2 Teoría de la toma de decisiones

La toma de decisiones es una antigua inquietud humana, que se remonta a la época en que las personas buscaban consejos de las estrellas. Desde entonces, la humanidad se ha esforzado por desarrollar mejores herramientas con ese propósito. Desde principios del XVIII, el modelo predominante de comportamiento individual sometido a incertidumbre ha sido el modelo de utilidad esperada. Este modelo fue introducido por Nicholas Bernoulli en su famosa resolución de la paradoja de San Petesburgo. Von Neumann y Morgenstern desarrollaron la teoría de juegos que fue finalmente integrada con la teoría de la probabilidad por Savage en su trabajo sobre las bases de la estadística.

2.1 Introducción

En este apartado se describen los métodos estadísticos de los que se hará uso a la hora de afrontar un problema de toma de decisiones en ambiente de riesgo. Se puede distinguir entre dos clases de incertidumbre, una debida puramente al azar, por ejemplo, en un lanzamiento de moneda (perfectamente equilibrada), la probabilidad de que el resultado sea cara o cruz se debe únicamente al azar. Por tanto, el problema puede ser descrito perfectamente mediante la aplicación de las leyes del azar a este problema concreto. Por otro lado, el segundo tipo de incertidumbre aparece cuando se desconoce cuales son las leyes de azar que se deben aplicar. Por ejemplo, volviendo al supuesto anterior, supóngase ahora, que la moneda está desequilibrada, en este caso uno de los posibles resultados, cara o cruz, tendría mayor probabilidad de aparecer, siendo en principio, desconocido cual es la probabilidad asignada a cada uno de los sucesos. En este caso puede decirse que se desconoce el *estado natural.*

Ante esta situación una posible forma de proceder sería, en el caso de que fuese posible, tomar observaciones del proceso. Ahora bien, se desconoce *a priori* cuantas observaciones son necesarias para caracterizar el proceso. Resulta obvio que, por muchas repeticiones que se hagan del experimento no es posible determinar exactamente el *estado natural*.

Otro asunto a tener en cuenta, es la conveniencia de realizar más o menos observaciones atendiendo a otros criterios. Por ejemplo, supóngase que el hecho de efectuar un experimento tiene un coste asociado. Sería necesario evaluar el número más conveniente de experimentos a realizar atendiendo a un criterio económico, teniendo en cuenta, por un lado el coste asociado a la toma de cada muestra, y por otro lado cual es la retribución obtenida por acertar el resultado del lanzamiento.

Sería por tanto, necesario acudir a la teoría de toma de decisiones en ambiente de riesgo para determinar la conveniencia o no de aceptar la apuesta, y en el caso de aceptarla definir cual sería el número de observaciones más conveniente a realizar, para obtener una estimación suficientemente buena del proceso.

Cuando un individuo se enfrenta a problemas de toma de decisiones, en muchas situaciones es posible tomar dichas decisiones basándose únicamente en la intuición y la experiencia, pero en otras situaciones la complejidad del problema es tal, que es necesario recurrir a otro tipo de análisis, es en este punto donde la teoría de la decisión entra en juego.

Los elementos que caracterizan un problema de decisión son [9]:

- *Decisor*: Persona u organización cuyo objetivo es alcanzar unos determinados objetivos asumiendo la responsabilidad de la decisión.
- *Alternativas*: Son las distintas posibilidades que tiene el decisor para alcanzar el objetivo. Al menos tiene que haber dos alternativas para que el problema al que se está enfrentando sea un problema de toma de decisiones.
- *Estados de la naturaleza*: Conjunto de factores o variables, que no son controlados por el decisor y que definen el entorno del problema.
- *Consecuencias*: Son los resultados obtenidos para cada una de las posibles alternativas del problema y la presentación de un determinado estado de la naturaleza. La elección de una alternativa en función de los resultados dependerá del criterio de decisión y dependerán del nivel de conocimiento del decisor sobre el estado de la naturaleza.

Los procesos de decisión se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios, algunos de ellos son:

1. *Según el número de decisores:*
   a) Procesos de decisión individual, si solo existe un decisor. En este caso el problema es resuelto mediante la Teoría de la Decisión Estadística.
   b) Procesos de decisión colectivos, en el caso de que existan varios decisores, problemas que son resueltos mediante la Teoría de las Decisiones Colectivas.
   c) Procesos de decisión en ambiente de conflicto, en el caso de que existan varios decisores y las consecuencias de decisiones tomadas por un decisor dependen de la reacción de los otros decisores. Este tipo de problemas es afrontado mediante la Teoría de Matemática de los Juegos de Estrategia.
2. *Según el número de decisiones:*
   a) Procesos de decisión únicos, en los que únicamente se debe adoptar una solución
   b) Procesos de decisión secuenciales, en los que se deben de adoptar una serie de decisiones dependientes, en la que la que cada decisión adoptada depende de los resultados de decisiones tomadas anteriormente que condicionan las nuevas decisiones.

3. *Según el grado de conocimiento del decisor sobre los estados de la naturaleza:*
    a) Certeza. El decisor tiene conocimiento perfecto acerca del estado de la naturaleza que se va a presentar. Cada alternativa tiene asociado un único resultado, decidiéndose cual es el más apropiado según un criterio fijado con anterioridad.
    b) Riesgo. Los estados de la naturaleza pueden ser representados mediante una o un conjunto de variables aleatorias de la que el decisor conoce su distribución de probabilidad
    c) Incertidumbre. En este caso el decisor no posee información para asignar probabilidad sobre los estados de la naturaleza.

