Capítulo 3

Expresión explícita de la derivada de la Función de Green para sólidos magnetoelectroelásticos anisótropos

En este capítulo se derivan expresiones explícitas de las derivadas de la solución fundamental en desplazamientos siguiendo las ideas de Lee (2003) para sólidos elásticos. Este enfoque combina el formalismo de Stroh extendido con la teoría de residuos de Cauchy. Las expresiones obtenidas son válidas para materiales magnetoelectroelásticos con anisotropía general. El capítulo finaliza con algunos comentarios y expresiones genéricas para calcular las soluciones fundamentales en tracciones utilizando la notación extendida.

Expresión integral de la derivada de la función de Green

Teniendo en cuenta la expresión integral (2.21) de la función de Green, su derivada con respecto a x_m es

$$U_{JK,m}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial x_m}\int_{|\mathbf{d}|=1}\Gamma^{-1}_{JK}(\mathbf{d})\,\delta(\mathbf{d}\cdot\mathbf{x})\,d\Omega(\mathbf{d}) \tag{3.1}$$

Tras algunas manipulaciones se puede expresar la derivada primera de la función de Green como una integral sobre una circunferencia unitaria definida en el plano normal al vector posición

$$U_{JK,m} = \frac{-1}{8\pi^2 r^2}\oint_{|\mathbf{n}^*|=1}\left[\hat{e}_m\Gamma^{-1}_{JK}(\mathbf{n}^*) + n^*_m\left(\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial n^*_i}\Gamma^{-1}_{JK}(\mathbf{n}^*)\right)\right]dS(\mathbf{n}^*) \tag{3.2}$$

que al definir $F_{JK} \overset{def}{=} \hat{e}_i\dfrac{\partial\Gamma^{-1}_{JK}}{\partial n^*_i}$ podemos reescribir como

$$U_{JK,m} = \frac{-1}{8\pi^2 r^2} \oint_{|\mathbf{n}^*|=1} \left[\hat{e}_m \Gamma_{JK}^{-1}\left(\mathbf{n}^*\right) + n_m^* F_{JK} \right] dS\left(\mathbf{n}^*\right) \tag{3.3}$$

A diferencia de otros posibles enfoques estas expresiones no contienen derivadas con respecto a x_m que llevan en general a complicadas derivadas sino que la diferenciación es realizada directamente sobre el argumento de la función $\left(\mathbf{n}^*\right)$. Así, teniendo en cuenta $\Gamma_{PK}^{-1}\Gamma_{KM} = \delta_{PM}$ se tiene

$$\frac{\partial \Gamma_{PK}^{-1}}{\partial n_i^*}\Gamma_{KM} + \Gamma_{PK}^{-1}\frac{\partial \Gamma_{KM}}{\partial n_i^*} = 0$$

$$\frac{\partial \Gamma_{PK}^{-1}}{\partial n_i^*}\delta_{KJ} = -\Gamma_{PK}^{-1}\frac{\partial \Gamma_{KM}}{\partial n_i^*}\Gamma_{MJ}^{-1}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{PJ}^{-1}}{\partial n_i^*} = -\Gamma_{PK}^{-1}\frac{\partial \Gamma_{KM}}{\partial n_i^*}\Gamma_{MJ}^{-1} = -\Gamma_{PK}^{-1}\Gamma_{MJ}^{-1}C_{jKMs}\frac{\partial}{\partial n_i^*}\left(n_j^* n_s^*\right)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{PJ}^{-1}}{\partial n_i^*} = -\Gamma_{PK}^{-1}\Gamma_{MJ}^{-1}C_{jKMs}\left[\delta_{ij}n_s^* + n_j^*\delta_{is}\right] \tag{3.4}$$

Recordando la definición de F_{PJ} se tiene

$$F_{PJ} = -\Gamma_{PK}^{-1}\Gamma_{MJ}^{-1}C_{jKMs}\left[\hat{e}_j n_s^* + \hat{e}_s n_j^*\right] \tag{3.5}$$

Teniendo en cuenta que el núcleo integral tiene una periodicidad de π (Barnett (1972)), la derivada de la función de Green se expresa en función del parámetro ψ como

$$U_{JK,m} = \frac{1}{4\pi^2 r^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\hat{e}_m\Gamma_{JK}^{-1} + n_m^* F_{JK}\right] d\psi \tag{3.6}$$

Una expresión equivalente fue encontrada por primera vez por Barnett (1972) para medios elásticos utilizando la transformada de Fourier, por Deeg (1980), Chen (1993) para sólidos piezoeléctricos y en este trabajo es presentada para materiales magnetoelectroelásticos a partir de resultados obtenidos con la transformada de Radon. La expresión (3.6) ha sido utilizada para evaluar numéricamente la derivada de la función de Green en el trabajo de Barnett (1972) con un esquema de integración de Romberg. Para materiales piezoeléctricos ha sido implementada en Chen & Li (1993) y en Sanz et al. (2005) junto al Método de los Elementos de Contorno utilizando cuadratura estándar de Gauss.

