Capítulo 1

Introducción

Introducción

La utilización de materiales compuestos con acoplamiento magnetoelectroelástico ha ido creciendo de forma considerable en los últimos años. Una variedad de cristales y materiales compuestos poseen simultáneamente un efecto piezoeléctrico, piezomagnético y magnetoelectroelástico, los cuales son llamados medios magnetoelectroelásticos. El desarrollo de estos materiales tiene su raíz en el trabajo pionero de Van Suchtelen (1972) quien propone que la combinación de una fase piezoeléctrica con una piezomagnética exibe una propiedad material nueva, el efecto de acoplamiento magnetoeléctrico. En algunos casos el efecto magnetoeléctrico de esta combinación de fases puede resultar hasta cien veces mayor al observado en un material magnetoeléctrico natural. Este acoplamiento significativo hace que estos materiales compuestos sean especialmente atractivos para ciertas aplicaciones prácticas, en particular para el diseño de sistemas de estructuras *activas* o *inteligentes*. Aplicaciones típicas son transductores, sensores magnéticos, actuadores acústicos, tecnología de imágenes y muchas más.

Estos materiales suelen fabricarse de forma sintética. Para obtener efectos piezoeléctricos y piezomagnéticos, es necesario inducir ciertas asimetrías en las estructuras cristalinas. El propio proceso de polarización, con la reorganización que provoca en la estructura interna del material, es la primera causa de la aparición de defectos en su seno. Por tanto, la coexistencia de fases de dos materiales con distintas propiedades mecánicas y el proceso de polarización, unido a la fragilidad inherente a este tipo de sólidos, justifica el desarrollo de herramientas numéricas que permitan caracterizar la integridad de estas estructuras inteligentes.

Las funciones de Green $(\mathbf{U})$ y sus derivadas juegan un rol importante en la solución de numerosos prolemas de mecánica y física del sólido. Por ejemplo son utilizadas como solución auxiliar en el Método de los Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia & Dominguez (1992), Balás et al. (1989) y París & Cañas (1997), entre otros), para evaluar el campo elástico y la energía asociada a una autodeformación en prolemas de inhomogeneidades, (Mura (1987)) o en estudio de problemas de dislocaciones (Hirth & Lothe (1982)). Este trabajo investiga la posibilidad de evaluar de forma explícita la función de Green y su derivada para medios anisótropos con acoplamiento magnetoelectroelástico con la motivación de resolver problemas de fractura mediante el MEC.

Revisión bibliográfica

Los materiales magnetoelectroelásticos son en general anisótropos. El problema de evaluar funciones de Green estáticas en tres dimensiones (3D) en estos materiales guarda notable cercanía con el problema relativo a sólidos puramente elásticos anisótropos, el cual ha recibido mucha atención durante décadas. Fredholm (1900) demuestra que la función de Green es reducible a una integral en una dimensión sobre un círculo unitario a través de la transformada de Fourier, obteniendo una solución implícita de $\mathbf{U}$. Soluciones explícitas han sido presentadas en el trabajo de Lifshitz & Rozenzweig (1947) utilizando la teoría de residuos de Cauchy. Estas expresiones resultan en términos de las raíces de una ecuación característica de sexto orden, llamadas actualmente autovalores de Stroh (Ting (1996)). Malen (1971) expresa $\mathbf{U}$ en términos de los autovalores normalizados de Stroh y Nakamura & Tanuma (1997) obtienen una fórmula en función de los autovalores y autovectores de Stroh. A partir de esta fórmula una expresión explícita para sólidos transversalmente isótropos es derivada. En el mismo año, Ting & Lee (1997) deducen expresiones explícitas genéricas y válidas para casos matemáticamente degenerados en función de los autovalores de Stroh. Obtener expresiones explícitas de las raíces complejas de la mencionada ecuación característica implica obtener expresiones analíticas explícitas en función de las constantes del material y por supuesto de la posición. De acuerdo al trabajo de Head (1979), ninguna solución general en radicales de esta ecuación es posible, por lo que aparentemente una expresión analítica completamente explícita para cualquier clase de anisotropía no podría ser desarrollada. En Ting & Lee (1997) se presentan algunos casos particulares donde esta ecuación puede ser resuelta. En particular, se obtienen expresiones genéricas (sin importar casos de degeneración), compactas y explícitas para materiales con simetría transversamente isótropa. Recientemente, Távara et al. (2008) han utilizado estas expresiones para derivar de forma explícita y con validez para casos degenerados las expresiones para la solución fundamental en tracciones (derivadas de la función de Green). Estas soluciones son implementadas en un código de Elementos de Contorno (MEC). Partiendo de expresiones integrales desarrolladas por Barnett (1972) y aplicando teoría de residuos de Cauchy, Lee (2003) deduce nuevas expresiones analíticas generales para las derivadas de primer y segundo orden de $\mathbf{U}$ en términos de los autovalores de Stroh. Por otro lado, se pueden obtener funciones de Green a partir del enfoque por funciones potenciales (Elliot (1948), Fabrikant (1989)). Pan & Chou (1976), Hanson (1998) y Pouya (2007) han aplicado esta teoría para obtener expresiones explícitas en materiales transversalmente isótropos. Otros procedimientos de evaluación numérica para las funciones de Green han sido propuestos. Sales & Gray (1998), Phan et al. (2004) y Phan et al. (2005) presentan un enfoque a través del cálculo de residuos para evaluar $\mathbf{U}$ y sus derivadas para materiales con anisotropía general. Todos los casos de degeneración matemática son cubiertos en este enfoque. Tonon et al. (2001) presentan una implementación numérica de la solución teórica para $\mathbf{U}$ de Wang (1997) y para la derivada aplican un esquema de diferencias finitas. Estas soluciones son empleadas en un MEC anisótropo.

