se tiene un proceso de difusión x_t cuya dinámica es $dx_t = f(x_t,t)dt + g(x_t,t)dz$, se supone que $y_t = F(x_t,t)$ es función del proceso anterior, siendo $F(x_t,t)$ una función de clase $C^2(\Re \times \Re^+)$, entonces y_t es un proceso de difusión cuya diferencial estocástica viene dada por $dy_t = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + f(x_t,t)\frac{\partial F}{\partial x_t} + \frac{1}{2}g(x_t,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x_t^2}\right]dt + \left[g(x_t,t)\frac{\partial F}{\partial x_t}\right]dz$.

Luego, asumiendo que estos modelos siguen un proceso de *Ito*, se comenzará por analizar la modelización de la *Estructura Temporal de los Tipos de Interés* (*ETTI*), que en tiempo continuo implica una dinámica del tipo de interés instantáneo libre de riesgo, representado a través de una ecuación diferencial estocástica que rige dichos movimientos a través del tiempo, y que viene determinada por la siguiente expresión:

$$dr_t = k(\mu - r_t)dt + \sigma r^{\gamma} dW \qquad (5.38)$$

Siendo:

- *k*: Velocidad de reinversión a la media del proceso

- μ : Tipo de interés a largo plazo.

- σr^{γ} : Volatilidad que caracteriza la variación del tipo de interés, siendo σ la parte de la varianza del proceso que es constante y r^{γ} la parte de la varianza que depende del nivel del tipo de interés a través de los valores de γ.

- dW: Incremento de un proceso *Weiner* estándar (proceso estocástico según el cual una variable x_t se dice que sigue un proceso *Weiner* si cumple que $x_t = x_{t-1} + \xi_t \sqrt{\Delta t}$, con x_0 conocido, $t = t - 1 + \Delta t$, ξ_t sigue una distribución de probabilidad *N(0,1)* y ξ_t es independiente para todo $t \neq s$. Proceso que permite demostrar el *"Teorema Central del Límite"*, siendo $dW \approx N(0, dt)$.

De lo que se deduce que cuanto mayor es el valor de γ, la volatilidad del proceso será más sensible a cambios en el nivel de los tipos de interés.

Esta expresión incluye la mayor parte de los modelos más conocidos y suele ser llamada como *proceso general o sin restricciones*. Dichos modelos se obtienen imponiendo restricciones a los parámetros k, μ , γ y σ .

Los modelos en los que se centrará este estudio serán, el Modelo de Vasicek, O. (1977) y el Modelo de Cox , J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. y Vasicek , O. (1985b).

5.4.1 Modelo de Vasicek, O. (1977):

Dicho modelo impone la restricción de que $\gamma = 0$ (parámetro que condiciona el tipo de interés, y que en este caso su variación será constante), con lo que:

$$dr_t = k(\mu - r_t)dt + \sigma dW \tag{5.39}$$

5.4.2 Modelo de Cox J. C., Ingersol, J. E. y Ross, S. A. (1985).

Dicho modelo impone la restricción de que $\gamma = \frac{1}{2}$, es decir, la variación del tipo de interés cambia con la raíz cuadrada del valor del tipo de interés, al incrementarse el proceso *Weiner* con lo que:

$$dr_t = k(\mu - r_t)dt + \sigma r^{\frac{1}{2}} dW \tag{5.40}$$

Considerando este tipo de comportamiento para los tipos de interés, y ya que se necesita saber la rentabilidad conseguida siguiendo estrategias de inmunización basadas en estos modelos, es imprescindible estimar el valor de los parámetros de los que depende este tipo de modelos.

Para poder estimar estos parámetros, se han de discretizar los modelos anteriores (escritos en forma continua). Para ello se ha seguido la discretización utilizada por Norman, K. (1997). El método econométrico usado para estimar los parámetros estructurales de los modelos del tipo de interés es una aproximación basada en los métodos de estimación Gaussianos desarrollados por Berstrom, R. N. (1983, 1985, 1986), utilizando los parámetros k y μ en vez de α y β. Cumpliéndose las relaciones: $\beta = -k$ y $\alpha = k\mu$.

Así la especificación discreta del proceso será:

$$r_t = e^{-k} r_{t-1} - \mu(e^{-k} - 1) + \eta_t \ , \quad t = 1,2,3,....T \tag{5.41}$$

Donde η_t satisface las siguientes condiciones:

$$E(\eta_s \eta_t) = 0\text{, con } s \neq t$$

$$E(\eta_t^2) = -\frac{\sigma^2}{2k}\left(e^{-2k} - 1\right)(r_{t-1})^{2\gamma} = m_{tt}^2 \tag{5.42}$$

Este modelo discreto tiene la ventaja de permitir que la varianza de los cambios del tipo de interés dependa directamente del nivel de tipos de interés de forma consistente con el modelo continuo y, además, permite obtener un estimador máximo verosímil exacto.

Siguiendo a Nowman, K. B. (1997) y éste a su vez a Berstrom, R. N. (1985, 1986), se define $L(\theta)$ como dos veces el logaritmo de la función de probabilidad de Gauss.

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \left\{ 2\log m_{tt} + \frac{\left[r(t) - e^{-k} r_{t-1} + \mu\left(e^{-k} - 1\right)\right]^2}{m_{tt}^2} \right\} \tag{5.43}$$

Siendo θ el vector de los parámetros de la ecuación: $\theta = \left(k, \mu, \gamma, \sigma^2\right)$.

El valor de γ es conocido tanto para el modelo de *Vasicek, O. (1977)* como para el de Cox , J. C., Ingersoll, J. E. y Ross, S. A. ($\gamma = 0$ y $\gamma = 1/2$, tal y como se señaló respectivamente), lo cual facilita el trabajo. A partir de aquí, se estiman, por el método de máxima verosimilitud, los restantes parámetros k, μ y σ.

Los modelos estocásticos del comportamiento de los tipos de interés son modelos afines y, por tanto, la dinámica del tipo de interés instantáneo vendrá dada por las siguientes expresiones, dependiendo del modelo considerado.

Comenzando por el modelo de *Vasicek, O. (1977),* quedará:

$$dr_t = k(\mu - r_t)dt + \sigma dW \ , \quad r(0) = r_0 \ , \quad k, \sigma > 0 \ , \quad \mu \geq 0 \tag{5.44}$$

Y la valoración de los bonos de cupón cero en función del instante *t*, del tipo de interés en dicho instante y del plazo *s*:

$$v(r(t), t, s) = e^{A(t,s) - r(t)B(t,s)} \tag{5.45}$$

Donde $A(t,s)$ y $B(t,s)$ tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} A(t,s) &= \frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(s-t)}\right)H - (s-t)H - \frac{\sigma^2}{4k^3}\left(1 - e^{-k(s-t)}\right)^2 \\ B(t,s) &= \frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(s-t)}\right) \end{aligned} \tag{5.46}$$

Y donde *H* es la prima de riesgo de mercado $q(r(t), t)$ que para este modelo es constante y vendrá dada por la expresión:

$$H = \mu - \frac{\sigma q}{k} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{k^2} \tag{5.47}$$

Por otro lado, el modelo de Cox, J. C., Ingersoll, J. E. y Ross, S. A. propone que la dinámica del tipo de interés instantáneo venga dada por la expresión:

$$dr_t = k(\mu - r_t)dt + \sigma r^{1/2} dW\,, \quad r(0) = r_0\,, \quad k, \mu, \sigma > 0 \tag{5.48}$$

Donde la valoración de bonos de cupón cero es:

$$v(r(t), t, s) = e^{A(t,s) - r(t)B(t,s)} \tag{5.49}$$

Siendo $A(t,s)$ y $B(t,s)$:

$$\begin{aligned} A(t,s) &= \frac{2k\mu}{\sigma^2} \ln\left[\frac{2\psi e^{(k-\pi+\psi)(s-t)/2}}{(k-\pi+\psi)\left(e^{\psi(s-t)}-1\right)+2\psi}\right] \\ B(t,s) &= \frac{2\left(e^{\psi(s-t)}-1\right)}{(k-\pi+\psi)\left(e^{\psi(s-t)}-1\right)+2\psi} \end{aligned} \tag{5.50}$$

La estructura es la misma del *Modelo de Vasicek,* pero con distintos valores para $A(t,s)$ y $B(t,s)$.