Cuando se pretende resolver un problema de decisión es necesario organizar las preferencias sobre el conjunto de alternativas, reflejando el orden de satisfacción del decisor sobre éstas y determinando la solución que resulte más apropiada. En este punto cabe distinguir dos planteamientos:

1. *Enfoque axiomático*. Parte de la suposición de que el conjunto de alternativas forman una estructura organizada, y por otro lado, la racionalidad del comportamiento del decisor puede ser modelada mediante una función (función de utilidad). En este enfoque esta basada la Teoría de la Utilidad.
2. *Enfoque no axiomático*. El punto de partida no es la existencia de un orden en el conjunto de alternativas, sino que trata de determinar una disposición de preferencia coherente con las manifestaciones del decisor.

2.2 Decisiones en ambiente de riesgo

Los problemas de decisión en ambiente de riesgo se caracterizan por el grado de conocimiento que tiene el decisor sobre el estado de la naturaleza. De dicho estado, el decisor conoce sus posibles concreciones, pero no tiene total conocimiento sobre la presentación de cada una de ellas. Sin embargo, tiene la capacidad de caracterizar su comportamiento mediante distribuciones de probabilidad.

Los elementos participantes en un problema de decisión en ambiente de riesgo son:

- *Decisor*. El problema que se resolverá es con decisor único.
- *Alternativas*. Conjunto de posibles actuaciones que tiene el decisor para conseguir sus objetivos.
- *Estado de la naturaleza*. Representa el factor o factores que influirán en el problema de decisión y, que no están bajo control del decisor. Es la variable de estado que representará el entorno del problema de decisión. El

decisor conoce tanto las concreciones de la variable de estado como la distribución de probabilidad asociada a dicha variable.

La variable de estado de la naturaleza será designada por $E = \{E_j\}_{j \in J}$ donde E_j es cada una de las concreciones de esa variable. Las variables de estado pueden ser:

a) Discreta, en cuyo caso la variable será de la forma $E = \{E_1, ..., E_n\}$ y la función de probabilidad asociada a dicha variable será también discreta, de la forma $P = \{p_1, ..., p_n\}$, donde $p_j = P(E_j)$ es la probabilidad de presentación de la j-ésima concreción de la variable. Cumpliéndose por tanto, que $p_j \in [0,1]$ para todo j y $\sum_j p_j = 1$.

b) Continua. La variable de estado es de la forma $E = \{E_j\}_{j \in J}$ con J continuo, y la distribución de probabilidad continua, cuya función de densidad será de la forma $f = f(E_j)$, donde $f(E_j)$ representa la densidad de probabilidad de presentación de E_j. Verificando que $f(E_j) \geq 0$ para todo j y $\int_{i \in J} f(E_j) dj = 1$.

- *Criterio de evaluación*. Es necesario valorar el conjunto de alternativas, para ello se dispondrá de un criterio de evaluación que asignará a cada una de las alternativas A_i un conjunto de valores o resultados r_{ij}. Haciendo uso del criterio de evaluación se obtiene la denominada matriz de resultados, que tendrá la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|ccccc} & p_1 & \cdots & p_j & \cdots & p_m \\ & E_1 & \cdots & E_j & \cdots & E_m \\ \hline A_1 & r_{11} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_i & r_{i1} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{im} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ A_n & r_{n1} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nm} \end{array}$$

- *Criterio de decisión*. Es la norma que permitirá, teniendo en cuenta la información disponible, asociar a cada alternativa un valor que permita determinar la estructura de preferencia del decisor, permitiendo por tanto, identificar la alternativa óptima.

2.2.1 Enfoque no axiomático

En este apartado se describirá el enfoque no axiomático que no tiene en consideración la existencia de un orden en el conjunto de alternativas, sino que pretende establecer un criterio de preferencia de acuerdo con las manifestaciones del decisor.

2.2.1.1 Criterios de dominación

Dominación simple.

Considérense A_s y A_k dos posibles alternativas de un problema de decisión en ambiente de riesgo con la misma distribución de probabilidad. Se dice que A_s domina a A_k y se denota como $A_s \succ A_k$, cuando los resultados obtenidos con A_s son siempre mejores o iguales que con A_k.

Mediante el criterio de dominación simple se puede dividir el conjunto de posibles alternativas en dos subconjuntos:

- Conjunto de alternativas admisibles, como aquellas que no son dominadas por ninguna otra.
- Conjunto de alternativas no admisibles, formado por aquellas alternativas que son dominadas por alguna otra.

Dominación estocástica

Considérense A_s y A_k dos posibles alternativas de un problema de decisión en ambiente de riesgo. Se dice que A_s domina estocásticamente para un valor C a A_k y se denota como $A_s \overset{e/C}{\succ} A_k$, cuando la probabilidad de obtener resultados superiores a C con A_s es siempre mayor o igual que la probabilidad de obtener resultados superiores a C con A_k.

De esta manera, un criterio de decisión en ambiente de riesgo será válido, si propone como alternativa óptima a una alternativa que no esté dominada, ni simple, ni estocásticamente.