Muchos de los procedimientos mencionados han sido extendidos para medios piezoeléctricos, piezomagnéticos y magnetoelectroelásticos anisótropos. Deeg (1980), Chen (1993) y Chen & Lin (1993) han expresado $\mathbf{U}$ y sus derivadas para materiales piezoeléctricos en términos de una integral unidimensional. Utilizando formalismo de Stroh extendido, Akamatsu & Tanuma (1997) han obtenido una formula algebraica para $\mathbf{U}$ de materiales piezoeléctricos anisótropos en función de los autovectores generalizados. Esta fórmula es aplicada a materiales con simetría hexagonal 622 y expresiones explícitas son obtenidas en este caso. El trabajo de Tonon et al. (2001) es extendido al caso piezoeléctrico anisótropo en Pan & Tonon (2000). Nuevamente un esquema de diferenciación numérica es utilizado para el cómputo de las derivadas. Por medio de la teoría de funciones potenciales, Dunn & Wienecke (1996) obtienen expresiones explícitas para $\mathbf{U}$ y su derivada en medios piezoeléctricos transversalmente isótropos. Recientemente, a partir de la solución de Dunn & Wienecke (1996), Solís (2007) deriva explícitamente las derivadas de segundo orden y las implementa en una formulación hipersingular 3D de MEC para resolver problemas de fractura. Sanz et al. (2005) proponen utilizar una expresión integral y cuadratura estándar de Gauss en una formulación MEC. En cuanto a materiales magnetoelectroelásticos, Wang & Shen (2002) obtienen la solución general para materiales transversalmente isótropos en el contexto de funciones potenciales y la aplican para derivar la función de Green de un semiespacio y una dislocación generalizada. Una solución general equivalente es presentada en Liu et al. (2003). En la misma línea, Soh et al. (2003) obtienen soluciones explícitas para materiales transversalmente isótropos y Hou et al. (2005) consideran los posibles casos degenerados. En ambos casos se presentan soluciones de la derivada primera. Pan (2002) presenta la única expresión explicíta para materiales magnetoelectroelásticos anisótropos en términos de los autovalores de Stroh. Se debe mencionar que al momento de la realización de este trabajo el autor no tiene conocimiento que haya sido obtenida una expresión explícita de la derivada de la función de Green en materiales anisótropos magnetoelectroelásticos.

Objetivos del trabajo

Con el objetivo final de desarrollar una formulación de elementos de contorno 3D que permita modelar problemas de mecánica de la fractura en materiales que presentan un comportamiento acoplado de naturaleza magnética y eléctrica en un medio elástico, este trabajo plantea los siguientes objetivos:

- Implementar una solución explícita de la función de Green en sólidos magnetoelectroelásticos válida para cualquier clase de simetría elástica del material.
- Proponer e implementar un procedimiento de evaluación numérica y explícita de la derivada de primer orden de la función de Green a partir de extender la formulación de Lee (2003) para sólidos anisótropos puramente elásticos.

Estructura del trabajo

Este trabajo está estructurado en cinco capítulos siendo el primero de ellos la presente introducción. El Capítulo 2 consiste de una breve revisión de los fundamentos de la teoría de mecánica del continuo de primer orden para sólidos magnetoelectroelásticos. Se plantea el problema a resolver y se presenta una expresión de $\mathbf{U}$ análoga a la derivada en Pan (2002) siguiendo una metodología alternativa (Ting & Lee (1997)) como es propuesto en el mismo trabajo de Pan (2002).

Una nueva expresión para la derivada de la función de Green es presentada en el Capítulo 3. Debido a su interés en el Método de los Elementos de Contorno se presentan las soluciones fundamentales en tracciones para sólidos magnetoelectroelásticos a través de la correspondiente ley constitutiva.

En el Capítulo 4 se presenta una validación numérica de las funciones obtenidas aplicadas a sólidos con simetría transversalmente isótropa. Algunas recomendaciones para su implementación son añadidos.

Finalmente, el Capítulo 5 expone las principales conclusiones y sugiere algunos tópicos y recomendaciones para la continuación del presente trabajo.