

Capítulo 2

Función de Green en tres dimensiones para sólidos magnetoelastóicos anisótropos

En este capítulo se introduce la notación utilizada en el resto del trabajo y se plantea el problema a resolver. La función de Green para sólidos anisótropos magnetoelastóicos en tres dimensiones es derivada en Pan (2002) utilizando la transformada de Radon, el formalismo de Stroh generalizado y la teoría de residuos. De forma alternativa, en este trabajo son desarrolladas expresiones similares a las de Pan (2002) siguiendo el trabajo de Ting & Lee (1997) para materiales anisótropos elásticos.

Ecuaciones básicas de la magnetoelastóicidad lineal

Se adopta un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional $\{x_i\}$ con $i = 1-3$. Las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de Maxwell bajo la hipótesis de campos magnéticos y eléctricos cuasiestáticos vienen dadas por

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.1)$$

$$D_{i,i} = f^e \quad (2.2)$$

$$B_{i,i} = f^m \quad (2.3)$$

donde σ_{ij} , D_i y B_i son las componentes del tensor de tensiones, del tensor de desplazamientos eléctricos y del tensor de inducciones magnéticas, respectivamente; y f_i , f^e y f^m son las tres componentes de las fuerzas de volumen, la densidad de carga eléctrica y la densidad de corriente eléctrica (o también llamada carga magnética en comparación con la carga eléctrica), respectivamente. Se define el tensor de deformaciones infinitesimales como

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

donde u_i es el campo de desplazamientos y los campos eléctrico E_i y magnético H_i como

$$E_i = -\phi_{,i}; \quad H_i = -\vartheta_{,i} \quad (2.5)$$

siendo ϕ y ϑ los potenciales eléctrico y magnético, respectivamente.

Las ecuaciones (2.1)-(2.5) están acopladas a través de la ley constitutiva lineal

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{ij}E_l - q_{ij}H_l \quad (2.6)$$

$$D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \epsilon_{ij}E_l + \lambda_{ij}H_l \quad (2.7)$$

$$B_i = q_{ikl}\gamma_{kl} + \lambda_{ij}E_l + \mu_{ij}H_l \quad (2.8)$$

donde c_{ijkl} , ϵ_{ij} y μ_{ij} denotan las componentes del tensor de constantes elásticas, del tensor de permitividad dieléctrica y del tensor de permitividad magnética, respectivamente; e_{ij} , q_{ikl} y λ_{ij} son las componentes del tensor piezoeléctrico, del tensor piezomagnético y del tensor magnetoeléctrico, respectivamente. Se observa que diversos casos desacoplados pueden ser estudiados a partir de anular de forma apropiada las componentes que correspondan en las Ecs. (2.6-2.8). Así los resultados obtenidos a lo largo del trabajo y que tienen validez para el caso completamente acoplado magnetoelástico pueden ser particularizados para los casos elástico puro, piezoeléctrico, piezomagnético o magnetoeléctrico. Los tensores introducidos presentan las siguientes simetrías

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{jikl}, & c_{ijkl} &= c_{ijmk}, & c_{ijkl} &= c_{klij} \\ e_{kij} &= e_{kji}, & q_{kij} &= q_{kji}, & \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ji}, & \lambda_{ij} &= \lambda_{ji}, & \mu_{ij} &= \mu_{ji} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Adicionalmente, el tensor de constantes elásticas y de permitividades dieléctricas y magnéticas son definidos positivos, es decir, se cumple

$$c_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{km} > 0, \quad \epsilon_{ij}E_iE_j > 0, \quad \mu_{ij}H_iH_j > 0 \quad \forall \gamma_{km} = \gamma_{mk}, E_j, H_j \neq 0 \quad \wedge \in \mathfrak{R} \quad (2.10)$$

En este trabajo se hace uso de la notación extendida introducida por Barnett & Lothe (1975) para materiales piezoeléctricos. Se definen los *desplazamientos extendidos* u_j

$$u_j = \begin{cases} u_j & j \leq 3 \\ \phi & j = 4 \\ \vartheta & j = 5 \end{cases} \quad (2.11)$$

las *tensiones extendidas* σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij} & J \leq 3 \\ D_i & J = 4 \\ B_i & J = 5 \end{cases} \quad (2.12)$$

y el *tensor de coeficientes elásticos extendido* tiene las siguientes componentes

$$C_{iJKm} = \begin{cases} c_{ijkm} & J, K \leq 3 \\ e_{mij} & J \leq 3; K = 4 \\ e_{ikm} & J = 4; K \leq 3 \\ q_{mij} & J \leq 3; K = 5 \\ q_{ikm} & J = 5; K \leq 3 \\ -\lambda_{im} & J = 4; K = 5 \text{ o } J = 5; K = 4 \\ -\varepsilon_{im} & J, K = 4 \\ -\mu_{im} & J, K = 5 \end{cases} \quad (2.13)$$

que en virtud de las simetrías (2.9) se cumple que $C_{iJKm} = C_{mKJi}$. En las definiciones presentadas arriba, los subíndices con minúsculas varían de 1-3 mientras que los subíndices en mayúsculas varían de 1-5. Con esta notación introducida, la ley constitutiva Ecs. (2.6-2.8) puede ser unificada como

$$\sigma_{ij} = C_{iJKm} u_{K,m} \quad (2.14)$$

que guarda el mismo aspecto a la conocida ley tensorial de comportamiento elástico. De la misma forma la ecuación de equilibrio (Ecs. (2.1-2.3)) puede ser expresada como

