

La Función de Transferencia

3.1. Introducción

Las ecuaciones que describen el comportamiento de la máquina de inducción son no-lineales y sólo es posible resolverlas mediante técnicas de integración numérica por ordenador.

En cualquier caso se puede adquirir una visión interesante de la máquina de inducción mediante la linealización de sus ecuaciones, a parte del hecho de poder predecir el comportamiento alrededor de un punto de trabajo con una cierta exactitud para pequeñas oscilaciones alrededor del mismo.

Esta linealización puede ser realizada mediante el desarrollo de Taylor alrededor de un punto de trabajo. Entonces las máquinas pueden tratarse como sistemas lineales al referirse a pequeños cambios de operación de las mismas. De esta forma podría utilizarse la teoría de sistemas lineales tanto para calcular autovalores y hacer predicciones relacionadas con la estabilidad, como para establecer funciones de transferencia para el uso en el diseño de sistemas de control. En este capítulo se van a establecer las ecuaciones linealizadas determinándose los autovalores y las funciones de transferencia.

3.2. Linealización de ecuaciones

Las ecuaciones que describen el comportamiento de la inducción son no lineales por naturaleza, ya que aunque sus coeficientes (los parámetros de la máquina) pudiesen considerarse como constantes y se despreciasen los efectos de la saturación y la histéresis en el circuito magnético, en algunos de sus términos aparecen productos de variables. Más concretamente, en la ecuación del par electromagnético interno aparecen productos de intensidades (o de flujos o de flujos por intensidades) y en las ecuaciones de fuerza electromotriz de rotación aparece un producto de velocidad por intensidad (o flujo). Esto hace que, para un caso general, el sistema sólo pueda resolverse mediante alguna técnica de integración numérica (Euler, Ruge-Kutta, u otras), con la ayuda de un ordenador. Sin embargo, la linealización del sistema de ecuaciones entorno a un punto de funcionamiento permite obtener una considerable cantidad conocimiento sobre el comportamiento en pequeña excursión de la máquina. Aunque para linealizar de forma automática estas ecuaciones pueden utilizarse los algoritmos de biblioteca estándar de ordenador, es importante ser conscientes de los pasos necesarios para realizar la linealización del modelo. Este procedimiento se establece mediante la aplicación de la expansión en serie de Taylor sobre un punto de funcionamiento estacionario. El conjunto de ecuaciones diferenciales lineales resultante describe el comportamiento dinámico para pequeñas perturbaciones (desplazamiento) o

pequeña excursión (modelos de pequeña excursión o señal) en torno a este punto de funcionamiento. Los modelos de pequeña excursión de las máquinas, al ser lineales con respecto a las pequeñas perturbaciones, permiten utilizar toda la enorme base teórica de los sistemas lineales. En particular permite el cálculo de valores propios y establecer funciones de transferencia entre cualquier par de variables entrada-salida.

Cuando las señales de excitación son sencillas, la linealización también permite la obtención de soluciones analíticas. Este tipo de soluciones, si bien son aproximadas, tienen una potencia de la que carecen por completo las soluciones numéricas y es que, por un lado, permiten conocer qué parámetros influyen en las respuestas y cuánto y, por otro, permiten una descripción cualitativa del comportamiento del sistema.

En esta sección se presenta el material necesario para linealizar las ecuaciones no lineales del modelo dinámico de las máquinas inducción, describiéndose el procedimiento para la obteniéndose los autovalores y las funciones de transferencia de la inducción.

El material presentado en este capítulo pretende servir únicamente de soporte teórico para la obtención de los modelos de pequeña excursión caracterizan el funcionamiento de las máquinas de inducción, ya que los lenguajes de programación actuales permiten obtener automáticamente la linearización, el cálculo de autovalores (valores propios) y la formulación de las funciones de transferencia, a partir de las ecuaciones no lineales que describen la dinámica de estas máquinas [1-31].

Las ecuaciones linealizadas de las máquinas de inducción se derivan convenientemente de las ecuaciones de tensión expresadas en términos de parámetros constantes y funcionando con excitaciones (fuerzas) constantes, independientes del tiempo. En el caso de la máquina de inducción este requisito se satisface durante el funcionamiento equilibrado en régimen de permanente (estado de equilibrio estacionario), con las ecuaciones de tensión expresadas en el sistema (ejes) de referencia síncrono. Dado que las intensidades y los flujos concatenados no son variables independientes, las ecuaciones de la máquina pueden escribirse tanto con las intensidades, los flujos concatenados (enlaces de flujo), o las concatenaciones de flujo por segundo (enlaces de flujo por segundo) como variables de estado. La elección de la variable de estado suele hacerse en función de la aplicación. En este capítulo, y sin pérdida de generalidad, se utilizan las intensidades como variables de estado.

3.1.1. Modelo de pequeña señal

Existen dos procedimientos para obtener las ecuaciones linealizadas de la máquina. El primero consiste en linealizar las ecuaciones de la máquina de inducción consiste en escribir todas las variables como la suma del valor de régimen permanente y un incremento:

$$f_i = f_{io} + \Delta f_i$$

segundo es el empleo del desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto de funcionamiento en régimen permanente (punto de equilibrio estacionario):

$$g(f_i) = g(f_{i0}) + g'(f_{i0})df_i + \frac{g''(f_{i0})}{2!}d^2f_i + \dots \quad (3.1)$$

donde:

$$f_i = f_{i0} + \Delta f_i$$

Si se realizan todas las multiplicaciones y se cancelan las expresiones correspondientes al régimen permanente de ambos lados de las ecuaciones y se desprecian todos los productos de los términos de pequeña excursión ($\Delta f_1 \Delta f_2$, por ejemplo), se obtienen las ecuaciones de pequeña señal:

Por cualquiera de los dos métodos las ecuaciones linealizadas quedan

$$\begin{bmatrix} \Delta v_{qs}^e \\ \Delta v_{ds}^e \\ \Delta v_{qr}^e \\ \Delta v_{dr}^e \\ \Delta T_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_s'(X_{lr}' + X_M)}{D} & \frac{\omega_e}{\omega_b} & -\frac{r_s X_M}{D} & 0 & 0 \\ -\frac{\omega_e}{\omega_b} & \frac{r_s'(X_{lr}' + X_M)}{D} & 0 & -\frac{r_s X_M}{D} & 0 \\ -\frac{r_r' X_M}{D} & 0 & \frac{r_r'(X_{ls}' + X_M)}{D} & \frac{\omega_e - \omega_{r0}}{\omega_b} & -\psi_{dr}^e \\ 0 & -\frac{r_r' X_M}{D} & -\frac{\omega_e - \omega_{r0}}{\omega_b} & \frac{r_r'(X_{ls}' + X_M)}{D} & \psi_{qr}^e \\ \frac{X_M}{2D} \psi_{dr}^e & -\frac{X_M}{2D} \psi_{qr}^e & -\frac{X_M}{2D} \psi_{ds}^e & \frac{X_M}{2D} \psi_{qs}^e & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_{qs}^e \\ \Delta \psi_{ds}^e \\ \Delta \psi_{qr}^e \\ \Delta \psi_{dr}^e \\ \frac{\Delta \omega_r}{\omega_b} \end{bmatrix} - 2\omega_b H \frac{\Delta \omega_r}{\omega_b} \quad (3.2)$$

Si se expresa esta ecuación de la siguiente forma:

$$E dx = F x + u \quad (3.3)$$

Entonces:

$$E = \frac{1}{\omega_b} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2H\omega_b \end{bmatrix}$$

$$F = - \begin{bmatrix} \frac{r_s(X'_{lr} + X_M)}{D} & \frac{\omega_e}{\omega_b} & -\frac{r_s X_M}{D} & 0 & 0 \\ -\frac{\omega_e}{\omega_b} & \frac{r_s(X'_{lr} + X_M)}{D} & 0 & -\frac{r_s X_M}{D} & 0 \\ -\frac{r'_r X_M}{D} & 0 & \frac{r'_r(X'_{ls} + X_M)}{D} & \frac{\omega_e - \omega_{r0}}{\omega_b} & -\psi'_{dr} \\ 0 & -\frac{r'_r X_M}{D} & -\frac{\omega_e - \omega_{r0}}{\omega_b} & \frac{r'_r(X'_{ls} + X_M)}{D} & \psi'_{qr} \\ \frac{X_M}{2D} \psi'_{dr} & -\frac{X_M}{2D} \psi'_{qr} & -\frac{X_M}{2D} \psi'_{ds} & \frac{X_M}{2D} \psi'_{qs} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Al pasar a forma canónica:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (3.5)$$

entonces

$$\frac{dx}{dt} = (\mathbf{E})^{-1} \mathbf{F}x + (\mathbf{E})^{-1} \mathbf{u} \quad (3.6)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{E})^{-1} \mathbf{F} \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{E})^{-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1.2. Expansión en series infinitas

Cuando un modelo es muy complejo matemáticamente es necesario recurrir a técnicas como las representaciones en series infinitas. Las soluciones en series infinitas son usadas generalmente para aproximar el valor de una función en un punto arbitrario con cierto grado de precisión.