Expresión explícita de la derivada de la función de Green

Se define la integral

$$M_{ijKLMN} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} n_i^* n_j^* \Gamma_{KL}^{-1} \Gamma_{MN}^{-1} \, d\psi \tag{3.7}$$

luego (3.6) toma la forma

$$U_{PJ,q} = \frac{1}{4\pi^2 r^2} \left[-\pi \hat{e}_q H_{PJ} + C_{jKMs} \left(M_{qsPKMJ} \hat{e}_j + M_{qjPKMJ} \hat{e}_s \right) \right] \tag{3.8}$$

Siguiendo Lee (2003), en este trabajo se propone realizar la integración de M_{qsPKMJ} por medio de la teoría de residuos de Cauchy. Para esto, del mismo modo que para la función de Green se introduce el cambio de variable $p = \tan\psi$. Se tiene que $\mathbf{\Gamma}^{-1}(\psi) = \frac{1}{\cos^2\psi} \mathbf{\Gamma}^{-1}(p)$, $\cos^2\psi dp = d\psi$, $n_i^*(\psi) n_j^*(\psi) = \cos^2\psi \, B_{ij}(p)$ y definiendo $B_{ij}(p) = n_i n_j + (n_i m_j + n_j m_i) p + m_i m_j p^2$,

$$M_{ijKLMN} = \frac{1}{|\mathbf{T}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{ij}(p) \widehat{\Gamma}_{KL}(p) \widehat{\Gamma}_{MN}(p)}{\prod_{\gamma=1}^{5} \left[(p - p_\gamma)(p - \bar{p}_\gamma) \right]^2} dp \tag{3.9}$$

Introduciendo la función

$$\Phi_{ijKLMN}(p) \overset{def}{=} \frac{B_{ij}(p) \hat{\Gamma}_{KL}(p) \hat{\Gamma}_{MN}(p)}{(p - \bar{p}_1)^2 (p - \bar{p}_2)^2 (p - \bar{p}_3)^2 (p - \bar{p}_4)^2 (p - \bar{p}_5)^2} \tag{3.10}$$

la cual no tiene polos, M_{qsPKMJ} es reescrita como

$$M_{ijKLMN} = \frac{1}{|\mathbf{T}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{ijKLMN}(p)}{(p - p_1)^2 (p - p_2)^2 (p - p_3)^2 (p - p_4)^2 (p - p_5)^2} dp \tag{3.11}$$

El núcleo de esta integral tiene cinco polos dobles (los autovalores de Stroh) p_α que corresponden a las raíces de la ecuación característica $|\Gamma(p)|^2 = 0$. Aplicando el teorema de residuos de Cauchy, una expresión explícita de M_{qsPKMJ} es dada como la sumatoria de los residuos del núcleo de M_{qsPKMJ} en los polos p_α de $(p - p_1)^2 (p - p_2)^2 (p - p_3)^2 (p - p_4)^2 (p - p_5)^2$ obteniéndose

$$M_{ijKLMN} = \frac{2\pi\Im}{|\mathbf{T}|^2} \sum_{\alpha=1}^{5} \mathrm{Res}(p_\alpha) \tag{3.12}$$

Debido a que p_α es un polo doble el residuo es calculado según

$$\operatorname{Res}(p_\alpha)=\frac{d}{dp}\left\{\frac{B_{ij}(p)\,\hat{\Gamma}_{KL}(p)\,\hat{\Gamma}_{MN}(p)}{(p-\overline{p}_\alpha)^2\prod\limits_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{5}\left[(p-\overline{p}_\beta)(p-\overline{p}_\beta)\right]^2}\right\}\Bigg|_{p=p_\alpha} \tag{3.13}$$