2.2.1.2 Criterio del valor monetario esperado

El objetivo de este criterio es asignar a cada alternativa, un valor que sea representativo del conjunto de resultados asociados a dicha alternativa. Dicho valor es determinado como la esperanza matemática de dichos resultados, distinguiendo entre las posibles naturalezas de la variable de estado:

En el caso de que la variable de estado E sea discreta, de la forma $E = \{E_1, ..., E_m\}$ y la distribución de probabilidad de dicha variable es dada por $P = \{p_1, ..., p_m\}$, donde $p_j \in [0,1]$ y $\sum_j p_j = 1$. Los resultados de cada alternativa A_i vendrán dados por $\{r_{i1},...,r_{im}\}$. Entonces el valor monetario esperado se calcula mediante la siguiente expresión:

$$VME_i = E[A_i] = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} p_j \tag{1}$$

En el caso de que la variable de estado E sea continua. La expresión para determinar el valor monetario esperado se determina mediante:

$$VME_i = E[A_i] = \int_j R_i(E_j) f(E_j) dj \tag{2}$$

Una vez calculado el valor monetario esperado, se seleccionará la alternativa óptima como aquella que proporcione un valor esperado máximo. El criterio del valor medio esperado siempre cumple los criterios de dominación simple y dominación estocástica.

Es necesario mencionar que este criterio no tiene en cuenta el riesgo medido por la varianza, por ello este criterio no es conveniente cuando los resultados tienen gran variabilidad, pues el valor medio, en este caso, no resulta representativo del riesgo en el que incurre el decisor.

2.2.1.3 Criterio de valor óptimo medio con varianza acotada

Este criterio trata de solventar la limitación del criterio de valor monetario esperado de no tener en consideración la varianza, sin embargo este método presenta el inconveniente de no cumplir con los criterios de dominación simple y dominación estocástica.

Se parte del supuesto de que el inversor no tiene la capacidad de asumir cualquier riesgo. Por ello se fija una cota M para el mismo, que permitirá descartar las alternativas cuyo riesgo medido a través de la varianza supere dicha cota M.

Supóngase una alternativa A_i correspondiente al conjunto de alternativas A de un problema de decisión en ambiente de riesgo. A cada alternativa se le asociará una pareja de números formada por su media y su varianza,

$$A_i \rightarrow (\mu_i, \sigma_i^2) \tag{3}$$

Atendiendo a este criterio se dividirá el conjunto de alternativas en dos subconjuntos:

- Conjunto de alternativas válidas. Constituido por aquellas alternativas cuya varianza sea menor o igual que M.

$$A_v \rightarrow \left\{ A_i \in A / \sigma_i^2 \leq M \right\} \tag{4}$$

- Conjunto de alternativas no válidas. Constituido por aquellas alternativas cuya varianza sea mayor que la cota M.

$$A_{nv} \rightarrow \left\{ A_i \in A \,/\, \sigma_i^2 > M \right\} \quad \textbf{(5)}$$

La alternativa óptima será aquella, de las pertenecientes al grupo de las alternativas válidas, cuyo valor medio sea máximo.

2.2.1.4 Criterio de varianza mínima con valor medio acotado

Este criterio permite que el decisor no se conforme con cualquier resultado esperado, sino que éste es limitado inferiormente por una determinada cantidad. Para ello, se fijará una cota inferior *M* para el mismo, de forma que se descartarán aquellas alternativas cuyo resultado esperado sea menor que *M*.

Considérese una alternativa A_i perteneciente a un grupo de alternativas A de un problema de decisión en ambiente de riesgo. Cada alternativa tendrá asociado una pareja de números constituida por su media y su varianza.

$$A_i \rightarrow (\mu_i, \sigma_i^2) \quad \textbf{(6)}$$

Según este criterio se podrá dividir el conjunto de alternativas en dos subconjuntos:

- Conjunto de alternativas válidas, constituido por aquellas alternativas cuyo valor medio sea mayor o igual que *M*.

$$A_v \rightarrow \left\{ A_i \in A \,/\, \mu_i \leq M \right\} \quad \textbf{(7)}$$

- Conjunto de alternativas no válidas, constituido por aquellas alternativas cuyo valor medio sea menor o igual que *M*.

$$A_{nv} \rightarrow \left\{ A_i \in A \,/\, \mu_i \leq M \right\} \quad \textbf{(8)}$$

2.2.2 Enfoque axiomático: *Teoría de la utilidad*

La toma de decisiones basada en la teoría de la utilidad se realiza mediante un punto de vista axiomático [10]. Es necesario construir una escala de preferencias que debe permitir la comparación entre las distintas alternativas. Por otro lado, también se debe tener la capacidad de identificar propiedades susceptibles de ser medidas para cada una de las alternativas, de manera que la comparación entre alternativas quede reducida a una simple comparación numérica.

A cada alternativa le corresponde una distribución de probabilidad llamada perspectiva aleatoria o lotería. Cada lotería representa la manera de modelar una alternativa en ambiente de riesgo, de forma que a los resultados de la misma se les denominará premios.

