Capítulo 3

Tests estadísticos

Una de las herramientas más usadas para la deducción de hipótesis son los test estadísticos que gracias a la teoría de la inferencia estadística nos predicen el comportamiento de un conjunto de datos en función de sus resultados previos. Este tipo de test son muy usados en los estudios epidemiológicos y en la industria farmacéutica en general ya que permiten de una forma no invasiva, conocer el resultado de la aplicación de tratamientos y la evolución de los pacientes a los que se les someten.

Este tipo de test se dividen en los test paramétricos y los no paramétricos [12], siendo la principal diferencia, la necesidad de los primeros de tener los datos poblacionales o en su defecto, de ajustarse una distribución probabilística conocida. En este estudio se aplicaran las pruebas de Análisis de Varianza (Apartado 3.1 y de Kruskal-Wallis (Apartado 3.2.2), que nos aportarán el mismo tipo de análisis de los datos en forma paramétrica y no paramétrica.

3.1. Análisis de varianza

El análisis de varianza (ANOVA) es una colección de análisis estadísticos que, a través de la descomposición del momento estadístico de varianza permite realizar asunciones sobre el comportamiento de los datos a los que se le aplica el test con un grado de fiabilidad muy alto. En este estudio se ha utilizado el test ANOVA de Fischer de una sola variable desequilibrado.

El ANOVA de Fischer se utiliza habitualmente en estudios farmacéuticos para conocer la efectividad de los nuevos tratamientos, de forma que se miden los parámetros biológicos necesarios en los sujetos a estudio, y tras separarlos en grupos, se les administran distintos tratamientos a estudio a cada grupo. El ANOVA determina de una forma fiable si tras aplicar los tratamientos se han producido cambios en los parámetros medidos o si los cambios se deben a las fluctuaciones biológicas inherentes a la naturaleza de los sujetos [12].

3.1.1. Descripción matemática del test ANOVA de una sola variable

El test ANOVA realiza comparaciones sobre las medias poblacionales de los datos en análisis, por tanto tendremos las medias poblacionales que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} I &= \text{Nmero de poblaciones} \\ \mu_1 &= \text{Media de la población 1 o respuesta promedio del grupo 1} \\ &\vdots \\ \mu_I &= \text{Media de la población I o respuesta promedio del grupo I} \end{aligned}$$

Y suponemos que las I distribuciones poblacionales o de tratamiento son normales con varianza σ^2.

Y nuestras hipótesis de interés son:

$$\begin{aligned} H_0 &:= \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_I \\ H_a &:= \text{al menos dos de las } \mu_i \text{ son diferentes.} \end{aligned}$$

Así pues la hipótesis 3.1.1 sólo se cumplirá sí y solo sí las medias poblacionales o las respuesta promedio de todos los grupos son iguales.

Una vez definidas nuestras hipótesis, y nuestras poblaciones, podemos establecer las fórmulas que conforman el análisis. Así pues para efectuar un ANOVA tendremos que hallar los valores de:

$$\textbf{Medias Muestrales :} \quad \bar{X}_{i\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{J} X_{ij}}{J} \qquad i = 1, 2, \ldots, I$$

$$\textbf{Gran Media :} \quad \bar{X}_{\cdot\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} X_{ij}}{IJ}$$

$$\textbf{Varianzas Muestrales :} \quad S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{J} \left(X_{ij} - \bar{X_{i\cdot}^2}\right)^2}{J-1} \qquad i = 1, 2, \ldots, I$$

$$\textbf{Cuadrado Medio para Grupos :} \quad MSTr = \frac{J}{I-1} \sum_i \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_{\cdot\cdot}\right)^2$$

$$\textbf{Cuadrado Medio del Error :} \quad MSE = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_I^2}{I}$$

En estas ecuaciones podemos ver cómo al ser S_i^2 una medida de la variación dentro de un grupo particular, el valor cuadrado medio del error nos da una medida de la variación entre los grupos. De esta forma podemos determinar como estadístico al factor $F = \frac{MSTr}{MSE}$.

Este estadístico es el que aplicaremos a una distribución F de Snedecor (Figura 3.1) con la que evaluaremos la validez de las hipótesis, y que nos dará el parámetro p que se corresponde al área de la distribución en la que la hipótesis H_0 tiene validez.

3.1.2. Resultados ANOVA

La aplicación del test de ANOVA a las posiciones de los datos se ha realizado con la hipótesis de partida de que los grupos de casos que convierten y los que no convierten pertenecían a un mismo grupo. En este caso el resultado de aplicar el test ha arrojado los datos que se muestran en la Tabla 3.1, donde podemos ver que la probabilidad de que la citada hipótesis sea cierta es extremadamente baja.

