Capítulo 4

Validación numérica e implementación

Algunos aspectos sobre la implementación de la función de Green y su derivada junto con simplificaciones al caso transversalmente isótropo son estudiados. Las expresiones encontradas en los Capítulos 2 y 3 son validadas numéricamente con datos disponibles en la literatura.

Sólidos transversalmente isótropos

Considérese un cuerpo sólido con simetría transversalmente isótropa donde cualquier plano que contiene al eje x_3 es un plano de simetría. Sin pérdida de generalidad, se escoge un punto sobre el plano de simetría $x_2 = 0$ siendo $\hat{\mathbf{e}} = \{\hat{e}_{12}, 0, \hat{e}_3\}$ y $\hat{e}_{12} = \sqrt{\hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2}$. Los dos vectores unitarios mutuamente ortogonales $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$ sobre el plano oblicuo al vector $\hat{\mathbf{e}}$ pueden ser elegidos arbitrariamente tal que $\mathbf{n} \times \mathbf{m} = \hat{\mathbf{e}}$. Sea $\mathbf{m} = \{0, 1, 0\}$ y $\mathbf{n} = \{\cos\phi, 0, -\operatorname{sen}\phi\}$ donde ϕ en un sistema coordenado esférico (ver Fig. 4.1) está dado por $\tan\phi = x_1/x_3$ y $0 < \phi < \pi$.

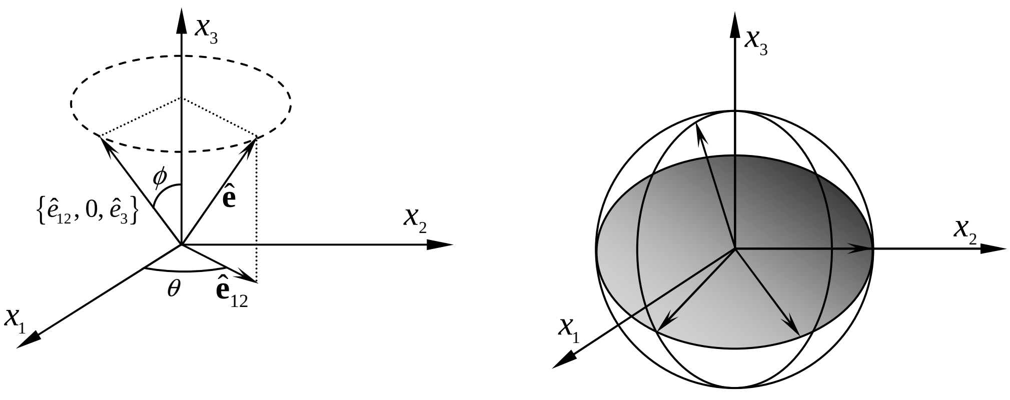

Figura 4.1 – (a) Esquema de los vectores $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\mathbf{e}}_{12}$ y $\hat{\mathbf{e}}$ para puntos sobre el plano $x_2 = 0$ en coordenadas esféricas. (b) Esquema de los vectores $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}^*$ cuando $\hat{\mathbf{e}}$ se encuentra en el plano $x_2 = 0$.

La función de Green es expresada en términos de la función de modulación (tensor de Barnett-Lothe extendido) como

$$U_{JK}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} H_{JK}(\hat{\mathbf{e}}) \tag{4.1}$$

Cuando esta función de modulación es evaluada para cualquier punto perteneciente al plano $x_2 = 0$ caracterizado por un vector $\{\hat{e}_{12}, 0, \hat{e}_3\}$, algunas componentes son cero y el tensor de Barnett-Lothe tiene la forma