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x_0} (x - x_0)^k \quad (3.8)$$

Donde $f(x)$ es la expansión alrededor del punto x_0

Dados: $f(x)$ $n \times 1$ y $x : m \times 1$, la derivada de una función vectorial por un vector es:

$$\frac{df(x)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_{n-1}(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Para el caso de un modelo escalar y una variable de estado resulta:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad (3.10)$$

Aproximando $f(x(t), u(t))$ por una expansión en series de Taylor alrededor de un punto de operación $x_{op}; u_{op}$

$$\begin{aligned} f(x(t), u(t)) &= f(x_{op}, u_{op}) + \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x_{op}, u_{op}} (x - x_{op}) + \\ &+ \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{x_{op}, u_{op}} (u - u_{op}) + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Además el punto de operación debe satisfacer la condición $f(x_{op}; u_{op}) = 0$; donde x_{op} generalmente puede ser seleccionado arbitrariamente ajustando el valor de la entrada u_{op} :

Definiendo:

$$\begin{aligned} A &\triangleq \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x_{op}, u_{op}} & B &\triangleq \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{x_{op}, u_{op}} & x_\delta(t) &= x(t) - x_{op} \\ & & & & u_\delta(t) &= u(t) - u_{op} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{dx_\delta(t)}{dt} = Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t) \quad (3.13)$$

Si además se tiene una señal de salida:

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (3.14)$$

Aproximando la función no-lineal $g(x(t), u(t))$ por una expansión en series de Taylor y truncando los términos de orden superior se tiene:

$$g(x(t), u(t)) = g(x_{op}, u_{op}) + \left(\frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right)_{x_{op}, u_{op}} (x - x_{op}) + \left(\frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right)_{x_{op}, u_{op}} (u - u_{op}) + \dots \quad (3.15)$$

$$C \triangleq \left(\frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right)_{x_{op}, u_{op}} \quad D \triangleq \left(\frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right)_{x_{op}, u_{op}} \quad (3.16)$$

3.1.3. Modelos Múltiples.

A continuación se analiza el caso en que se tengan modelos con múltiples entradas, salidas y variables de estado. El tratamiento es similar a lo visto anteriormente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{q-1}(t) \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ g_{q-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_q(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Usando notación vectorial

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad (3.19)$$

$$y = g(x(t), u(t)) \quad (3.20)$$

Extendiendo al caso vectorial la expansión en series de Taylor hecha para el caso escalar se tiene:

$$\dot{x}_\delta(t) = Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t) \quad (3.21)$$

$$y_\delta(t) = Cx_\delta(t) + Du_\delta(t) \quad (3.22)$$

$$x_\delta = x - x_{op}, u = u - u_{op}, y_\delta = y - y_{op}, y_{op} = g(x_{op}, u_{op}) \quad (3.23)$$

Donde las matrices son:

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_{op}, u_{op}} \quad \text{dimensión } nxn \quad (3.24)$$

$$B = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{x_{op}, u_{op}} \quad \text{dimensión } nxm \quad (3.25)$$

$$C = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_{op}, u_{op}} \quad \text{dimensión } qxn \quad (3.26)$$

$$D = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)_{x_{op}, u_{op}} \quad \text{dimensión } qxm \quad (3.27)$$

3.1.4. Modelo lineal de máquina asíncrona usando el desarrollo en series.

Si se quiere incluir como señal de entrada la variación en frecuencia el método de pequeña señal resulta más engorroso y no es fácil el despejar la frecuencia en las ecuaciones resultantes. Por tanto en este trabajo dado que se va estudiar la respuesta de las máquinas ante perturbaciones en frecuencia se opta por usar este procedimiento debido a su mayor sencillez y fácil programación.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{qs} &= \omega_b \left(v_{qs} - a_1 \psi_{qs} - \frac{\omega_e}{\omega_b} \psi_{ds} + a_2 \psi_{qr} \right) \\ \dot{\psi}_{ds} &= \omega_b \left(v_{ds} - a_1 \psi_{ds} + \frac{\omega_e}{\omega_b} \psi_{qs} + a_2 \psi_{dr} \right) \\ \dot{\psi}_{qr} &= \omega_b \left(v_{qr} + a_3 \psi_{qs} - a_4 \psi_{qr} - \frac{\omega_e - \omega_r}{\omega_b} \psi_{dr} \right) \\ \dot{\psi}_{dr} &= \omega_b \left(v_{dr} + a_3 \psi_{ds} + \frac{\omega_e - \omega_r}{\omega_b} \psi_{qr} - a_4 \psi_{dr} \right) \\ \dot{\omega}_{ru} &= \frac{1}{2H} \left[\frac{X_m}{D} (\psi_{qs} \psi_{dr} - \psi_{ds} \psi_{qr}) - T_L \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{r_s X_{rr}}{D}, a_2 = \frac{r_s X_m}{D}, a_3 = \frac{r_r X_m}{D}, a_4 = \frac{r_r X_{ss}}{D} \\ \omega_{eu} &= \frac{\omega_e}{\omega_b}, \omega_{slu} = \frac{\omega_e - \omega_r}{\omega_b}, \omega_{ru} = \frac{\omega_r}{\omega_b} \\ D &= X_{ss} X_{rr} - X_m^2; X_{ss} = X_{ls} + X_m; X_{rr} = X_{lr} + X_m \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para (3.28) el vector de estado es:

$$\mathbf{x}^T = [\psi_{qs} \quad \psi_{ds} \quad \psi_{qr} \quad \psi_{dr} \quad \omega_{ru}] \quad (3.30)$$

Y el vector de variables de entrada será:

$$\mathbf{u}^T = [v \quad T_L \quad f_e] \quad (3.31)$$

$$\mathbf{u}^T = [v_{qs} \quad v_{ds} \quad v_{qr} \quad v_{dr} \quad T_e \quad \omega_e]$$

Donde v es el módulo de la tensión de alimentación del estator, T_L es el par de carga y ω_e es la frecuencia eléctrica de la red.

Las funciones de transferencia a calcular son

Por tanto la función $y(x,u)$ es:

$$y(x,u) = \begin{bmatrix} \omega_{ru} \\ T_e \\ P \\ Q \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{ru} \\ \frac{X_m}{D} (\psi_{qs}\psi_{dr} - \psi_{ds}\psi_{qr}) - T_L \\ u_{qs}i_{qs} + u_{ds}i_{ds} \\ u_{qs}i_{ds} - u_{ds}i_{qs} \\ \sqrt{\frac{i_{qs}^2 + i_{ds}^2}{2}} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} X_{rr} & 0 & -X_M & 0 \\ 0 & X_{rr} & 0 & -X_M \\ -X_M & 0 & X_{ss} & 0 \\ 0 & -X_M & 0 & X_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{qs} \\ \psi_{ds} \\ \psi_{qr} \\ \psi_{dr} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Sustituyendo i_{qs} y i_{ds} en función de las variables de estado en (3.32) resulta:

$$y(x,u) = \begin{bmatrix} \omega_{ru} \\ T_e \\ P \\ Q \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{ru} \\ \frac{X_m}{D} (\psi_{qs}\psi_{dr} - \psi_{ds}\psi_{qr}) - T_L \\ \frac{u_{qs}}{D} (X_{rr}\psi_{qs} - X_M\psi_{qr}) + \frac{u_{ds}}{D} (X_{rr}\psi_{ds} - X_M\psi_{dr}) \\ \frac{u_{qs}}{D} (X_{rr}\psi_{qs} - X_M\psi_{qr}) - \frac{u_{ds}}{D} (X_{rr}\psi_{ds} - X_M\psi_{dr}) \\ \frac{1}{D} \sqrt{\frac{(X_{rr}\psi_{qs} - X_M\psi_{qr})^2 + (X_{rr}\psi_{ds} - X_M\psi_{dr})^2}{2}} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