Y siendo:

$$\psi = \sqrt{(k-\pi)^2 + 2\sigma^2} \tag{5.51}$$

Incluye al término π, que es parte de la prima de riesgo de mercado:

$$q(r(t),t) = \frac{\pi\sqrt{r(t)}}{\sigma} \quad \text{para } \pi \in R^{+} \tag{5.52}$$

La valoración de los títulos siguiendo estos modelos es importante, ya que dará a conocer el valor de H y ψ, que son fundamentales para el cálculo de la *Duración Estocástica*.

Una vez conocidos los valores de q, H, π y ψ, se puede calcular el valor de la *Duración Estocástica* para los modelos de Vasicek, O. y Cox, J. C., e Ingersoll. J. E. y Ross, S. A.

5.4.3 Duración Estocástica.

La *Duración Estocástica* de una cartera de títulos de renta fija se define como el plazo hasta el vencimiento de un bono de cupón cero sujeto al mismo nivel de riesgo de mercado.

El riesgo de mercado en el instante t de un bono de cupón cero amortizable en s vendrá dado por:

$$-\frac{\dfrac{\partial v(r(t),t,s)}{\partial r}}{v(r(t),t,s)} \tag{5.53}$$

Que representa la variación del valor del bono respecto a tipo de interés normalizado respecta al valor de dicho bono.

Como la única diferencia entre bonos de cupón cero unitarios es su plazo hasta la amortización, la expresión anterior ha de depender únicamente del instante *t*, de la valoración y del plazo *s*, luego se cumplirá la siguiente igualdad:

$$-\frac{\frac{\partial v(r(t),t,s)}{\partial r}}{v(r(t),t,s)} = \varphi(t,s) \tag{5.54}$$

Luego, la duración estocástica en *t* de una cartera de títulos de renta fija vendrá dada por el plazo hasta la amortización de un bono de cupón cero, tal que su riesgo de mercado coincida con el de la cartera *(V)*, es decir, por al valor de *s*, tal que:

$$-\frac{\frac{\partial V(r(t),t)}{\partial r}}{V(r(t),t)} = \varphi(t,s) \tag{5.55}$$

Sabiendo que el valor de la cartera en el instante *t* y para un valor de tipo de interés *r(t)*, en ese instante, viene dado por la suma de los valores de los bonos cupón cero que amortizan en el instante t_i, por la cuantía del pago del bono que vence en ese instante t_i , Esto es:

$$V(r(t),t) = \sum_{i=1}^{n} C_i v(r(t),t,t_i) \tag{5.56}$$

De esta forma, la *Duración Estocástica* vendrá dada por:

$$D_e = \varphi^{-1}\left[-\frac{\frac{\partial V(r(t),t)}{\partial r}}{V(r(t),t)}\right] = \varphi^{-1}\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n} C_i \frac{\partial v(r(t),t,t_i)}{\partial r}}{\sum_{i=1}^{n} C_i v(r(t),t,t_i)}\right] = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} C_i \varphi(t,t_i) v(r(t),t,t_i)}{\sum_{i=1}^{n} C_i v(r(t),t,t_i)}\right] \quad (5.57)$$

En el caso del *Modelo Vasicek* se toma:

$$\varphi(t,s) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-ks}\right) \quad (5.58)$$

Siendo su función inversa:

$$\varphi^{-1}(x) = -\frac{\ln(1-kx)}{k} \quad (5.59)$$

Para el Modelo Cox J. C., Ingersoll, J. E. y Ross, S. A. se toma:

$$\varphi(t,s) = \frac{2\left(e^{\psi(s-t)} - 1\right)}{(k - \pi + \mu)\left(e^{\psi(s-t)} - 1\right) + 2\psi} \quad (5.60)$$

Siendo su función inversa:

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{\psi}\ln\left[\frac{2-(k-\pi-\psi)x}{2-(k-\pi+\psi)x}\right] \tag{5.61}$$

Siendo *t* cualquier momento del tiempo y *s* el plazo hasta el vencimiento del título.

5.4.4 Inmunización Estocástica.

La *Inmunización Estocástica* viene determinada por el siguiente teorema, el cual se puede ver en Navarro, E. y Nave, J. M. (2001). Según éste, si el tipo de interés instantáneo *r(t)* se comporta conforme a la ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = f(r(t),t)dt + g(r(t),t)dW(t) \tag{5.62}$$

Donde *W(t)* sigue un proceso de Weiner estándar y el precio del riesgo de mercado viene dado por la función *q(r(t),t)*, entonces una cartera que genera una corriente de flujos de caja $X = [(C_i, t_i)]_{i=1}^{n}$ estará inmunizada en el instante *t* en relación a la corriente de pagos pasiva $Y = [(C'_j, t'_j)]_{j=1}^{m}$ frente a las variaciones no esperadas de los tipos de interés, si se verifican las condiciones:

- $P_x(r(t),t) = \sum_{i=1}^{n} C_i v(r(t),t,t_i) = P_y(r(t),t) = \sum_{j=1}^{m} C'_j v(r(t),t,t'_j)$
- La duración estocástica de la cartera D_x es igual a la duración estocástica de la corriente de pagos pasiva D_y. Por tanto, D_x=D_y.

5.5 Modelo de Optimización Robusta.

En los modelos de programación matemática aplicados a fenómenos reales se suele suponer que los datos que intervienen son conocidos y constantes, lo que permite abordar su planteamiento y resolución. Sin embargo, esta hipótesis de constancia no suele ser cierta puesto que normalmente los datos pueden ser erróneos o incompletos.

También hay que tener en cuenta que los valores de los datos que se usan en el modelo son estimaciones basadas en una predicción de las condiciones futuras.

Para no tener que resolver un nuevo problema cada vez que se produce un cambio en los datos o saber hasta que punto es fiable una decisión obtenida a partir de datos estimados, se han desarrollado distintas técnicas como el *Análisis de Sensibilidad* (análisis a posteriori) o la *Programación Estocástica* (análisis a priori).

Otra de las técnicas a priori que palia los inconvenientes aludidos anteriormente, y en la cual se centra este apartado, es la *Optimización Robusta*, la cual consiste en una integración de la programación por objetivos, con una descripción de los datos del problema, basados en escenarios posibles. Con esto, se generan una serie de soluciones que progresivamente se convierten en menos sensibles a las posibles realizaciones de los diferentes escenarios.

Se ha señalado que la optimización robusta presenta más ventajas de aplicabilidad que la programación lineal estocástica y, aunque puede resultar más compleja y más cara desde el punto de vista computacional, sus soluciones presentan mejores garantías.

5.5.1 Modelo genérico de Optimización Robusta.

Para poder plantear un modelo de optimización en un entorno de incertidumbre, se definen dos grupos de variables:

- $x \in R^{n1}$ que representa el vector de las variables de decisión cuyos valores óptimos no están condicionados por la realización de la incertidumbre de los parámetros.
- $y \in R^{n2}$ que representa el vector de variables de control que están sujetas al ajuste, una vez se ha observado la incertidumbre de los parámetros. Su valor depende tanto de la realización del escenario como del valor óptimo de las variables de decisión.

Las variables de decisión o de diseño son las que determinan que tipo de estructura de proceso hay que utilizar.