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & 0 & \bar{H}_{13} & \bar{H}_{14} & \bar{H}_{15} \\ 0 & \bar{H}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{H}_{13} & 0 & \bar{H}_{33} & \bar{H}_{34} & \bar{H}_{35} \\ \bar{H}_{14} & 0 & \bar{H}_{34} & \bar{H}_{44} & \bar{H}_{45} \\ \bar{H}_{15} & 0 & \bar{H}_{35} & \bar{H}_{45} & \bar{H}_{55} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Teniendo en cuenta la simetría rotacional del material, y por lo tanto de la solución del problema, una expresión general del tensor de Barnett-Lothe extendido para cualquier orientación de $\hat{\mathbf{e}}$ en $\Re^3$ puede ser obtenido

$$H_{IK} = \Omega_{IA}\Omega_{KB}\bar{H}_{AB} \tag{4.3}$$

donde $\mathbf{\Omega}$ es la matriz de transformación ortogonal propia en cinco dimensiones determinada por

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

con $0 < \theta < 2\pi$ (ver Fig. 4.1). Teniendo en cuenta los términos distintos de cero en (4.2) y (4.4) las componentes de $\mathbf{H}$ se pueden escribir en función de las componentes de $\bar{\mathbf{H}}$ las cuales son más fáciles de evaluar como se muestra más adelante. Así, se tiene en función de las componentes de $\hat{\mathbf{e}}$ que

$$H_{11} = \frac{\hat{e}_1^2 \bar{H}_{11} + \hat{e}_2^2 \bar{H}_{22}}{\hat{e}_{12}^2}$$

$$H_{12} = \frac{\hat{e}_1 \hat{e}_2 \left(\bar{H}_{11} - \bar{H}_{22}\right)}{\hat{e}_{12}^2}$$

$$
\begin{gathered}
H_{13} = -\frac{\hat{e}_1 \bar{H}_{13}}{\hat{e}_{12}} \\
H_{14} = -\frac{\hat{e}_2 \bar{H}_{24}}{\hat{e}_{12}} \\
H_{13} = -\frac{\hat{e}_2 \bar{H}_{25}}{\hat{e}_{12}} \\
H_{22} = \frac{\hat{e}_2^2 \bar{H}_{11} + \hat{e}_1^2 \bar{H}_{22}}{\hat{e}_{12}^2} \\
H_{23} = \frac{\hat{e}_2 \bar{H}_{13}}{\hat{e}_{12}} \\
H_{24} = \frac{\hat{e}_1 \bar{H}_{24}}{\hat{e}_{12}} \\
H_{25} = \frac{\hat{e}_1 \bar{H}_{25}}{\hat{e}_{12}} \\
H_{33} = \bar{H}_{33},\;\; H_{34} = \bar{H}_{34},\;\; H_{35} = \bar{H}_{35} \\
H_{44} = \bar{H}_{44},\;\; H_{45} = \bar{H}_{45},\;\; H_{55} = \bar{H}_{55}
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

En materiales transversalmente isótropos con el eje x_3 como eje de simetría, las constantes elásticas en C_{iJKm} distintas de cero son

$$
\begin{gathered}
c_{1111},\;\; c_{3333},\;\; c_{1122},\;\; c_{1133},\;\; c_{2323} \\
c_{1212} = \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2},\;\; c_{1313} = c_{2323},\;\; c_{2222} = c_{1111},\;\; c_{2233} = c_{1133}
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

las constantes piezoeléctricas

$$e_{113},\;\; e_{333},\;\; e_{322} = e_{311},\;\; e_{223} = e_{113} \tag{4.7}$$

las constantes piezomagnéticas

$$q_{113},\;\; q_{333},\;\; q_{322} = q_{311},\;\; q_{223} = q_{113} \tag{4.8}$$

los coeficientes magnetoeléctricos

$$\lambda_{33},\;\; \lambda_{11},\;\; \lambda_{22} = \lambda_{11} \tag{4.9}$$

los coeficientes de permeabilidad dieléctrica

$$\varepsilon_{33},\;\; \varepsilon_{11},\;\; \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} \tag{4.10}$$