3.1.5. Autovalores y estabilidad de pequeña señal

Las raíces de la ecuación característica del sistema, $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 0$

Con las ecuaciones diferenciales lineales escritas en forma variable de estado, el vector \mathbf{u} representa las funciones de entrada (fuerzas). Si \mathbf{u} es igual a cero (en ausencia de fuerzas externas), la solución general de la homogénea o la respuesta libre (no forzada) del sistema:

$$p\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

es de la forma:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{K}$$

donde \mathbf{K} es un vector formado por un conjunto arbitrario de condiciones iniciales y la exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$ representa la respuesta libre (no forzada) del sistema. La exponencial matricial suele denominarse matriz de transición de estado. Se considera que la estabilidad de pequeña señal (desplazamiento) está asegurada si todos los elementos de la matriz de transición (exponencial matricial) tienden forma asintótica a cero conforme el tiempo tiende a infinito. El comportamiento asintótico de todos los elementos de la matriz se produce siempre que todas las raíces de la ecuación (polinomio) característica de \mathbf{A} tienen parte real negativa, definiéndose la ecuación característica de \mathbf{A} como:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

en la que \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensión adecuada y λ , son las raíces de la ecuación característica de \mathbf{A} , también denominadas raíces características, raíces latentes o autovalores.

Los autovalores o valores propios proporcionar un medio sencillo de predecir el comportamiento de una máquina de inducción en cualquier condición de funcionamiento equilibrado, en particular su estabilidad. Los autovalores pueden ser reales o complejos. Cuando son reales las respuestas son exponenciales, con asíntotas limitadas en el caso de que sean negativas, e ilimitadas (inestable) cuando son positivas. Cuando son complejos, se producen como pares de raíces conjugadas, lo que se traducen una respuesta oscilatoria de las variables de estado. Partes reales negativas corresponden a variables de estado u oscilaciones de variables de estado que se van amortiguando exponencialmente con el tiempo. Cuando las partes reales son positivas indican una respuesta oscilatoria con crecimiento exponencial con el tiempo, es decir, una (respuesta inestable) condición de inestabilidad.

Tabla 3.1.1. Autovalores de máquinas de inducción de 60 Hz en tres puntos de funcionamiento.

Potencia (CV)	Arranque $s = 1$	Velocidad nominal $s = s_N$	Vacío $s = 0$	Generador $s = -s_N$
3 CV	$-4.57 \pm j377$	$-85.6 \pm j313$	$-89.2 \pm j316$	
	$-313 \pm j377$	$-223 \pm j83.9$	$-218 \pm j60.3$	
	1.46	-16.8	-19.5	
50 CV	$-2.02 \pm j377$	$-49.4 \pm j356$	$-50.1 \pm j357$	
	$-198 \pm j377$	$-142 \pm j42.5$	$-140 \pm j18.2$	
	1.18	-14.4	-17.0	
500 CV	$-0.872 \pm j377$	$-41.8 \pm j374$	$-41.8 \pm j374$	
	$-70.3 \pm j377$	$-15.4 \pm j41.5$	$-14.3 \pm j42.8$	
	0.397	-37.5	-29.6	
2250 CV	$-0.428 \pm j377$	$-24.5 \pm j376$	$-24.6 \pm j376$	
	$-42.6 \pm j377$	$-9.36 \pm j41.7$	$-9.05 \pm j42.5$	
	0.241	-17.9	-18.5	

Tabla 3.1.2. Autovalores de máquinas de inducción de 50 Hz en tres puntos de funcionamiento.

Potencia (CV)	Arranque $s = 1$	Velocidad nominal $s = s_N$	Vacío $s = 0$	Generador $s = -s_N$
3 CV	$-4.57 \pm j377$	$-85.6 \pm j313$	$-89.2 \pm j316$	
	$-313 \pm j377$	$-223 \pm j83.9$	$-218 \pm j60.3$	
	1.46	-16.8	-19.5	
50 CV	$-2.02 \pm j377$	$-49.4 \pm j356$	$-50.1 \pm j357$	
	$-198 \pm j377$	$-142 \pm j42.5$	$-140 \pm j18.2$	
	1.18	-14.4	-17.0	
500 CV	$-0.872 \pm j377$	$-41.8 \pm j374$	$-41.8 \pm j374$	
	$-70.3 \pm j377$	$-15.4 \pm j41.5$	$-14.3 \pm j42.8$	
	0.397	-37.5	-29.6	
2250 CV	$-0.428 \pm j377$	$-24.5 \pm j376$	$-24.6 \pm j376$	
	$-42.6 \pm j377$	$-9.36 \pm j41.7$	$-9.05 \pm j42.5$	
	0.241	-17.9	-18.5	

Los autovalores o valores propios de la Tabla 3.1.1 corresponden a las máquinas que figuran en Krause []. Como puede verse, la respuesta de la máquina de inducción viene descrita por cinco variables de estado y, por lo tanto, cinco autovalores o valores propios. La Tabla 3.1.2 muestra los conjuntos de autovalores para cada máquina funcionando con frecuencia nominal y a tres velocidades distintas: en el punto de arranque, a plena carga y en vacío. Las Fig. 3.2.1 y 3.2.2 muestran la variación de los autovalores (parte real y parte imaginaria positiva) con la velocidad del rotor, desde el arranque hasta el sincronismo, para los motores de 3 y 2250 CV, respectivamente. Como puede verse, en el arranque los dos pares de autovalores complejos conjugados tienen ambos una frecuencia (parte imaginaria) correspondiente a la pulsación de la red,

ω_b . La frecuencia (pulsación) de un par complejo conjugado disminuye a medida que aumenta la velocidad desde el arranque hasta el sincronismo, mientras que la frecuencia del otro par complejo conjugado sigue siendo de aproximadamente la de la red, ω_b -de hecho, casi igual a la de la red, ω_b para las máquinas de mayor potencia. Los autovalores o valores propios dependen de los parámetros de la máquina y es difícil establecer una relación analítica entre un cambio en un autovalor con un cambio en un parámetro de una máquina específica. Es posible, sin embargo, establecer una asociación entre valores propios y las variables de la máquina. Por ejemplo, el par conjugado complejo que se mantiene a una frecuencia próxima a la de la red, ω_b , se asocia principalmente con las corrientes transitorias (componentes unidireccionales de las oscilaciones exponenciales amortiguadas) en los devanados del estator. Estas corrientes se reflejan en la referencia giratoria sincrónica como una oscilación exponencial amortiguada de 60 Hz. Más adelante se verá que este par conjugado complejo, que se ha denominado como autovalor del estator las figuras 3.2.1 y 3.2.2, no está presente cuando se desprecian los transitorios eléctricos en las ecuaciones de tensión del estator. De ello se deduce que la respuesta transitoria de la máquina está influenciada por este par de valores propios complejos conjugados cada vez que una alteración provoca un transitorio con componente de continua (desplazamiento) en las corrientes del estator. En este punto conviene recordar que anteriormente se ha mostrado (observado) una pulsación transitoria en el par instantáneo de 60 Hz durante el transitorio de aceleración libre (en vacío) y tras una falta trifásica en los terminales de la máquina, con la máquina operando inicialmente en cerca de las condiciones nominales. También pudo señalarse que las oscilaciones eran más amortiguadas en el caso de las máquinas de menor potencia que en las máquinas de mayor potencia. En la Tabla 3.1.1 puede observarse que las magnitudes de las partes reales de los valores propios complejos con una frecuencia que corresponde a la pulsación de la red, ω_b son mayores, lo que significa más amortiguamiento, para máquinas de menor potencia que para las máquinas mayores.