Puede distinguirse fundamentalmente entre dos tipos de lotería:

- Loterías simples o unietápicas (*l*): son aquellas cuyos premios (x_i) son la consecuencia de la elección de una alternativa, es decir, son los resultados. Su notación es:

$$l = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad p_i \in [0,1] \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{9}$$

- Loterías compuestas o multietápicas (L): aquellas cuyas premios (x_i) son nuevamente loterías, su notación es:

$$L = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & q_m \\ l_1 & \cdots & l_m \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathrm{q}_i \in [0,1] \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{m} q_i = 1 \tag{10}$$

La teoría de la utilidad postula, mediante una serie de axiomas, el comportamiento del decisor. Dichos axiomas permiten definir una función que revela la estructura de preferencias del conjunto de alternativas. Esta función es denominada función de utilidad. A continuación se describen los seis axiomas en los que se fundamenta la teoría de la utilidad en ambiente de riesgo [11]:

- Todo decisor racional puede ordenar los resultados monetarios del mejor al peor.
- Todo decisor racional puede reducir toda perspectiva aleatoria compuesta a otra simple equivalente a ella.
- Sea un conjunto de premios con estructura de *preorden completo*, donde x_1 es el mejor de los premios y x_2 es el peor de ellos. Todo decisor es capaz de asignar a cada uno de los premios x_i una probabilidad subjetiva u_i, de forma que le resulte indiferente recibir con certeza el premio x_i, o participar en una lotería formada por el mejor y el peor de los premios con probabilidades u_i y 1- u_i, respectivamente. A dicha probabilidad, u_i, se le denomina utilidad del premio.
- Todo decisor racional podrá sustituir cualquier lotería por otra equivalente a ella, formada sólo por los premios mejor y peor.
- Todo decisor racional es capaz de ordenar el conjunto de loterías, es decir, es decir, el conjunto de loterías tiene estructura de *preorden completo*.
- Dado un conjunto de loterías, formadas sólo por dos premios, los mismos en todas ellas, el decisor preferirá aquélla con mayor probabilidad del mejor premio.

La axiomática de Luce y Raiffa [10] permite definir la función de utilidad, como la probabilidad asignada al mejor resultado en su lotería equivalente:

$$\begin{aligned} u: \ & X \to [0,1] \\ & x_i \to u(x_i) = u_i \end{aligned} \tag{11}$$

2.2.2.1 Propiedades de la función de utilidad

Cualquier función de utilidad derivada de la axiomática de Luce y Raiffa verifica las propiedades que se enumeran a continuación:

- La función de utilidad definida sobre un conjunto de premios ordenados de peor a mejor es una función monótona no decreciente.
- La función utilidad de un decisor es única, salvo transformaciones lineales positivas de ésta.
- Las distintas actitudes del decisor frente al riesgo (aversión, preferencia y neutralidad), pueden ser deducidas de la forma de la función de utilidad.
- Principio de óptimo. La axiomática permite tomar una decisión, es decir, elegir una de las alternativas como óptima. Permitiendo reducir cualquier lotería a otra indiferente con solo dos premios, el mejor y el peor. El enunciado del principio de optimalidad es el siguiente:

Todo decisor racional es capaz de asignar a cada lotería l un número real, denominado utilidad esperada de la lotería, $l \rightarrow u(l) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$ *, de manera que la lotería óptima será aquella que tenga máxima utilidad esperada.*

2.2.2.2 Actitud del decisor frente al riesgo

La disposición de los decisores frente al riesgo puede ser distinta atendiendo, no únicamente a la conducta habitual del decisor, sino también respondiendo a la naturaleza del problema al que se enfrenta y el contexto en el que se realiza la decisión. A modo de ejemplo, considérense los siguientes casos:

- La entrada a un evento deportivo cuesta 40 €. Un individuo seguidor de uno de los equipos dispone únicamente de 20 €. Se le ofrece una apuesta en la que tiene el 50% de posibilidades de recibir como premio el doble de lo apostado y el 50 % de perder la suma apostada.
- A las puertas del mismo evento se encuentra otro individuo que dispone de 40 €, seguidor también del mismo equipo. Dicho individuo acostumbra a consumir durante los partidos palomitas y bebidas, pero en esta ocasión no tiene suficiente dinero para adquirirlas. Teniendo como posibilidad participar en la misma apuesta que el primer individuo.

La actitud de los dos individuos frente al riesgo, que supone apostar en la misma lotería es bien distinta. El primer individuo está ansioso por asistir al evento y el hecho de participar en la apuesta, le podría brindar la posibilidad de adquirir las entradas. Sin embargo, para el segundo individuo participar en la misma apuesta podría suponer la pérdida del dinero para comprar la entrada, riesgo que no estaría dispuesto a asumir.

2.2.2.3 Equivalente de certeza y valor monetario esperado

Considérese la siguiente lotería con premios monetarios (x_i) y sus respectivas probabilidades (p_i):

$$l = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \\ x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

A continuación se realizan las siguientes definiciones:

- ***Equivalente de certeza*** de una lotería es aquella cantidad $C \in \mathbb{R}$ que hace que al decisor le resulta indiferente recibir con seguridad la cantidad C o participar en la lotería l.
- ***Valor monetario esperado*** de una lotería es aquella cantidad $E(l) \in \mathbb{R}$ que representa el beneficio esperado del juego, es decir, la cantidad que el decisor espera obtener como promedio si participa sucesivas veces en esa lotería.

Por tanto, si u es una función de utilidad del decisor, C será el equivalente cierto de la lotería l si sus utilidades coinciden, es decir: $C \sim l \leftrightarrow u(C) = u(l)$.