y los coeficientes de permeabilidad magnética

$$\mu_{33},\ \mu_{11},\ \mu_{22}=\mu_{11} \tag{4.11}$$

La principal ventaja de escoger los vectores $\mathbf{m}=\{0,1,0\}$ y $\mathbf{n}=\{\cos\phi, 0, -\operatorname{sen}\phi\}$ es que las componentes de la matriz $\Gamma_{JK}(p)=Q_{JK}+(R_{JK}+R_{KJ})\,p+T_{JK}p^2$ se simplifican, en parte, debido a la cantidad de términos cero en $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{T}$. Luego la matriz $\mathbf{\Gamma}$ para materiales transversalmente isótropos donde las constantes distintas de cero vienen dadas por las Ecs. (4.6-4.11), y para puntos sobre el plano $x_2=0$ es

$$\mathbf{\Gamma}(p)=\begin{bmatrix}
C_{1212}p^2+\frac{C_{1111}z^2}{r^2}+C_{2323}\hat{e}_{12}^2 & \frac{(C_{1111}+C_{1122})zp}{2r} & -\frac{(C_{1133}+C_{2323})z\hat{e}_{12}}{r} & -\frac{(e_{113}+e_{311})z\hat{e}_{12}}{r} & -\frac{(q_{113}+q_{311})z\hat{e}_{12}}{r} \\
\frac{(C_{1111}+C_{1122})zp}{2r} & C_{1111}p^2+\frac{C_{1212}z^2}{r^2}+C_{2323}\hat{e}_{12}^2 & -(C_{1133}+C_{2323})\hat{e}_{12}p & -(e_{113}+e_{311})\hat{e}_{12}p & -(q_{113}+q_{311})\hat{e}_{12}p \\
-\frac{(C_{1133}+C_{2323})z\hat{e}_{12}}{r} & -(C_{1133}+C_{2323})\hat{e}_{12}p & C_{2323}p^2+\frac{C_{2323}z^2}{r^2}+C_{3333}\hat{e}_{12}^2 & e_{133}p^2+e_{333}\hat{e}_{12}^2+\frac{e_{113}z^2}{r^2} & q_{133}p^2+q_{333}\hat{e}_{12}^2+\frac{q_{113}z^2}{r^2} \\
-\frac{(e_{113}+e_{311})z\hat{e}_{12}}{r} & -(e_{113}+e_{311})\hat{e}_{12}p & e_{133}p^2+e_{333}\hat{e}_{12}^2+\frac{e_{113}z^2}{r^2} & -\varepsilon_{11}p^2-\varepsilon_{33}\hat{e}_{12}^2-\frac{\varepsilon_{11}z^2}{r^2} & -\lambda_{11}p^2-\lambda_{33}\hat{e}_{12}^2-\frac{\lambda_{11}z^2}{r^2} \\
-\frac{(q_{113}+q_{311})z\hat{e}_{12}}{r} & -(q_{113}+q_{311})\hat{e}_{12}p & q_{133}p^2+q_{333}\hat{e}_{12}^2+\frac{q_{113}z^2}{r^2} & -\lambda_{11}p^2-\lambda_{33}\hat{e}_{12}^2-\frac{\lambda_{11}z^2}{r^2} & -\mu_{11}p^2-\mu_{33}\hat{e}_{12}^2-\frac{\mu_{11}z^2}{r^2}
\end{bmatrix} \tag{4.12}$$

y el determinante de la matriz $\mathbf{T}$ es

$$|\mathbf{T}|=C_{1111}C_{1212}\left[q_{113}^2\varepsilon_{11}-2e_{113}q_{113}\lambda_{11}+e_{113}^2\mu_{11}+C_{2323}\left(\varepsilon_{11}\mu_{11}-\lambda_{11}^2\right)\right] \tag{4.13}$$