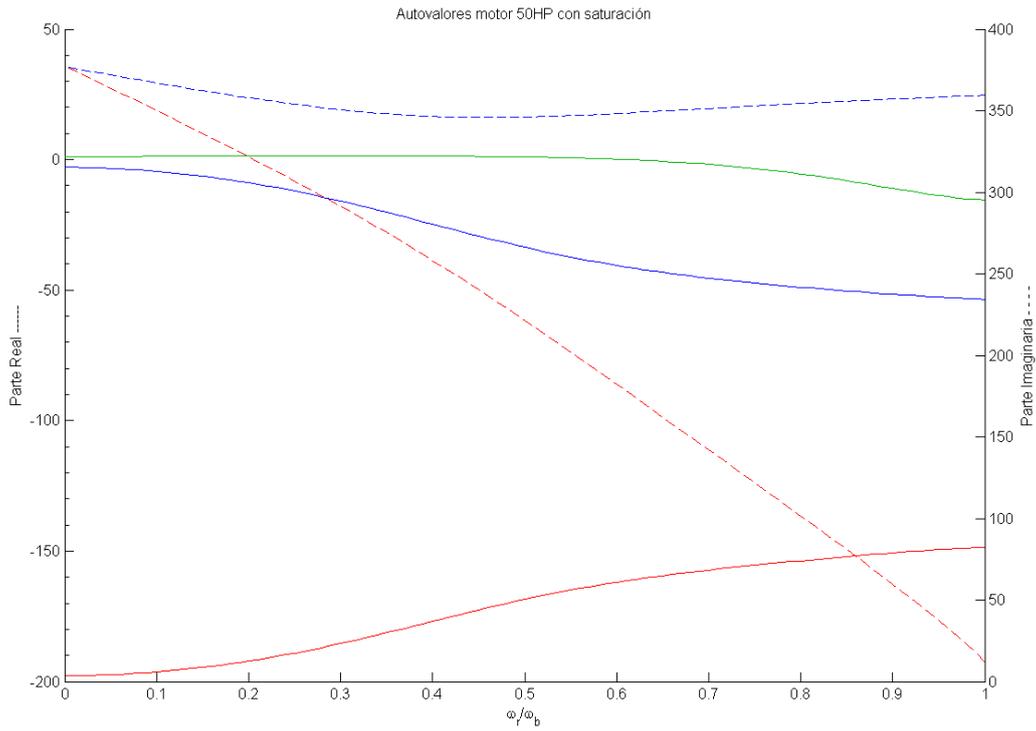


Fig. 3.2.1. Variación de los autovalores de una máquina de inducción de 3 CV con la velocidad.

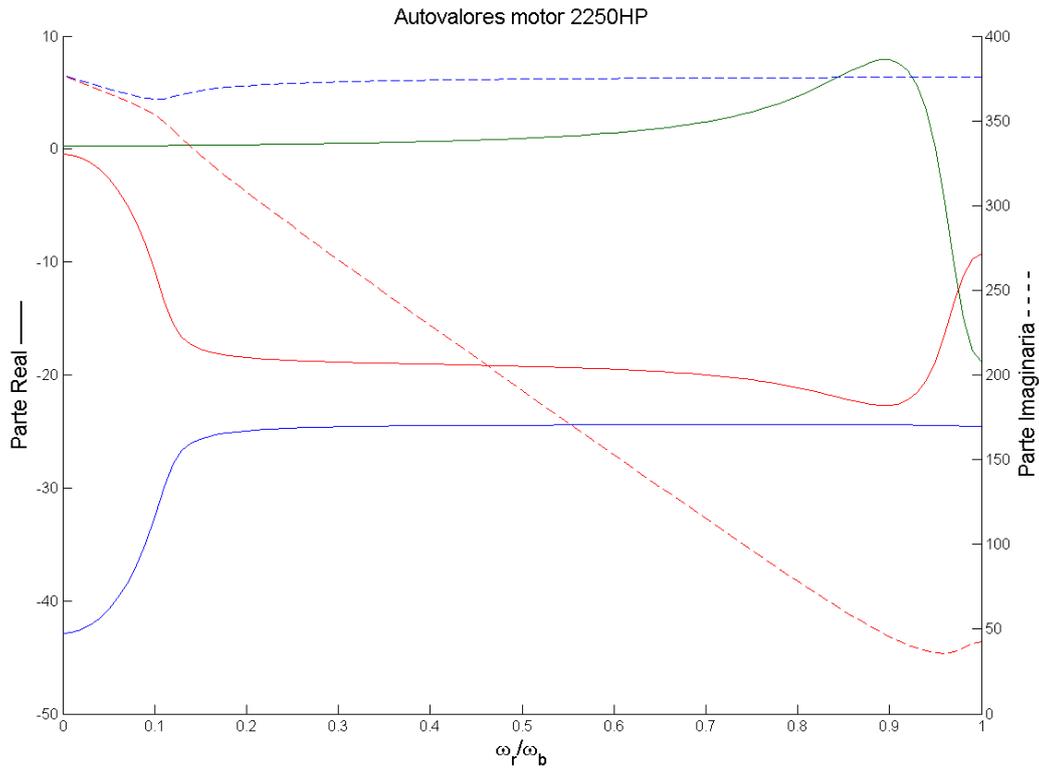


Fig. 3.2.2. Variación de los autovalores de una máquina de inducción de 2250 CV con la velocidad.

El par de autovalores complejo conjugado que varía de frecuencia a medida que varía la velocidad del rotor se asocia principalmente con los transitorios en los circuitos eléctricos del rotor y se denota en las figuras 3.1.1 y 3.1.2 como valor propio del "rótór". Este par complejo conjugado no está presente cuando se desprecian los transitorios eléctricos del rórór. El amortiguamiento asociado a este par conjugado es menor para las máquinas de mayor potencia que para las máquinas más pequeñas. Debe recordarse que durante la aceleración libre, las máquinas 3 50 CV se van acercando a la velocidad de sincronismo de forma exponencial (amortiguado) mientras que las de 500 2250 CV mostraron oscilaciones amortiguadas sobre la velocidad sincrónica. Una respuesta similar puede observarse conforme la máquina se va acercando a su punto final de trabajo, tras un cambio brusco del par de carga o una falta trifásica en los terminales. Este comportamiento corresponde a lo que predice este valor propio.

Es interesante observar que este valor propio está notablemente influenciado por la velocidad del rotor, mientras que el valor propio de alta frecuencia del "estator" no lo está. Esto se debe, por supuesto, al hecho de que para una determinada inercia y la amplitud de par, una perturbación de par de baja frecuencia provocará una mayor variación en la velocidad del rórór que si fuese de alta frecuencia.

Un valor propio real significa una respuesta exponencial. Caracterizarían el comportamiento de las ecuaciones de la máquina de inducción en el caso de que se despreciasen todos los transitorios eléctricos o, en el caso de una máquina real de la máquina, los transitorios eléctricos estuviesen fuertemente amortiguados como en el caso de las máquinas de pequeña potencia. Tal vez la característica más interesante de este valor propio, que se denota como el valor propio real en las figuras 3.1.1 y 3.1.2, es que puede relacionarse con la curva par-velocidad de estado estacionario (régimen permanente). Si se piensa por un momento en la característica estacionaria par-velocidad, nos damos cuenta de que una máquina de inducción puede operar de manera estable sólo en la parte de pendiente negativa de la curva par-velocidad. Si se considera por un momento un punto de trabajo en la parte de pendiente positiva de la curva par-velocidad, nos encontraríamos con que cualquier pequeña perturbación haría que la máquina se alejase de este punto de funcionamiento, ya sea acelerando hacia la región de pendiente negativa o deceleración para detenerse y revertir el sentido de giro, según la naturaleza del par de carga. Un valor propio positivo se corresponde con un sistema que se alejan de un punto de funcionamiento. Debe observarse que este autovalor real es positivo durante la región de pendiente positiva de la curva par-velocidad, pero se hace negativa una vez que se supera el punto de par máximo y se pasa a la zona estable de pendiente negativa.

3.1.6. Funciones de transferencia

Las ecuaciones linealizadas de la máquina inducción son de uso frecuente en el análisis y diseño de los controles asociados con la máquina. Por ejemplo, el diseño de controles de velocidad para máquinas de inducción en accionamientos de velocidad variable, se ve facilitada por la linealización de ecuaciones escrita en forma de función de transferencia que relaciona la variable de salida que se controla con la variable de entrada de control. En menor medida, las funciones de transferencia de las ecuaciones linealizadas también se usan para estudiar el comportamiento de pequeña amplitud o pequeña señal, en un determinado punto de funcionamiento, en lugar de utilizar las ecuaciones no lineales detalladas. Aunque existen en la actualidad rutinas de biblioteca estándar para la determinación sistemática de las funciones de transferencia, es conveniente conocer los pasos necesarios para formular diversas funciones de transferencia en función de variables de estado, que es fácilmente interpretada por los lenguajes de programación estándar [31-1].