El valor monetario esperado se obtiene mediante la expresión:

$$E(l) = \sum_{l=1}^{n} p_i x_i \tag{13}$$

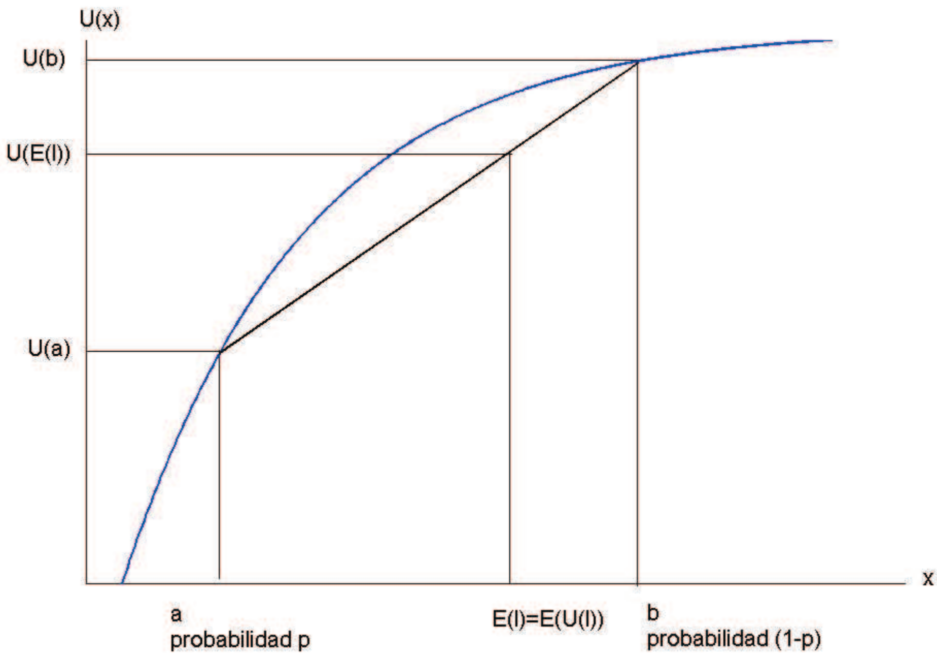

Figura 4 Relación entre el valor esperado, *E(l)*, y su utilidad, *U(E(l))*.

La relación entre el valor esperado de una lotería *E(l)* y la utilidad esperada *E(u(l))* puede observarse en la Figura 4. Si se determina la ecuación de la cuerda comprendida entre los puntos *a* y *b* de la gráfica, y teniendo en cuenta que *a* tiene una probabilidad de ocurrencia *p* y, la de *b* es 1-*p*, se obtiene:

$$y_{cuerda} = m(x-b)+u(b) \quad \text{donde} \quad m = \frac{u(b)-u(a)}{b-a} \tag{14}$$

Por otro lado:

$$E(l) = p \cdot a + (1-p)b \tag{15}$$

Tomando $x = E(l)$ y sustituyendo en (14), queda finalmente:

$$y_{cuerda}(E(l)) = p \cdot u(a) + (1-p)u(b) = E(u(l))$$

Teniendo en cuenta la definición de equivalente de certeza, la utilidad de ésta debe ser igual a la utilidad esperada de la lotería:

$$u(C) = E(u(l)) \tag{16}$$

O equivalentemente,

$$y_{cuerda}(E(l)) = E(u(l)) \tag{17}$$

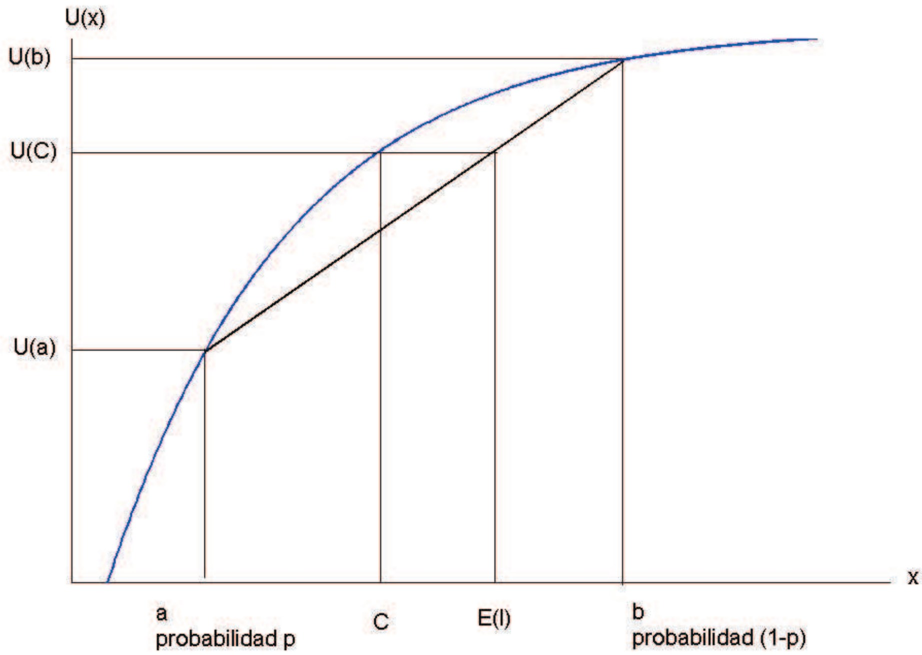

Figura 5 Relación entre el valor esperado, *E(l)*, su utilidad, *U(E(l))* y el equivalente de certeza, *C*.