Nótese que una vez que los autovalores de Stroh son obtenidos, las expresiones para la función de Green (Ec. (2.37)) y su derivada (Ec. (3.8)) son completamente explícitas. Los autovalores resultan de resolver la ecuación característica de grado décimo $|\Gamma(p)|=0$. En el caso considerado, el determinante de la Ec. (4.12) puede ser factorizado de la forma

$$|\Gamma(p)|=0\rightarrow\begin{cases} f+c_{1212}p^2=0 \\ ap^8+bp^6+cp^4+dp^2+e=0 \end{cases} \tag{4.14}$$

y por lo tanto puede ser resuelta en radicales. Luego expresiones completamente explícitas son obtenidas tanto para la función de Green como para su derivada. En la presente implementación preliminar los autovalores de Stroh son calculados de forma numérica resolviendo el problema de autovalores dado por

$$\begin{bmatrix}\mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{a} \\ \mathbf{b}\end{Bmatrix}=p\begin{Bmatrix}\mathbf{a} \\ \mathbf{b}\end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T - \mathbf{Q}$$

donde el superíndice T denota transpuesta.

En lo que respecta al cálculo de las derivadas, es importante destacar que las funciones $\mathrm{A}(p_\alpha)$ y $\mathrm{B}(p_\alpha)$ en las componentes M_{ijKLMN} son calculadas una única vez y luego son tratadas como constantes a lo largo del cálculo de las 45 componentes de $\widetilde{U}_{PJ,q}$. Lo mismo sucede con el denominador en la función Φ_{ijKLMN} (Ec. (3.10)). Luego el cómputo de las distintas funciones Φ_{ijKLMN} resulta de las correspondientes combinaciones de las componentes de la matriz B_{ij} y las componentes de la matriz adjunta $\widehat{\Gamma}_{KL}$. Las derivadas de $\Phi_{ijKLMN}(p)$ con respecto al argumento son computadas en esta implementación utilizando MATHEMATICA. Sin embargo estas derivadas son simples y pueden ser evaluadas explícitamente definiendo la función polinómica

$$\Lambda_{KLMN} \overset{def}{=} \sum_{\lambda=0}^{M} p^{\lambda}\widehat{\Gamma}_{KL}^{(\lambda)} \sum_{\lambda=0}^{M} p^{\lambda}\widehat{\Gamma}_{MN}^{(\lambda)} = \sum_{\lambda=0}^{2M} p^{\lambda}\Lambda_{KLMN}^{(\lambda)} \tag{4.16}$$

y llamando al denominador en la función Φ_{ijKLMN} (Ec. (3.10)) como Υ se tiene

$$\frac{d}{dp}\Phi_{ijKLMN} = -\frac{2B_{ij}\,\Lambda_{KLMN}}{\Upsilon}\mathrm{M} + \frac{\frac{dB_{ij}}{dp}\,\Lambda_{KLMN}}{\Upsilon} + \frac{B_{ij}\sum_{\lambda=1}^{2M}\lambda p^{\lambda-1}\Lambda_{KLMN}^{(\lambda)}}{\Upsilon} \tag{4.17}$$

donde

$$\mathrm{M}(p) = \frac{1}{(p-\overline{p}_1)} + \frac{1}{(p-\overline{p}_2)} + \frac{1}{(p-\overline{p}_3)} + \frac{1}{(p-\overline{p}_4)} + \frac{1}{(p-\overline{p}_5)} \tag{4.18}$$

y considerando dos vectores mutuamente ortogonales $\mathbf{m} = \left\{-\frac{\hat{e}_2}{\hat{e}_{12}}, \frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_{12}}, 0\right\}$ y $\mathbf{n} = \left\{\frac{\hat{e}_1\hat{e}_3}{\hat{e}_{12}}, \frac{\hat{e}_2\hat{e}_3}{\hat{e}_{12}}, -\hat{e}_{12}\right\}$ que definen cualquier dirección $\hat{\mathbf{e}}$ en $\Re^3$