El test ANOVA se engloba dentro del grupo de test estadísticos paramétricos, por lo que es preciso conocer la distribución de probabilidad a la que se ajustan nuestros datos para que podamos considerar que es fiable. En nuestro caso, y dada la naturaleza desconocida de los datos, se ha asumido una distribución normal de los mismos. Esto hace que sea

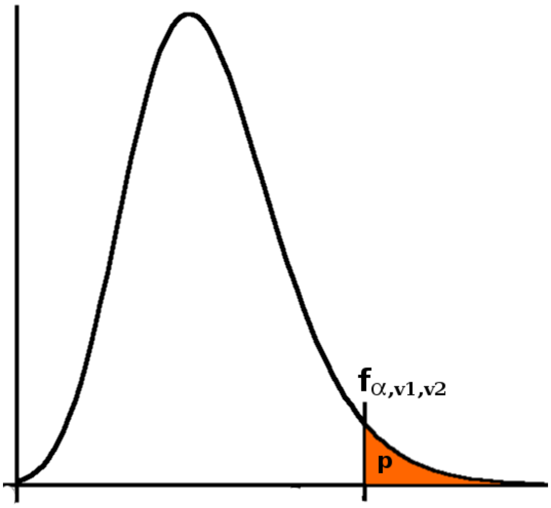

Figura 3.1: Representación de una distribución F de Snedecor con un valor p para el valor de significancia α y v_1,v_2 grados de libertad.

Fuente	Suma de cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado medio	Valor de la F de Snedecor	p
Grupos	0.35762	1	0.35762	21.09	7.31 E-06
Error	3.79835	224	0.01696		
Total	4.15597	225			

Tabla 3.1: Resultados del test ANOVA en los datos del estudio.

preciso contar con un mayor número de casos para demostrar que efectivamente éstos siguen una distribución normal, y en cualquier caso nos obliga a recurrir a un test no paramétrico para verificar la validez de nuestros resultados.

3.2. Test de Kruskal-Wallis

El test de Kruskal-Wallis es un test no paramétrico que se utiliza en lugar del test ANOVA en los casos en los que no tenemos los datos estadísticos de la población. La correspondencia de resultados con su análogo no paramétrico es tal que incluso muchas fuentes [12] lo denominan *ANOVA no paramétrico*.

3.2.1. Descripción matemática

Para salvar la necesidad de conocer los parámetros de la distribución, la prueba de Kruskal-Wallis ordena los datos de cada muestra de menor a mayor y asigna al menor un rango de 1 y va incrementando el valor del rango hasta llegar al enésimo dato. Si existen datos repetidos, les asigna un promedio de rangos.

De esta forma el estadístico que se crea tiene la forma:

$$K = (N-1)\frac{\sum_{i=1}^{g} n_i(\bar{r}_{i\cdot} - \bar{r})^2}{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}(r_{ij} - \bar{r})^2}$$

- n_g es el número de observaciones en el grupo g
- r_{ij} es el rango (entre todas las observaciones) de la observación j en el grupo i
- N es el número total de observaciones entre todos los grupos
- $\bar{r}_{i\cdot} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}}{n_i}$,
- $\bar{r} = (N+1)/2$ es el promedio de r_{ij}.

Finalmente, el valor de p se aproxima por $\Pr(\chi^2_{g-1} \geq K)$.

3.2.2. Resultados Kruskal-Wallis

Los resultados del apartado 3.1.2 nos han mostrado como la probabilidad de que los casos que convierten y los que no convierten sean del mismo grupo es ínfima, sin embargo, dada la no normalidad de los datos, y a falta de conocer la distribución de probabilidad que siguen, este resultado resulta poco fiable.

Fuente	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	χ^2	p
Grupos	78123.7	1	78123.7	18.291	1.90E-05
Error	882909	224	3941.6		
Total	961033	225			

Tabla 3.2: Resultados del test Kruskal-Wallis en los datos del estudio.

Por tanto, para contrastar el resultado del último apartado, se ha procedido a realizar un test de Kruskal-Wallis sobre los datos con los resultados de la Tabla 3.2. Como se puede apreciar en la Tabla, el valor de la probabilidad es $p < 0{,}05$, y nos indica que efectivamente, nuestros dos grupos de casos son independientes, confirmando así los resultados de la sección 3.1.