Por último, suponiendo que la función de utilidad está escalada de tal manera, que sus valores en el eje vertical están comprendidos entre 0 y 1, se puede demostrar que se cumple la siguiente propiedad [7]:

$$E(u(l)) = 1 - p \tag{18}$$

2.2.2.4 Aversión al riesgo

Un decisor presenta aversión al riesgo si prefiere recibir una cantidad inferior al valor esperado de la lotería a participar en ella, es decir, no está dispuesto a asumir el riesgo que le supone participar en una lotería, aunque el beneficio esperado que se obtiene de ella sea mayor. Por tanto, un individuo presenta aversión al riesgo si $E(l) > C$.

Existen distintas formas de identificar la aversión al riesgo de un determinado decisor:

1. Si la función de utilidad es cóncava el decisor presenta aversión al riesgo, ya que el equivalente de certeza *C* tendrá un valor inferior al valor monetario esperado de la lotería *E(l)*, como puede observarse en la Figura 6.

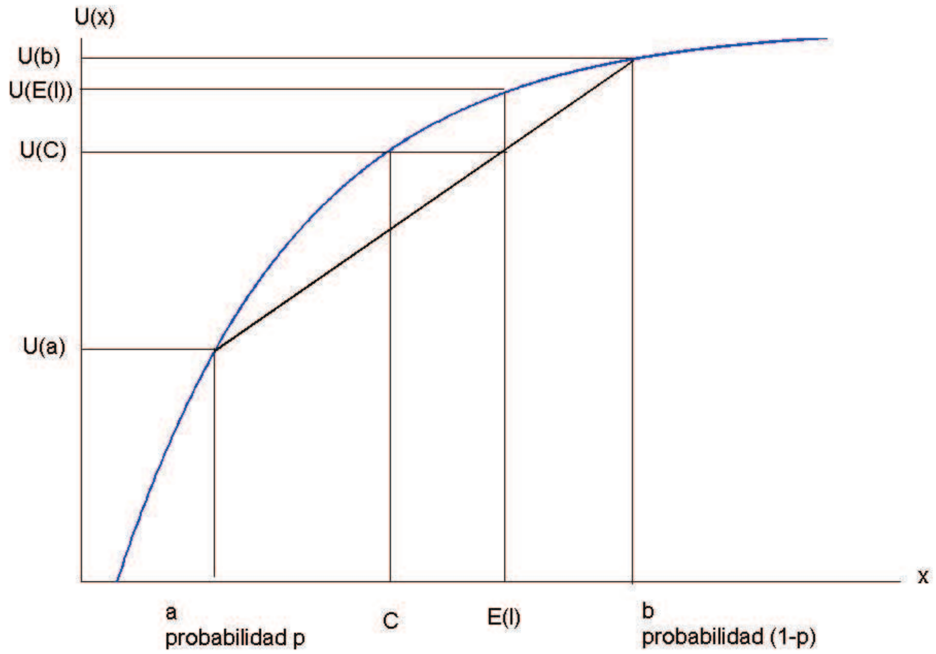

Figura 6 Función de utilidad de un decisor con aversión al riesgo.

2. Se define la prima de riesgo de una lotería como la diferencia entre su beneficio esperado y su equivalente cierto:

$$PR = E(l) - C \tag{19}$$

La prima de riesgo representa la cantidad a la que el decisor está dispuesto a renunciar por asumir el mínimo riesgo posible, es decir, por no jugar. Adicionalmente, la prima de riesgo es una medida del grado de aversión por el riesgo del decisor, ya que cuanto mayor sea su valor, mayor será dicha aversión del decisor. Un individuo presenta aversión al riesgo si $PR > 0$.

3. Función de aversión. Si la función de utilidad de un decisor es sucesivas veces derivable, puede definirse la función de aversión de la siguiente manera:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \quad \textbf{(20)}$$

Un individuo presenta aversión al riesgo cuando $r(x) > 0$.

Puede extraerse información adicional de la función de aversión, según ésta sea creciente o decreciente:

- En el caso de que la función de aversión sea creciente, el decisor tiene *aversión absoluta por el riesgo*, es decir, la aversión por el riesgo aumenta al aumentar la riqueza: cuanto más dinero tiene el individuo, más precavido se vuelve.
- Si la función de aversión es decreciente, el decisor tiene *aversión relativa por el riesgo*, es decir, al aumentar la riqueza disminuye la aversión por el riesgo. Cuanto más dinero tiene el individuo, menos precavido se vuelve.

2.2.2.5 Preferencia por el riesgo

Un decisor presenta preferencia por el riesgo si prefiere participar en una lotería, a cambio de una cantidad que supera el beneficio esperado de dicha lotería, lo que supone que el individuo está dispuesto a afrontar el riesgo que supone participar en ella. Por tanto, un individuo presenta preferencia por el riesgo cuando

$$E(l) < C \quad \textbf{(21)}$$

La preferencia por el riesgo únicamente viene caracterizada por la forma de la función de utilidad, ya que los conceptos de prima de riesgo y función de aversión son propios de comportamientos aversivos frente al riesgo.

Por tanto, atendiendo a la forma de la función de utilidad, un decisor presenta preferencia por el riesgo cuando dicha función sea convexa, ya que como se observa en la Figura 7, el valor del equivalente de certeza *C* es superior al valor monetario esperado de la lotería *E(l)*.