A la hora de obtener cualquiera de las funciones de transferencia de un sistema con múltiples entradas y salidas (sistema MIMO-*Multiple Input Multiple Output*) como puede ser una máquina de inducción, es conveniente emplear la teoría básica de control de sistemas lineal. El sistema dinámico de ecuaciones lineales es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

La primera de las ecuaciones, conocida como la ecuación de escritura, es la forma canónica de la ecuación de estado o la forma fundamental de las ecuaciones del sistema linealizado. La segunda ecuación, es la ecuación de lectura o de salida donde \mathbf{y} es el vector de salida que se expresa como una combinación lineal del vector de estado \mathbf{x} y el vector de entrada \mathbf{u} . Aplicando la Transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas, despejando el vector de estado, \mathbf{x} , de la ecuación de estado y sustituyendo el resultado en la de salida, resulta (sustitución del operador p por el operador de Laplace s , de uso común en la transferencia de la formulación de la función):

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Bu} + \mathbf{Du}$$

En la obtención de una función de transferencia, generalmente interesa la relación entre una entrada, que simplemente puede ser una de las variables de entrada o bien una combinación lineal varias de ellas, y la salida del sistema \mathbf{y} que puede ser una simple variable de estado o una combinación lineal de variables de estado y de entrada. En esta formulación suele ser conveniente expresar el vector de entradas (fuerzas) \mathbf{u} como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}\Delta f_i$$

donde \mathbf{G} es una matriz columna y Δf_i es una variable de entrada como el par de carga, por ejemplo, o una combinación lineal de varias variables de entrada. Sustituyendo en la ecuación de lectura, resulta:

$$y = Cx + Du = C(sI - A)^{-1}Bu + Du = C(sI - A)^{-1}BG\Delta f_i + DG\Delta f_i$$

La formulación de función de transferencia se completa una vez que seleccionan las matrices C y D para obtener las variables de salidas que interesan y la matriz G para decidir la variable de entrada que interesa. Con ello:

$$y = (C(sI - A)^{-1}B + D)G\Delta f_i$$

$$\frac{y}{\Delta f_i} = (C(sI - A)^{-1}B + D)G$$

3.1.7. Obtención de la función de transferencia

Un sistema físico lineal e invariante en el tiempo puede describirse mediante una ecuación diferencial ordinaria, del tipo:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \quad m < n$$

Para una señal en tiempo continuo $f(t)$ definida para $t \in [0, \infty)$, se define la transformada de Laplace, $F(s)$, como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$$

siendo s la variable compleja $s = \sigma + j\omega$. Una propiedad muy útil de la transformada de Laplace es la de la transformada de la derivada de una función,

$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

Asumiendo condiciones iniciales nulas, al aplicar la transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{\cdot\}$, a la ecuación diferencial que rige el comportamiento del sistema, se convierte en algebraica:

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U(s)$$

Llamando $D(s)$ y $N(s)$ a los polinomios que multiplican a las transformadas de las variables de salida y entrada, respectivamente, resulta:

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$$

$$D(s)Y(s) = N(s)U(s)$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} U(s) = G(s) U(s)$$

En esta ecuación $G(s)$, el cociente de los polinomios de entrada y salida, es la función de transferencia, que permite describir la salida a partir de la entrada.

Se denominan ceros del sistema a las raíces del polinomio numerador (entrada), $N(s) = 0$ y polos a las raíces del polinomio denominador (salida), $D(s) = 0$.

A la hora de obtener la respuesta temporal a un estímulo (entrada), es conveniente expandir la transformada de la salida en fracciones que sean fácilmente antitransformarse. Por ejemplo, para una entrada que se describa mediante otro cociente de polinomios, la transformada de la salida es:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} U(s) = G(s) U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{N_u(s)}{D_u(s)} = G(s) \frac{N_u(s)}{D_u(s)}$$

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{N_u(s)}{D_u(s)} = G(s) \frac{N_u(s)}{D_u(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_r)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_q)} \quad r < q$$

en esta expresión, K es la ganancia, producto de la ganancia de la función de transferencia y de la amplitud de la entrada, z_j son los r ceros de la transformada de la salida, que se compone de los m ceros de la función de transferencia y de los $r - m$ de la transformada de la entrada considerada, y p_k son los q polos de la transformada de la salida, que se compone de los n polos de la función de transferencia y de los $q - n$ de la transformada de la entrada considerada. Si todos los polos son distintos, la transformada de la salida puede expresarse como una suma de fracciones simples de la forma:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{N_u(s)}{D_u(s)} = G(s) \frac{N_u(s)}{D_u(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_r)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_q)}$$

$$= \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_q}{s+p_q}$$

los coeficientes a_k se denominan residuos. Es fácil ver que cada uno de los residuos, a_k , puede calcularse mediante la expresión:

$$a_k = \left[(s+p_k) Y(s) \right]_{s=-p_k} = \left[(s+p_k) \frac{N(s)}{D(s)} \frac{N_u(s)}{D_u(s)} \right]_{s=-p_k} = \left[(s+p_k) G(s) \frac{N_u(s)}{D_u(s)} \right]_{s=-p_k}$$

$$= \left[(s+p_k) \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_r)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_q)} \right]_{s=-p_k}$$

El comando `[r,p,k] = residue(num,den)` de Matlab permite los residuos, los polos y los términos directos (cociente entero) del cociente de dos polinomios, con se llega a su expansión en fracciones simples.

El comando `bode(num,den)`, donde `num` y `den` contienen los coeficientes polinomiales de la función de transferencia, en orden decreciente, representa el diagrama de Bode del sistema.

Conviene observar que si $y(t)$ es real, en caso de que las raíces del denominador contengan un par de polos complejos conjugados, p_1 y p_2 , entonces los correspondientes residuos a_1 , y a_2 , serán también complejos conjugados, y bastará con obtener uno de ellos.

Volviendo al desarrollo en fracciones simples de la transformada de la salida y teniendo en cuenta que la transformada inversa de uno de los términos es de la forma:

$$\mathcal{L}\{a_k e^{-p_k t}\} = \frac{a_k}{s + p_k} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_k}{s + p_k}\right\} = a_k e^{-p_k t}$$

Por tanto, para obtener la respuesta del sistema, basta con aplicar la transformada inversa a cada una de las fracciones simples del desarrollo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_1}{s + p_1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_2}{s + p_2}\right\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_q}{s + p_q}\right\} \\ &= a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_q e^{-p_q t} \end{aligned}$$

En este punto importante observar cómo las raíces del denominador de la transformada de la salida aparecen como exponentes de las exponenciales. Este denominador es el producto de los denominadores de la función de transferencia y de la transformada de la entrada. Eso quiere decir que los n polos, p_k , de la función de transferencia aparecen como n términos exponenciales en la salida. Esta parte de la respuesta no depende de la entrada, por lo que es la respuesta propia o libre del sistema. Los polos (raíces del denominador de la función de transferencia o ecuación característica del sistema) reales y negativos darán lugar a exponenciales que tenderán asintóticamente a cero y la respuesta será estable.

$$y_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_k}{s + p_k}\right\} = a_k e^{-p_k t}$$

Los polos reales y positivos darán lugar a exponenciales que presentarán un crecimiento continuo y la respuesta será inestable.

$$y_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_k}{s - p_k}\right\} = a_k e^{p_k t}$$

Si hubiese un par de polos complejos conjugados, las salidas serían oscilaciones moduladas por exponenciales, de la forma:

$$y_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_k}{(s + a_k)^2 + \omega_k^2}\right\} = e^{-a_k t} \sin(\omega_k t)$$

$$y_k(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + a_k}{(s + a_k)^2 + \omega_k^2} \right\} = e^{-a_k t} \cos(\omega_k t)$$

$$y_k(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha_k s + \beta_k}{(s + a_k)^2 + \omega_k^2} \right\} = K_k e^{-a_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

$$K_k = \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\alpha_k^2 \omega_k^2 + (\beta_k - a_k \alpha_k)^2} \quad \varphi_k = -\text{tg}^{-1} \left(\frac{\beta_k - a_k \alpha_k}{\alpha_k \omega_k} \right)$$

De nuevo, si la parte real, a_k , es negativa, la salida será una oscilación (seno o coseno) amortiguada y la respuesta sería estable. Si, por el contrario, fuese positiva, la oscilación se iría ampliando y la respuesta inestable.