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0 \quad (2.15)$$

con la definición de *fuerza de volumen extendida*

$$f_J = \begin{cases} f_j & J \leq 3 \\ -f_e & J = 4 \\ -f_m & J = 5 \end{cases} \quad (2.16)$$

Formulación del problema

Una función de Green es una solución básica a una ecuación diferencial lineal. En general, las funciones de Green dependen de la ecuación diferencial, del dominio del problema y del tipo de condiciones de contorno.

Considérese un medio continuo, homogéneo e infinito en el espacio tridimensional (\mathcal{R}^3) con comportamiento anisótropo magnetoelástico lineal. Sea $\delta(\mathbf{x})$ la función delta de Dirac centrada en el origen de un sistema cartesiano fijo en el espacio $\{x_i\}$ y δ_{JK} la delta de Kronecker de quinto orden. En este trabajo se define a la función de Green como el tensor de segundo orden en un espacio de cinco dimensiones U_{JK} tal que satisface las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (*ecuaciones de equilibrio de Navier extendidas*) que resultan de combinar las Ecs. (2.14), (2.15), (2.4) y (2.5) con las definiciones (2.11) y (2.12)

$$C_{iJKm}U_{KP,mi}(\mathbf{x}) - \delta_{JP}\delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.17)$$

donde la fuerza de volumen es reemplazada por la función $f_J = \delta_{JP}\delta(\mathbf{x})$. Físicamente la función de Green $U_{KP}(\mathbf{x})$ representa el desplazamiento en la dirección K (en el sentido extendido), en un punto $\mathbf{x} \neq 0$ de un medio infinito debida a la aplicación de una fuerza puntual en el origen en la dirección P (en el sentido extendido también). Luego la función $U_{KP}(\mathbf{x})$ es:

-(i) el desplazamiento elástico en el punto \mathbf{x} en la dirección x_K , $K = 1..3$ debido a (i.a) una fuerza mecánica unitaria en el origen en la dirección x_P , $P = 1..3$; debido a (i.b) a una carga eléctrica puntual $P = 4$ o debido a (i.c) una carga magnética puntual $P = 5$.

-(ii) el potencial eléctrico en el punto \mathbf{x} , $K = 4$ debido a (ii.a) una fuerza mecánica unitaria en el origen en la dirección x_P , $P = 1..3$; debido a (ii.b) a una carga eléctrica puntual $P = 4$ o debido a (ii.c) una carga magnética puntual $P = 5$.

-(iii) el potencial magnético en el punto \mathbf{x} , $K = 5$ debido a (iii.a) una fuerza mecánica unitaria en el origen en la dirección x_P , $P = 1..3$; debido a (iii.b) a una carga eléctrica puntual $P = 4$ o debido a (iii.c) una carga magnética puntual $P = 5$.

Un comportamiento C_{iJKm} totalmente acoplado en los campos que actúan resulta en un tensor de Green completamente lleno (sin componentes nulas). Es decir, una fuerza mecánica induce un potencial magnético y eléctrico y una carga eléctrica o magnética produce un desplazamiento elástico.

Expresión integral de la función de Green

Para obtener la función de Green, un posible enfoque es a través del uso de la transformada de Radon (Wang & Achenbach (1995), Wang (1997) y Pan (2002), entre otros). En esta sección se presentan los resultados parciales de Pan (2002). En primer lugar se considera la siguiente representación plana de la función delta de Dirac

$$\delta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta \int_{\Omega} \frac{\delta(\mathbf{d} \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{d}|^2} d\Omega(\mathbf{d}) \quad (2.18)$$

donde $\Omega(\mathbf{d})$ es cualquier superficie cerrada en un espacio \mathbf{d} tridimensional que encierra el origen $\mathbf{d} = (0,0,0)$, Δ es el operador Laplaciano en tres dimensiones, es decir

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

y la integración se realiza sobre la superficie $\Omega(\mathbf{d})$. El punto “ \cdot ” denota producto interno entre vectores.

