2. Complejo simplicial del grafeno

La red hexagonal queda definida por sus vectores básicos $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ (véase figura 2). Haciendo uso del esquema del complejo simplicial, en el que se especifica la convención de orientaciones entre las dos 0-celdas, las tres 1-celdas y la única 2-celda (véase (Ariza y Ortiz, 2005) para una más extensa introducción a la interpretación de estos esquemas, o bien (Munkres, 1984))las escribimos las reglas que determinan los operadores de contorno y co-contorno.
We also can align several equations:

$$
\begin{aligned}
\partial e_1(l,1) =& e_0(l,1) - e_0(l+\varepsilon_2,2) && \text{(3a)}\\
\partial e_1(l,2) =& e_0(l,1) - e_0(l,2) && \text{(3b)}\\
\partial e_1(l,3) =& e_0(l,1) - e_0(l+\varepsilon_3,2) && \text{(3c)}\\
\partial e_2(l) =& -e_1(l,1) - e_1(l+\varepsilon_1,3) + e_1(l+\varepsilon_1,2) \\
& +e_1(l-\varepsilon_3,1) - e_1(l-\varepsilon_3,3) + e_1(l,2) && \text{(3d)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial e_1(l,1) =& e_0(l,1) - e_0(l+\varepsilon_2,2) && \text{(4a)}\\
\partial e_1(l,2) =& e_0(l,1) - e_0(l,2) && \text{(4b)}\\
\partial e_1(l,3) =& e_0(l,1) - e_0(l+\varepsilon_3,2) && \text{(4c)}\\
\partial e_2(l) =& -e_1(l,1) - e_1(l+\varepsilon_1,3) + e_1(l+\varepsilon_1,2) \\
& +e_1(l-\varepsilon_3,1) - e_1(l-\varepsilon_3,3) + e_1(l,2) && \text{(4d)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta e^0(l,1) =& e^1(l,1) + e^1(l,2) + e^1(l,3) && \text{(5a)}\\
\delta e^0(l,2) =& -e^1(l,2) - e^1(l-\varepsilon_3,2) - e^1(l-\varepsilon_2,3) && \text{(5b)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta e^1(l,1) &= -e^2(l) + e^2(l+\varepsilon_3) && \text{(6a)}\\
\delta e^1(l,2) &= e^2(l) - e^2(l-\varepsilon_1) && \text{(6b)}\\
\delta e^1(l,3) &= e^2(l-\varepsilon_1) - e^2(l+\varepsilon_3) && \text{(6c)}
\end{aligned}
$$

Donde se ha tenido en cuenta que $\varepsilon_1 = (1,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1)$ y $\varepsilon_3 = (-1,1)$. De las anteriores reglas se sigue la representación del complejo simplicial mediante sus transformadas de Fourier discretas, a saber:

$$
Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -e^{-i\theta_2} & -1 & -e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{pmatrix} \tag{7}
$$

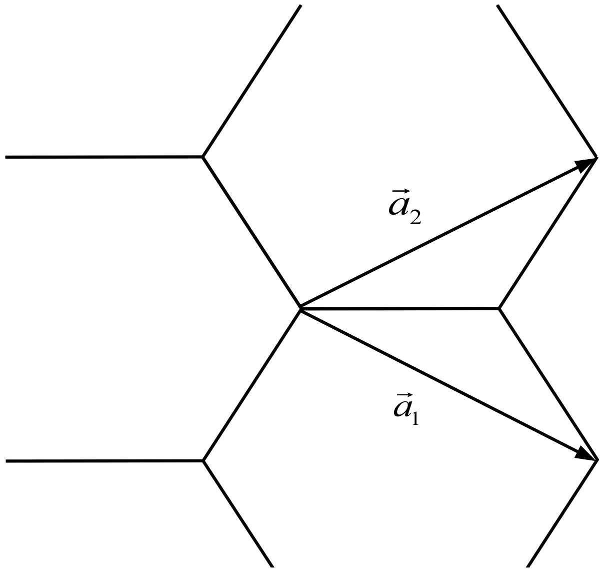

Figura 2: Vectores básicos de la red hexagonal.

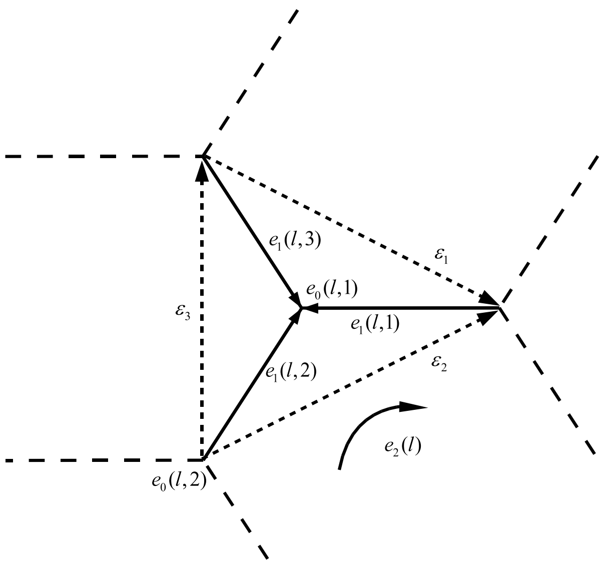

Figura 3: Esquema del complejo simplicial del grafeno.

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -1 + e^{i(\theta_2-\theta_1)} \\ 1 - e^{-i\theta_1} \\ e^{-i\theta_1} - e^{i(\theta_2-\theta_1)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-i\theta_2} \\ 1 & -1 \\ 1 & -e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 + e^{i(\theta_1-\theta_2)} & 1 - e^{i\theta_1} & e^{i\theta_1} - e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{pmatrix} \tag{10}$$

En cuya obtención se ha tenido en cuenta que $\theta_3 = \theta_2 - \theta_1$.