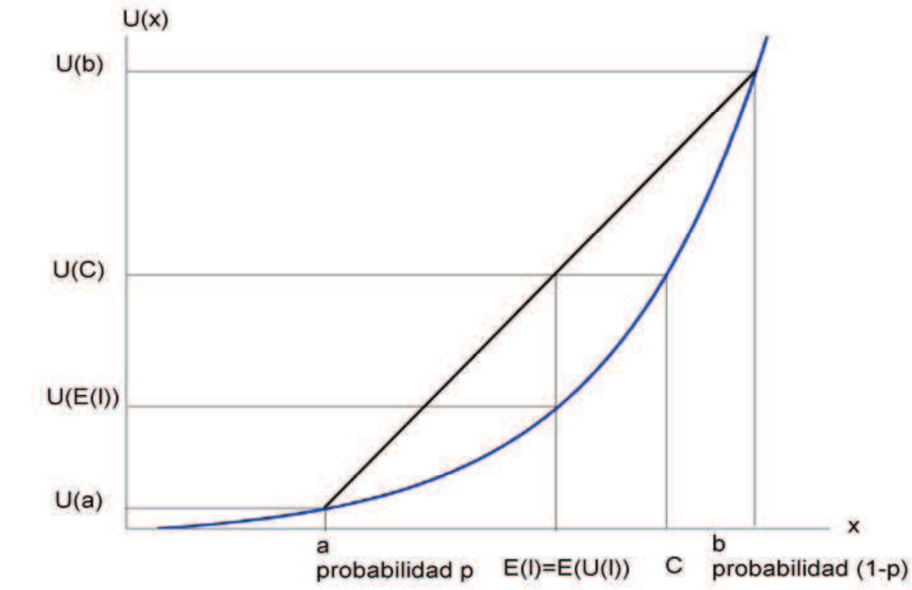

Figura 7 Función de utilidad de un decisor con preferencia por el riesgo.

2.2.2.6 Neutralidad frente al riesgo

La neutralidad al riesgo es el caso límite de los dos anteriores. Es decir, para el individuo es indiferente participar una lotería que recibir con seguridad el valor monetario esperado de ésta. En este caso, la función de utilidad es lineal, coincidiendo el valor del equivalente de certeza C y el valor esperado de la lotería *E(l)*, como puede apreciarse en la Figura 8.

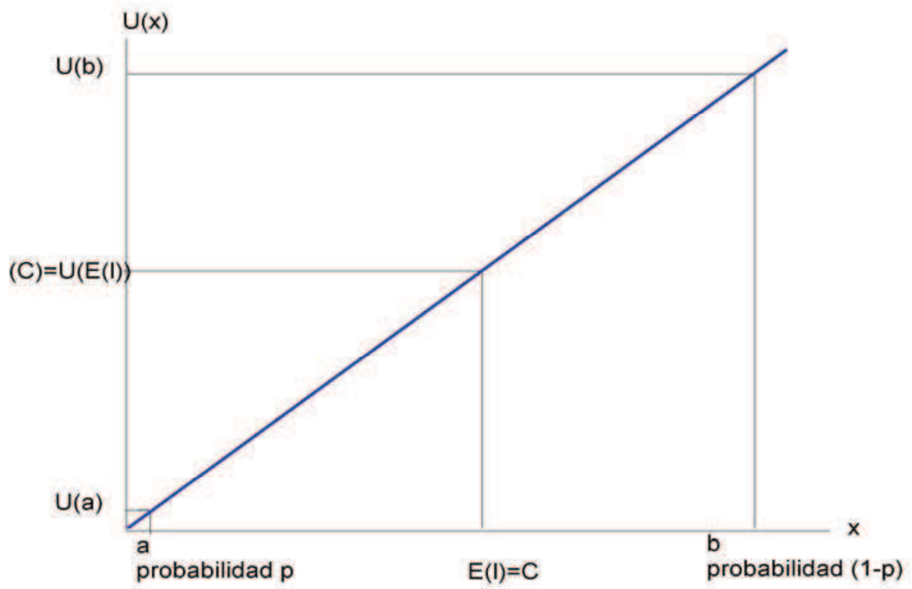

Figura 8 Función de utilidad de un decisor neutral al riesgo.

2.2.2.7 Criterio de eficiencia

Existen otros criterios de elección que no están basados en el principio de óptimo consecuencia de la axiomática de Luce y Raiffa. Uno de estos criterios es el de eficiencia, que se basa en determinar, de cada lotería, su media y su varianza, de manera que se considera una lotería más eficiente que otra si su media es mayor y su varianza menor.

Por tanto, sean la media y varianza de dos loterías l_i y l_j, se dice que la lotería l_i es más eficiente que la lotería l_j si cumple:

$$\begin{matrix} \mu_i \geq \mu_j \\ \sigma_i^2 < \sigma_j^2 \end{matrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{matrix} \mu_i > \mu_j \\ \sigma_i^2 \leq \sigma_j^2 \end{matrix} \tag{22}$$

En base al criterio anterior puede realizarse la siguiente división de un grupo de loterías:

- Conjunto de alternativas eficientes. Constituido por todas las loterías para las que no existen otras más eficientes que ellas.
- Conjunto de alternativas no eficientes. Constituido por aquellas loterías para las que existen otras loterías que son más eficientes que ellas.