Considérese el tensor acústico de segundo orden cuyas componentes son $\Gamma_{JK} = C_{iJKm} d_i d_m$ y su inversa es bien definida. Integrando $\Gamma_{JK}^{-1}(\mathbf{d}) \delta(\mathbf{d} \cdot \mathbf{x})$ en el espacio \mathbf{d} , tomando la segunda derivada con respecto a x_i y multiplicando por C_{iJKq} se obtiene la siguiente identidad (Pan (2002))

$$C_{iJKq} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_q} \int_{\Omega} \Gamma_{JK}^{-1}(\mathbf{d}) \delta(\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{d}) = \delta_{JP} \int_{\Omega} \frac{\delta(\mathbf{d} \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{d}|^2} d\Omega(\mathbf{d}) \quad (2.19)$$

Utilizando Ec. (2.18) esta ecuación es reescrita como

$$C_{iJKq} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_q} \int_{\Omega} \Gamma_{JK}^{-1}(\mathbf{d}) \delta(\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{d}) = -8\pi^2 \delta_{JP} \delta(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

Comparando Ec. (2.20) con Ec. (2.17) se obtiene la siguiente representación integral para la función de Green extendida

$$U_{JK}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{d}|=1} \Gamma_{JK}^{-1}(\mathbf{d}) \delta(\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{d}) \quad (2.21)$$

donde la integración se realiza sobre una esfera unitaria.

Expresión explícita de la función de Green

Sea $\hat{\mathbf{e}}$ un vector unitario en la dirección de \mathbf{x} . Así, $|\mathbf{x}| = r$ y $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{e}}$ (ver Fig. 2.1). Sea \mathbf{n}^* un vector unitario en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}$ tal que $\mathbf{n}^* \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$. Luego \mathbf{d} puede ser descompuesta en $\mathbf{d} = a\mathbf{n}^* + b\hat{\mathbf{e}}$ donde

$$a = \sqrt{1-b^2} \quad (2.22)$$

y

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{x} = (a\mathbf{n}^* + b\hat{\mathbf{e}}) \cdot r\hat{\mathbf{e}} = rb \quad (2.23)$$

La expresión (2.21) es reescrita como (Wang & Achenbach (1995))

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2} \oint_{|\mathbf{n}^*|=1} \int_{-1}^1 \Gamma^{-1}(\sqrt{1-b^2}\mathbf{n}^* + b\hat{\mathbf{e}}) \delta(rb) db dS(\mathbf{n}^*) \quad (2.24)$$

que al realizar la integración con respecto a b toma la forma

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \oint_{|\mathbf{n}^*|=1} \Gamma^{-1}(\mathbf{n}^*) dS(\mathbf{n}^*) \quad (2.25)$$

donde Ec. (2.21) es transformada a una integral sobre una circunferencia de radio unitario.

El vector unitario \mathbf{n}_i^* sobre el plano oblicuo $\mathbf{n}_i^* \cdot \mathbf{x}_i = 0$ puede ser representado por (Ting & Lee (1997))

$$\mathbf{n}_i^* = n_i \cos\psi + m_i \sin\psi \quad (2.26)$$

donde ψ es un parámetro arbitrario, y n_i y m_i son las componentes de dos vectores unitarios mutuamente ortogonales tal que $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}, \hat{\mathbf{e}}\}$ forman una terna dextrógira. La Fig. 2.1 muestra un

esquema de una esfera de radio unitario centrada en el origen del sistema $\{x_i\}$ y los vectores \mathbf{x} , $\hat{\mathbf{e}}$, \mathbf{m} , \mathbf{n} y \mathbf{n}^* .

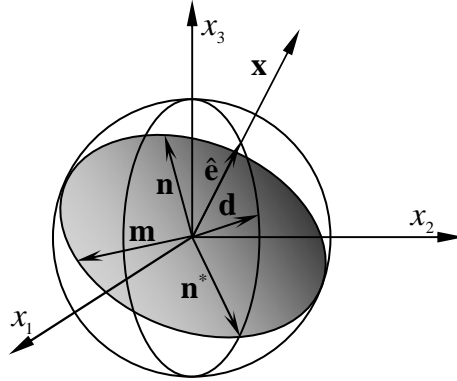


Figura 2.1 – Esquema de una esfera de radio unitario centrada en el origen del sistema $\{x_i\}$ y los vectores \mathbf{x} , $\hat{\mathbf{e}}$, \mathbf{m} , \mathbf{n} , \mathbf{d} y \mathbf{n}^* .