Un modelo típico de optimización lineal presenta la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & z = cx + dy \\ \text{Sujeto a.} \quad & Ax = b \\ & Bx + Cy = e \\ & x, y \geq 0 \\ & x \in R^{n1},\ y \in R^{n2} \end{aligned} \tag{5.63}$$

Las expresiones $Ax = b$ representan las restricciones estructurales con coeficientes fijos y libres de errores. Las expresiones $Bx + Cy = e$ representan las restricciones de control y los coeficientes de estas restricciones sí están sujetos a variación. Para poder llegar a definir un problema de optimización robusta, se introduce un conjunto de escenarios $\Omega = (1,2,....,S)$. Con cada escenario $s \in \Omega$ se puede asociar el conjunto (d_s, B_s, C_s, e_s) de realización de los coeficientes de las distintas variables de control y también la probabilidad de este escenario P_s. Evidentemente, $\sum_{s \in \Omega} P_s = 1$.

El término robusto se puede emplear en dos acepciones: respecto a la optimalidad y respecto a la admisibilidad.

La solución óptima del problema anterior es robusta respecto a la optimalidad si se mantiene *"cerrada"* en el óptimo. Es decir, si varía muy poco la solución óptima, para la realización de cualquier escenario. En este caso se dice que el problema tiene una solución robusta. En el caso de que se mantenga admisible para cualquier realización, se dice que el modelo es robusto.

No es frecuente que cualquier solución del problema anterior se mantenga tanto óptima como admisible para todos los escenarios. Por eso es necesario medir la desviación entre la robustez de la solución y el modelo.

El modelo de optimización robusta propuesto presenta la siguiente formalización para medir esta desviación.

En primer lugar, se introduce el conjunto de variables de control para cada escenario, es decir, $(y_1,...,y_S)$. También se introduce el conjunto de vector de errores $(z_1,...,z_S)$, que mide la inadmisibilidad de las restricciones de control bajo el escenario *s*.

Por tanto, se puede considerar la siguiente formulación como la de un modelo de optimización robusta.

$$\text{Min.} \quad Z = \sigma(x, y_1,...., y_S) + \omega\rho(z_1,...., z_S)$$

$$\text{Sujeto a} \quad Ax = b \qquad (5.64)$$

$$B_s x + C_s y_s + z_s = e_s, \quad \forall s \in \Omega$$

$$x \geq 0, \quad y_s \geq 0, \quad \forall s \in \Omega$$

El primer término de la función *Z*, *σ(.)*, se denomina función agregada. Para poder definirla, se debe considerar que con múltiples escenarios, la función objetivo $\xi = cx + dy$ es una variable aleatoria que toma el valor $\xi_s = c_s x_s + d_s y_s$ con probabilidad P_s.

Se podría hacer que σ(.) tomara el valor medio, lo que representaría la función usada en la formulación de los problemas lineales estocásticos, o el máximo de ξ_s, que sería una forma de minimizar la peor expectativa. También se podrían introducir momentos de orden superior de la distribución ξ_s. Dicha posibilidad es una de las diferencias con la programación estocástica.

El segundo término de la función *Z*, *ρ(.)*, es una función de penalización de falta de inadmisibilidad. Se usa para penalizar las violaciones de las restricciones de control bajo los diferentes escenarios *s*. La ponderación ω se usa para obtener el espectro de respuestas de la desviación de la solución para la robustez del modelo.

La introducción de la función de penalización es lo que distingue la optimización robusta de otros procedimientos con datos inexactos. El modelo reconoce que no es posible encontrar soluciones admisibles bajo todos los escenarios y genera soluciones que analizadas por el decisor, pueden presentar el menor número de inadmisibilidades. Como ejemplos de funciones de penalización se proponen:

- $\sum_{s \in \Omega} P_s z_s^t z_s$. Esta función es aplicable a problemas con restricciones de igualdad en donde las desviaciones de las restricciones, tanto positivas como negativas, son no deseables.

- $\sum_{s \in \Omega} P_s \max(0, z_s)$. Esta función es aplicable a las restricciones de control de desigualdad cuando sólo tienen interés las violaciones de las restricciones en sentido positivo.

En síntesis, el modelo propuesto anteriormente toma la forma de objetivo multicriterio. El primer término mide la robustez de la optimalidad mientras que el segundo término mide la robustez de la inadmisibilidad.

5.5.2 La Optimización Robusta aplicada al problema del Cash-Flow matching con incertidumbre.

El problema de la gestión de carteras puede abordarse de diferentes maneras, tanto activas como pasivas. Una de ellas es conocida como el problema del *Cash-flow Matching*, en el cual se pretende determinar el importe de la inversión a realizar en el momento inicial, para atender una posible serie de pagos a lo largo de un determinado periodo de planificación.

Lo que se plantea es un modelo de optimización robusta que permita determinar la composición de la cartera que permita hacer frente a una serie de pagos inciertos (pero a los cuales se asocia una probabilidad discreta de ocurrencia de los sucesos). Esta cartera a determinar estará compuesta por bonos de renta fija, tanto en el caso de considerar bonos sin riesgo (p. ej. bonos del tesoro) como diferentes bonos con rating de diferente nivel. La formulación de este problema en términos deterministas, incluyendo desviaciones por exceso y por defecto es:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min.} \quad && cx \\
&\text{Sujeto a} \quad && Ax - Q_1 y^+ + Q_2 y^- = b \qquad (5.65) \\
& && x \in X, \quad y^+, y^- \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde x representa los activos comprados y mantenidos hasta su vencimiento y c es el precio de compra de los diferentes activos. La variable y^{+} representa los excesos de caja reinvertidos en el momento t, pero sólo reinvertidos por un periodo. La variable y^{-} representa los déficit de caja que deben ser cubiertos mediante la petición de préstamos o créditos que deben ser devueltos en el periodo siguiente. La matriz A representa los cash-flow producidos por cada uno de los activos en el periodo t, incluyendo tanto los cupones como las amortizaciones. La matriz Q_1 representa la matriz de reinversiones durante cada periodo, es decir es una matriz $T^{*}T$, de la siguiente forma:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ -(1+r_{p,2}) & 1 & & & \\ 0 & -(1+r_{p,3}) & 1 & \cdots & \\ \cdots & & \cdots & & \\ 0 & & & -(1+r_{p,T}) & 1 \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

Siendo $r_{p,t}$ el tipo de interés que remunera los saldos positivos durante el periodo t.

Mientras que la matriz Q_2 es la matriz de pagos por los préstamos solicitados en el periodo anterior. Es idéntica a la matriz Q_1 sin más que sustituir $r_{p,t}$ por $r_{n,t}$ (el tipo de interés que se paga por los saldos negativos, o préstamos, durante el periodo t). Para que el modelo anterior, tenga sentido económico, los tipos de interés de los préstamos han de ser mayores o iguales que los tipos de interés de los depósitos realizados durante cada uno de los periodos. Es decir $r_{n,t} \geq r_{p,t}$. El vector b, representa las necesidades a cubrir en cada uno de los periodos.

El conjunto de oportunidades X, puede estar definido, además, por un conjunto de restricciones que tengan en cuenta otros tipos de consideraciones, como por ejemplo, las relaciones entre las duraciones de los activos y los pasivos en algún o algunos periodos de tiempo, la consideración de cotas superiores o inferiores para cada uno de los activos, restricciones de diversificación de la cartera, inclusión de algunas relaciones entre los valores actuales de los activos, etc.

Para tratar de abordar este tipo de incertidumbre se han de realizar estimaciones sobre el comportamiento futuro de los diferentes datos que intervienen. Una forma de estimar estos parámetros de los diferentes periodos es usando la técnica de la generación de escenarios, de forma que se puedan establecer nexos de unión entre las diferentes posibilidades de los sucesos. A cada uno de estos escenarios se les puede asociar una probabilidad del acontecimiento, de forma que se puedan cuantificar.