$$\frac{d}{dp}\left[B_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 2\frac{\hat{e}_2\left(-\hat{e}_1\hat{e}_3+\hat{e}_2 p\right)}{\hat{e}_{12}^2} & \frac{\hat{e}_1^2\hat{e}_3-\hat{e}_2^2\hat{e}_3-2\hat{e}_1\hat{e}_2 p}{\hat{e}_{12}^2} & \hat{e}_2 \\ \frac{\hat{e}_1^2\hat{e}_3-\hat{e}_2^2\hat{e}_3-2\hat{e}_1\hat{e}_2 p}{\hat{e}_{12}^2} & 2\frac{\hat{e}_1\left(\hat{e}_2\hat{e}_3+\hat{e}_1 p\right)}{\hat{e}_{12}^2} & -\hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 & -\hat{e}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Validación numérica

Para validar la solución dos materiales transversalmente isótropos son utilizados. El primero tiene propiedades tomadas del $BaTiO_3$ y del $CoFe_2O_4$ según considera Pan (2002). El valor de las constantes se resumen en la Tabla 4.1. Adicionalmente se tiene

$$\begin{gathered} c_{1212} = \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2}, \; c_{1313} = c_{2323}, \; c_{2222} = c_{1111}, \; c_{2233} = c_{1133} \\ e_{322} = e_{311}, \; e_{223} = e_{113}, \quad q_{322} = q_{311}, \; q_{223} = q_{113}, \quad \lambda_{22} = \lambda_{11}, \; \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}, \; \mu_{22} = \mu_{11} \end{gathered} \tag{4.20}$$

Constantes elásticas $\left[10^9 \frac{N}{m^2}\right]$	c_{1111}	166
	c_{3333}	77
	c_{1122}	78
	c_{1133}	162
	c_{2323}	43
Constantes piezoeléctricas $\left[\frac{C}{m^2}\right]$	e_{113}	11,6
	e_{333}	18,6
	e_{322}	-4,4
Constantes piezomagnéticas $\left[\frac{N}{Am}\right]$	q_{113}	550
	q_{333}	699,7
	q_{322}	580,3
Coeficientes magnetoeléctricos $\left[\frac{Ns}{Am}\right]$	λ_{11}	0
	λ_{33}	0
Coeficientes de permeabilidad dieléctrica $\left[10^{-9} \frac{C}{Vm}\right]$	ε_{11}	11,2
	ε_{33}	12,6
Coeficientes de permeabilidad magnética $\left[10^{-6} \frac{Ns^2}{C^2}\right]$	μ_{11}	5
	μ_{33}	10

Tabla 4.1 – Valores de las constantes del material magnetoelectroelástico.

El segundo material corresponde a la cerámica PZT-4 (Pan & Tonon (2000)) la cual presenta un acoplamiento piezoeléctrico. Las propiedades se presentan en la Tabla 4.2 cumpliéndose (4.20) cuando corresponda.

Constantes elásticas $\left[10^9 \frac{N}{m^2}\right]$	c_{1111}	139
	c_{3333}	115
	c_{1122}	77,8
	c_{1133}	74,3
	c_{2323}	25,6
Constantes piezoeléctricas $\left[\frac{C}{m^2}\right]$	e_{113}	12,7
	e_{333}	15,1
	e_{322}	-5,2
Coeficientes de permeabilidad dieléctrica $\left[10^{-9} \frac{C}{Vm}\right]$	ε_{11}	6,461
	ε_{33}	5,62

Tabla 4.2 – Valores de las constantes del material piezoeléctrico.