Si se aplica la transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{\cdot\}$, a las ecuaciones de estado del sistema:

$$p\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

resulta:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0^-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s)$$

Despejando la transformada del vector de estado y sustituyendo en la ecuación de la transformada del vector de salida, resulta:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0^-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{X}(0^-) + \mathbf{B}U(s))$$

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] U(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0^-)$$

Que también puede expresarse como:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)U(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0^-)$$

Siendo el vector de funciones de transferencia:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

que también puede escribirse como:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{Q}(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{Q}(s)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

siendo $\mathbf{Q}(s)$ un polinomio. Es interesante observar que el denominador la función de transferencia coincide con el determinante de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Es decir, que la ecuación característica de la función de transferencia ($D(s) = 0$) coincide con la ecuación característica de la matriz \mathbf{A} del sistema ($\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$), por lo que los polos de

la función de transferencia coinciden con los autovalores de la matriz A del sistema ($\det(\lambda I - A) = 0$).

El comando `bode(A,B,C,D)` de Matlab produce una serie de diagramas de Bode, uno por cada entrada con todas las salidas. El comando `bode(A,B,C,D,iu)` en el que iu es la i -ésima entrada del sistema, representa todos los diagramas de Bode de esa entrada con todas las salidas del sistema. Si se desea obtener una representación en coordenadas polares, es decir, un diagrama de Nyquist, entonces el comando `nyquist(num,den)`, donde `num` y `den` contienen los coeficientes polinomiales de la función de transferencia, en orden decreciente. Análogamente, el comando `nyquist(A,B,C,D)` representa un diagrama de Nyquist del sistema en forma de estado.

3.1.8. Solución de la ecuación de estado

Considérese ahora que se desea obtener la solución del sistema:

$$p\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

para un estado inicial, $\mathbf{x}(0)$ y una entrada, $\mathbf{u}(t) \ t \geq 0$, dados. Para ello es preciso multiplicar por la izquierda por la exponencial matricial, $e^{-A\tau}$, con lo que resulta:

$$e^{-A\tau} \dot{\mathbf{x}}(\tau) - e^{-A\tau} \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) = e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)$$

como puede verse, el primer término puede escribirse como la derivada de la exponencial matricial por el vector de estado, con lo que:

$$e^{-A\tau} \dot{\mathbf{x}}(\tau) - e^{-A\tau} \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) = \frac{d}{d\tau} (e^{-A\tau} \mathbf{x}(\tau)) = e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)$$

Integrando entre 0 y t , resulta:

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) \Big|_{\tau=0}^t = e^{-At} \mathbf{x}(t) - e^0 \mathbf{x}(0) = \int_{\tau=0}^t e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

despejando el vector de estado:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Esta es la solución general de la ecuación de estado y suele conocerse como la fórmula de variación de los parámetros. Sustituyendo en la ecuación del vector de salidas, resulta:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{C}e^{At} \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Tanto en la expresión del vector de estado como en la del vector de salida aparecen dos clases de términos: unos ligados a las condiciones iniciales y otra a la entrada. Esto permite interpretar la respuesta como la superposición de la respuesta a entrada nula y la respuesta a condiciones iniciales nulas, o bien, de

respuesta libre o propia del sistema (a entrada nula, solución de la homogénea) y respuesta forzada (condiciones iniciales nulas, solución particular).

La exponencial matricial puede calcularse mediante tres métodos:

- A partir del teorema de Cailey-Hamilton, evaluando $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ en el espectro de \mathbf{A} , y calculando los coeficientes del polinomio matricial $h(\lambda)$
- Encontrando la forma diagonal de Jordan, $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$, usando la expresión explícita de $e^{\mathbf{J}t}$ y haciendo $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{Q} e^{\mathbf{J}t}\mathbf{Q}^{-1}$
- A partir de la transformada de Laplace de la exponencial matricial, $\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}$, calculando la inversa de $(\mathbf{sI} - \mathbf{A})$ y calculando la transformada inversa

Utilizando este último método, $e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\}$. Es decir, la exponencial matricial se obtiene a partir de la transformada inversa de la inversa de la matriz $(\mathbf{sI} - \mathbf{A})$. Esto puede hacerse descomponiendo en fracciones simples y usando una tabla de transformadas o mediante el uso de la instrucción `ilaplace` del *symbolic toolbox* de Matlab.

Valores característicos o autovalores

Considérese ahora que se desea obtener la respuesta a entrada nula o respuesta libre del sistema, es decir solución de la ecuación homogénea:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

para un estado inicial, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Un caso en el que el sistema tiene solución es aquel en el que el vector de estado y su derivada difieren únicamente en un escalar, λ . La solución, por tanto, tiene la forma $p\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Sustituyendo en la homogénea y reordenando términos, resulta:

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Esta ecuación solo tiene una solución no trivial si el vector de estado no es nulo ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$). En consecuencia, la matriz $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ debe ser de rango incompleto o, lo que es lo mismo, el determinante de la matriz de coeficientes del vector de estado debe ser nulo:

$$Q(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Si \mathbf{A} es una matriz cuadra de orden n , el desarrollo del determinante de la matriz de coeficientes $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, un polinomio de grado n , es la ecuación propia o ecuación característica de \mathbf{A} :

$$Q(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$$

Las raíces de la ecuación propia o característica, λ_i , se denominan autovalores o valores propios o característicos de \mathbf{A} . La ecuación propia o característica puede escribirse en función de los autovalores, en forma factorizada, como:

$$Q(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

El producto de los autovalores de una matriz coincide con su determinante, es decir:

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

También se cumple que la suma de los autovalores de una matriz \mathbf{A} coincide con la suma de los elementos de la diagonal principal (traza) de \mathbf{A} :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{traza}(\mathbf{A})$$

3.1.9. Estabilidad

La respuesta, $y(t)$, a una excitación, $u(t)$, de un sistema lineal caracterizado mediante su función de transferencia $G(s)$, puede obtenerse mediante la relación:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\mathbf{U}(s) + \frac{\mathfrak{Z}(s)}{D(s)}$$

donde $\mathfrak{Z}(s)$ es una función que da cuenta de la respuesta transitoria asociada a las condiciones iniciales y que se anula con ellas. Si se considera únicamente la respuesta libre, autónoma, sin excitación del sistema ($u(t) = 0$). La descomposición en fracciones simples de la respuesta libre dará lugar a una serie de términos de la forma:

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{\mathfrak{Z}(s)}{D(s)} = \sum \frac{K}{s-c} + \sum \frac{K}{(s-a)^2 + b^2}$$

Los primeros corresponden a raíces reales del polinomio característico, $D(s) = 0$, del tipo $s = c$. Los segundos a pares de raíces complejas conjugadas del tipo $s = a \pm jb$. Por tanto, usando la transformada inversa de Laplace, la respuesta libre o autónoma del sistema será de la forma:

$$y(t) = A \sum e^{ct} + B \sum e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$$

Los primeros exponenciales proceden de las raíces reales mientras que las oscilaciones amortiguadas proceden de las raíces complejas. Si las partes reales de las raíces son negativas, las exponenciales son decrecientes y tienden a anularse con el tiempo. Es este caso la salida está acotada y el sistema es estable. Si, por el contrario, las partes reales de las raíces fuesen positivas, las exponenciales serían crecientes, la salida no estaría acotada y el sistema sería inestable. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal sea estable es que la

parte real de los polos de su función de transferencia (las raíces de su ecuación característica) tengan parte real negativa.