En el modelo que se propone se va a considerar la introducción de la incertidumbre en dos apartados:

- Diferentes posibilidades para cada uno de los pagos en los distintos periodos de tiempos.
- Añadir a las posibilidades anteriores, la formación de una cartera con diferentes tipos de activos con un cierto riesgo. Estos activos con riesgo se van a considerar como bonos con diferente rating, es decir, clasificados como *A (AA o AAA), B o C*. Estas clasificaciones de rating de los bonos tienen asociadas unas probabilidades de impago.

En cualquier caso, lo que se pretende determinar es la cartera que debe cubrir las diferentes necesidades de pago de cada uno de los escenarios posibles, de forma que ésta sea lo más robusta respecto a la inadmisibilidad y la optimalidad.

Con todo esto la formulación del modelo para coordinar los distintos escenarios quedará como a continuación se desarrolla.

Variables:

n_{ij}: Número de bonos del tipo j que se adquieren de la clase i (rating).

DN_t^s y DP_t^s : Desviación negativa (falta de cobertura) y positiva (exceso de cobertura) de la inversión para atender a los pagos del periodo *t* bajo el escenario *s*.

WP^s y WN^s: Desviación positiva (exceso) y negativa (defecto) respecto a la inversión entre el valor del escenario coordinado y cada uno de los escenarios individuales.

Datos:

P_s: Probabilidad de ocurrencia del escenario *s*.

P_t^s: Probabilidad de ocurrencia del escenario *s* durante el periodo *t*.

c_{ij}: Precio de adquisición de los bonos del tipo *j* que se adquieren de la clase *i*.

I_0: Inversión inicial en activos sin riesgo.

a_{ij}^s: Rendimiento del bono *j* del tipo *i* bajo el escenario *s*.

$r_{p,t}$ y $r_{n,t}$: Tipo de interés de los depósitos y préstamos durante el periodo *t* bajo el escenario *s*.

N_t^s: Necesidades de pago durante el periodo *t* bajo el escenario *s*.

V^{Ω}: Valor deseado de la inversión bajo el escenario coordinado Ω.

Parámetros:

I: Conjunto de distintos rating de bonos $i \in I : i = 1, 2, ..., n$.

J: Tipos de bonos dentro de un mismo rating $j \in J : j = 1, 2, ..., m$.

T: Periodos de tiempo $t \in T$: $t = 1, 2,..., T$.

Ω : Escenarios posibles $s \in \Omega : s \in (1,2,....,S)$

ar_t : Tipo de actualización o tasa de descuento durante el periodo *t*.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$: Parámetros de penalización de la función objetivo multicriterio, que se detallan con la explicación del criterio (más adelante).

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{s} n_{ij} + DN_1^s - DP_1^s + I_0 = N_1^s \ , \quad \forall s \in \Omega$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{s} n_{ij} + DN_t^s - DP_t^s + DP_{t-1}^s (1 + r_{p,t}) - DN_{t-1}^s (1 + r_{n,t}) = N_t^s \ ,$$
$$\forall s \in \Omega, t \in T : t \geq 2 \qquad (5.67)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} n_{ij} + I_0 - V^{\Omega} - WP^s + WN^s = 0 \, , \quad \forall s \in \Omega$$

$$n_{ij}, DP_t^s, DN_t^s, WP^s, WN^s \geq 0$$

La primera restricción será que los rendimientos producidos por la cartera más la cantidad mantenida en efectivo debería ser suficiente para cubrir las necesidades del primer periodo en cada uno de los escenarios, pero dado que las necesidades en cada escenario son distintas, se admite la posibilidad de que existan desviaciones tanto por exceso (DP_1^s) como por defecto (DN_1^s).

En la Figura 28, se muestra gráficamente el balance de flujos de caja en el periodo *t*, correspondiente a esta restricción.

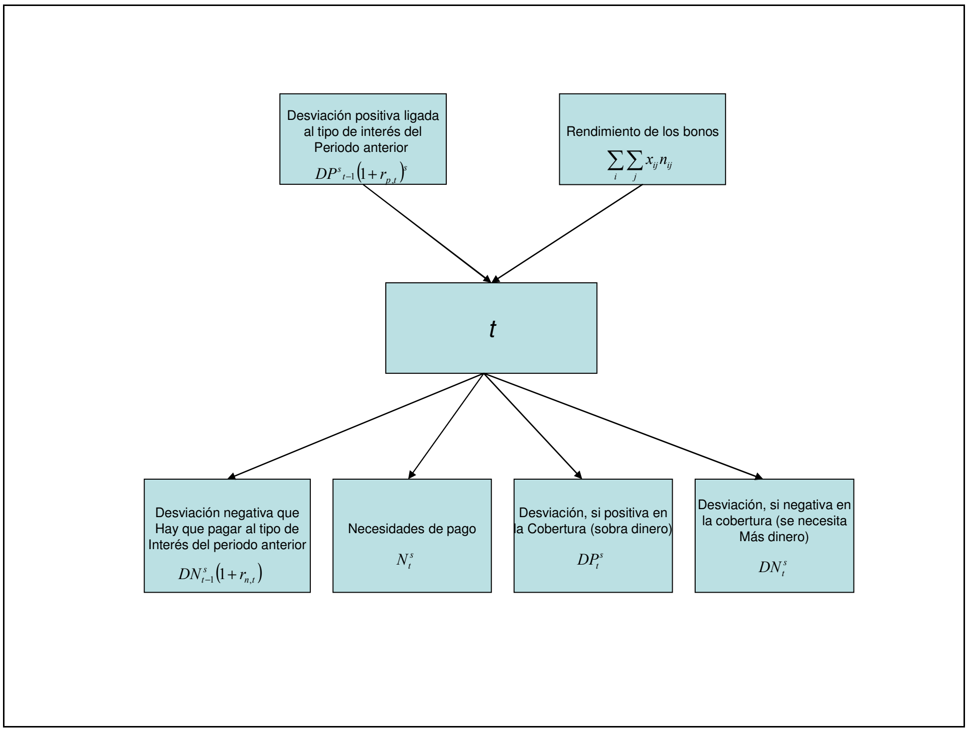

Figura 28. Balance de flujos de caja en cada periodo *t*

Para *t=1* no se tiene DP^s_{t-1} ni DN^s_{t-1}, pero se tiene la inversión inicial en activos sin riesgo I_0 como input.

La segunda restricción es la generalización para todos los periodos de tiempo de la primera restricción, pero considerando las desviaciones habidas en el periodo anterior con sus correspondientes intereses tanto activos como pasivos. Las desviaciones negativas (descubiertos) del último periodo, se incorporan (actualizadas) en el cuarto término de la función objetivo (se describirá posteriormente).

En la Figura 29, se muestra gráficamente el balance de los flujos de caja en el periodo, incluyendo, en este caso, las desviaciones negativas.