El tensor acústico $\Gamma_{JK}(\mathbf{n}^*)$ puede ser reescrito como (Ting & Lee (1997))

$$\Gamma_{JK}(\psi) = Q_{JK} \cos^2 \psi + (R_{JK} + R_{KJ}) \cos \psi \sin \psi + T_{JK} \sin^2 \psi \quad (2.27)$$

con

$$Q_{IK} = C_{iJKm} n_i n_m, \quad R_{IK} = C_{iJKm} n_i m_m, \quad T_{IK} = C_{iJKm} m_i m_m \quad (2.28)$$

La integral en la expresión (2.25) de la función de Green se puede expresar en función del parámetro ψ , luego teniendo en cuenta que $\Gamma(\psi)$ tiene una periodicidad de π tenemos

$$U_{JK}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} \Gamma_{JK}^{-1}(\psi) d\psi = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Gamma_{JK}^{-1}(\psi) d\psi \quad (2.29)$$

Introduciendo el cambio de variable $p = \tan \psi$ se tiene que $\Gamma^{-1}(\psi) = \frac{1}{\cos^2 \psi} \Gamma^{-1}(p)$ [†] y $\cos^2 \psi dp = d\psi$ obteniendo

$$U_{JK}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{JK}^{-1}(p) dp \quad (2.30)$$

[†] En la publicación del trabajo original de Ting & Lee (1997) existe una pequeña errata en la potencia del $\cos \psi$.

con

$$\Gamma_{JK}(p) = Q_{JK} + (R_{JK} + R_{KJ})p + T_{JK}p^2 \quad (2.31)$$

Se define la función de modulación (Wilson & Cruse (1978)), la cual depende solo de la orientación de \mathbf{x} y no de su módulo como

$$H_{JK}(\hat{\mathbf{e}}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{JK}^{-1}(p) dp \quad (2.32)$$

La matriz \mathbf{H} es uno de los tres tensores de Barnett-Lothe extendidos, el cual es simétrico y definido positivo. Es independiente de la elección de los vectores \mathbf{n} y \mathbf{m} sobre el plano oblicuo y $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{H}(-\hat{\mathbf{e}})$. Si $\widehat{\Gamma}_{JK}$ es la adjunta de Γ_{JK} definida como

$$\Gamma_{PJ}(p) \widehat{\Gamma}_{JK}(p) = |\Gamma(p)| \delta_{PK} \quad (2.33)$$

el tensor de Barnett-Lothe es

$$H_{JK}(\hat{\mathbf{e}}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\Gamma}_{JK}(p)}{|\Gamma(p)|} dp \quad (2.34)$$

El núcleo de esta integral tiene cinco polos complejos con parte imaginaria positiva p_α que corresponden a las raíces de la ecuación característica $|\Gamma(p)| = 0$, y que son conocidos como los autovalores de Stroh (Ting (1996)). Luego esta integración se puede realizar utilizando la teoría de residuos de Cauchy, resultando en

$$H_{JK}(\hat{\mathbf{e}}) = 2\pi \Im \sum_{\alpha=1}^5 \text{Res}(p_\alpha) = 2\pi \Im \sum_{\alpha=1}^5 \left[(p - p_\alpha) \frac{\widehat{\Gamma}_{JK}(p)}{|\Gamma(p)|} \right]_{p=p_\alpha} \quad (2.35)$$

donde \Im indica imaginario y $\text{Res}(p_\alpha)$ denota al residuo en el polo p_α . Factorizando el determinante $|\Gamma(p)| = |\mathbf{T}| \prod_{\gamma=1}^5 (p - p_\gamma)(p - \bar{p}_\gamma)$ con $\bar{\cdot}$ denotando complejo conjugado y $p_\gamma = \alpha_\gamma + \Im \beta_\gamma$, $\beta_\gamma > 0 \wedge \alpha_\gamma, \beta_\gamma \in \Re$ se tiene en este caso que

$$H_{JK}(\hat{\mathbf{e}}) = \frac{1}{|\mathbf{T}|} \sum_{\alpha=1}^5 \frac{\widehat{\Gamma}_{JK}(p_\alpha)}{\beta_\alpha \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^5 (p_\alpha - p_\gamma)(p_\alpha - \bar{p}_\gamma)} \quad (2.36)$$

Finalmente se tiene una expresión explícita en función de los autovalores de Stroh para la función de Green en tres dimensiones en un medio anisótropo Magnetoelástico

$$U_{JK}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r |\mathbf{T}|} \sum_{\alpha=1}^5 \frac{\hat{\Gamma}_{JK}(p_\alpha)}{\beta_\alpha \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^5 (p_\alpha - p_\gamma)(p_\alpha - \bar{p}_\gamma)} \quad (2.37)$$

la cual es semejante a la expresión presentada por Pan (2002) si tenemos en cuenta que $p_\alpha - \bar{p}_\alpha = 2\Im\beta_\alpha$ y que a_{11} en Pan (2002) es $|\mathbf{T}|$. Se puede reescribir esta solución como una parte singular multiplicada por la función de modulación

$$U_{JK}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{e}}) \quad (2.38)$$

siendo $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{e}})$ uno de los tensores de Barnett-Lothe explícito en términos de los autovalores de Stroh Ec. (2.36)