En base a lo anterior, la lotería óptima se seleccionará de entre una de las pertenecientes al grupo de alternativas eficientes, siguiendo el criterio de la *función de utilidad aproximación media-varianza,* $\varphi_{\mu,\sigma^2}(l)$, que se detallará más adelante. El objetivo de este criterio es asociar a cada lotería eficiente un número real que represente la utilidad aproximada de dicha lotería. Siempre que la función de utilidad sea sucesivas veces derivable, la función de aproximación media-varianza puede ser aproximada mediante el desarrollo en serie de Taylor, en el entorno de la media de la lotería. Así, descartando los términos de orden superior a dos se tiene:

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(l) = u(\mu) + \frac{u''(\mu)}{2!}\sigma^2 \tag{23}$$

De esta manera una lotería eficiente será preferida a otra, si el valor obtenido mediante la aproximación media-varianza es mayor que el de la otra lotería:

$$l_i \succ l_j \iff \varphi_{\mu,\sigma^2}(l_i) > \varphi_{\mu,\sigma^2}(l_j) \tag{24}$$

2.2.2.8 Función de utilidad

Como se ha explicado en los apartados anteriores, la función de utilidad es la expresión matemática que representa el orden de preferencias del decisor ante cada uno de los resultados posibles de la lotería. La forma de dicha función es intrínseca a cada decisor, ya que ésta dependerá de sus preferencias, condicionadas por su actitud frente al riesgo y el entorno de decisión.

En este apartado se propone un tipo de función de utilidad conocida como la función exponencial [11]. Esta función permite representar un amplio conjunto de comportamientos frente al riesgo. La función de utilidad exponencial, para un criterio de evaluación de las soluciones X queda definida por la siguiente expresión:

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-(x-x_{\min})/\rho}}{1-e^{-(x_{\max}-x_{\min})/\rho}} & \text{si } \rho \neq \infty \\ \dfrac{x-x_{\min}}{x_{\max}-x_{\min}} & \text{si } \rho = \infty \end{cases} \tag{25}$$

La función de utilidad exponencial está escalada para que tome valores comprendidos en el intervalo [0,1], cuando la variable correspondiente al criterio de evaluación, x, está comprendida entre sus valores mínimo y máximo [x_{min}, x_{max}].

En la figura se muestra la familia de funciones de utilidad que se obtiene variando el valor del parámetro ρ denominado *tolerancia al riesgo*.

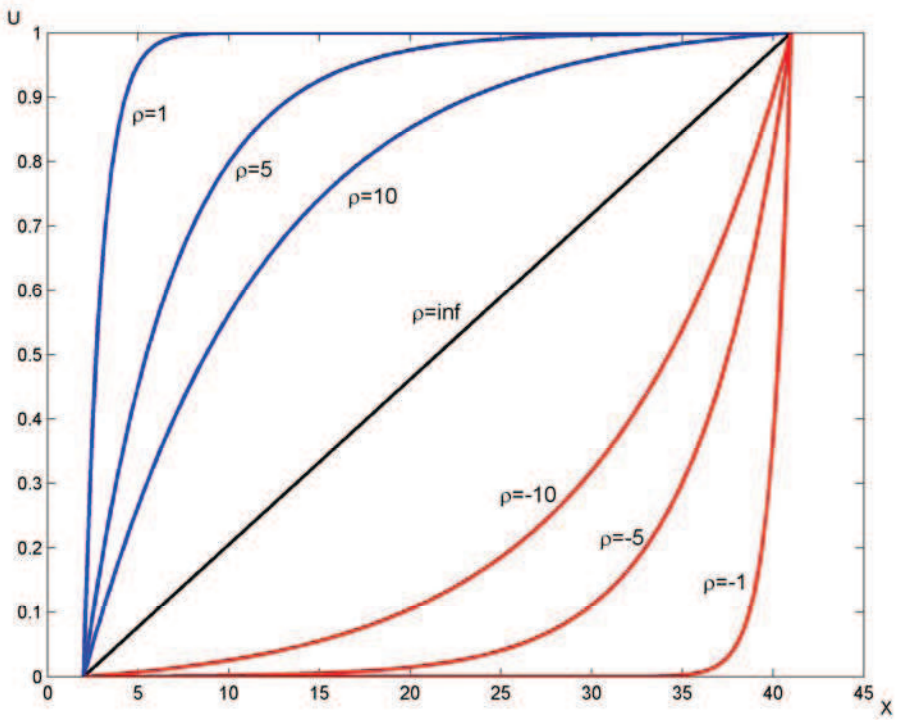

Figura 9 Familia de la función de utilidad exponencial en función de la tolerancia al riesgo, ρ.

En la Figura 9 puede observarse la subfamilia de curvas correspondiente a un decisor con aversión al riesgo (ρ > 0) representadas en color azul. También puede verse cómo al aumentar el valor de la tolerancia al riesgo, la actitud del decisor es cada vez menos conservadora hasta que esta alcanza un valor infinito, siendo en este caso la actitud, neutral al riesgo. Por otro lado, el conjunto de curvas representadas en rojo corresponden a un decisor con preferencia por el riesgo, caracterizados por valores negativos de la tolerancia al riesgo, en este caso, cuanto menor es el valor de ρ, menor es la preferencia al riesgo del decisor.

La función de utilidad exponencial tiene la capacidad de caracterizar el nivel de aversión o preferencia al riesgo, mediante un único parámetro ρ, que además puede determinarse a partir del *equivalente de certeza*.