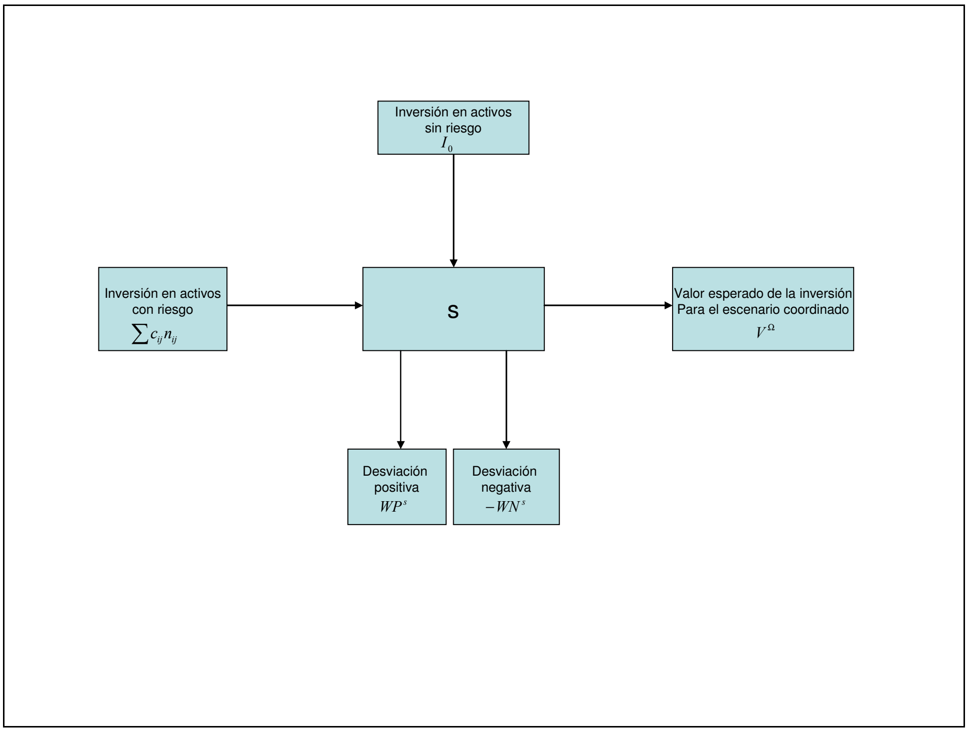

Figura 29. Balance de flujos de caja incluyendo las desviaciones negativas

La tercera restricción mide las desviaciones del escenario coordinado global respecto a cada uno de los escenarios individuales. Se trata de la alternativa a la incorporación de la desviación cuadrática para la función objetivo.

En la Figura 30, se muestra el flujo de caja en los periodos, *t-1*, *t* y para el periodo *t=1*.

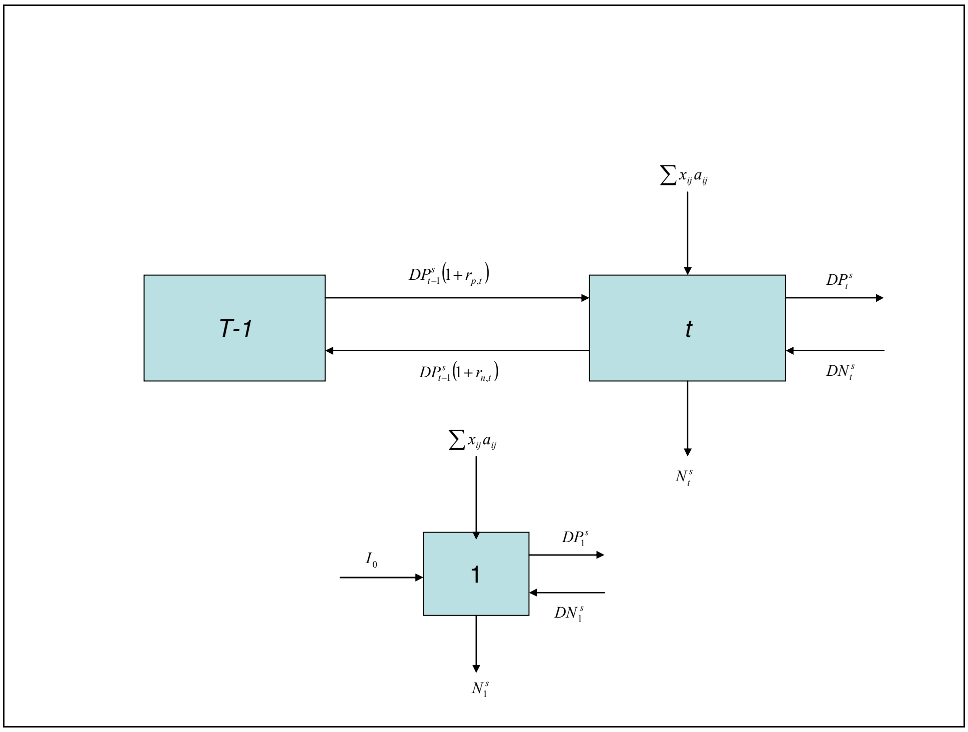

Figura 30. Balances de flujos de caja en los periodos *t-1, t* y para el primer periodo

Función Objetivo:

Min

$$Z=\alpha\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}n_{ij}+I_0\right)+\beta\sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T}P_t^s DN_t^s+\gamma\sum_{s=1}^{S}P_s\left(WN^s+WP^s\right)+\delta\sum_{s=1}^{S}P_s DN_T^s\prod_{t=1}^{T}\left(1+ar_t\right)^{-t} \quad (5.68)$$

La función objetivo esta compuesta por cuatro términos:

a) El importe de la inversión inicial (bonos más efectivo), penalizada por un parámetro α.

b) La suma de todas las desviaciones negativas (prestamos a solicitar) ponderada por las probabilidades de los diferentes escenarios y penalizada por un parámetro β. Puede interpretarse como el riesgo de insolvencia de la compañía. Representa la inadmisibilidad.

c) La suma de las desviaciones entre el valor de la cartera conjunta y el valor de la cartera en cada uno de los escenarios individuales, ponderada por las probabilidades de dichos escenarios y penalizada por un parámetro γ. Se puede interpretar como el criterio de optimalidad global frente a la optimalidad de cada escenario.

d) Penalizada por un parámetro δ, es la suma ponderada de los valores actuales de las desviaciones negativas del último periodo (falta de cobertura). Se puede interpretar como el riesgo de falta de liquidez final. Representa inadmisibilidad y también se puede interpretar como el equilibrio financiero global.

Modelo:

Min

$$Z=\alpha\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}n_{ij}+I_0\right)+\beta\sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T}P_t^s DN_t^s+\gamma\sum_{s=1}^{S}P^s\left(WN^s+WP^s\right)+\delta\sum_{s=1}^{S}P^s DN_T^s\prod_{t=1}^{T}\left(1+ra_t\right)^{-t}$$

$$\text{s.a}\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^s n_{ij}+DN_1^s-DP_1^s+I_0=N_1^s\ ,\quad \forall s\in\Omega \tag{5.69}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^s n_{ij}+DN_t^s-DP_t^s+DP_{t-1}^s\left(1+r_{p,t}\right)-DN_{t-1}^s\left(1+r_{n,t}\right)=N_t^s$$

$$\forall s \in \Omega, t \in T : t \geq 2$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} n_{ij} - V^{\Omega} - WP^{s} + WN^{s} = 0\,, \quad \forall s \in \Omega$$

$$n_{ij}, DP_t^s, DN_t^s, WP^s, WN^s \geq 0$$

6. Conclusiones y líneas de trabajo futuras.

Como se ha podido ver en el presente trabajo, el riesgo está ligado a cualquier tipo de inversión, es decir, es inherente e inseparable de esta actividad.

Aunque es posible que dicho riesgo pueda ser positivo para el inversor, la probabilidad de que se produzcan pérdidas no previstas es mayor.

También se han analizado las actitudes del inversor frente al riesgo y, dependiendo del tipo de actitudes del mismo, la elección del tipo de inversión bajo las incertidumbres típicas de cada tipo de escenarios.

Para ver cuales son, de la forma más objetiva posible, las actitudes del inversor frente al riesgo, se ha realizado un estudio sobre la *Utilidad Esperada*, para el cual, se emplea un método comparativo en el que se calcula una función de utilidad para cada sujeto, atribuyendo un valor numérico al disfrute conseguido por las distintas cantidades de cada bien. Calculada la función, y comparando la utilidad esperada de cada alternativa en función de su probabilidad, cada sujeto elige aquella que tenga un resultado más alto. Dicha función no se ha formulado como canon de racionalidad sino como expresión razonable del comportamiento de las personas.

Además, para analizar las actitudes del inversor frente al riesgo, se han enunciado los axiomas de *Von Newman-Morgenstern*, como son los de comparabilidad, transitividad o consistencia, sustitución e independencia, continuidad o mensurabilidad, ordenación y, por último, la teoría de la perspectiva, en la que se refleja el comportamiento de las personas en casos reales y no como sería los comportamientos racionales.