Como se mostrado con anterioridad, la estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo es un concepto sencillo y fácil de entender.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

La respuesta completa tiene dos componentes: la solución particular o forzada y la homogénea o libre. La solución particular o forzada tiene la misma forma que las excitaciones o entradas. La solución libre presenta términos exponenciales matriciales, de la forma $Ae^{\lambda_i t}$. Cuando los autovalores, λ_i , tienen parte real negativa, la componente de respuesta transitoria asociada a la respuesta libre del sistema decaen con el tiempo y la respuesta está acotada, es estable. Por el contrario, cuando los autovalores tienen partes reales positivas, la respuesta transitoria crece sin límite, y se dice que el sistema es inestable.

Un sistema lineal autónomo, es decir, sin excitación forzada, con $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, tiene un único punto de equilibrio (funcionamiento en régimen permanente). Un sistema no lineal puede tener más de un punto de equilibrio.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Para estudiar la estabilidad de un sistema no lineal con J puntos de equilibrio puede linealizarse entorno a cada uno de los puntos de funcionamiento y estudiarse la estabilidad de pequeña señal de los J sistemas linealizados que lo aproximan.

Para determinar los puntos de equilibrio, \mathbf{x}_0 , cuando la entrada toma un valor constante, \mathbf{u}_0 , basta sustituir en la ecuación de estado y anular la derivada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$$

Las ecuaciones linealizadas entorno a un punto de equilibrio se obtienen diferenciando la ecuación de estado y sustituyendo los diferenciales por incrementos:

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \Delta \mathbf{u}$$

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{J}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_u \Delta \mathbf{u}$$

Este conjunto de modelos de pequeña señal, al ser lineales, pueden analizarse con las técnicas usuales de los sistemas lineales.

3.3. Respuesta al impulso y al escalón

Considérese la respuesta a un impulso unitario de un sistema con condiciones iniciales nulas. Dado que la transformada de Laplace del impulso unitario, $\delta(t)$, es la unidad, la transformada de la salida coincide con la función de transferencia:

$$Y(s) = G(s)$$

La transformada inversa de la función de transferencia dará la respuesta impulsional, $h(t)$:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

También puede afirmarse que la función de transferencia de un sistema es la transformada de su respuesta impulsional:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = G(s)$$

Esta función también se denomina la función de pesos o ponderación del sistema.

Como puede verse, la función de transferencia y la respuesta impulsional contiene la misma información sobre la dinámica del sistema. Por tanto, para obtener la información completa de un sistema basta con excitarlo con un impulso y registrar la respuesta. En la práctica, puede considerarse como un impulso a cualquier breve pulso de entrada, cuya duración sea mucho menor que las constantes de tiempo del sistema.

Si se aplica una entrada en escalón unitario, $u_1(t)$, cuya transformada de Laplace es $1/s$, la respuesta será:

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt}(q(t)) \right\} = s \mathcal{L} \{q(t)\} = s \frac{G(s)}{s} = G(s)$$

Es decir, que la función de transferencia es la transformada de la derivada de la respuesta al escalón unitario.

Físicamente es posible obtener la respuesta de un sistema a una entrada arbitraria, $e(t)$, a partir de la respuesta al escalón unitario, $q(t)$. Para ello es suficiente discretizar la señal de entrada mediante una función en escalera con intervalo $\Delta\tau$ y sumar las respuestas $\Delta e \cdot q(t)$ decaídas (desfasadas en el tiempo) un intervalo de tiempo $\Delta\tau$. La respuesta $s(t)$, será el límite cuando $\Delta\tau$ tienda a cero de:

$$s(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n\Delta\tau=0}^{n\Delta\tau=t} \Delta e(n\Delta\tau) q(t-n\Delta\tau) = \int_0^t \frac{de(\tau)}{d\tau} q(t-\tau) d\tau$$

Como la transformada de esta respuesta es precisamente el producto $G(s)E(s)$, se obtiene una interpretación del teorema de Duhamel o de la integral de convolución o el producto de transformadas:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right\} = F_1(s) F_2(s)$$

$$f_1(t) = q(t) \quad \mathcal{L} \{f(t)\} = \mathcal{L} \{q(t)\} = \frac{G(s)}{s}$$

$$f_2(t) = \frac{d}{dt}(e(t)) \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt}(e(t)) \right\} = s \mathcal{L} \{e(t)\} = sE(s)$$

Un desarrollo similar puede hacerse descomponiendo la entrada como una serie de impulsos en lugar de escalones.

3.4. Respuesta en frecuencia, armónica o sinusoidal

Si se excita un sistema físico lineal, descrito por la ecuación diferencial (1):

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \quad m < n$$

con una entrada sinusoidal, $u(t)$, de amplitud u_0 y frecuencia (pulsación), ω :

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t)$$

se producirá una salida forzada (solución particular), en régimen permanente, $y(t)$, de la misma frecuencia (pulsación) que la entrada, pero que difiere de la señal de entrada en su amplitud y desfase:

$$y(t) = K u_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial del sistema y teniendo en cuenta que:

$$j \sin(\omega t) = \text{Im} \{ e^{j\omega t} \}$$

resulta:

$$(\mathbf{j}\omega)^n Ku_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + a_{n-1}(\mathbf{j}\omega)^{n-1} Ku_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + \dots + a_0 Ku_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \\ = b_m (\mathbf{j}\omega)^m u_0 e^{j(\omega t)} + b_{m-1} (\mathbf{j}\omega)^{m-1} u_0 e^{j(\omega t)} + \dots + b_0 u_0 e^{j(\omega t)} \quad m < n$$

Dividiendo ambos términos por $u_0 e^{j\omega t}$, resulta:

$$(\mathbf{j}\omega)^n Ke^{j\varphi} + a_{n-1}(\mathbf{j}\omega)^{n-1} Ke^{j\varphi} + \dots + a_0 Ke^{j\varphi} \\ = b_m (\mathbf{j}\omega)^m + b_{m-1} (\mathbf{j}\omega)^{m-1} + \dots + b_0 \quad m < n$$

de donde:

$$Ke^{j\varphi} = \frac{b_m (\mathbf{j}\omega)^m + b_{m-1} (\mathbf{j}\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{(\mathbf{j}\omega)^n + a_{n-1} (\mathbf{j}\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \quad m < n$$

Como puede verse, el resultado es la función de transferencia con la variable compleja $s = \mathbf{j}\omega t$:

$$Ke^{j\varphi} = \frac{b_m (\mathbf{j}\omega)^m + b_{m-1} (\mathbf{j}\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{(\mathbf{j}\omega)^n + a_{n-1} (\mathbf{j}\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = G(s = \mathbf{j}\omega) \quad m < n$$

o, lo que es lo mismo:

$$Y_{Forzada}(\mathbf{j}\omega) = Y_{RP}(\mathbf{j}\omega) = G(\mathbf{j}\omega)U(\mathbf{j}\omega) = |G(\mathbf{j}\omega)| |U(\mathbf{j}\omega)| e^{j\arg(G(\mathbf{j}\omega))} = Ku_0 e^{j\varphi}$$

Por tanto, cuando se aplica a un sistema lineal una excitación sinusoidal de frecuencia (pulsación) ω , su respuesta forzada, en régimen permanente, $y_{RP}(t)$, es también sinusoidal, de la misma frecuencia, pero tiene una amplitud igual al producto de la amplitud de la entrada por el módulo de la función de transferencia, $|G(\mathbf{j}\omega)|$, y un desfase en avance, φ , con respecto a la señal de entrada que se corresponde con el argumento de la función de transferencia, $\arg(G(\mathbf{j}\omega))$. Por ello puede decirse que la función de transferencia describe la respuesta en frecuencia del sistema.

Un interesante resultado práctico de lo anterior es que dado un sistema físico, realizando ensayos armónicos en un rango de frecuencias y midiendo la amplitud, $K(\omega) = |G(\mathbf{j}\omega)|$, y el desfase, $\varphi(\omega) = \arg(G(\mathbf{j}\omega))$, para cada frecuencia, puede caracterizarse su respuesta dinámica, sin necesidad de conocer previamente el sistema diferencial de ecuaciones que lo rige.