resultando

$$\operatorname{Res}(p_\alpha)=\mathrm{A}(p_\alpha)\left\{\frac{d}{dp}\Phi_{ijKLMN}(p_\alpha)-2\Phi_{ijKLMN}(p_\alpha)\mathrm{B}(p_\alpha)\right\} \tag{3.14}$$

donde

$$\mathrm{A}(p_\alpha)\overset{def}{=}\frac{1}{(p_\alpha-p_{\alpha+1})^2(p_\alpha-p_{\alpha+2})^2(p_\alpha-p_{\alpha+3})^2(p_\alpha-p_{\alpha+4})^2} \tag{3.15}$$

$$\mathrm{B}(p_\alpha)\overset{def}{=}\frac{1}{p_\alpha-p_{\alpha+1}}+\frac{1}{p_\alpha-p_{\alpha+2}}+\frac{1}{p_\alpha-p_{\alpha+3}}+\frac{1}{p_\alpha-p_{\alpha+4}} \tag{3.16}$$

y $p_6=p_1$, $p_7=p_2$, $p_8=p_3$ y $p_9=p_4$. Finalmente las derivadas de la función de Green son presentadas de una forma análoga a (2.38) como

$$U_{PJ,q}(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi r^2}\widetilde{U}_{PJ,q}(\hat{\mathbf{e}}) \tag{3.17}$$

donde la función de modulación propuesta en este trabajo es

$$\widetilde{U}_{PJ,q}=\left[-\hat{e}_q H_{PJ}+\frac{C_{jKMs}}{\pi}\left(M_{qsPKMJ}\hat{e}_j+M_{qjPKMJ}\hat{e}_s\right)\right] \tag{3.18}$$

y solo depende de la orientación de $\hat{\mathbf{e}}$ y no de r. Es importante mencionar que expresiones explícitas para las derivadas de la función de Green en sólidos magnetoelectroelásticos solo han sido obtenidas para materiales transversalmente isótropos (Soh (2003), Hou (2005)). Para casos de anisotropía general, solo evaluación numérica mediante diferencias finitas ha sido reportada en la literatura (Pan (2002)). Expresiones explícitas para materiales anisótropos magnetoelectroelásticos son presentadas por primera vez en este trabajo.

Algunos comentarios

Debido a que la matriz adjunta $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}$ es simétrica, los subíndices en mayúscula en M_{qsPKMJ} son intercambiables, es decir se cumple $M_{qsPKMJ} = M_{qsMJPK} = M_{qsKPMJ} = M_{qsPKJM}$. También se observa que la matriz B_{ij} es simétrica resultando la simetría adicional $M_{qsPKMJ} = M_{sqPKMJ}$. Estas simetrías permiten reducir considerablemente las componentes M_{qsPKMJ} que precisan ser calculadas. En el caso elástico puro existen 729 componentes M_{qspkmj} las cuales son reducidas a 126 componentes distintas y permiten calcular las 18 componentes del tensor de derivadas $U_{pj,q}$. Para el caso acoplado, M_{qsPKMJ} representa 5625 componentes de las cuales solo 720 son distintas y permiten calcular las 45 componentes del tensor de derivadas $U_{PJ,q}$. Por otro lado, las posibles simetrías del tensor constitutivo extendido C_{jKMs} reducen los términos en el sumatorio $C_{jKMs}\left(M_{qsPKMJ}e_j + M_{qjPKMJ}e_s\right)$ de la Ec. (3.8) dependiendo de los $C_{jKMs} \neq 0$.

Finalmente, nótese que el factor $|\mathbf{T}|$ en M_{ijKLMN} correspondiente al coeficiente de la potencia p^{10} en la factorización de $\left|\Gamma(p)\right|$ es omitido en el trabajo de Lee (2003).

Tensor de tracciones

En aplicaciones como en el Método de los Elementos de Contorno es necesario evaluar las soluciones fundamentales en tracciones. A partir del tensor de derivadas de la función de Green se puede obtener el tensor de tensiones extendido de acuerdo a la ley constitutiva. $\Xi_{iJK} = C_{iJMl}U_{MK,l}$ denota el campo de tensiones extendidas σ_{iJ} cuando una carga puntual es aplicada en el origen y en la dirección K en el sentido extendido. De acuerdo al lema de Cauchy, el tensor de tracciones extendido T_{JK} (solución fundamental en tracciones) producido por una carga puntual en la dirección K en el sentido extendido viene dado por $T_{JK} = C_{iJMl}U_{MK,l}n_i$ donde n_i es la componente en la dirección x_i de la normal al plano donde la tracción es considerada.