Se ha analizado el método de gestionar el riesgo a través de las Primas de Riesgo, es decir, las cuantías monetarias que un inversor averso al riesgo está dispuesto a pagar o a dejar de ganar para evitar el riesgo inherente a una determinada inversión.

Entre las primas de riesgo estudiadas se encuentran la de *Markowitz* o la cantidad máxima que el inversor estaría dispuesto a pagar o a dejar de ganar para evitar el riesgo de una inversión con resultado incierto. La de *Pratt y Arrow*, los cuales proponen una fórmula para riesgos pequeños en relación con el patrimonio inicial de los inversores y riesgos actuarialmente neutrales, es decir, para pequeños riesgos cuyo valor esperado es nulo. Además, tratan las aversiones absolutas y relativas al riesgo.

Para facilitar el estudio y el análisis de los riesgos, se ha realizado una minuciosa clasificación de los mismos, definiendo y analizando cada uno de ellos, así como la composición de los mismos. Una vez analizado cada tipo de riesgo existente, se han detallado las herramientas disponibles para facilitar el tratamiento de los mismos.

Otro aspecto tratado ha sido la administración de los riesgos, para el cual se han definido unos objetivos y unas funciones asociadas a éstos, identificando, evaluando, seleccionando e implementando las decisiones tomadas.

Se ha estudiado la relación entre las probabilidades e impactos de los riesgos y se ha desarrollado una matriz de efectos relacionando las posibles estrategias a seguir en relación con los estados del contexto externo sobre los que tenemos control directo, todo ello como métodos básicos para la gestión del riesgo.

Se ha utilizado el Método de Valoración de Riesgos por Arbitraje (APT), el cual parte de considerar que la incertidumbre sobre la rentabilidad de los activos financieros viene explicada por un conjunto finito de factores o índices, como pueden ser los índices bursátiles IBEX o DOW JONES, indicadores de tipos de interés como el EURIBOR o el CMS, o variables macroeconómicas como el IPC o crecimiento del PIB. Estos índices son definidos como variables aleatorias cuyas distribuciones de probabilidad son conocidas por los inversores, o al menos, sus valores esperados y sus varianzas.

Como casos particulares del Método de Valoración por Arbitraje se han utilizado modelos de valoración lineal, como son el modelo de valoración de activos de capital (*Modelo CAMP*), dentro del mismo se ha estudiado la cartera óptima de mercado, el equilibrio de los mercados financieros, se ha relacionado con el *Modelo de Sharpe* y se ha visto la aportación que *Black* hace al *Modelo CAMP*, es decir, la inclusión de la cartera de *Beta Cero*, la cual muestra como el rendimiento esperado de cualquier activo se puede obtener mediante una combinación lineal del movimiento esperado de la cartera de mercado y de su correspondiente cartera frontera de covarianza cero.

Como medición del resultado en la gestión de riesgos, se han desarrollado distintas alternativas para evaluar el resultado de los gestores de carteras, teniendo en cuenta, no sólo el rendimiento obtenido en un determinado período de tiempo, sino también el riesgo que han tenido que asumir para alcanzar dicho rendimiento. Para ello, se han analizado los índices de *Shape, Treynor, Jensen* y *Modigliani.*

Para ver cuales han de ser las estrategias a seguir en inversiones de renta fija, se han aplicado modelos de programación matemática para la gestión de riesgos en carteras de renta fija, para su aplicación se ha estudiado la duración financiera de la inversión, es decir, la duración de un título como media ponderada de los vencimientos de los préstamos individuales que se corresponden con cada pago futuro.

Se han detallado los modelos de inmunización deterministas, entre los que se encuentran el de *Fisher, S. y Weil, P*., el de *Fong, H. G. y Vasicek, O*. y el de *Nawalkha, S. K. y Chambers, D. R*.,. así como el modelo de la *Moderm portfolio Theory* como modelo de inmunización de factores que afectan a la inversión y producen riesgo.

Con respecto a las inversiones a corto plazo, se han detallado los modelos estocásticos sobre el comportamiento de los tipos de interés, tales como el de *Vasicek, O*., el de *Cox, J. C., Ingersol, J. E.* y *Ross, S. A*., analizando, además, la duración estocástica o plazo hasta el vencimiento de un bono de cupón cero sujeto al mismo nivel de riesgo de mercado, así como la inmunización estocástica.

Por último, se han desarrollado los modelos de optimización robusta, tanto genéricos como aplicados al problema del *Cash Flow Matching* con incertidumbre, el cual pretende determinar el importe de la inversión a realizar en el momento inicial, para atender a una posible serie de pagos a lo largo de un determinado periodo de planificación.

Así, se puede decir que los modelos, tanto genéricos como específicos, desarrollados para la minimización del impacto del riesgo sobre las inversiones en el mercado de renta fija, son soluciones para prevenir los posibles quebrantos derivados del mismo.

Como línea de trabajo futura, y partiendo de las soluciones que aportan los modelos estudiados, se aplicarán modelos de inmunización, tanto deterministas como estocásticos, así como el modelo de optimización robusta a escenarios e inversiones concretas, aportando los resultados obtenidos y comparando los mismos con los obtenidos por otros autores.

A 1. Glosario de conceptos

Activo subyacente.- Puede ser el precio de una acción, de una materia prima, una divisa o un proyecto de inversión, como ejemplos más comúnmente utilizados.

Arbitraje (financiero).- Es el que opera sobre las diferencias de cotización, bien en la misma bolsa entre títulos valores similares, o bien en bolsas diferentes, con cotizaciones del mismo título valor, y cuyo objeto es obtener un beneficio.

Aversión absoluta al Riesgo.- Mide la cantidad monetaria que se está dispuesto a invertir en una inversión con riesgo por unidad monetaria patrimonial.

Aversión al Riesgo.- Se da cuando el inversor prefiere el valor esperado del activo financiero frente al propio activo.

Aversión relativa al riesgo.- Es la proporción de inversiones con riesgo sobre el patrimonio total del inversor.

Beta cero.- Cuando la variación del precio de una acción y la que experimenta el mercado es la misma.

Bien inferior.- Es aquel cuya demanda disminuye cuando aumenta la renta (el patrimonio) del consumidor.

Bien normal.- Es aquel cuya demanda aumenta cuando aumenta la renta (el patrimonio) del consumidor.

Contrato de derivados.- Es un contrato cuyo valor es función de un activo subyacente.

Duración financiera*.-* Duración de un título de renta fija que genera una corriente de pagos.

Duración modificada.- Sensibilidad de un Bono a las variaciones de la Tasa Interna de Rentabilidad.

Función de Utilidad.- Función que atribuye el valor numérico al disfrute conseguido con sucesivas cantidades de cada bien.

Gestión del Riesgo.- Proceso de toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre sobre una acción que va a suceder y sobre las consecuencias que existirán si esta acción ocurre.

Liquidez de mercado.- Se define como el riesgo de no poder deshacer o cerrar una posición a tiempo en el mercado en un momento dado, sin impactar en el precio de mercado o en el coste de la transacción.

Opción americana.- Se denomina a la opción que se da cuando el comprador de la opción, adquiere a cambio de una prima, el derecho de comprar o el derecho de vender un activo a un precio fijado en el contrato en una fecha anterior al vencimiento del contrato.

Opción de Riesgo.- Póliza de seguro que cubre todos los tipos de riesgo.

Opción europea.- Se denomina a la opción que se da cuando el comprador de la opción, adquiere a cambio de una prima, el derecho de comprar o el derecho de vender un activo a un precio fijado en el contrato, que se ejecutará bien en una fecha determinada en el mismo y que se denomina "vencimiento del contrato".