Las Tablas 4.3 y 4.4 corresponden al sólido magnetoelectroelástico de la Tabla 4.1 y las funciones son evaluadas en el punto $\mathbf{x} = \{1,1,-1\}$. La Tabla 4.3 muestra los resultados para la función de Green con la implementación propuesta para materiales transversalmente isótropos junto con los presentados en Pan (2002). En el trabajo de Pan (2002) es implementado un esquema de diferencias finitas para evaluar las derivadas de la función de Green. Así, las derivadas son aproximadas por medio de las ecuaciones

$$\frac{\partial U_{PK}}{\partial x_1} \approx \frac{1}{2h}\left[U_{PK}\left(x_1+h, x_2, x_3\right)-U_{PK}\left(x_1-h, x_2, x_3\right)\right] \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial U_{PK}}{\partial x_2} \approx \frac{1}{2h}\left[U_{PK}\left(x_1, x_2+h, x_3\right)-U_{PK}\left(x_1, x_2-h, x_3\right)\right] \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial U_{PK}}{\partial x_3} \approx \frac{1}{2h}\left[U_{PK}\left(x_1, x_2, x_3+h\right)-U_{PK}\left(x_1, x_2, x_3-h\right)\right] \tag{4.23}$$

En la Tabla 4.4 se presentan resultados obtenidos en la implementación propuesta para las derivadas con respecto a x_3 junto con los valores obtenidos con el esquema de diferencias finitas. Se observa que el error relativo es del orden de 10^{-8}. En Pan (2002) son presentados resultados de la tensión σ_{11} debido a una fuerza puntual en la dirección x_i, $i = 1..3$ para $\mathbf{x} = \{1,1,-1\}$ en el material magnetoelectroelástico. Estas tensiones son calculadas con el esquema de evaluación de derivadas propuesto en este trabajo y de acuerdo con

$$\Xi_{111} = c_{1111}U_{11,1} + c_{1122}U_{12,2} + c_{1133}U_{13,3} + e_{311}U_{14,3} + q_{311}U_{15,3} \tag{4.24}$$

$$\Xi_{112} = c_{1111}U_{12,1} + c_{1122}U_{22,2} + c_{1133}U_{23,3} + e_{311}U_{24,3} + q_{311}U_{25,3} \tag{4.25}$$

$$\Xi_{113} = c_{1111}U_{13,1} + c_{1122}U_{23,2} + c_{1133}U_{33,3} + e_{311}U_{34,3} + q_{311}U_{35,3} \tag{4.26}$$

resultando $\Xi_{111} = -1,49226\times10^{-2}$, $\Xi_{112} = -0,570741\times10^{-2}$ y $\Xi_{113} = 0,627563\times10^{-2}$, los cuales concuerdan con los resultados graficados en la Fig. 3 de Pan (2002).

$\{JK\}$	**Pan (2002)**	**Presente trabajo**
11	7,714137 10^{-13}	7.714136975 10^{-13}
12	1,2027080 10^{-13}	1,2027080088 10^{-13}
13	-1,2945921 10^{-13}	-1,294592076 10^{-13}
14	-1,0347228 10^{-4}	-1,034722765 10^{-4}
15	4,2667071 10^{-6}	4,266707118 10^{-6}
22	7,7141370 10^{-13}	7,7141369758 10^{-13}
23	-1,2945921 10^{-13}	-1,294592076 10^{-13}
24	-1,0347228 10^{-4}	-1,0347227659 10^{-4}
25	4,2667071 10^{-6}	4,2667071177 10^{-6}
33	4,8476833 10^{-13}	4,8476833195 10^{-13}
34	5,0073977 10^{-4}	5,0073977011 10^{-4}
35	2,4195755 10^{-5}	2,4195754529 10^{-5}
44	-3,4041791 10^{6}	-3,4041791148 10^{6}
45	2,9749049 10^{4}	2,9749048777 10^{4}
55	-4,1918948 10^{3}	-4,1918947945 10^{3}

Tabla 4.3 – Resultados de la evaluación de la función de Green U_{JK} para el material magnetoelectroelástico.