3.5. Determinación experimental de la función de transferencia

A la hora de identificar de forma experimental la función de transferencia de un sistema físico pueden utilizarse dos tipos de métodos:

- Respuesta en frecuencia

- Respuesta transitoria

En el primero, el de la respuesta en frecuencia, se somete al sistema físico a una serie de entradas sinusoidales, variando la frecuencia (pulsación) en un intervalo que comprenda, como mínimo las frecuencias mínima y máxima de funcionamiento del sistema. Para cada una de las frecuencias de excitación se mide la amplitud y desfase de la respuesta. Dividiendo la amplitud de la salida por la de la entrada y representando este cociente y el desfase en función de la frecuencia se obtiene el diagrama de Bode del sistema. La función de transferencia podría obtenerse mediante aproximaciones lineales asintóticas. Primero se obtiene una aproximación de la curva de amplitud basada en una serie de segmentos lineales y, posteriormente, se ajustan las frecuencias de corte, tras una serie de ciclos de prueba y error. Alternativamente, representando el cociente y el desfase para cada frecuencia en coordenadas polares, se obtiene el diagrama de Nyquist del sistema.

A la hora de realizar los ensayos es conveniente asegurarse de que la amplitud de las señales de excitación es lo suficientemente grande para que se pueda medir la salida, pero que no sea tan grande que llegue a producir la saturación del sistema, ya que en ese caso, la salida obtenida no serviría para caracterizar el sistema. Por otra parte, para realizar las medidas no es necesario parar el sistema, ya que es posible superponer las señales de excitación, de pequeña amplitud, sobre las señales de control ordinarias del sistema, realizar el registro de la salida en régimen permanente y separar la parte de la señal de salida que corresponda a la frecuencia de la excitación.

Este sistema es extremadamente general y permite obtener la función de transferencia de una forma muy directa e intuitiva. Pero tiene el inconveniente de la extensión de la fase experimental, que puede consumir un tiempo importante y ser costosa, ya que para tener una buena identificación del sistema es preciso realizar un elevado número de ensayos, y esperar a que se establezcan los regímenes permanentes en cada uno de ellos.

Para asegurar la linealidad del sistema conviene realizar los ensayos a cada una de las frecuencias con varias amplitudes de excitación. Si el sistema es lineal, el cociente de amplitudes salida-entrada ($|G(j\omega)|$) y el desfase salida-entrada ($\arg(G(j\omega))$) variará con la frecuencia de los ensayos, pero no con la amplitud de la excitación. Por el contrario, si se observa que cociente de amplitudes salida-entrada o el desfase salida-entrada varían con la frecuencia de los ensayos, podrá concluirse que el sistema no es lineal.

En los ensayos de respuesta transitoria se trata de identificar la función de transferencia sometiendo el sistema a algún tipo de variación brusca y registrando la respuesta durante el transitorio. El más utilizado es la respuesta al escalón de entrada (onda cuadrada), en el que se somete el sistema en reposo a una variación brusca desde cero hasta un valor de excitación que se mantiene constante hasta que se alcanza la respuesta permanente. Para obtener la función de transferencia basta considerar que la entrada.

Si se aplica una entrada en escalón, $Ku_I(t)$, cuya transformada de Laplace es K/s , la respuesta será:

$$q_e(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{KG(s)}{s}\right\}$$

Por tanto, la función de transferencia será la transformada de la derivada de la respuesta al escalón dividida por la amplitud, K .

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{K}\frac{d}{dt}(q_e(t))\right\} = \frac{1}{K}s\mathcal{L}\{q_e(t)\} = \frac{1}{K}s\frac{KG(s)}{s} = G(s)$$

Un enfoque similar permitiría caracterizar la función de transferencia a partir de la respuesta a una señal de tipo impulso. Si se aplica una entrada tipo impulso, $K\delta(t)$, cuya transformada de Laplace es K , la respuesta será:

$$h_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)K\}$$

Por lo que la función de transferencia será la transformada de la respuesta al impulso dividida por la amplitud, K :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{K}h_i(t)\right\} = \frac{1}{K}G(s)K = G(s)$$

La determinación de la función de transferencia mediante ensayos transitorios, al contrario que el método de la respuesta en frecuencia, sólo se requiere un ensayo para su identificación, lo que supone una clara ventaja en cuanto a rapidez de ejecución. Por el contrario, los ensayos transitorios requieren un periodo de tratamiento de los resultados mucho mayor que el que requieren los métodos frecuenciales que, en este aspecto, son mucho más directos. Como puede verse, existe una cierta complementariedad entre ambos tipos de ensayos.

Cabe también la posibilidad de combinar los dos tipos de ensayo. Para ello, considérese, por ejemplo, el ensayo de la respuesta a un escalón o, mejor, a una excitación en forma de onda cuadrada (una serie de escalones desfasados en el tiempo). El ensayo consistiría en aplicar una onda cuadrada de excitación, $u(t)$ y registrar la respuesta, $y(t)$. Si la onda cuadrada de excitación, es:

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & t \in (t_0, t_0 + T/2) \\ 0 & t \in (t_0 + T/2, t_0 + T) \end{cases} \quad u(t+nT) = u(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

su desarrollo en serie de Fourier conduce a:

$$u(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right) = \frac{U_0}{2} + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega(t-t_0))$$

Como puede verse, la onda cuadrada de excitación contiene todo el espectro armónico. Esto hace que excitar el sistema con una onda cuadrada (o escalón) sea equivalente a excitarlo con señales sinusoidales en todo el espectro de frecuencia. Es decir, es como si en los ensayos de respuesta en frecuencia se hubiesen aplicado

todas las frecuencias simultáneamente. Por superposición, en la respuesta a la excitación con onda cuadrada se encontrarán las respuestas a las frecuencias individuales.

Este método sugiere también la posibilidad de extraer la función de transferencia del sistema registrando la respuesta, $y(t)$, a una señal cualquiera, $u(t)$. Para ello bastaría con hacer los desarrollos en serie de Fourier de las señales de entrada y salida. En este caso, la señal de entrada, normalizada, podría escribirse, en forma de serie, como:

$$\frac{u(t)}{u_o} = 1 + u_1 e^{j(\omega t + \phi u_1)} + u_2 e^{j(2\omega t + \phi u_2)} + \dots + u_n e^{j(n\omega t + \phi u_n)} \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{j(k\omega t + \phi u_k)}$$

análogamente, la salida, normalizada, resultará:

$$\frac{y(t)}{y_o} = 1 + y_1 e^{j(\omega t + \phi y_1)} + y_2 e^{j(2\omega t + \phi y_2)} + \dots + y_n e^{j(n\omega t + \phi y_n)} \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k e^{j(k\omega t + \phi y_k)}$$

Procediendo de forma análoga al método de la respuesta en frecuencia, la función de transferencia se caracteriza mediante las relaciones:

$$|G(n\omega)| = \frac{y_n(n\omega)}{u_n(n\omega)} = \frac{y_n}{u_n} \quad \arg(G(n\omega)) = \phi_{y_n}(n\omega) - \phi_{u_n}(n\omega) = \phi_{y_n} - \phi_{u_n}$$

Es interesante observar que con este tipo de ensayos no es necesario disponer de un equipo que genere señales exactamente sinusoidales, como sucede en los ensayos de respuesta en frecuencia, ni escalones infinitamente bruscos, como en los ensayos con excitación brusca. También permiten una doble evaluación de los resultados obtenidos mediante el ensayo de variación brusca: primero, considerando que la entrada es un escalón ideal y segundo, admitiendo que la realización física del escalón no puede ser perfecta y aplicando el desarrollo en serie expuesto anteriormente.

En resumen, todos los métodos experimentales se basan en la idea de obtener la función de transferencia como cociente entre la respuesta y la excitación:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

donde las señales de excitación son:

Sinusoidales del tipo:

$$u(t) = K(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) = K e^{j\omega t} \quad U(s) = K \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Escalón:

$$u(t) = K u_1(t) \quad U(s) = \frac{K}{s}$$

Impulso:

$$u(t) = K\delta(t) \quad U(s) = K$$

O una entrada cualquiera. La ecuación anterior para obtener la función de transferencia mediante el cociente entre la respuesta y la excitación indica que, en teoría, todos los métodos son equivalentes y pueden determinar la función e transferencia del sistema. Esta equivalencia y simplicidad se deriva de la hipótesis de linealidad del sistema. Los sistemas lineales pueden identificarse completamente mediante un único ensayo. En el caso de las máquinas eléctricas al admitir comportamiento lineal sólo en el caso de pequeñas perturbaciones, la obtención de la función de transferencia se realizará por medio del estudio de la respuesta en frecuencia.