Opciones reales.- Son las opciones financieras sobre activos reales o materiales, es decir, activos no financieros.

Prima de riesgo.- Es la ganancia adicional que se le exige a una inversión con riesgo para que sea preferido por un inversor averso al riesgo frente a un activo sin riesgo.

Riesgo (Concepto).- Efecto acumulativo que los acontecimientos adversos pueden tener sobre los objetivos de una actividad planificada. Supone la contingencia, la probabilidad o la proximidad de un daño o un peligro, siendo sus características básicas la aleatoriedad y la incertidumbre.

Riesgo de crédito.- Es el riesgo que se presenta cuando las partes contrarias están poco dispuestas o imposibilitadas para cumplir sus obligaciones contractuales.

Riesgo de Inmunización.- Es el riesgo de interés provocado por la variaciones no anticipadas de los tipos de interés.

Riesgo de Oportunidad.- Es el tipo de riesgo que resulta ser positivo para una organización.

Riesgos No Sistemáticos.- Son los riesgos más esporádicos y con menor control sobre ellos.

Riesgos Sistemáticos.- Son los riesgos que se dan más frecuentemente y son los más fácilmente controlables.

Utilidad esperada.- Esperanza matemática de la función de utilidad del inversor, lo que en términos discretos se puede expresar como el sumatorio de los distintos niveles de utilidad generados por los resultados posibles de las inversiones, por la probabilidad de que esos resultados se presenten ($E\left[U\left(\tilde{x}\right)\right]=\sum_{i=t_0}^{t_1} U\left(x_i\right)p_i$)

Valor actuarial.- Probabilidad de variación del valor de la inversión.

Valor barbell.- Valor cuya estrategia es el corto y largo plazo frente al medio plazo

Valor en Riesgo (*Value at Risk*).- Es la pérdida máxima en que se puede incurrir en una cartera de inversiones en un horizonte temporal definido y dado un nivel de confianza determinado.

Valor straight.- Valor que no tiene cláusulas que garanticen su convertibilidad.

Apéndice 2. Estrategias para combatir la aparición de riesgos mediante contratos de derivados.

Opciones y futuros

Una forma de combatir la aparición de riesgo en las inversiones es mediante *el contrato de derivados.*

Un contrato de derivados es un contrato cuyo valor es función de un activo subyacente. El activo subyacente puede ser el precio de una acción, de una materia prima, una divisa o un proyecto de inversión, como ejemplos más comúnmente utilizados.

Los tres contratados de derivados más comunes son:

- Contrato de *forward*
- Contrato de futuro
- Opciones de compra / venta

Contrato de forward.

Es un contrato entre dos partes por el que se acuerda, en el momento de su firma, la entrega de un activo subyacente a un precio determinado, en un momento futuro *T*. El subyacente puede entregarse físicamente o, si el contrato es puramente financiero, no entregarse y, consecuente mente, cancelarse mediante el pago de las correspondientes diferencias de precio.

Las principales características del contrato de *forward* son:

- Contrato a la medida, no estandarizado.
- Sin cotización en un mercado organizado.
- No se realizan cobros y pagos hasta el vencimiento.

- Existe riesgo de contraparte.

Contrato de futuro.

Es similar a uno *forward*, pero con la particularidad de que es un contrato estandarizado, que cotiza en un mercado organizado y cuyos beneficios o pérdidas se liquidan diariamente.

Las principales características de un contrato de futuro son:

- Contrato estandarizado (activo subyacente definido, así como su cantidad y vencimiento).
- Cotiza en mercado organizado.
- No existe riesgo de contraparte, garantizado por el organizador del mercado.
- Los beneficios o pérdidas se liquidan diariamente.
- Se requiere garantía de efectivo o títulos para hacer frente a posibles pérdidas.

- *Contrato de opción de compra / venta.*

Es un contrato por el cual el vendedor recibe una cantidad monetaria (precio de la opción) que paga el comprador. El contrato proporciona al comprador el derecho (pero no la obligación) de comprar / vender un activo subyacente a un determinado precio fijado en el contrato (precio de ejercicio) en una determinada fecha futura (opción europea) o hasta una determinada fecha futura (opción americana).

Los contratos de opciones tienen una amplia historia. Sin embargo, debido a la relativa complejidad de su correcta valoración, hasta mediados de la década de 1970 no se comercializaron las opciones en mercados organizados en cantidades realmente importantes. Una de las razones para esta mayor aceptación en los mercados financieros fue el desarrollo de una nueva teoría que resuelve el problema de la valoración de las opciones de forma sencilla, elegante y analítica.

Fueron Black, F., Sholes, M. y Merton, R. C. los que lograron enunciar teorías que merecieron la aceptación en la práctica de los actores de los mercados financieros.

- Valoración neutral al riesgo de una opción, un período antes de su vencimiento.

Si se tiene una evolución real de precios del activo subyacente como, por ejemplo, la evolución de precios que tenga el mercado en un determinado período, el cual podría obtenerse del de los datos históricos, el precio de hoy (período T-1) del activo subyacente, que el precio puede subir con un factor multiplicativo u y con probabilidad q, o bajar con un factor multiplicativo d y con probabilidad 1-q, siendo el tipo de interés sin riesgo r_F y teniendo también que $u>1+r_F>d$, para evitar posibilidades de arbitraje.

Si se tiene que:

- C: Valor de la opción de compra.

- $u.S$: Valor del activo subyacente si sube el precio.

- $d.S$: Valor del activo subyacente si baja el precio.

- B: Activo sin riesgo.

- A: Cierta cantidad de unidades del subyacente.

- p: Probabilidad de riesgo neutro.

- C_u, C_p: Valores actualizados de los posibles valores de la opción.

- K: Precio de ejercicio.

Se puede decir que para el período T, si el subyacente vale $u.S$, el valor de la opción de compra Cu será:

$$C_u = \max[u.S - K, 0] \qquad \text{(A2.1)}$$

y para el valor del subyacente de *d.S*:

$$C_d = \max[d.S - K, 0] \qquad \text{(A2.2)}$$

Considerándose la inversión alternativa (en lugar de adquirir la opción de compra) en una cartera consistente en el activo sin riesgo de valor *B*, y una cierta cantidad *A*, de unidades del subyacente. El valor de dicha cartera hoy sería:

$$A.S + B \qquad \text{(A2.3)}$$

Es decir, que el valor de la opción de compra será la inversión en activo subyacente más la inversión en activo sin riesgo:

$$C = A.S + B \qquad \text{(A2.4)}$$

El problema se plantea al elegir *A* y *B* de modo que esta cartera genere los mismos flujos de caja que la opción de compra a su vencimiento en el período siguiente:

$$u.S.A+(1+r_F)B=\max[u.S-K,0]=C_u$$
$$d.S.A(1+r_F)B=\max[d.S-K,0]=C_d \qquad \text{(A2.5)}$$

La única solución al anterior sistema de ecuaciones es:

$$A=\frac{C_u-C_d}{(u-d)S}\ ;\ B=\frac{u.C_d-d.C_u}{(u-d)(1-r_f)} \qquad \text{(A2.6)}$$

Aplicando la restricción de la no existencia de arbitraje, si las dos estrategias de inversión (en la opción y en la cartera) proporcionan los mismos flujos de caja al vencimiento, deben tener el mismo valor hoy. Con ellos se ha obtenido el *valor neutral al riesgo* de una opción de compra un período antes de su vencimiento.

$$C(T-1,K,T)=S.A+B=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{u.C_d-d.C_u}{(u-d)(1+r_F)}=$$
$$=\left[\frac{1+r_F-d}{u-d}C_u+\frac{u-1-r_F}{u-d}C_d\right]*\frac{1}{1+r_F}=[p.C_u+(1-p)C_d]\frac{1}{1+r_F} \qquad \text{(A2.7)}$$

Siendo:

$$p=\frac{1+r_F-d}{u-d} \qquad \text{(A2.8)}$$

De la expresión anterior puede deducirse que el valor de una opción es independiente de la probabilidad (q) que los inversores atribuyen a un aumento de precio (uS) para el próximo período y de la probabilidad (1-q) para una reducción del precio (dS) del subyacente.