$\{JK\}$	**Diferencias finitas**	**Presente trabajo**
11	3,336588421833 10^{-13}	3,336588378284 10^{-13}
12	1,301397092497 10^{-13}	1,301397094294 10^{-13}
13	-7,75080151598 10^{-15}	-7,750800322078 10^{-15}
14	-9,49860105673 10^{-6}	-9,498600100628 10^{-6}
15	2,807075322643 10^{-6}	2,807075283457 10^{-6}
22	3,336588421542 10^{-13}	3,336588378284 10^{-13}
23	-7,750801362949 10^{-15}	-7,750800322076 10^{-15}
24	-9,498600935449 10^{-6}	-9,498600100627 10^{-6}
25	2,80707531824 10^{-6}	2,807075283457 10^{-6}
33	9,364625190706 10^{-14}	9,364624925707 10^{-14}
34	1,220686350475 10^{-4}	1,22068632245$10^{-4}$
35	7,75549207825 10^{-7}	7,75549166468 10^{-7}
44	-1,04712138946 10^{6}	-1,04712137380 10^{6}
45	3,593057150437 10^{3}	3,59305706540 10^{3}
55	-1,056384380737 10^{3}	-1,05638436128 10^{3}

Tabla 4.4 – Resultados de la evaluación de la derivada de la función de Green $U_{JK,3}$ para el material magnetoelectroelástico.

En las Tablas 4.5 y 4.6 se presentan los resultados correspondientes al sólido piezoeléctrico de la Tabla 4.2. Funciones son evaluadas en el punto $\mathbf{x} = \{1,1,1\}$. La Tabla 4.5 presenta los valores de la evaluación de Green con la presente implementación. Estos resultados son comparados con los presentados en Pan & Tonon (2000) los cuales son calculados con las expresiones de Dunn & Wienecke (1996). En la Tabla 4.6 se presentan resultados para las derivadas con respecto a x_2. El mayor error relativo en ambos casos es del orden de 10^{-5}.

$\{JK\}$	**Dunn & Wienecke (1996)**	**Presente trabajo**
11	$1.1507372825\ 10^{-12}$	$1.150738346921\ 10^{-12}$
12	$1.9428530900\ 10^{-13}$	$1.942852897487\ 10^{-13}$
13	$1.7241444282\ 10^{-13}$	$1.724167973621\ 10^{-13}$
14	$2.0825816731\ 10^{-4}$	$2,082500974672\ 10^{-4}$
22	$1.1507372825\ 10^{-12}$	$1.150738346921\ 10^{-12}$
23	$1.7241444282\ 10^{-13}$	$1.724167973621\ 10^{-13}$
24	$2.0825816731\ 10^{-4}$	$2,082500974671\ 10^{-4}$
33	$7.9729216465\ 10^{-13}$	$7.973143889466\ 10^{-13}$
34	$1.5239325664\ 10^{-3}$	$1,52387289424\ 10^{-3}$
44	$-4.3915928465\ 10^{6}$	$-4.391421435455\ 10^{6}$

Tabla 4.5 – Resultados de la evaluación de la función de Green U_{JK} para el material piezoeléctrico.

$\{JK\}$	**Dunn & Wienecke (1996)**	**Presente trabajo**
11	$-4,81188998237\ 10^{-13}$	$-4,\ 811893697561\ 10^{-13}$
12	$1,65932816546\ 10^{-14}$	$1,659291020065\ 10^{-14}$
13	$-1,54203110547\ 10^{-13}$	$-1,542059355604\ 10^{-13}$
14	$-2,0154138734\ 10^{-4}$	$-2,0154607834\ 10^{-4}$
22	$-9,26183802345\ 10^{-14}$	$-9,261879025866\ 10^{-14}$
23	$1,82113322728\ 10^{-14}$	$1,821086180175\ 10^{-14}$
24	$6,70402857710\ 10^{-6}$	$6,70401912708\ 10^{6}$
33	$-3,30447677887\ 10^{-13}$	$-3,304587223351\ 10^{-13}$
34	$-6,20021679052\ 10^{-4}$	$-6,199966390453\ 10^{-4}$
44	$1,18596300519\ 10^{6}$	$1,185913398584\ 10^{6}$

Tabla 4.6 – Resultados de la evaluación de la derivada de la función de Green $U_{JK,2}$ para el material piezoeléctrico.