De la expresión anterior, también se extrae que p puede considerarse como una probabilidad, denominada "probabilidad de riesgo neutro", en contraposición a las probabilidades reales q y 1-q, y $C(T\text{-}1,K,T)$ como el valor actualizado de los posibles valores de la opción (C_u y C_p) en el próximo período, actualizados al tipo de interés sin riesgo.

REFERENCIAS

Bergstrom, A. R. (1983). "Gaussian estimation of structural parameters in higher-order continuous time dynamic models". Econometrica 51, 117-152.

Bergstrom, A. R. (1985). "The estimation of parametersin nonstationary higher-order continuous time dynamic models". Econometric Theory 1, 369-385.

Bergstrom, A. R. (1986). "The estimation of open higher-order continuous time dynamic models with mixed stock and flow data". Econometric Theory 2, 350-373.

Bierwag, G. O. (1991). *Análisis de la duración. La gestión del riesgo de tipo de interés,* Alianza Económica y Finanzas.

Black F. y Scholes M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy, 81, 637-654.

Black, F (1972). "Capital market equilibrium with restricted borrowing", Journal of Business, Julio, 444-445.

Brennan, M. (1970). "Taxes, market valuation and corporation financial policy". National Tax Journal, Diciembre, 417-427.

Conthe, M. (2003). *La Psicología de las Finanzas*, Encuentros Multidisciplinares. Vol. 5, 15.

Copeland, T. E. y Weston, J. F. (1988). *Financial Theory and Corporate Policy,* Addison Wesley.

Dahl, H., Meeraus, A. and Zenios, S. (1993). *"Some Financial Optimization models: I. Risk Managenent".* En Zenios, S.A. (ed). *Financial Optimization*, pp. 3-34, Cambridge University Pres, United Kingdom.

Duncan, W.R (1996). *Guide to the Project Management Body of Knowledge. Project Risk Management.* Project Management Institute. USA.

Ellberg, D. (1961). "Risk, Ambiguity and the Savage Axioms", Quarterly Journal of Economics, 75, pp. 643-669.

Fama, E. F. (1965a). "The beheavior of stock market prices", Journal of Business, Enero, pp. 34-105.

Fama, E. F. (1965b). "Portfolio analysis in a stable paretian markets", Management Science, Enero, pp. 404-419.

Fama, E. F. (1968). "Risk return and equilibrium: Some clarifying comments", The Journal of Finance, Vol. 23, 1, pp. 29-40.

Ferruz, L., Portillo, M. P. y Sarto J. L. (2001). *Dirección Financiera del riesgo de interés.* Ediciones Pirámide. Madrid. España.

Fisher, L. y Weil, R. L. (1971). "Coping with the risk of interest-rate fluctuations: Returns to bondholders from naïve optimal strategies", Journal of Business 4, pp. 408-431.

Freeman, A. y Dembo, R. S. (1998). *Seeing tomorrow. Rewriting the rules of risk*, John Willey and Sons.

Hidalgo, A (2004). "Gestión de la Innovación y de la Tecnología", Madrid+d, Mayo-Junio, 23.

Hortalá y Arau, J. (1996). *Teoría económica*, McGraw-Hill.

"Instituto de Crédito Oficial" (2004), *Informe anual.*

Jarrow, R.A., Maksimovic, V. y Ziemba, W.T. (1995). *Finance. Handbooks in operations research and management science,* Vol. 9. Elsevier Science B.V.

Jensen, M. C. (1998). "The performance of mutual funds in the period 1945-1964", Journal of finance, 2, pp. 389-416.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1979). "Prospect Theory: An Analysis of Decisión under Risk", Econométrica, Vol 47, 2, pp. 263-292.

Krugman, R. and Maurice, P. (1995). *Economía Internacional.* 3ª Edición, McGraw-Hill.

Lazzati, N. (2001). *Técnicas de la Inmunización basadas en la duración,* Investigación y Desarrollo. Departamento de Capacitación y Desarrollo de Mercados. Bolsa de Comercio de Rosario (México), Marzo.

Levi, D. M. (1997). *Finanzas Internacionales,* McGraw-Hill.

Lewent, Judy C., and Kearney, A. J. (1990). *Identyfying, Measuring and Hedging Currency risk and Merk,* Continental Bank Journal of Applied Corporate Fnance 2, pp. 19-28.

Lintner, J. (1965). "The valuation of risk asset and the selection of risk investiment in stock portfolios and capital budgest". The Rewiew of Economics and Statistics, Febrero, pp. 13-37.

Lintner, J. (1969). "The aggregation of investor´s diverse judgments and preferences in purely competitive security market", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Diciembre, pp. 347-400.

Macaulay, R. F. (1938). *The Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856,* National Bureau of Economic Research, New York.

Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection", Journal of Finance, 7, 77-91. (Se puede consultar la versión en castellano: "Selección de carteras", Cuadernos del ICE, Enero de 1991, pp. 11-19.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient diversification of investiment*, Yale University Press.

Mayers, D. (1972). "Non-marketable assets and the capital market equilibrium under uncertainty", Studies in the Theory of Capital Markets, pp. 223-248.

Merton, R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", The Bell Journal of Economics and Mangement Science, 4, pp. 141-183.

Nawalkha, S. K. y Chambers, D. R. (1997). "The M-Vector Model: Derivation and testing of Extensions to M-Square. Near-perfect immunization against non-parallel interest rate shifts". The Journal of Portfolio Management, 23, pp. 92-97.

Modigliani, F., y Modigliani, L. (1997). "Risk-adjuste performance. How to measure it and why", The Journal of Portfolio Management, 23, pp. 45-54.

Mossin, J. (1966). "Equilibrium in a capital asset market", Econometrica, Octubre, pp. 768-783.

Navarro, E. y Nave, J. M. (2001). "The structure of spot rates and immunization: Some further results". Economic Review. 3, pp. 273-294.

Nowman, K. B. (1997). "Gaussian Estimation of single-factor Continuous Time Models of The Term Structure of Interest Rates", The Journal of Finance 52, pp. 1695–1706.

Ross, S. (1976). "The arbitrage theory of capital asset pricing", Journal of Economic Theory, 13, pp. 341-360.

Ross, S. (1978). "Mutual fund separation in financial theory: The separation distributions", Journal of Economic Theory, 17, pp. 254-286.

Ruiz, F. (2005). *Opciones y Futuros,* Seminario del Departamento de Organización Industrial y Gestión de Empresas de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla.

Ruiz, G., Jiménez, J. I. y Torres J.J. (2000). *La gestión del riesgo financiero*, Ediciones Pirámide.

Sharpe, W. F. (1963). "A simplified model for porfolio analysis", Management Science, 9, pp. 277-293.

Sharpe, W. F. (1964). "Capital asset prices: a theory of capital market equilibrium under conditions of risk", Journal of Financice, 19, 425-442. (Se puede consultar una versión en castellano del artículo original: "Los precios de los bienes de capital: Una teoría del equilibrio de mercado bajo condiciones de riesgo", Cuadernos del ICE, pp. 20-30.

Sharpe, W. F. (1996). “Mutual fund performance”, Journal of Business, Supplement on Security Prices, 39, pp. 119-138.

Tobin, J. (1958). “Liquidity preference as behavior towards risk”, Review of Economic Studies, Febrero, pp. 65-86.

Treynor, J. L. (1966). “How to rete management investment funds” Harvard Business Review, Enero-Febrero, 43, pp. 63-75.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1947). *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press. Princeton.

Yuh Dauh Lyuu (2002). *Financial Engineering and Computation*, Cambridge University Press.